ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3 , 2001
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Системы уравнений в частных производных

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО БАЗИСА ЯКОБИЕВОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В. Н. Горбузов, А. Ф. Проневич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
230023, Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: gorbuzov@grsu.unibel.by

Постановка задачи. Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему уравнений в частных производных

$$\mathfrak{A}_j(x)\, u \;=\; 0, \quad j=\overline{1,m}, \qquad x\in\mathbb{R}^n\,, \tag{1}$$

построенную посредством линейных дифференциальных операторов

$$\mathfrak{A}_j(x)=\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(x)\,\partial_i\,, \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n\,,$$

с линейными координатными функциями

$$a_{ji}: x\to \sum_{\xi=1}^{n} a_{ji\xi}\,x_\xi\,, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\,, \qquad a_{ji\xi}\in\mathbb{R}\,,\ \ j=\overline{1,m}\,,\ i=\overline{1,n}\,,\ \ \xi=\overline{1,n}\,.$$

По необходимости $[1\,, \text{с.}\, 70\,]$ будем считать $m\leqslant n$, а также, что линейные дифференциальные операторы первого порядка $\mathfrak{A}_j$, $j=\overline{1,m}$, не являются линейно связанными на арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Размерность базиса первых интегралов дифференциальной системы (1) зависит от её полноты. Если система (1) полная [2 , с. 524] , то базис состоит из $n-m$ функционально независимых на области $\mathcal{X}$ из пространства $\mathbb{R}^n$ первых интегралов [1 , с. 70] . У неполной дифференциальной системы (1) размерность базиса первых интегралов устанавливаем по размерности базиса интегрально равносильной ей полной системы на области нормализации [3] .

Поставим задачу построения базиса первых интегралов дифференциальной системы (1) в случае, когда она является якобиевой [2 , с. 523] , что с помощью скобок Пуассона выражается системой коммутаторных тождеств

$$\left[\mathfrak{A}_j(x)\,,\,\mathfrak{A}_\zeta(x)\right] \;=\; 0\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,, \quad j=\overline{1,m}\,,\; \zeta=\overline{1,m}\,. \tag{2}$$

С целью однозначного толкования определим следующие понятия.

Определение 1. *Построенное на основании голоморфной на области $\mathcal{X}$ пространства $\mathbb{R}^n$ функции $W\colon \mathcal{X}\to\mathbb{R}$ семейство гиперповерхностей*[1] $W=\{\,x\colon\, W(x)=C\,\}$ *назовём* первым интегралом на области $\mathcal{X}$ *системы* (1) , *если производные Ли функции* W *в силу этой системы тождественно равны нулю на области* $\mathcal{X}$:

$$\mathfrak{A}_j\, W(x) \;=\; 0\,, \quad \forall\, x\in\mathcal{X}\,, \quad j=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Определение 2 [4 – 6]. *Полином* $w\colon\,\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ *назовём* частным интегралом *дифференциальной системы* (1) , *если его производные Ли в силу этой системы тождественно равны*

$$\mathfrak{A}_j\, w(x) \;=\; w(x)\,\lambda^j\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,, \quad \lambda^j\in\mathbb{C}\,, \quad j=\overline{1,m}\,. \tag{4}$$

Известные методы Якоби и Майера [1, с. 66 – 76 ; 7, с. 59 – 77 ; 8, с. 77 – 81] глобального и локального решения задачи по нахождению функционально независимых первых интегралов предполагают последовательное сведение системы (1) к обыкновенным дифференциальным системам. Вместе с тем для обыкновенных дифференциальных систем [6 , 9] и системы Якоби в частных производных [10 , 11] в настоящее время получены новые подходы к их интегрированию. Они позволили нам разработать

[1] Здесь и далее C — произвольная вещественная постоянная.

спектральный метод построения интегрального базиса системы (1), который основан на методе частных интегралов, изложенном в статье [9], и является регулярным.

Интегральная характеристическая система. Линейная однородная функция

$$p\colon\ x \to \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,, \qquad (\, p_i \in \mathbb{C}\,,\ i = \overline{1,n}\,)$$

в соответствии с определением 2 будет частным интегралом системы (1), если и только если выполняется система тождеств (4) при $w = p$. Эта система тождеств распадается на линейную однородную систему

$$\bigl(\,A_j \ - \ \lambda^j E\,\bigr)\, b \ = \ 0\,, \quad j = \overline{1,m}\,, \tag{5}$$

где $b = \mathrm{colon}(\,b_1, \ldots, b_n\,)$, E — единичная матрица, квадратные матрицы $n-$го порядка $A_j = \|a_{j\xi i}\|$ (ξ — номер строки, i — номер столбца).

Систему

$$\det\bigl(A_j \ - \ \lambda^j E\bigr) \ = \ 0\,, \quad j = \overline{1,m}\,, \tag{6}$$

назовём **интегральной характеристической системой**, а её корни будем называть **интегральными характеристическими корнями** системы (1).

Заметим, что условие (2) якобиевости системы (1) равносильно перестановочности матриц : $A_j A_\zeta = A_\zeta A_j\,,\ j = \overline{1,m}\,,\ \zeta = \overline{1,m}\,,$ что определяет связи между собственными числами и собственными векторами матриц $A_j\,,\ j = \overline{1,m}$ [12, с. 191 – 194].

Лемма 1. *Пусть* ν *— общий собственный вектор матриц* $A_j\,,$ $j = \overline{1,m}$. *Тогда линейная однородная функция* $p\colon\ x \to \nu x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\,,$ *является частным интегралом системы* (1).

Действительно, если ν — общий собственный вектор матриц $A_j\,,\ j = \overline{1,m}\,,$ то он является решением линейной однородной системы (5), где λ^j — собственные числа соответственно матриц $A_j\,,\ j = \overline{1,m}\,,$ которым соответствует собственный вектор ν. Тогда выполняется система тождеств

$$\mathfrak{A}_j(\nu x) \ = \ \lambda^j\, \nu x\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\,, \qquad j = \overline{1,m}\,,$$

и линейная однородная функция p является частным интегралом дифференциальной системы (1).

Построение первых интегралов в случае простых вещественных интегральных характеристических корней. Из системы (1) произвольным образом выделим уравнение в частных производных

$$\mathfrak{A}_{\zeta}(x)\, u \;=\; 0 \tag{1.ζ}$$

со свойством: у матрицы A_{ζ} число элементарных делителей не превосходит числа элементарных делителей каждой из матриц A_j, $j = \overline{1,m}$. При этом интегральным характеристическим уравнением линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных $(1.\zeta)$ является $\zeta-$ое уравнение интегральной характеристической системы (6), которое будем обозначать $(6.\zeta)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* ν^k, $k = \overline{1, m+1}$, *— общие вещественные собственные векторы матриц* A_j, $j = \overline{1,m}$. *Тогда первым интегралом якобиевой системы* (1) *будет семейство гиперповерхностей*

$$W \;=\; \left\{ x\colon \ \prod_{k=1}^{m+1} \bigl|\, \nu^k x\, \bigr|^{h_k} \;=\; C \right\}, \tag{7}$$

где вещественные числа h_k, $k = \overline{1, m+1}$, *являются нетривиальным решением линейной однородной системы*

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k \;=\; 0\,, \quad j = \overline{1,m}\,,$$

а λ_k^j *— вещественные собственные числа матриц* A_j, *которым соответствуют собственные векторы* ν^k, $k = \overline{1, m+1}$, $j = \overline{1,m}$.

Доказательство. Пусть [12, с. 194] ν^k, $k = \overline{1, m+1}$, — общие вещественные собственные векторы матриц $A_1, \ldots, A_m$. Тогда у этих матриц существуют вещественные собственные числа λ_k^j, $k = \overline{1, m+1}$, $j = \overline{1,m}$, которым соответствуют собственные векторы ν^k, $k = \overline{1, m+1}$. Согласно лемме 1 линейные однородные функции

$$p_k\colon x \to \nu^k x\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,, \qquad k = \overline{1, m+1}\,,$$

являются частными интегралами системы (1), и выполняется система тождеств

$$\mathfrak{A}_j\, p_k(x) \;=\; \lambda_k^j\, p_k(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,, \qquad j = \overline{1,m}\,,\ k = \overline{1, m+1}\,. \tag{8}$$

Составим функцию

$$W\colon\; x \to \prod_{k=1}^{m+1} |\,p_k(x)\,|^{h_k}\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}, \qquad \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n\,,$$

где $h_k\,,\; k = \overline{1, m+1}\,,$ — вещественные числа, одновременно не равные нулю. Производные Ли этой функции в силу системы (1)

$$\mathfrak{A}_j W(x) =$$

$$= \prod_{k=1}^{m+1} |\,p_k(x)\,|^{h_k-1} \sum_{k=1}^{m+1} \operatorname{sgn} p_k(x)\, h_k \prod_{l=1, l\neq k}^{m+1} |\,p_l(x)\,|\; \mathfrak{A}_j\, p_k(x)\,,\; \forall\, x \in \mathfrak{X}\,,\; j = \overline{1, m}\,.$$

С учётом тождеств (8) устанавливаем, что

$$\mathfrak{A}_j\, W(x) \;=\; \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j\, h_k\, W(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}\,, \qquad j = \overline{1, m}\,.$$

Если $\sum\limits_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j\, h_k \;=\; 0\,,\;\; j \;=\; \overline{1, m}\,,$ то семейство (7) будет первым интегралом дифференциальной системы (1) .

Следствие 1. *Пусть* $\nu^k\,,\; k = \overline{1, m+1}\,,$ — *общие вещественные собственные векторы матриц* $A_j\,,\; j = \overline{1, m}\,.$ *Тогда первым интегралом якобиевой системы* (1) *будет семейство гиперповерхностей*

$$W_{12\ldots m(m+1)} \;=\; \left\{ x\colon\; \prod_{k=1}^{m} |\,\nu^k x\,|^{-\triangle_k}\; |\,\nu^{m+1} x\,|^{\triangle} \;=\; C \right\},$$

где определитель $\triangle = \left|\lambda_k^j\right|,$ *а определители* $\triangle_k\,,\; k = \overline{1, m}\,,$ — *получены заменой* $k-$*го столбца в определителе* $\triangle$ *на* $\operatorname{colon}\left(\lambda_{m+1}^1, \ldots, \lambda_{m+1}^m\right)$, λ_k^j — *вещественные собственные числа матриц* $A_j\,,$ *которым соответствуют собственные векторы* $\nu^k\,,\; k = \overline{1, m+1}\,,\; j = \overline{1, m}\,.$

У якобиевой системы

$$-\,x_1\,\partial_1 u \;+\; (-\,3x_1 - 8x_2 - 18x_3 - 12x_4 - 15x_5)\,\partial_2 u \;+$$

$$+\;(-\,4x_1 - 6x_2 - 9x_4 - 2x_5)\,\partial_3 u \;+\; (2x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 6x_5)\,\partial_4 u \;+$$

$$+\;(8x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 18x_4 + 6x_5)\,\partial_5 u \;\;=\;\; 0\,,$$

$$-3x_1\,\partial_1 u\ +\ (-4x_1-15x_2-29x_3-21x_4-20x_5)\,\partial_2 u\ +$$
$$+\,(-6x_1-10x_2-2x_3-15x_4-4x_5)\,\partial_3 u\ +\ (4x_2+16x_3+5x_4+10x_5)\,\partial_4 u\,+$$
$$+\ (12x_1+20x_2+8x_3+30x_4+10x_5)\,\partial_5 u\ \ =\ \ 0$$

базис первых интегралов на областях $\mathcal{X}_1=\{x\colon x_1<0\}$ и $\mathcal{X}_2=\{x\colon x_1>0\}$ составляют семейства гиперповерхностей

$$W_{123}=\left\{x\colon \frac{(2x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5)(x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5)^2}{x_1^2}=C_1\right\},$$

$$W_{124}=\left\{x\colon \frac{(2x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5)(x_1+2x_2+2x_3+3x_4+2x_5)}{x_1}=C_2\right\},$$

$$W_{125}\ =\ \left\{x:\frac{(2x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5)^2\,(2x_3+x_5)}{x_1^2}\ =\ C_3\right\},$$

которые построены (следствие 1) на основании общих линейно независимых собственных векторов $\nu^1=(2,2,1,3,1)$, $\nu^2=(1,0,0,0,0)$, $\nu^3=(1,1,3,1,2)$, $\nu^4=(1,2,2,3,2)$, $\nu^5=(0,0,2,0,1)$, соответствующих собственным числам $\lambda_1^1=-2$, $\lambda_1^2=-4$; $\lambda_2^1=-1$, $\lambda_2^2=-3$; $\lambda_3^1=0$, $\lambda_3^2=-1$; $\lambda_4^1=1$, $\lambda_4^2=1$; $\lambda_5^1=2$, $\lambda_5^2=2$.

