ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

РЕШЕНИЯ, ИНТЕГРАЛЫ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ СИСТЕМЫ ДАРБУ n-ГО ПОРЯДКА

В. Н. Горбузов, П. Б. Павлючик

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
230023, Гродно, ул. Ожешко, 22
e-mail: gorbuzov@grsu.unibel.by

Постановка задачи. Предметом исследования является дифференциальная система

$$\frac{dw}{dz} = [a(z) + M(z,w)E]w^T, \tag{1}$$

где квадратная матрица $a(z) = \|a_{ij}(z)\|$, элементами которой являются функции a_{ij}, голоморфные по z в области $G \subset \mathbb{C}$, имеет порядок $n \geqslant 2$; E — единичная матрица; M — однородная функция относительно $w = (w_1, \ldots, w_n)$ порядка ρ с голоморфными коэффициентами по z в области G; $dw/dz = \operatorname{colon}(dw_1/dz, \ldots, dw_n/dz)$. Следуя [1], где система (1) рассматривалась при $n = 2$, за ней сохраним название системы Дарбу, а также построим базис первых интегралов и исследуем наличие предельных циклов. Для системы (1) над полем комплексных чисел укажем подходы нахождения решений и выделим случаи отсутствия у решений подвижных критических особых точек.

Решения системы Дарбу. Рассмотрим индуцированную системой (1) линейную однородную дифференциальную систему n-го порядка

$$\frac{du}{dz} + a^T(z)u^T = 0, \tag{2}$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $du/dz = \operatorname{colon}(du_1/dz, \dots, du_n/dz)$, a^T — матрица, транспонированная к матрице a.

Пусть частные решения $u^{(i)}(z) = (u_{i1}(z), \dots, u_{in}(z))$, $i = \overline{1,n}$, линейной однородной дифференциальной системы (2) образуют её фундаментальную систему решений. Тогда функции

$$\varphi_i \;=\; u^{(i)}(z)w, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

будут линейно независимыми при любом фиксированном z из области G. Производные функций (3) в силу системы (1) равны

$$\mathsf{D}\varphi_i\big|_{(1)} \;=\; \varphi_i(z,w)M(z,w), \quad i = \overline{1,n}.$$

Поэтому с помощью линейного невырожденного преобразования

$$\eta_i \;=\; \varphi_i(z,w), \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

составленного из функций (3), систему Дарбу (1) приводим к виду

$$\frac{d\eta_i}{dz} \;=\; \eta_i \mathcal{M}(z,\eta), \quad i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

где $\mathcal{M}$ — однородная функция относительно $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ порядка ρ, полученная на основании однородной функции M заменой (4).

Пусть

$$\mathcal{M}(z,\eta)dz \;=\; d\tau. \tag{6}$$

Тогда систему (5) приводим к дифференциальной системе

$$d\eta_i \;=\; \eta_i d\tau, \quad i = \overline{1,n},$$

с общим решением

$$\eta_i \;=\; C_i e^{\tau}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

где $C_i, i = \overline{1,n}$, суть произвольные постоянные. Подставляя (7) в параметризацию (6), с учётом однородности функции $\mathcal{M}$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$e^{\rho\tau}\mathcal{M}(z, C_1, \dots, C_n)dz \;=\; d\tau,$$

из которого, с учётом (7), находим общее решение системы (5) при $\rho \neq 0$

$$\eta_i = C_i \left[C_{n+1} - \rho \int \mathcal{M}(z, C_1, \dots, C_n)dz \right]^{-1/\rho}, \; i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

где C_{n+1} — произвольная постоянная и при $\rho = 0$

$$\eta_i = C_i \exp \int \mathcal{M}(z, C_1, \ldots, C_n) dz, \ i = \overline{1, n}. \tag{9}$$

Отсюда, учитывая замену (4), находим общее решение системы (1). Более того, из (8) и (9) с учётом преобразования (4) устанавливаем следующие свойства решений системы Дарбу (1) в комплексной плоскости z.