У якобиевой системы [7, с. 200]

$$2(\,x_3\,+\,x_4\,)\,\partial_2 u\ +\ x_2\,\partial_3 u\ +\ x_2\,\partial_4 u\ =\ 0\,,$$

$$-\,x_1\,\partial_1 u\ +\ x_2\,\partial_2 u\ +\ x_4\,\partial_3 u\ +\ x_3\,\partial_4 u\ =\ 0$$

базис первых интегралов на областях $\mathcal{X}_1=\{x\colon x_1<0\}$ и $\mathcal{X}_2=\{x\colon x_1>0\}$ составляют семейства гиперповерхностей

$$W_{123}\ =\ \left\{x\colon\ \frac{x_3\,-\,x_4}{x_1}\ =\ C_1\right\},$$

$$W_{124}\ =\ \left\{\,x\colon\ x_1^2\,\left[\,x_2^2\,-\,(\,x_3\,+\,x_4\,)^2\,\right]\ =\ C_2\,\right\},$$

которые построены (следствие 1) на основании общих линейно независимых собственных векторов $\nu^1=(0,-1,1,1)$, $\nu^2=(1,0,0,0)$, $\nu^3=(0,0,1,-1)$, $\nu^4=(0,1,1,1)$, соответствующих собственным числам $\lambda_1^1=-2$, $\lambda_1^2=1$; $\lambda_2^1=0$, $\lambda_2^2=-1$; $\lambda_3^1=0$, $\lambda_3^2=-1$; $\lambda_4^1=2$, $\lambda_4^2=1$.

Построение первых интегралов в случае простых комплексных интегральных характеристических корней. В случае, когда w — комплекснозначный частный интеграл системы (1), система тождеств (4) распадается на вещественную систему тождеств

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}_j \operatorname{Re} w(x) &= \operatorname{Re} w(x)\ \overset{*}{\lambda}{}^{j} - \operatorname{Im} w(x)\ \overset{\sim}{\lambda}{}^{j}, \\
\mathfrak{A}_j \operatorname{Im} w(x) &= \operatorname{Re} w(x)\ \overset{\sim}{\lambda}{}^{j} + \operatorname{Im} w(x)\ \overset{*}{\lambda}{}^{j}, \\
\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda^j &= \overset{*}{\lambda}{}^{j} + \overset{\sim}{\lambda}{}^{j}\, i, \quad j = \overline{1,m}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Тем самым, получаем следующий критерий существования комплекснозначного частного интеграла у системы (1).

Л е м м а 2. *Полином w является комплекснозначным частным интегралом дифференциальной системы* (1) *тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств* (9).

С учётом этого критерия устанавливаем следующие закономерности относительно комплекснозначного частного интеграла системы (1).

С в о й с т в о 1. *Если система* (1) *имеет комплекснозначный частный интеграл w, то ему комплексно сопряж■нный полином $\overline{w}$ также является комплексозначным частным интегралом системы* (1), *причём имеет место система тождеств*

$$
\mathfrak{A}_j \overline{w}(x) = \overline{w}(x)\,\overline{\lambda^j}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad j = \overline{1,m},
$$

где $\overline{\lambda^j}$, $j = \overline{1,m}$, комплексно сопряжены соответственно с числами λ^j из тождеств (4).

С в о й с т в о 2. *Если система* (1) *имеет комплекснозначный частный интеграл w, то вещественный полином*

$$
P\colon x \to \operatorname{Re}^2 w(x) + \operatorname{Im}^2 w(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{10}
$$

является частным интегралом дифференциальной системы (1) *и на пространстве $\mathbb{R}^n$ выполняется система тождеств*

$$
\mathfrak{A}_j \left[\operatorname{Re}^2 w(x) + \operatorname{Im}^2 w(x)\right] \equiv 2\left[\operatorname{Re}^2 w(x) + \operatorname{Im}^2 w(x)\right] \overset{*}{\lambda}{}^{j}, \ j = \overline{1,m}, \tag{11}
$$

где числа λ^j, $j = \overline{1,m}$, находятся из тождеств (4).

Свойство 3. *Пусть система* (1) *имеет комплекснозначный частный интеграл* w. *Тогда производные Ли в силу системы* (1) *функции*

$$\psi\colon x \to \exp\varphi(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathcal{X}\,,$$

где

$$\varphi(x)\colon\ x \to \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} w(x)}{\operatorname{Re} w(x)}\,, \quad \forall\, x \in \mathcal{X}\,, \tag{12}$$

равны

$$\mathfrak{A}_j \exp\varphi(x) \ = \ \exp\varphi(x)\ \tilde{\lambda}^j\,, \quad \forall\, x \in \mathcal{X}\,, \ \ j = \overline{1,m}\,, \tag{13}$$

где числа λ^j, $j = \overline{1,m}$, *находятся из тождеств* (4), *область* $\mathcal{X}$ *из пространства* $\mathbb{R}^n$ *такова, что её дополнение до пространства* $\mathbb{R}^n$ *есть множество всех нулей полинома* $\operatorname{Re} w$.

Из тождеств (13) следует формула вычисления производных Ли в силу системы (1) функции аргумента (12) комплекснозначного частного интеграла w этой системы:

$$\mathfrak{A}_j \varphi(x) \ = \tilde{\lambda}^j\,, \quad \forall\, x \in \mathcal{X}\,, \ \ j = \overline{1,m}\,. \tag{14}$$

Свойство 4. *Произведение* $u_1 u_2$ *полиномов* $u_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *и* $u_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$, *где* $\mathbb{K}$ — *поле вещественных* $\mathbb{R}$ *или комплексных* $\mathbb{C}$ *чисел, является частным интегралом (вещественным или комплекснозначным) системы* (1) *тогда и только тогда, когда его сомножители* u_1 *и* u_2 *являются частными интегралами системы* (1).

Свойство 5. *Вещественный полином* (10) *является частным интегралом системы* (1), *если и только если система* (1) *имеет комплекснозначный частный интеграл* w *(или комплексно сопряжённый ему).*

Теорема 2. *Пусть* $\nu^k = \overset{*}{\nu}{}^k + \tilde{\nu}^k i$, $k = \overline{1,s}$, $s \leqslant (m+1)/2$, *и* ν^θ, $\theta = \overline{s+1, m+1-s}$ — *соответственно общие комплексные (среди которых нет комплексно сопряжённых) и вещественные собственные векторы матриц* A_j, $j = \overline{1,m}$. *Тогда первым интегралом якобиевой системы* (1) *является семейство гиперповерхностей*

$$W \ = \ \left\{ x\colon \prod_{k=1}^{s} \left[\, P_k(x)\,\right]^{\overset{*}{h}_k} \exp\left[-2\ \tilde{h}_k\ \varphi_k(x) \right] \prod_{\theta=s+1}^{m+1-s} \left|\nu^\theta x\right|^{h_\theta} \ = \ C \right\}, \tag{15}$$

где полиномы

$$P_k\colon\ x \to\ \Big(\overset{*}{\nu}{}^k x\Big)^2\ +\ \Big(\overset{\sim}{\nu}{}^k x\Big)^2\ ,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,,\qquad k=\overline{1,s}\,,$$

функции

$$\varphi_k\colon\ x \to\ \operatorname{arctg}\frac{\overset{\sim}{\nu}{}^k x}{\overset{*}{\nu}{}^k x}\ ,\quad \forall x\in\mathfrak{X}\,,\qquad k=\overline{1,s}\,,$$

а вещественные числа $\overset{*}{h}_k\,,\ \tilde{h}_k\,,\ k=\overline{1,s}\,,\ h_\theta\,,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,,$ *составляют нетривиальное решение линейной однородной системы*

$$\sum_{k=1}^{s}\Big(2\,\overset{*}{\lambda}{}^j_k\ \overset{*}{h}_k\ -2\,\overset{\sim}{\lambda}{}^j_k\ \tilde{h}_k\Big)\ +\sum_{\theta=s+1}^{m+1-s}\lambda^j_\theta h_\theta\ =\ 0\,,\quad j=\overline{1,m}\,,$$

где $\lambda^j_k=\overset{*}{\lambda}{}^j_k+\overset{\sim}{\lambda}{}^j_k i\,,\ k=\overline{1,s}\,,\ j=\overline{1,m}\,,$ *и* $\lambda^j_\theta\,,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,,$ $j=\overline{1,m}$ *— соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц* $A_j\,,\ j=\overline{1,m}\,,$ *которым соответствуют собственные векторы* $\nu^k\,,\ k=\overline{1,s}\,,$ *и* $\nu^\theta\,,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,.$

Доказательство. Пусть $\nu^k=\overset{*}{\nu}{}^k+\overset{\sim}{\nu}{}^k i\,,\ k=\overline{1,s}\,,\ s\leqslant(m+1)/2\,,$ и $\nu^\theta\,,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,,$ — соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц $A_j\,,\ j=\overline{1,m}$ [12, с. 194]. Тогда у этих матриц существуют комплексные собственные числа $\lambda^j_k\,,\ k=\overline{1,s}\,,$ $j=\overline{1,m}\,,$ и вещественные собственные числа $\lambda^j_\theta\,,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,,$ $j=\overline{1,m}\,,$ которым соответствуют собственные векторы $\nu^k\,,\ k=\overline{1,s}\,,$ и $\nu^\theta\,,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,.$ При этом согласно лемме 1 и свойству 1 линейные однородные функции $p_k\colon x\to\nu^k x\,,\ \overline{p_k}\colon x\to\overline{\nu^k}x\,,\ p_\theta\colon x\to\nu^\theta x\,,$ $\forall\,x\in\mathbb{R}^n\,,\ k=\overline{1,s}\,,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,,$ являются частными интегралами системы (1). Следовательно, на пространстве $\mathbb{R}^n$ выполняется система тождеств

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}_j\,\overset{*}{\nu}{}^k x\ \equiv\overset{*}{\lambda}{}^j_k\ \overset{*}{\nu}{}^k x-\ \overset{\sim}{\lambda}{}^j_k\ \overset{\sim}{\nu}{}^k x\,,\quad \mathfrak{A}_j\,\overset{\sim}{\nu}{}^k x\ \equiv\overset{\sim}{\lambda}{}^j_k\ \overset{*}{\nu}{}^k x+\ \overset{*}{\lambda}{}^j_k\ \overset{\sim}{\nu}{}^k x\,,\\ \mathfrak{A}_j\,\nu^\theta x\ \equiv\ \lambda^j_\theta\nu^\theta x\,,\quad j=\overline{1,m}\,,\ k=\overline{1,s}\,,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}\,.\end{gathered}\tag{16}$$

Составим функцию

$$W:\ x\to\ \prod_{k=1}^{s}\,[\,P_k(x)\,]^{\overset{*}{h}_k}\,\exp\Big[-2\,\tilde{h}_k\,\varphi_k(x)\Big]\prod_{\theta=s+1}^{m+1-s}\big|\nu^\theta x\big|^{h_\theta}\ ,\ \forall\,x\in\mathfrak{X}\,,$$

где $\overset{*}{h}_k\,,\ \tilde{h}_k\,,\ k=\overline{1,s}\,,\ h_\theta\,,\ \theta=\overline{s+1,m+1-s}$ — вещественные числа одновременно не равные нулю. Производные Ли в силу системы (1)

$$\mathfrak{A}_j W(x) \ =$$

$$= \left\{ \prod_{k=1}^{s} [\,P_k(x)\,]^{\overset{*}{h}_k-1} \exp\Big[-2\,\tilde{h}_k\ \varphi_k(x)\Big] \sum_{k=1}^{s} \overset{*}{h}_k \prod_{l=1,l\neq k}^{s} P_l(x)\,\mathfrak{A}_j P_k(x) \ + \right.$$

$$\left. + \prod_{k=1}^{s} [P_k(x)]^{\overset{*}{h}_k} \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{A}_j \exp\Big[-2\,\tilde{h}_k\ \ \varphi_k(x)\Big] \right\} \prod_{\theta=s+1}^{m+1-s} \left|\nu^\theta x\right|^{h_\theta} \ +$$

$$+ \prod_{k=1}^{s} [P_k(x)]^{\overset{*}{h}_k} \exp\Big[-2\,\tilde{h}_k\ \ \varphi_k(x)\Big] \prod_{\theta=s+1}^{m+1-s} \left|\,\nu^\theta x\,\right|^{h_\theta-1} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\theta=1}^{m+1-s} \operatorname{sgn}\,\left(\nu^\theta x\right)\ h_\theta \prod_{l=s+1,l\neq\theta}^{m+1-s} \left|\,\nu^l x\,\right| \mathfrak{A}_j\ \left(\nu^\theta x\right)\ ,\ \forall\, x\in\mathfrak{X}\,,\ j=\overline{1,m}\,.$$

Отсюда в силу тождеств (16) и свойств 2, 3 устанавливаем, что

$$\mathfrak{A}_j W(x) \equiv \left[\sum_{k=1}^{s} \left(2\,\overset{*}{\lambda}{}_k^j\ \overset{*}{h}_k\ -2\,\overset{\sim}{\lambda}{}_k^j\ \tilde{h}_k\right)\ +\ \sum_{\theta=s+1}^{m+1-s} \lambda_\theta^j\, h_\theta \right] W(x)\,,\ j=\overline{1,m}\,.$$

Если

$$\sum_{k=1}^{s} \left(2\,\overset{*}{\lambda}{}_k^j\ \overset{*}{h}_k\ -2\,\overset{\sim}{\lambda}{}_k^j\ \tilde{h}_k\right)\ +\ \sum_{\theta=s+1}^{m+1-s} \lambda_\theta^j\, h_\theta \ =\ 0\,,\ j=\overline{1,m}\,,$$

то семейство (15) будет первым интегралом системы (1) .

Для якобиевой системы

$$(-\,x_1+2x_2-2x_3)\,\partial_1 u\ +\ (-\,6x_1+5x_2-4x_3+2x_4)\,\partial_2 u\ +$$

$$+\ (-3x_1+2x_2-2x_3)\,\partial_3 u\ +\ (2x_1-x_2+2x_3)\,\partial_4 u\ =\ 0\,,$$

$$(-\,4x_1+2x_2+2x_3+4x_4)\,\partial_1 u\ +\ (-\,5x_1+x_2+6x_3+6x_4)\,\partial_2 u\ +$$

$$+\ (-\,x_2+3x_3+x_4)\,\partial_3 u\ +\ (-\,3x_1+2x_2+3x_4)\,\partial_4 u\ =\ 0$$

по собственным числам $\lambda_1^1\ =\ 1+i,\ \lambda_2^1\ =\ 1-i,\ \lambda_3^1\ =\ -1,\ \lambda_4^1\ =\ 1;$ $\lambda_1^2\ =\ i,\ \lambda_2^2\ =\ -i,\ \lambda_3^2\ =\ 1,\ \lambda_4^2\ =\ 2$ и общим линейно независимым собственным векторам $\nu^1=(1+i,-\,i,-1+i,-\,1),\ \nu^2=(1-i,i,-1-i,-\,1),$

$\nu^3 = (1, -1, 2, 0)$, $\nu^4 = (-1, 0, 2, 2)$ строим (теорема 2) базис первых интегралов на областях $\mathfrak{X}_1 = \{x\colon x_1 - x_3 - x_4 < 0\}$ и $\mathfrak{X}_2 = \bigl\{x\colon x_1 - x_3 - x_4 > 0\bigr\}$, состоящий из двух семейств гиперповерхностей

$$W_1 = \Bigl\{x\colon (x_1 - x_2 + 2x_3)\ \bigl[(x_1 - x_3 - x_4)^2 + \\ + (x_1 - x_2 + x_3)^2\bigr] \exp\biggl(-\operatorname{arctg}\frac{x_1 - x_2 + x_3}{x_1 - x_3 - x_4}\biggr) = C_1\Bigr\}$$

и

$$W_2 = \Bigl\{x\colon (-x_1 + 2x_3 + 2x_4)^2\ \bigl[(x_1 - x_3 - x_4)^2 + \\ + (x_1 - x_2 + x_3)^2\bigr] \exp\biggl(-4\operatorname{arctg}\frac{x_1 - x_2 + x_3}{x_1 - x_3 - x_4}\biggr) = C_2\Bigr\}.$$

Для якобиевой системы [7, с. 197]

$$x_1\,\partial_1 u + x_2\,\partial_2 u + x_3\,\partial_3 u = 0, \qquad x_2\,\partial_1 u - x_1\,\partial_2 u - x_3\,\partial_3 u = 0$$

по собственным числам $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 = 1$; $\lambda_1^2 = -i$, $\lambda_2^2 = i$, $\lambda_3^2 = -1$ и общим линейно независимым собственным векторам $\nu^1 = (1, i, 0)$, $\nu^2 = (1, -i, 0)$, $\nu^3 = (0, 0, 1)$ строим (теорема 2) базис первых интегралов на областях из множества $\{x\colon x_1 \neq 0,\ x_3 \neq 0\}$, состоящий из семейства гиперповерхностей

$$W = \biggl\{x\colon \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}\ \exp\biggl[2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\biggr] = C\biggr\}.$$

Для якобиевой системы [7, с. 202]

$$x_1\,\partial_1 u - x_2\,\partial_2 u + x_3\,\partial_3 u - x_4\,\partial_4 u = 0,$$

$$x_3\,\partial_1 u - x_1\,\partial_3 u = 0, \qquad x_4\,\partial_2 u - x_2\,\partial_4 u = 0$$

по собственным числам $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = -1$, $\lambda_3^1 = \lambda_4^1 = 1$; $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 0$, $\lambda_3^2 = -i$, $\lambda_4^2 = i$; $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 0$, $\lambda_3^3 = -i$, $\lambda_4^2 = i$ и общим линейно независимым собственным векторам $\nu^1 = (0, -i, 0, 1)$, $\nu^2 = (0, i, 0, 1)$, $\nu^3 = (1, 0, i, 0)$, $\nu^4 = (1, 0, -i, 0)$ строим (теорема 2) базис первых интегралов

$$W = \{x\colon (x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2) = C\}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\nu^{2\tau-1} = \overset{*}{\nu}{}^{\tau} + \overset{\sim}{\nu}{}^{\tau} i$, $\nu^{2\tau} = \overset{*}{\nu}{}^{\tau} - \overset{\sim}{\nu}{}^{\tau} i$, $\tau = \overline{1,s}$, $s \leqslant m/2$, $\nu^{2s+1} = \overset{*}{\nu}{}^{2s+1} + \overset{\sim}{\nu}{}^{2s+1} i$, *и* ν^{θ}, $\theta = \overline{2s+2, m+1}$, *— соответственно общие комплексные и вещественные собственные векторы матриц* A_j, $j = \overline{1,m}$. *Тогда первыми интегралами якобиевой системы* (1) *являются семейства гиперповерхностей*

$$W_1 = \Big\{ x : \prod_{k=1}^{s} [\, P_k(x)\,]^{\overset{*}{h}_{2k-1} + \overset{*}{h}_{2k}} \exp\Big[-2(\tilde{h}_{2k-1} - \tilde{h}_{2k}\,)\, \varphi_k(x) \Big] \cdot \\ \cdot\, [\, P_{2s+1}(x)\,]^{\overset{*}{h}_{2s+1}} \exp\Big[-2\, \tilde{h}_{2s+1}\ \varphi_{2s+1}(x) \Big] \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} \left(\nu^{\theta} x\right)^{2\overset{*}{h}_{\theta}} = C_1 \Big\}, \tag{17}$$

$$W_2 = \Big\{ x : \prod_{k=1}^{s} [\, P_k(x)\,]^{\tilde{h}_{2k-1} + \tilde{h}_{2k}} \exp\Big[2 \left(\overset{*}{h}_{2k-1} - \overset{*}{h}_{2k} \right) \varphi_k(x) \Big] \cdot \\ \cdot\, [\, P_{2s+1}(x)\,]^{\tilde{h}_{2s+1}} \exp\Big[2\, \overset{*}{h}_{2s+1}\ \varphi_{2s+1}(x) \Big] \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} \left(\nu^{\theta} x\right)^{2\tilde{h}_{\theta}} = C_2 \Big\}, \tag{18}$$

где полиномы

$$P_k : x \to \left(\overset{*}{\nu}{}^{k} x\right)^2 + \left(\overset{\sim}{\nu}{}^{k} x\right)^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad k = \overline{1,s},\ k = 2s+1,$$

функции

$$\varphi_k \colon x \to \ \operatorname{arctg} \frac{\overset{\sim}{\nu}{}^{k} x}{\overset{*}{\nu}{}^{k} x}, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \qquad k = \overline{1,s},\ k = 2s+1,$$

а комплексные числа $h_k = \overset{*}{h}_k + \tilde{h}_k\, i$, $k = \overline{1, m+1}$, *составляют нетривиальное решение линейной однородной системы*

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k = 0, \quad j = \overline{1,m},$$

где $\lambda_{2\tau-1}^{j} = \overset{*}{\lambda}{}_{\tau}^{j} + \overset{\sim}{\lambda}{}_{\tau}^{j} i$, $\lambda_{2\tau}^{j} = \overset{*}{\lambda}{}_{\tau}^{j} - \overset{\sim}{\lambda}{}_{\tau}^{j} i$, $s \leqslant m/2$, $\tau = \overline{1,s}$, $\lambda_{2s+1}^{j} = \overset{*}{\lambda}{}_{2s+1}^{j} + \overset{\sim}{\lambda}{}_{2s+1}^{j} i$, *и* λ_{θ}^{j}, $\theta = \overline{2s+2, m+1}$, *— соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц* A_j, $j = \overline{1,m}$, *которым соответствуют собственные векторы* ν^k, $k = \overline{1, m+1}$.