Теорема 1. *Для того, чтобы решения системы Дарбу* (1) *не имели подвижных критических особых точек необходимо, а при отсутствии подвижных критических особенностей у функции* $\int \mathcal{M}(z, C_1, \ldots, C_n) dz$ *и достаточно, чтобы* $\rho = 0$ *или* $\rho = 1/m$, *где* m *— целое ненулевое число.*

Теорема 2. *Если функция* $M(z, w)$ *является однородным полиномом по* w *степени* ρ, *то необходимым и достаточным условием отсутствия подвижных критических особых точек у решений системы Дарбу* (1) *является то, что* $\rho = 0$ *или* $\rho = 1$.

Теорема 3. *Если система Дарбу* (1) *автономная, то она интегрируется в квадратурах.*

Интегралы автономной системы Дарбу. Пусть система Дарбу (1) является автономной

$$\frac{dw}{dz} \ = \ [a + M(w)E]w^T, \tag{1A}$$

где $a = \|a_{ij}\|_{n \times n}$, a_{ij} — некоторые вещественные или комплексные постоянные, $M(w)$ — однородная функция относительно w порядка ρ. По ранее доказанному (теорема 3) система (1A) интегрируется в квадратурах. Рассмотрим подходы построения общего интеграла системы (1A).

Для $H(w) = Aw$, где у вектора $A = (A_1, \ldots, A_n)$ координатами являются вещественные или комплексные числа A_i, $i = \overline{1, n}$, производная в силу системы (1A) равна

$$\frac{dH}{dz}\Big|_{(1A)} \ = \ H(w)M(w) + Aaw. \tag{10}$$

Будем искать A таким, чтобы выполнялось тождество

$$Aaw \ = \ \lambda H(w), \quad \lambda \ = \ \text{const},$$

которое равносильно линейной однородной системе

$$(a^T - \lambda E)A^T = 0, \tag{11}$$

имеющей нетривиальные решения лишь при

$$\det(a^T - \lambda E) = 0. \tag{12}$$

Из характеристического уравнения (12) находим корни λ, на основании которых строим функции $H(w)$.

Согласно [2, с. 177], матрицу a^T всегда можно представить в виде $a^T = BIB^{-1}$, где B — некоторая невырожденная матрица, $I = \mathrm{diag}\{I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{1p_1}, \ldots, I_{rp_r}\}$ — нормальная жорданова форма, $I_{lk} = I_{lk}(\lambda_l)$ — клетки Жордана порядка s_{lk}, при этом корню λ_l характеристического уравнения (12) соответствует p_l клеток Жордана, $k = \overline{1, p_l}$, $l = \overline{1, r}$.

Перейдём с помощью невырожденного линейного преобразования в новый базис, соответствующий нормальной жордановой форме I. Новый базис разобъём на части так, чтобы каждая часть соответствовала определённой клетке Жордана I_{lk}. Тогда пространство $\mathbb{K}^n$ распадается на прямую сумму подпространств $\mathbb{K}_{lk}$, каждое из которых определяется базисом, соответствующим клетке Жордана I_{lk}, и имеет размерность $\dim \mathbb{K}_{lk} = s_{lk}$. Систему (11) в новом базисе преобразовываем к виду

$$(I - \lambda E)K = 0, \tag{13}$$

где $K = B^{-1}A^T$.

Рассмотрим систему (13) в новом базисе, соответствующем пространству $\mathbb{K}_{lk}$. Имеем систему уравнений

$$(I_{lk} - \lambda_l E_{lk})K_{lk} \;=\; 0, \quad k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}. \tag{14}$$

Исходя из вида клетки Жордана I_{lk}, система (14) и система

$$(I_{lk} - \lambda_l E_{lk})K_{lk}^{\nu} \;=\; \nu K_{lk}^{\nu-1}, \quad \nu = \overline{1, s_{lk} - 1}, \tag{15}$$