Доказательство. Построим две функции

$$\overset{*}{W}: x \to \prod_{k=1}^{2s} \left(\nu^k x\right)^{h_k} \left(\nu^{2s+1} x\right)^{h_{2s+1}} \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} \left(\nu^\theta x\right)^{h_\theta}, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X},$$

и

$$\overset{**}{W}: x \to \prod_{k=1}^{2s} \left(\nu^k x\right)^{l_k} \left(\overline{\nu^{2s+1}} x\right)^{l_{2s+1}} \prod_{\theta=2s+2}^{m+1} \left(\nu^\theta x\right)^{l_\theta}, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X},$$

где h_k, l_k, $k = \overline{1, m+1}$, — некоторые комплексные числа. Функции $\overset{*}{W}$ и $\overset{**}{W}$ в общем случае представляют собой скалярные комплекснозначные функции вещественных аргументов. Действие операторов на них

$$\mathfrak{A}_j \overset{**}{W}(x) = \left[\sum_{k=1}^{2s} \lambda_k^j l_k + \overline{\lambda_{2s+1}^j} l_{2s+1} + \sum_{\theta=2s+2}^{m+1} \lambda_\theta^j l_\theta\right] \overset{**}{W}(x),$$

$$\mathfrak{A}_j \overset{*}{W}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k \overset{*}{W}(x), \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}, \qquad j = \overline{1, m}.$$

Если совместна система

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k = 0, \qquad j = \overline{1, m},$$

то семейство гиперповерхностей $\overset{*}{W} = \left\{x : \overset{*}{W}(x) = C\right\}$ будет первым интегралом дифференциальной системы (1).

Пусть $h_k = \overset{*}{h}_k + \tilde{h}_k\, i$, $k = \overline{1, m+1}$, — решение этой системы. Тогда решением системы

$$\sum_{k=1}^{2s} \lambda_k^j l_k + \overline{\lambda_{2s+1}^j} l_{2s+1} + \sum_{\theta=2s+2}^{m+1} \lambda_\theta^j l_\theta = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

являются числа

$$l_{2k-1} = \overset{*}{h}_{2k} - \tilde{h}_{2k}\, i, \; l_{2k} = \overset{*}{h}_{2k-1} - \tilde{h}_{2k-1}\, i, \quad k = \overline{1, s},$$

$$l_{2s+1} = \overset{*}{h}_{2s+1} - \tilde{h}_{2s+1}\, i, \quad l_\theta = \overset{*}{h}_\theta - \tilde{h}_\theta\, i, \quad \theta = \overline{2s+2, m+1}.$$

При этом семейство гиперповерхностей $\overset{**}{W} = \left\{x : \overset{**}{W}(x) = C\right\}$ будет первым интегралом системы (1).

Положив $W_1 = \overset{*}{W}\overset{**}{W}$ и $W_2 = \left(\overset{**}{W}/\overset{*}{W}\right)^i$, получим соответственно первые интегралы видов (17) и (18).

Для якобиевой системы [1, с. 73; 7, с. 200]

$$x_1\,\partial_1 u \;-\; x_2\,\partial_2 u \;+\; x_3\,\partial_3 u \;-\; x_4\,\partial_4 u \;=\; 0\,,$$

$$x_3\,\partial_1 u \;+\; x_4\,\partial_2 u \;-\; x_1\,\partial_3 u \;-\; x_2\,\partial_4 u \;=\; 0$$

по собственными числами $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = -1$, $\lambda_3^1 = \lambda_4^1 = 1$; $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = -i$, $\lambda_3^2 = \lambda_4^2 = i$ и общим линейно независимым собственным векторам $\nu^1 = (0, -i, 0, 1)$, $\nu^2 = (0, i, 0, 1)$, $\nu^3 = (-i, 0, 1, 0)$, $\nu^4 = (i, 0, 1, 0)$ строим (теорема 3) базис первых интегралов

$$W_1 = \{x\colon\; x_1x_2 + x_3x_4 = C_1\}\,, \quad W_2 = \{x\colon\; x_1x_4 - x_2x_3 = C_2\}\,.$$

Для якобиевой системы

$$(4x_1 - 4x_4 - 4x_5)\,\partial_1 u \;+\; (-2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 4x_5)\,\partial_2 u \;+$$
$$+\;(2x_1 + 2x_2 - 8x_4 - 4x_5)\,\partial_3 u \;+\; (-7x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 4x_5)\,\partial_4 u \;+$$
$$+\;(11x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 2x_4)\,\partial_5 u \;=\; 0\,,$$

$$(4x_1 - 2x_4 - 2x_5)\,\partial_1 u \;+\; (4x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 2x_5)\,\partial_2 u \;+\; (-6x_4 - 2x_5)\,\partial_3 u \;+$$
$$+\;(-5x_1 - 5x_2 + 6x_4 + 2x_5)\,\partial_4 u \;+\; (7x_1 + 5x_2 - 2x_4 + 2x_5)\,\partial_5 u \;=\; 0\,,$$

$$(8x_4 - 8x_5)\,\partial_1 u \;+\; (6x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 20x_4 + 8x_5)\,\partial_2 u \;+$$
$$+\;(-6x_1 - 18x_2 - 24x_3 - 20x_4 - 8x_5)\,\partial_3 u \;+\; (-9x_1 + 3x_2 + 18x_3 \;+$$
$$+\;14x_4 + 8x_5)\,\partial_4 u \;+\; (17x_1 - 3x_2 - 18x_3 - 14x_4 - 8x_5)\,\partial_5 u \;=\; 0$$

по комплексным и вещественным собственным числам $\lambda_1^1 = 4 + 4i$, $\lambda_2^1 = 4 - 4i$, $\lambda_3^1 = 4i$, $\lambda_4^1 = -4i$, $\lambda_5^1 = 4$; $\lambda_1^2 = 4 + 2i$, $\lambda_2^2 = 4 - 2i$, $\lambda_3^2 = 2 + 4i$, $\lambda_4^2 = 2 - 4i$, $\lambda_5^2 = 4$; $\lambda_1^3 = 8i$, $\lambda_2^3 = -8i$, $\lambda_3^3 = 12i$, $\lambda_4^3 = -12i$, $\lambda_5^2 = -12$ и общим линейно независимым собственным векторам $\nu^1 = (1, 0, 0, i, i)$, $\nu^2 = (1, 0, 0, -i, -i)$, $\nu^3 = (1 + 2i, 1 + 2i, 2, 2, 0)$, $\nu^4 = (1 - 2i, 1 - 2i, 2, 2, 0)$, $\nu^5 = (0, 1, 1, 0, 0)$ строим (теорема 3) базис первых интегралов

$$W_1 = \left\{ x\colon \frac{\left[\,x_1^2 \;+\; (x_4 + x_5)^2\,\right]^2}{(x_2 + x_3)^2\,\left[\,(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)^2 \;+\; (2x_1 + 2x_2)^2\,\right]} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp\left(-2\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4}\right) \;=\; C_1 \right\},$$

$$W_2 \;=\; \left\{ x\colon\; \frac{\bigl[\,(x_1+x_2+2x_3+2x_4)^2 \;+\; (2x_1+2x_2)^2\,\bigr]^5}{(\,x_2+x_3\,)^{10}} \,\cdot\right.$$

$$\left. \cdot\,\exp\left(12\ \mathrm{arctg}\,\frac{x_4+x_5}{x_1} \;-\; 10\ \mathrm{arctg}\,\frac{2x_1+2x_2}{x_1+x_2+2x_3+2x_4}\right) \;=\; C_2 \right\}$$

на областях $\mathcal{X}$ из множества $\{\,x:\ x_1 \neq 0\,,\ x_2+x_3 \neq 0\,,\ x_1+x_2+2x_3 + {}$ $+\ 2x_4 \neq 0\,\}$.

Для якобиевой системы

$$(2x_1-3x_2-6x_3-4x_4)\,\partial_1 u \;+\; (-\,4x_1+4x_2+6x_3+2x_4)\,\partial_2 u \;+$$

$$+\;(4x_1-4x_2-8x_3-5x_4)\,\partial_3 u \;+\; (-\,3x_1+4x_2+7x_3+4x_4)\,\partial_4 u \;=\; 0\,,$$

$$(3x_1-x_2-6x_3-6x_4)\,\partial_1 u \;+\; (-\,6x_1+3x_2+4x_3)\,\partial_2 u \;+$$

$$+\;(6x_1-x_2-5x_3-4x_4)\,\partial_3 u \;+\; (-\,4x_1+2x_2+6x_3+5x_4)\,\partial_4 u \;=\; 0$$

по комплексным собственным числам $\lambda_1^1 = 1+i,\ \lambda_2^1 = 1-i,\ \lambda_3^1 = i,$ $\lambda_4^1 = -\,i;\ \lambda_1^2 = 2+i,\ \lambda_2^2 = 2-i,\ \lambda_3^2 = 1+2i,\ \lambda_4^2 = 1-2i$ и общим линейно независимым собственным векторам $\nu^1 = (\,-\,1+i,\, 2-i,\, 2,\, 2i\,),\ \nu^2 =$ $= (\,-\,1-i,\, 2+i,\, 2,\, -2i,\,),\ \nu^3 = (\,1,\, -\,i,\, 1,\, 2+i\,),\ \nu^4 = (\,1,\, i,\, 1,\, 2-i\,)$ строим (теорема 3) семейства гиперповерхностей

$$W_1 \;=\; \left\{ x\colon \frac{(-x_1+2x_2+2x_3)^2 \;+\; (x_1-x_2+2x_4)^2}{(x_1+x_3+2x_4)^2+(-x_2+x_4)^2}\,\cdot\right.$$

$$\left. \cdot\,\exp\left(-\,2\ \mathrm{arctg}\,\frac{x_1-x_2+2x_4}{-x_1+2x_2+2x_3}\right) \;=\; C_1 \right\}$$

и

$$W_2 \;=\; \left\{ x : [\,(-x_1+2x_2\ {+2x_3})^2 \;+\; (x_1-x_2+2x_4)^2\,]\,\cdot\right.$$

$$\left. \cdot\,\exp\left(-\,4\ \mathrm{arctg}\,\frac{-x_2+x_4}{x_1+x_3+2x_4}\right) \;=\; C_2 \right\},$$

которые, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов на областях $\mathcal{X}$ из множества $\{\,x:\ x_1+x_3+2x_4 \neq 0\,,\ x_1-2x_2 - {}$ $-\,2x_3 \neq 0\,\}$.

Построение первых интегралов в случае кратных интегральных характеристических корней основано на следующем понятии.

Определение 3. *Пусть* λ_l^ζ *— собственное число матрицы* A_ζ, *которому соответствует элементарный делитель кратности* s *и собственный вектор* ν^{0l}. *Вектор* ν^{kl}, *координатами которого являются решения системы уравнений*

$$\Bigl(A_\zeta - \lambda_l^\zeta E\Bigr)\operatorname{colon}\bigl(\nu_1^{kl}, \ldots, \nu_n^{kl}\bigr) = k\operatorname{colon}\Bigl(\nu_1^{k-1,l}, \ldots, \nu_n^{k-1,l}\Bigr), \quad k = \overline{1, s-1}, \tag{19}$$

назовём k–ым присоединённым вектором *матрицы* A_ζ *соответствующим собственному числу* λ_l^ζ.

Теорема 4. *Пусть* ν^{0l} *и* $\nu^{\theta l}$, $\theta = \overline{1, s_l - 1}$, $l = \overline{1, r}$, *— общие вещественные собственные и присоединённые векторы матриц* A_j, $j = \overline{1, m}$, *которые соответствуют собственным числам* λ_l^ζ, $l = \overline{1, r}$, *имеющим элементарные делители кратности* s_l *при* $\sum\limits_{l=1}^{r} s_l \geqslant m+1$. *Тогда первым интегралом якобиевой дифференциальной системы* (1) *является семейство гиперповерхностей*

$$W = \left\{ x\colon \prod_{\xi=1}^{k} \bigl(\nu^{0\xi}x\bigr)^{h_{\xi 0}} \exp \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} h_{\xi q}\, v_q^\xi(x) = C \right\}, \tag{20}$$

где функции $v_q^\xi\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$, $q = \overline{1, \varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$, *такие, что*

$$\nu^{i\xi}x = \sum_{q=1}^{i} \binom{i-1}{q-1} v_q^\xi(x)\, \nu^{i-q,\,\xi}x, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}, \quad i = \overline{1, \varepsilon_\xi},\ \xi = \overline{1, k}, \tag{21}$$

и $\sum\limits_{\tau=1}^{k} \varepsilon_\tau = m - k + 1$, $\varepsilon_\xi \leqslant s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k}$, $k \leqslant r$. *При этом функции-решения* v_q^ξ *такие, что*

$$\mathfrak{A}_j\, v_q^\xi(x) = \mu_q^{\xi j}, \quad \forall x \in \mathfrak{X}, \qquad \mu_q^{\xi j} = \mathrm{const},\ q = \overline{1, \varepsilon_\xi},\ \xi = \overline{1, k},\ j = \overline{1, m},$$

а числа $h_{\xi q}$, $q = \overline{0, \varepsilon_\xi}$, $\xi = \overline{1, k}$, *составляют нетривиальное решение алгебраической линейной однородной системы*

$$\sum_{\xi=1}^{k} \left(\lambda_\xi^j h_{\xi 0} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_q^{\xi j} h_{\xi q} \right) = 0, \qquad j = \overline{1, m},$$

где λ_{ξ}^{j}, $\xi = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,m}$, *суть вещественные собственные числа матриц* A_j, $j=\overline{1,m}$, *которым соответствуют собственные векторы* $\nu^{0\xi}$, $\xi=\overline{1,k}$.

Доказательство. На основании системы равенств (19) и леммы 1 устанавливаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\zeta}\left(\nu^{0l}x\right) \ &= \ \lambda_l^{\zeta}\,\nu^{0l}x\,, \quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,, \qquad l=\overline{1,r}\,, \\ \mathfrak{A}_{\zeta}\left(\nu^{\theta l}x\right) \ &= \ \lambda_l^{\zeta}\,\nu^{\theta l}x \ + \ \theta\,\nu^{\theta-1,l}x\,, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n\,, \qquad \theta=\overline{1,s_l}\,,\ l=\overline{1,r}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Систему (21) всегда можно разрешить относительно v_q^{ξ}, так как её определитель равен $\left(\nu^{0\xi}x\right)^{\varepsilon_{\xi}-1}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$, и отличен от тождественного нуля на области $\mathfrak{X}$.

Докажем, что для функций v_q^l справедливы тождества

$$\mathfrak{A}_{\zeta}\,v_q^l(x) \ = \ \left[\begin{array}{l} 1\,,\ \forall\, x\in\mathfrak{X}\,,\ \text{при}\ q=1\,; \\ 0\,,\ \forall\, x\in\mathfrak{X}\,,\ \text{при}\ q=\overline{2,s_l-1}\,, \quad l=\overline{1,r}. \end{array}\right. \tag{23}$$

Соотношения (23) при $q=1$ и $q=2$ непосредственно проверяются на основании тождеств (22). Доказательство для случаев $q\geqslant 3$ проведём методом математической индукции. Предположим, что тождества (23) выполняются при $q=\overline{1,\varepsilon-1}$. Вычислим производную Ли в силу уравнения $(1.\zeta)$ от функции $p\colon x\to\nu^{\varepsilon l}x$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, с учётом соотношений (21), (22) и (23) при $q=\overline{1,\varepsilon-1}$ на области $\mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{A}_{\zeta}\left(\nu^{\varepsilon l}x\right) \ = \ \lambda_l^{\zeta}\sum_{q=1}^{\varepsilon}\binom{\varepsilon-1}{q-1}\,v_q^l(x)\ \nu^{\varepsilon-q,l}x \ +$$

$$+ \ (\varepsilon-1)\sum_{q=1}^{\varepsilon-1}\binom{\varepsilon-2}{q-1}v_q^l(x)\,\nu^{\varepsilon-q-1,l}x \ + \ \nu^{\varepsilon-1,l}x \ + \ \nu^{0l}x\,\mathfrak{A}_{\zeta}v_{\varepsilon}^l(x)\,.$$

Отсюда, в силу соотношений (21) при $i=\varepsilon-1$ и $i=\varepsilon$, соотношений (22) при $i=\varepsilon$ и того, что $\nu^{0l}x\neq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$, получаем, что

$$\mathfrak{A}_{\zeta}\,v_{\varepsilon}^l(x) \ = \ 0\,, \quad \forall\, x\in\mathfrak{X}\,.$$

Пусть

$$v_0^l(x) \ = \ \ln\left(\nu^{0l}x\right)\,, \quad \forall\, x\in\mathfrak{X}\,, \quad l=\overline{1,r}\,. \tag{24}$$

Тогда из соотношений (22) и (23) получаем, что

$$\mathfrak{A}_\zeta\, v_0^l(x) \;=\; \lambda_l^\zeta\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}\,, \qquad l = \overline{1,r}\,, \tag{25}$$

$$\mathfrak{A}_\zeta\, v_1^l(x) \;=\; 1\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}\,, \qquad l = \overline{1,r}\,, \tag{26}$$

$$\mathfrak{A}_\zeta\, v_q^l(x) \;=\; 0\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}\,, \qquad q = \overline{2, s_l - 1}\,, \quad l = \overline{1,r}\,. \tag{27}$$

Из условий (2) вытекает, что матрицы A_j, $j = \overline{1,m}$, перестановочны. На основании [12, с. 191 – 194] получаем, что матрицы A_j, $j = \overline{1,m}$, имеют r общих собственных векторов и выполняются соотношения

$$\mathfrak{A}_j\, v_0^l(x) \;=\; \lambda_l^j\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}\,, \quad l = \overline{1,r}\,, \quad j = \overline{1,m}\,. \tag{28}$$

Учитывая, что линейные дифференциальные операторы первого порядка $\mathfrak{A}_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, перестановочны, из соотношений (26) и (27) получаем, что на области $\mathfrak{X}$

$$\mathfrak{A}_j\, v_q^l(x) \;=\; \mu_q^{lj}\,, \quad q = \overline{1, s_l - 1}\,, \quad l = \overline{1,r}\,, \quad j = \overline{1,m}\,, \quad j \neq \zeta\,. \tag{29}$$

Следовательно, существует $\sum\limits_{l=1}^{r} s_l$ функций $v_q^l\colon \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$, $q = \overline{0, s_l - 1}$, $l = \overline{1,r}$, заданных соотношениями (21) и (24), относительно которых выполняются условия (23), (25) – (29) и которые, учитывая способ их построения, функционально независимы.

Построим функцию

$$\overset{*}{W}\colon x \to \sum_{\xi=1}^{k} \sum_{q=0}^{\varepsilon_\xi} h_{\xi q}\, v_q^\xi(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}\,, \quad \mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n\,,$$

и вычислим действия операторов на неё :

$$\mathfrak{A}_j\, \overset{*}{W}(x) \;=\; \sum_{\xi=1}^{k} \left(\lambda_\xi^j\, h_{\xi 0} \;+\; \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_q^{\xi j}\, h_{\xi q} \right) \overset{*}{W}(x)\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}\,, \qquad j = \overline{1,m}\,.$$

Если $\sum\limits_{\xi=1}^{k} \left(\lambda_\xi^j\, h_{\xi 0} \;+\; \sum\limits_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_q^{\xi j}\, h_{\xi q} \right) \;=\; 0\,,\ j = \overline{1,m}\,,$ то семейство гиперповерхностей $\overset{*}{W} = \left\{ x\colon\ \overset{*}{W}(x) = C \right\}$ является первым интегралом дифференциальной системы (1) .

Полагая $W(x) = \exp \overset{*}{W}(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, получим первый интеграл вида (20) якобиевой системы (1).

Для якобиевой системы

$$x_2\,\partial_1 u \;+\; (2x_2 - x_3 - x_4)\,\partial_2 u \;+\; (x_1 - x_4)\,\partial_3 u \;+\; (-x_1 + 2x_3 + 2x_4)\,\partial_4 u \;=\; 0\,,$$

$$(2x_1 - x_3)\,\partial_1 u + (-x_1 + 2x_2 + x_4)\,\partial_2 u + (-x_1 + 3x_3 + x_4)\,\partial_3 u + (x_2 - 3x_3 + x_4)\,\partial_4 u = 0$$

по собственному числу $\lambda_1^1 = 1$, которому отвечает элементарный делитель $(\lambda^1 - 1)^4$ кратности четыре, соответствующим ему собственному вектору $\nu^0 = (-1, 1, -1, 0)$ и присоединённым векторам $\nu^1 = (1, 0, -1, -1)$, $\nu^2 = (1, -1, 3, 0)$, $\nu^3 = (-3, 0, 9, 9)$ получаем функции

$$v_1\colon x \to \frac{x_1 - x_3 - x_4}{-x_1 + x_2 - x_3}\,, \quad \forall\, x \in \mathcal{X}\,,$$

$$v_2\colon x \to \frac{(-x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_2 + 3x_3) \,-\, (x_1 - x_3 - x_4)^2}{(-x_1 + x_2 - x_3)^2}\,, \quad \forall\, x \in \mathcal{X},$$

$$v_3\colon x \to \frac{1}{(-x_1 + x_2 - x_3)^3}\Big[(-3x_1 + 9x_3 + 9x_4)(-x_1 + x_2 - x_3)^2 -$$

$$- 3\,(-x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + 3x_3) \,+\, 2\,(x_1 - x_3 - x_4)^3\Big]\,, \ \forall x \in \mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}$ — произвольная область из множества $\{x\colon x_1 - x_2 + x_3 \neq 0\}$. Тогда в соответствии с теоремой 4 семейства гиперповерхностей

$$W_1 \;=\; \{\,x\colon\, v_2(x) \;=\; C_1\,\}$$

и

$$W_2 \;=\; \Big\{\,x\colon\, (-x_1 + x_2 - x_3)^2 \exp\left[-2v_1(x) - v_3(x)\right] \;=\; C_2\,\Big\}\,,$$

образуют базис первых интегралов якобиевой системы на областях $\mathcal{X}_1 = \{x\colon x_1 - x_2 + x_3 < 0\}$ и $\mathcal{X}_2 = \{x\colon x_1 - x_2 + x_3 > 0\}$.