где $K_{lk}^0 = K_{lk}$, имеют s_{lk} линейно независимых нетривиальных решений

$$\begin{gathered} K_{lk}^0 \;=\; \mathrm{colon}(1, 0, \ldots, 0), \quad K_{lk}^1 \;=\; \mathrm{colon}(1, 1, 0, \ldots, 0), \\ K_{lk}^2 \;=\; \mathrm{colon}(1, 2, 2, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad K_{lk}^{s_{lk}-1} \;=\; \mathrm{colon}(1, s_{lk} - 1, \ldots, (s_{lk} - 1)!). \end{gathered} \tag{16}$$

Перейдя к старому базису, с учётом (14) — (16) , получаем, что

$$\begin{gathered} \frac{dH_{lk}^{\nu}}{dz}\Big|_{(1A)} = H_{lk}^{\nu}(w)[\lambda_l + M(w)] + \nu H_{lk}^{\nu-1}(w), \\ \nu = \overline{0, s_{lk} - 1}, \quad k = \overline{1, p_l}, \quad l = \overline{1, r}, \end{gathered} \tag{17}$$

где соответствующие коэффициенты линейных функций $H_{lk}^{\nu}(w)$ получены из K_{lk}^{ν} после возвращения из нового базиса в старый.

Так как переход к старому базису осуществляется путём линейного невырожденного преобразования, а в новом базисе функции $H_{lk}^{\nu}(w)$ линейно независимы, то преобразованные функции также линейно независимы. А значит, тождество

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j H_{l_j k_j}^{\nu_j}(w) = 0 \tag{18}$$

имеет место лишь при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Поэтому определитель системы однородных линейных уравнений относительно α_j, на которые распадается тождество (18), отличен от нуля. В то же время, он совпадает с определителем матрицы Якоби n функций $H_{lk}^{\nu}(w)$, что доказывает их функциональную независимость.

Пусть функции $v_p^{lk}(w)$ такие, что

$$H_{lk}^{\nu}(w) \;=\; \sum_{p=1}^{\nu} \binom{p-1}{\nu-1} v_p^{lk}(w) H_{lk}^{\nu-p}(w), \quad \nu = \overline{1, s_{lk}-1}. \tag{19}$$

Систему (19) всегда можно разрешить относительно $v_p^{lk}(w)$, так как её главный определитель равен $\left[H_{lk}^{0}(w)\right]^{s_{lk}-1}$.

Докажем, что для функций $v_p^{lk}(w)$ справедливы тождества

$$\frac{dv_p^{lk}}{dz}\Big|_{(1A)} = \begin{bmatrix} 1 & \text{при} & p = 1; \\ 0 & \text{при} & p = \overline{2, s_{lk}-1}. \end{bmatrix} \tag{20}$$

Справедливость тождеств (20) при $p = 1$ и $p = 2$ непосредственно устанавливаем на основании тождеств (17). Доказательство для $p \geqslant 3$ проведём методом математической индукции.

Предположим, что тождества (20) справедливы при $p = \overline{1, \mu-1}$. Продифференцируем в силу системы (1A) уравнение из (19) при $\nu = \mu$ с учётом (20) при $p = \overline{1, \mu-1}$ и (17):

$$\frac{dH_{lk}^{\mu}}{dz}\Big|_{(1A)} = [\lambda_l + M(w)] \sum_{p=1}^{\mu} \binom{p-1}{\mu-1} v_p^{lk}(w) H_{lk}^{\mu-p}(w) +$$

$$+ (\mu-1) \sum_{p=1}^{\mu-1} \binom{p-1}{\mu-2} v_p^{lk}(w) H_{lk}^{\mu-p-1}(w) + H_{lk}^{\mu-1}(w) + H_{lk}^{0}(w) \frac{dv_\mu^{lk}}{dz}\Big|_{(1A)}.$$