Доказательство теоремы 4 предусматривает также случай, когда матрицы A_j, $j = \overline{1,m}$, имеют некоторое число общих комплексных собственных вектора $\nu^{0\,l}$, соответствующих собственным числам λ_l^{ζ} с элементарными делителями кратности s_l. В данном случае, на основании определённой группировки $m+1$ функций v_q^l, $l = \overline{1,r}$, $q = \overline{0, s_l - 1}$ всегда получим одну из двух возможностей.

1. В наборе из $m+1$ функций наряду с каждой комплекснозначной функцией вещественного аргумента содержится и комплексно сопряжённая.

2. В совокупности из $m+1$ функций имеется одна комплекснозначная функция вещественного аргумента, не имеющая комплесно сопряжённой.

В каждом из этих случаев линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных (1) будет иметь следующие первые интегралы.

В первом случае это — семейство гиперповерхностей

$$W = \left\{ x:\ \prod_{\xi=1}^{k_1} \left[\left(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\right)^2 + \left(\overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi}x\right)^2 \right]^{\overset{*}{h}_{\xi 0}} \exp\left[-2\,\tilde{h}_{\xi 0}\ \operatorname{arctg} \frac{\overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi}x}{\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\left(\overset{*}{h}_{\xi q}\,\overset{*}{v}{}^{\xi}_{q}(x) - \tilde{h}_{\xi q}\,\tilde{v}{}^{\xi}_{q}(x)\right)\right] \prod_{\theta=1}^{k_2} \left|\nu^{0\theta}x\right|^{h_{\theta 0}} \exp \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} h_{\theta q}\, v^{\theta}_{q}(x) = C \right\},$$

где вещественные числа $\overset{*}{h}_{\xi q}$, $\tilde{h}_{\xi q}$, $h_{\xi q}$, $q = \overline{0,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или $k=\theta$, $\xi = \overline{1,k_1}$, $\theta = \overline{1,k_2}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{\xi=1}^{k_1} \left[\left(2\,\overset{*}{\lambda}{}^{j}_{\xi}\ \overset{*}{h}_{\xi 0}\ - 2\,\overset{\sim}{\lambda}{}^{j}_{\xi}\ \tilde{h}_{\xi 0} \right) + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\left(\overset{*}{\mu}{}^{\xi j}_{q}\ \overset{*}{h}_{\xi q}\ - \overset{\sim}{\mu}{}^{\xi j}_{q}\ \tilde{h}_{\xi q}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{\theta=1}^{k_1} \left(\lambda^{j}_{\theta}\, h_{\theta 0} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \mu^{\theta j}_{q}\, h_{\theta q} \right) = 0, \qquad j = \overline{1,m},$$

а $\lambda^{j}_{\xi} = \overset{*}{\lambda}{}^{j}_{\xi} + \overset{\sim}{\lambda}{}^{j}_{\xi}\, i$, $\xi = \overline{1,k_1}$, $j = \overline{1,m}$, и λ^{j}_{θ}, $\theta = \overline{1,k_2}$, $j = \overline{1,m}$, — соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j, $j = \overline{1,m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0\xi} = \overset{*}{\nu}{}^{0\xi} + \overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi}\, i$, $\xi = \overline{1,k_1}$, и $\nu^{0\theta}$, $\theta = \overline{1,k_2}$. Числа

$$\overset{*}{\mu}{}^{\xi j}_{q} = \operatorname{Re}\mathfrak{A}_j v^{\xi}_{q}(x), \quad \overset{\sim}{\mu}{}^{\xi j}_{q} = \operatorname{Im}\mathfrak{A}_j v^{\xi}_{q}(x), \quad \mu^{\theta j}_{q} = \mathfrak{A}_j v^{\theta}_{q}(x),$$

при $q = \overline{1,\varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1,k_1}$, $\theta = \overline{1,k_2}$, $j = \overline{1,m}$. Функции $v^{\xi}_{q} = \overset{*}{v}{}^{\xi}_{q} + \tilde{v}{}^{\xi}_{q}\, i$ и v^{θ}_{q} находятся из системы (21), причём

$$2\sum_{\xi=1}^{k_1} \varepsilon_\xi + \sum_{\theta=1}^{k_2} \varepsilon_\theta = m - 2k_1 - k_2 + 1, \qquad 2k_1 + k_2 \leqslant r,$$

$\varepsilon_\xi \leqslant s_\xi - 1\,,\ \xi = \overline{1, k_1}\,,$ где k_1 — количество пар комплексно сопряжённых собственных векторов, $\varepsilon_\theta \leqslant s_\theta - 1\,,\ \xi = \overline{1, k_2}\,,$ где k_2 — количество вещественных собственных векторов.

Для якобиевой линейной однородной дифференциальной системы уравнений в частных производных

$$\mathfrak{A}_j(x)\,u \ = \ 0\,, \quad j = \overline{1,3}\,, \tag{30}$$

где

$$\mathfrak{A}_1(x) \ = \ (3x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_6)\,\partial_1 \ +$$
$$+ \ (-x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_5 - 3x_6)\,\partial_2 \ + \ (-3x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 - 2x_5 - 4x_6)\,\partial_3 +$$
$$+ \ (3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 + 5x_6)\partial_4 \ + \ (5x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 6x_6)\partial_5 \ +$$
$$+ \ (-2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 + x_5 - 2x_6)\,\partial_6\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^6\,,$$

$$\mathfrak{A}_2(x) \ = \ (-4x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6)\,\partial_1 \ +$$
$$+ \ (x_1 + 3x_2 + x_5 - x_6)\,\partial_2 \ + \ (6x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6)\,\partial_3 \ +$$
$$+ \ (2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 2x_6)\partial_4 \ + \ (x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 2x_6)\partial_5 \ +$$
$$+ \ (-2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 2x_6)\,\partial_6\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^6\,,$$

$$\mathfrak{A}_3(x) \ = \ (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 2x_6)\,\partial_1 \ +$$
$$+ \ (2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6)\,\partial_2 \ + \ (3x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_6)\,\partial_3 \ -$$
$$- \ (3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 + x_6)\partial_4 \ - \ (3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 + 2x_6)\partial_5 \ +$$
$$+ \ (2x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5)\,\partial_6\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^6\,,$$

на основании собственного числа $\lambda_1^1 = 1 + 2i\,,$ которому соответствует элементарный делитель $\big(\lambda^1 - 1 - 2i\big)^3$ кратности три, собственного, первого и второго присоединённых векторов $\nu^0 = (1, 0, 1+i, 1, i, 1)\,,\ \nu^1 = (1, 1+i, 0, 0, i, i)\,,\ \nu^2 = (2+2i, 0, 2+2i, 0, 2i, 2i)$ составляем функции

$$\overset{*}{v}_1\colon x \to \ \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + x_4 + x_6) \ + \ (x_3 + x_5)(x_2 + x_5 + x_6)}{(x_1 + x_3 + x_4 + x_6)^2 \ + \ (x_3 + x_5)^2}\,, \quad \forall x \in \mathcal{X}\,,$$

$$\tilde{v}_1\colon x \to \ \frac{(x_1 + x_3 + x_4 + x_6)(x_2 + x_5 + x_6) \ - \ (x_1 + x_2)(x_3 + x_5)}{(x_1 + x_3 + x_4 + x_6)^2 \ + \ (x_3 + x_5)^2}\,, \quad \forall x \in \mathcal{X}\,,$$

$$\overset{*}{v}_2 \colon x \to \frac{1}{(x_1+x_3+x_4+x_6)^2 + (x_3+x_5)^2} \Big\{ 2 \, \big[(x_1+x_3+x_4+x_6)^2 +$$

$$+ (x_3+x_5)^2 \big] \big[(x_1+x_3)(x_1+x_3+x_4+x_6) + (x_3+x_5)(x_1+x_3+x_5+x_6) \big] -$$

$$- \big[(x_1+x_2)(x_1+x_3+x_4+x_6) + (x_3+x_5)(x_2+x_5+x_6) \big]^2 +$$

$$+ \big[(x_1+x_3+x_4+x_6)(x_2+x_5+x_6) - (x_1+x_2)(x_3+x_5) \big]^2 \Big\}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

$$\widetilde{v}_2 \colon x \to \frac{2}{(x_1+x_3+x_4+x_6)^2 + (x_3+x_5)^2} \Big\{ \big[(x_1+x_3+x_4+x_6)^2 +$$

$$+ (x_3+x_5)^2 \big] \big[(x_1+x_3+x_4+x_6)(x_1+x_3+x_5+x_6) - (x_1+x_3)(x_3+x_5) \big] +$$

$$+ \big[(x_1+x_2)(x_1+x_3+x_4+x_6) + (x_3+x_5)(x_2+x_5+x_6) \big] \cdot$$

$$\cdot \big[(x_3+x_5)(x_1+x_2) - (x_1+x_3+x_4+x_6)(x_2+x_5+x_6) \big] \Big\}, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

и строим (случай 1) семейства гиперповерхностей

$$W_1 = \Big\{ x \colon \ \big[(x_1+x_3+x_4+x_6)^2 + (x_3+x_5)^2 \big] \cdot$$

$$\cdot \exp \Big[-4 \operatorname{arctg} \frac{x_3+x_5}{x_1+x_3+x_4+x_6} + 6 \overset{*}{v}_1 (x) + 2 \widetilde{v}_1 (x) \Big] = C_1 \Big\},$$

$$W_2 = \Big\{ x \colon \ \big[(x_1+x_3+x_4+x_6)^2 + (x_3+x_5)^2 \big]^2 \cdot$$

$$\cdot \exp \Big[-2 \operatorname{arctg} \frac{x_3+x_5}{x_1+x_3+x_4+x_6} + \overset{*}{v}_2 (x) - \widetilde{v}_2 (x) \Big] = C_2 \Big\}$$

и

$$W_3 = \Big\{ x \colon 2 \, \widetilde{v}_1 (x) - 2 \overset{*}{v}_2 (x) - \widetilde{v}_2 (x) = C_3 \Big\},$$

которые, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов на областях $\mathcal{X}$ из множества $\{x \colon x_1+x_3+x_4+x_6 \neq 0\}$.

Во втором случае будем различать две возможности.

Случай a. Общий собственный вектор матриц $A_j\,, j\, =\, \overline{1,m}\,,$ не имеет комплексно сопряжённого вектора. Тогда система (1) имеет первые интегралы :

$$W_1 \;=\; \Biggl\{x:\; \prod_{\xi=1}^{k_1} [\,P_\xi(x)\,]^{\overset{*}{h}_{2\xi-1,0}+\overset{*}{h}_{2\xi,0}} \,\exp\biggl\{-\,2\left(\tilde{h}_{2\xi-1,0}-\tilde{h}_{2\xi,0}\right)\,\varphi_\xi(x) +$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\left[\left(\overset{*}{h}_{\xi,(2q-1)}+\overset{*}{h}_{\xi,2q}\right)\,\overset{*}{v}{}^{\xi}_{q}(x)\;+\;\left(\tilde{h}_{\xi,2q}-\tilde{h}_{\xi,(2q-1)}\right)\,\tilde{v}{}^{\xi}_{q}(x)\right]\biggr\}\cdot$$

$$\cdot\,[\,P_{2k_1+1}(x)\,]^{\overset{*}{h}_{2k_1+1,0}}\,\exp\Bigl[-\,2\,\tilde{h}_{2k_1+1,0}\;\;\varphi_{2k_1+1}(x)\Bigr]\cdot$$

$$\cdot\prod_{\theta=1}^{k_2}\left(\nu^{0\theta}x\right)^{2\overset{*}{h}_{\theta 0}}\exp\left[2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\overset{*}{h}_{\theta q}\;v^{\theta}_{q}(x)\right]\;=\;C_1\Biggr\}$$

и

$$W_2 \;=\; \Biggl\{x:\; \prod_{\xi=1}^{k_1} [\,P_\xi(x)\,]^{\tilde{h}_{2\xi-1,0}+\tilde{h}_{2\xi,0}} \,\exp\biggl\{2\left(\overset{*}{h}_{2\xi-1,0}\;-\;\overset{*}{h}_{2\xi,0}\right)\varphi_\xi(x) +$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} 2\left[\left(\tilde{h}_{\xi,(2q-1)}\;+\;\tilde{h}_{\xi,2q}\right)\,\overset{*}{v}{}^{\xi}_{q}(x)\;+\;\left(\overset{*}{h}_{\xi,(2q-1)}-\overset{*}{h}_{\xi,2q}\right)\,\tilde{v}{}^{\xi}_{q}(x)\right]\biggr\}\cdot$$

$$\cdot\,[\,P_{2k_1+1}(x)\,]^{\tilde{h}_{2k_1+1,0}}\,\exp\Bigl[2\,\overset{*}{h}_{2k_1+1,0}\;\;\varphi_{2k_1+1}(x)\Bigr]\cdot$$

$$\cdot\prod_{\theta=1}^{k_2}\left(\nu^{0\theta}x\right)^{2\tilde{h}_{\theta 0}}\exp\left[2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\tilde{h}_{\theta q}\;v^{\theta}_{q}(x)\right]\;=\;C_2\Biggr\},$$

где полиномы

$$P_\xi:\; x\to\left(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\right)^2\;+\;\left(\overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi}x\right)^2,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n\,,\qquad \xi=\overline{1,k_1+1}\,,$$

функции

$$\varphi_\xi\colon\; x\to\operatorname{arctg}\frac{\overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi}x}{\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x},\quad \forall x\in\mathcal{X}\,,\quad \mathcal{X}\subset\mathbb{R}^n\,,\qquad \xi=\overline{1,k_1+1}\,,$$

числа $h_{\xi q} = \overset{*}{h}_{\xi q} + \tilde{h}_{\xi q}\, i$, $h_{\theta q} = \overset{*}{h}_{\theta q} + \tilde{h}_{\theta q}\, i$, $q = \overline{0, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, k_1 + 1}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1} \big(\lambda_\xi^j h_{\xi 0} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} \mu_q^{\xi j} h_{\xi q} \big) + \lambda_{2k_1+1}^j h_{2k_1+1,0} +$$

$$+ \sum_{\theta=1}^{k_2} \big(\lambda_\theta^j h_{\theta 0} + \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \mu_q^{\theta j} h_{\theta q} \big) = 0, \qquad j = \overline{1, m},$$

а $\lambda_{2\xi-1}^j = \overset{*}{\lambda}{}_\xi^j + \overset{\sim}{\lambda}{}_\xi^j i$, $\lambda_{2\xi}^j = \overset{*}{\lambda}{}_\xi^j - \overset{\sim}{\lambda}{}_\xi^j i$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\lambda_{2k_1+1}^j = \overset{*}{\lambda}{}_{2k_1+1}^j + \overset{\sim}{\lambda}{}_{2k_1+1}^j i$, и λ_θ^j, $\theta = \overline{1, k_2}$, $j = \overline{1, m}$, — соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j, $j = \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0,(2\xi-1)} = \overset{*}{\nu}{}^{0\xi} + \overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi} i$, $\nu^{0,2\xi} = \overset{*}{\nu}{}^{0\xi} - \overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi} i$, $\xi = \overline{1, k_1}$, $\nu^{0,(2k_1+1)} = \overset{*}{\nu}{}^{0,(2k_1+1)} + \overset{\sim}{\nu}{}^{0,(2k_1+1)} i$, и $\nu^{0\theta}$, $\theta = \overline{1, k_2}$. Числа

$$\mu_q^{\xi j} = \mathfrak{A}_j v_q^\xi(x), \quad \overset{*}{\mu}{}_q^{\xi j} = \operatorname{Re} \mu_q^{\xi j}, \quad \overset{\sim}{\mu}{}_q^{\xi j} = \operatorname{Im} \mu_q^{\xi j}, \quad \mu_q^{\theta j} = \mathfrak{A}_j v_q^\theta(x)$$

при $q = \overline{1, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, k_1 + 1}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, $j = \overline{1, m}$. Функции $v_q^\xi = \overset{*}{v}{}_q^\xi + \tilde{v}{}_q^\xi i$ и v_q^θ, $q = \overline{1, \varepsilon_k}$, $k = \xi$ или $k = \theta$, $\xi = \overline{1, k_1 + 1}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, находятся из системы (21), а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось равенство

$$2 \sum_{\xi=1}^{k_1} \varepsilon_\xi + \sum_{\theta=1}^{k_2} \varepsilon_\theta = m - 2k_1 - k_2, \quad 2k_1 + 1 + k_2 \leqslant r,$$

$\varepsilon_\xi \leqslant s_\xi - 1$, $\xi = \overline{1, k_1}$, где k_1 — количество комплексно сопряжённых пар собственных векторов, $\varepsilon_\theta \leqslant s_\theta - 1$, $\theta = \overline{1, k_2}$, а k_2 — количество вещественных собственных векторов.

Для якобиевой системы

$$(x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_5 + x_6)\, \partial_1 u + (2x_2 - 2x_3 - 2x_5 - 2x_6)\, \partial_2 u +$$

$$+ (3x_2 - 2x_3 - 2x_5 - 2x_6)\, \partial_3 u + (-4x_2 + 2x_4 - 2x_5 + 2x_6) \partial_4 u +$$

$$+ (2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6) \partial_5 u + (-x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 - x_6)\, \partial_6 u = 0,$$

$$(2x_2 + x_5 + x_6)\, \partial_1 u - (x_1 + 3x_2 + x_5 + x_6)\, \partial_2 u -$$

$$- \ (x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_5 + 2x_6)\ \partial_3 u \ + \ (2x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_6)\partial_4 u \ +$$
$$+ \ (3x_1{+}3x_2{+}2x_3{+}2x_4{+}x_5{+}4x_6)\partial_5 u - (2x_1{+}x_2{+}2x_3{+}2x_4{+}x_5{+}4x_6)\ \partial_6 u \ = \ 0\,,$$

$$(3x_1 - x_5 - x_6)\ \partial_1 u \ + \ (-x_1 + 2x_2 + x_5 + x_6)\ \partial_2 u \ +$$
$$+ \ (-2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 + x_6)\ \partial_3 u \ + \ (x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 - x_6)\partial_4 u \ +$$
$$+ \ (2x_1 + x_2 - x_3 - x_6)\partial_5 u \ + \ (-x_1 - x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6)\ \partial_6 u \ = \ 0\,,$$

$$(x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_5 + 2x_6)\ \partial_1 u \ - \ (2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 4x_6)\ \partial_2 u \ -$$
$$- \ (3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_5 + 5x_6)\ \partial_3 u \ + \ (3x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 2x_4 + 7x_5 + 7x_6)\partial_4 u \ +$$
$$+ \ (3x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 7x_5 + 5x_6)\partial_5 u \ + \ (x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 4x_5 - 2x_6)\ \partial_6 u \ = \ 0\,,$$

на основании собственных чисел $\lambda_2^1 = \lambda_1^1 = 1 + i,\ \lambda_5^1 = 2i$, которым соответствуют элементарные делители $\left(\lambda^1 - 1 - i\right)^2$ и $\lambda^1 - 2i$, собственных векторов $\nu^{01} = (1, 1{+}i, 0, 0, i, i)$, $\nu^{02} = (1, 0, 1{+}i, 1, i, 1)$ и присоединённого вектора $\nu^{11} = (1 + i, 0, 1 + i, 0, i, i)$, составляем функции

$$\overset{*}{v}_1 \colon x \to \ \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) \ + \ (x_2 + x_5 + x_6)(x_1 + x_3 + x_5 + x_6)}{(x_1 + x_2)^2 \ + \ (x_2 + x_5 + x_6)^2}\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}\,,$$

$$\tilde{v}_1 \colon x \to \ \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_3 + x_5 + x_6) \ - \ (x_1 + x_3)(x_2 + x_5 + x_6)}{(x_1 + x_2)^2 \ + \ (x_2 + x_5 + x_6)^2}\,, \quad \forall\, x \in \mathfrak{X}\,,$$

и строим (случай 2а) семейства гиперповерхностей

$$W_1 = \Big\{ x \colon \big[(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_5 + x_6)^2\big]\big[(x_1 + x_3 + x_4 + x_6)^2 + (x_3 + x_5)^2\big]^2 \cdot$$
$$\cdot \exp\Big[- 10\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2 + x_5 + x_6}{x_1 + x_2} \ + \ 8\,\overset{*}{v}_1\,(x) \ + \ 6\,\tilde{v}_1\,(x)\Big] \ = \ C_1 \Big\}$$

и

$$W_2 \ = \ \Big\{ x \colon \ \big[(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_5 + x_6)^2\big]^3 \exp\Big[\ - \ 10\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2 + x_5 + x_6}{x_1 + x_2} \ -$$
$$- \ 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_3 + x_5}{x_1 + x_3 + x_4 + x_6} \ + \ 12\,\overset{*}{v}_1\,(x) \ + \ 14\,\tilde{v}_1\,(x)\Big] \ = \ C_2 \Big\}\,,$$

и

которые, будучи функционально независимыми, образуют интегральный базис на областях $\mathcal{X}$ из множества $\{x\colon x_1+x_2\neq 0,\ x_1+x_3+x_4+x_6\neq 0\}$.