Отсюда, в силу (19) при $\nu = \mu - 1$ и $\nu = \mu$, (17) при $\nu = \mu$ и того, что $H^0_{lk}(w) \not\equiv 0$, получаем $\dfrac{dv^{lk}_\mu}{dz}\Big|_{(1A)} = 0$. В результате из (17) и (20) имеем системы:

$$\frac{dH^0_{lk}}{dz}\Big|_{(1A)} = H^0_{lk}(w)[\lambda_l + M(w)], \quad k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}; \tag{21.1}$$

$$\frac{dv^{lk}_1}{dz}\Big|_{(1A)} = 1,\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}; \tag{21.2}$$

$$\frac{dv^{lk}_g}{dz}\Big|_{(1A)} = 0,\ g = \overline{2, s_{lk} - 1},\ k = \overline{1, p_l},\ l = \overline{1, r}, \tag{21.3}$$

где $\sum\limits_{l=1}^{r} \sum\limits_{k=1}^{p_l} s_{lk} = n.$

Рассмотрим в отдельности три логичесике возможности, когда матрица Жордана I: 1) состоит из одной клетки Жордана I_{11}; 2) состоит из n клеток Жордана I_{1k}, $k = \overline{1, n}$; 3) не состоит ни из одной клетки Жордана I_{11}, ни из n клеток Жордана I_{1k}, $k = \overline{1, n}$.

В первом случае в силу тождеств (21.3) система (1A) имеет $n-2$ первых интеграла $v^{11}_g(w) = C_g$, $g = \overline{2, n-1}$, которые будут функционально независимыми, учитывая способ их построения.

Во втором случае в силу тождеств (21.1) система (1A) имеет $n-1$ функционально независимых первых интегралов $H^0_{1k}(w)[H^0_{1n}(w)]^{-1} = C_k$, $k = \overline{1, n-1}$.

Рассмотрим третий случай. Пусть тождества (21.1) доставляют $m-1$ первых интегралов $v^{lk}_1(w)[v^{ij}_1(w)]^{-1} = C$, а тождества (21.3) — s первых интегралов $v^{lk}_g(w) = C$, $g \geqslant 2$, причём все эти интегралы будут функционально независимыми и $s + m = n - \sum\limits_{l=1}^{r} p_l$. Здесь и далее C суть произвольная постоянная.

Любые три тождества системы (21.1) доставляют первый интеграл вида $\prod\limits_{\tau=1}^{3} [H^0_{l_\tau k_\tau}(w)]^{\alpha_\tau} = C$, где α_τ — некоторые постоянные, что доказывается методом, аналогичным приведённому впервые в [3], а позднее в [1, с. 35 – 47; 4, с. 192 – 196; 5; 6, с. 54 – 61; 7; 8], при этом число функционально независимых среди них равно $\sum\limits_{l=1}^{r} p_l - 2$.

Если учесть, что на основании двух тождеств из (21.1) и одного из

(21.2) всегда можно построить первый интеграл вида

$$H^0_{l_1k_1}(w)[H^0_{l_2k_2}(w)]^{-1}\exp[(\lambda_{l_2}-\lambda_{l_1})v_1^{l_1k_1}(w)]=C,$$

который будет функционально независимым с остальными, то в третьем случае уравнение (1A) имеет $n-2$ функционально независимых первых интегралов.

Для завершения построения общего интеграла [9, с. 335 — 345] системы (1A) продолжим рассмотрение первого и второго случаев.

В силу теоремы Эйлера об однородной функции

$$\operatorname{div}\bigl\{[a+M(w)E]w^T\bigr\}=\operatorname{Sp}a+(n+\rho)M(w). \tag{22}$$

Тогда в первом случае на основании тождества (22) получаем последний множитель Якоби

$$\mu \;=\; [H^0_{11}(w)]^{-(n+\rho)}\exp\{[(n+\rho)\lambda_1-\operatorname{Sp}a]v_1^{11}(w)\} \tag{23}$$

системы (1A).

В третьем случае, если система (21.1) состоит из двух тождеств, получаем последний множитель Якоби вида (23); если же в системе (21.1) содержится более двух тождеств, то методом, аналогичным разработанному в [3], строим последний множитель Якоби вида $\mu=\prod\limits_{\tau=1}^{3}[H^0_{l_\tau k_\tau}(w)]^{\alpha_\tau}$ или (23), что и завершает построение общего интеграла системы Дарбу (1A) в целом.