Случай 6. Функция v_l^{γ}, $\gamma\in\{1,\ldots,k_1\}$, $l\in\{1,\ldots,\varepsilon_\gamma\}$, не имеет комлексно сопряжённой функции. Тогда у дифференциальной системы (1) существуют первые интегралы

$$W_1 = \Biggl\{x:\ \prod_{\xi=1}^{k_1}[P_\xi(x)]^{\overset{*}{h}_{2\xi-1,0}+\overset{*}{h}_{2\xi,0}}\exp\Biggl\{-2\Bigl(\tilde{h}_{2\xi-1,0}-\tilde{h}_{2\xi,0}\Bigr)\varphi_\xi(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2(1-\delta_{ql}\,\delta_{\xi\gamma})\Bigl[\Bigl(\overset{*}{h}_{\xi,(2q-1)}+\overset{*}{h}_{\xi,2q}\Bigr)\overset{*}{v}{}_q^{\xi}(x)+\Bigl(\tilde{h}_{\xi,2q}-\tilde{h}_{\xi,(2q-1)}\Bigr)\tilde{v}{}_q^{\xi}(x)\Bigr]\Biggr\}\cdot$$

$$\cdot\exp\Bigl[2\Bigl(\overset{*}{h}_{\gamma l}\overset{*}{v}{}_l^{\gamma}(x)-\tilde{h}_{\gamma l}\tilde{v}{}_l^{\gamma}(x)\Bigr)\Bigr]\prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\nu^{0\theta}x\bigr)^{2\overset{*}{h}_{\theta0}}\exp\Biggl[2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\overset{*}{h}_{\theta q}\,v_q^{\theta}(x)\Biggr]=C_1\Biggr\},$$

и

$$W_2 = \Biggl\{x:\ \prod_{\xi=1}^{k_1}[P_\xi(x)]^{\tilde{h}_{2\xi-1,0}+\tilde{h}_{2\xi,0}}\exp\Biggl\{2\Bigl(\overset{*}{h}_{2\xi-1,0}-\overset{*}{h}_{2\xi,0}\Bigr)\varphi_\xi(x)+$$

$$+\sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi}2(1-\delta_{ql}\,\delta_{\xi\gamma})\Bigl[\Bigl(\tilde{h}_{\xi,(2q-1)}+\tilde{h}_{\xi,2q}\Bigr)\overset{*}{v}{}_q^{\xi}(x)+\Bigl(\overset{*}{h}_{\xi,(2q-1)}-\overset{*}{h}_{\xi,2q}\Bigr)\tilde{v}{}_q^{\xi}(x)\Bigr]\Biggr\}\cdot$$

$$\cdot\exp\Bigl[2\Bigl(\overset{*}{h}_{\gamma l}\tilde{v}{}_l^{\gamma}(x)-\tilde{h}_{\gamma l}\overset{*}{v}{}_l^{\gamma}(x)\Bigr)\Bigr]\prod_{\theta=1}^{k_2}\bigl(\nu^{0\theta}x\bigr)^{2\tilde{h}_{\theta0}}\exp\Biggl[2\sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta}\tilde{h}_{\theta q}\,v_q^{\theta}(x)\Biggr]=C_2\Biggr\},$$

где полиномы

$$P_\xi:\ x\to\Bigl(\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x\Bigr)^2+\Bigl(\overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi}x\Bigr)^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n,\qquad \xi=\overline{1,k_1+1},$$

функции

$$\varphi_\xi\colon\ x\to\operatorname{arctg}\frac{\overset{\sim}{\nu}{}^{0\xi}x}{\overset{*}{\nu}{}^{0\xi}x},\quad \forall x\in\mathcal{X},\quad \mathcal{X}\subset\mathbb{R}^n,\qquad \xi=\overline{1,k_1+1},$$

числа $h_{\xi q}=\overset{*}{h}_{\xi q}+\tilde{h}_{\xi q}\,i$, $h_{\theta q}=\overset{*}{h}_{\theta q}+\tilde{h}_{\theta q}\,i$, $q=\overline{0,\varepsilon_k}$, $k=\xi$ или

$k = \theta$, $\xi = \overline{1, k_1+1}$, $\theta = \overline{1, k_2}$, составляют нетривиальное решение алгебраической системы

$$\sum_{\xi=1}^{2k_1} \big[\, \lambda_\xi^j h_{\xi 0} \;+\; \sum_{q=1}^{\varepsilon_\xi} (1-\delta_{ql}\,\delta_{\xi\gamma})\, \mu_q^{\xi j}\, h_{\xi q} \big] \;+\; \mu_l^{\gamma j}\, h_{\gamma l} \;\;+$$

$$+ \sum_{\theta=1}^{k_2} \big(\, \lambda_\theta^j h_{\theta 0} \;+\; \sum_{q=1}^{\varepsilon_\theta} \mu_q^{\theta j}\, h_{\theta q} \big) \;\;=\;\; 0\,, \quad j = \overline{1, m}\,,$$

а $\lambda^j_{2\xi-1} \;= \overset{*}{\lambda}{}^j_\xi + \;\widetilde{\lambda}{}^j_\xi\, i$, $\lambda^j_{2\xi} \;= \overset{*}{\lambda}{}^j_\xi - \;\widetilde{\lambda}{}^j_\xi\, i$, $\xi \;=\; \overline{1, k_1}$, $\lambda^j_{2k_1+1} \;= \overset{*}{\lambda}{}^j_{2k_1+1} \;+$ $+\; \widetilde{\lambda}{}^j_{2k_1+1}\, i$, и λ^j_θ , $\theta \;=\; \overline{1, k_2}$, $j \;=\; \overline{1, m}$, — соответственно комплексные и вещественные собственные числа матриц A_j , $j \;=\; \overline{1, m}$, которым соответствуют собственные векторы $\nu^{0,(2\xi-1)} \;= \overset{*}{\nu}{}^{0\xi} + \;\widetilde{\nu}{}^{0\xi}\, i$, $\nu^{0,2\xi} \;= \overset{*}{\nu}{}^{0\xi} - \;\widetilde{\nu}{}^{0\xi}\, i$, $\xi \;=\; \overline{1, k_1}$, $\nu^{0,(2k_1+1)} \;= \overset{*}{\nu}{}^{0,(2k_1+1)} + \;\widetilde{\nu}{}^{0,(2k_1+1)}\, i$, и $\nu^{0\theta}$, $\theta \;=\; \overline{1, k_2}$. Числа

$$\mu_q^{\xi j} \;=\; \mathfrak{A}_j v_q^\xi(x)\,, \quad \overset{*}{\mu}{}_q^{\xi j} \;=\; \operatorname{Re} \mu_q^{\xi j}\,, \quad \widetilde{\mu}{}_q^{\xi j} \;=\; \operatorname{Im} \mu_q^{\xi j}\,, \quad \mu_q^{\theta j} \;=\; \mathfrak{A}_j v_q^\theta(x)$$

при $q \;=\; \overline{1, \varepsilon_k}$, $k \;=\; \xi$ или $k \;=\; \theta$, $\xi \;=\; \overline{1, k_1+1}$, $\theta \;=\; \overline{1, k_2}$, $j \;=\; \overline{1, m}$. Функции $v_q^\xi \;= \overset{*}{v}{}_q^\xi + \;\widetilde{v}{}_q^\xi\, i$ и v_q^θ , $q \;=\; \overline{1, \varepsilon_k}$, $k \;=\; \xi$ или $k \;=\; \theta$, $\xi \;=\; \overline{1, k_1+1}$, $\theta \;=\; \overline{1, k_2}$, находятся из системы (21) , а ε_ξ и ε_θ выбираются так, чтобы выполнялось равенство

$$2 \sum_{\xi\,=\,1}^{k_1} \varepsilon_\xi \;+\; \sum_{\theta\,=\,1}^{k_2} \varepsilon_\theta \;\;=\;\; m - 2k_1 - k_2 + 1\,, \qquad 2k_1 + k_2 \leqslant r\,,$$

$\varepsilon_\xi \;\leqslant\; s_\xi - 1$, $\xi \;=\; \overline{1, k_1}$, где k_1 — количество комплексно сопряжённых пар собственных векторов, $\varepsilon_\theta \;\leqslant\; s_\theta - 1$, $\theta \;=\; \overline{1, k_2}$, а k_2 — количество вещественных собственных векторов.

Для якобиевой системы

$$\mathfrak{A}_1(x)\, u \;=\; 0\,, \quad \mathfrak{A}_2(x)\, u \;=\; 0\,,$$

построенной на основании линейных дифференциальных операторов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ из системы (30) , находим (случай 2б) семейства гиперповерхностей

$$W_1 \;=\; \Big\{\, x\colon \;\; \big[(x_1 + x_3 + x_4 + x_6)^2 \;+\; (x_3 + x_5)^2 \big] \cdot$$

$$\cdot \exp\left[- \operatorname{arctg} \frac{x_3 + x_5}{x_1 + x_3 + x_4 + x_6} - \tilde{v}_1 (x) \right] = C_1 \Bigg\},$$

$$W_2 = \Bigg\{ x\colon \left[(x_1 + x_3 + x_4 + x_6)^2 + (x_3 + x_5)^2 \right] \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-2 \operatorname{arctg} \frac{x_3 + x_5}{x_1 + x_3 + x_4 + x_6} + 2 \overset{*}{v}_1 (x) \right] = C_2 \Bigg\},$$

$$W_3 = \Bigg\{ x\colon \left[(x_1 + x_3 + x_4 + x_6)^2 + (x_3 + x_5)^2 \right]^2 \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-2 \operatorname{arctg} \frac{x_3 + x_5}{x_1 + x_3 + x_4 + x_6} - \tilde{v}_2 (x) \right] = C_3 \Bigg\}$$

и

$$W_4 = \Big\{ x\colon \overset{*}{v}_2 (x) = C_4 \Big\} ,$$

где функции $\tilde{v}_1$, $\overset{*}{v}_1$, $\tilde{v}_2$ и $\overset{*}{v}_2$ такие же, как и соответствующие по обозначению функции, посредством которых построен интегральный базис системы (30).

Эти семейства гиперповерхностей, будучи функционально независимыми, образуют базис первых интегралов на областях $\mathcal{X}$ из множества $\{x\colon x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \neq 0\}$ рассматриваемой дифференциальной системы.

Список литературы

1. *Гюнтер Н.М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. – Л.; М.: ГТТИ, 1934.

2. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 2. – М.; Л.: ОНТИ, 1936.

3. *Горбузов В.Н.* Симметрии многомерных дифференциальных систем с неполной интегрируемостью // Вестник Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. – 1999. – № 1. – С. 26 – 37.

4. *Буслюк Д. В.* Интегралы и последние множители дифференциальных систем в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 3. – С. 418 – 419.

5. *Горбузов В. Н.* Об одной дифференциальной системе второго порядка и её периодических решениях // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 9. – С. 1487 – 1497.

6. *Горбузов В. Н.* Построение первых интегралов и последних множителей полиномиальных автономных многомерных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 562 – 564.

7. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. – М.: Наука, 1966.

8. *Goursat E.* Lecons sur l'intégration des équations aux dérivées partíelles du premier ordre. – Paris, 1921.

9. *Горбузов В. Н.* Частные интегралы вещественной автономной полиномиальной системы уравнений в полных дифференциалах // Дифференц. уравнения и процессы управления (http : // www.neva.ru). – 2000. – №2. – С. 1 – 36.

10. *Буслюк Д. В., Горбузов В. Н.* Интегралы системы Якоби в частных производных //Вестник Гродненского гос. ун-та. Сер. 2. – 2000. – № 1. – С. 4 – 11.

11. *Буслюк Д. В.* Интегралы и последние множители дифференциальных систем уравнений в частных производных : Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Гродно, 2000.

12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988.