Для системы Дарбу третьего порядка

$$\begin{gathered}\frac{dw_1}{dz}\;=\;w_1+w_1\sqrt{w_1^2+w_3^2},\quad \frac{dw_2}{dz}\;=\;w_1+w_2+w_2\sqrt{w_1^2+w_3^2},\\ \frac{dw_3}{dz}\;=\;w_1+w_2+w_3+w_3\sqrt{w_1^2+w_3^2}\end{gathered} \tag{S_1}$$

система (11) имеет вид

$$(1-\lambda)A_1+A_2+A_3=0,\quad (1-\lambda)A_2+A_3=0,\quad (1-\lambda)A_3\;=\;0, \tag{$S_1.1$}$$

характеристическое уравнение которой имеет трёхкратный корень $\lambda=1$.

На основании представления $a^T=BIB^{-1}$ с помощью преобразования $K=B^{-1}A^T$ систему $(S_1.1)$ приводим к системе

$$K_2^0=0,\quad K_3^0=0,$$

которая совместна с системами (15) для $(S_1.1)$:

$$K_2^1 = 1, \quad K_3^1 = 0 \quad \text{и} \quad K_2^2 = 2, \quad K_3^2 = 2$$

имеет три линейно независимых нетривиальных решения

$$K_{11}^0 \; = \; \operatorname{colon}(1,0,0), \quad K_{11}^1 \; = \; \operatorname{colon}(1,1,0), \quad K_{11}^2 \; = \; \operatorname{colon}(1,2,2).$$

Отсюда, используя обратное преобразование $A^T = BK$, получаем функции

$$H_{11}^0(w) \; = \; w_1, \quad H_{11}^1(w) \; = \; 2w_1 + w_2, \quad H_{11}^2(w) \; = \; 5w_1 + 2w_2 + 2w_3,$$

на основании которых, используя тождество (19), находим

$$v_1^{11}(w) = (2w_1 + w_2)w_1^{-1}, \quad v_2^{11}(w) = [w_1(5w_1 + 2w_2 + 2w_3) - (2w_1 + w_2)^2]w_1^{-2}.$$

Поскольку производная $v_2^{11}(w)$ в силу системы (S_1) тождественно равна нулю, то семейство $v_2^{11}(w) = C$ является первым интегралом системы Дарбу (S_1).

Для завершения интегрирования по формуле (23) строим последний множитель

$$\mu(w) \; = \; w_1^{-4}\exp[(2w_1 + w_2)w_1^{-1}].$$

Для системы Дарбу пятого порядка

$$\frac{dw_i}{dz} \; = \; w_i + w_i(w_1^2 + w_3^2 + w_5^2), \quad i = \overline{1,5}, \tag{S_2}$$

выполняются соотношения $a^T = I = \operatorname{diag}\{I_{11}, I_{12}, I_{13}, I_{14}, I_{15}\}$, система (11) имеет вид

$$(1 - \lambda)A_i \; = \; 0, \quad i = \overline{1,5}, \tag{$S_2.1$}$$

а $\lambda = 1$ является пятикратным корнем её характеристического уравнения.

Система $(S_2.1)$ имеет пять линейно независимых решений

$$A_1 \; = \; (1,0,0,0,0), \; A_2 \; = \; (0,1,0,0,0), \; A_3 \; = \; (0,0,1,0,0),$$

$$A_4 \; = \; (0,0,0,1,0), \; A_5 \; = \; (0,0,0,0,1),$$

которым соответствуют функции $H_{1i}^0(w) = w_i$, $i = \overline{1,5}$, доставляющие четыре функционально независимых первых интеграла $w_5^{-1}w_j = C_j$, $j = \overline{1,4}$, системы Дарбу (S_2).

Для системы Дарбу четвёртого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{dz} &= w_1 + w_1(w_2^3 + w_4^3), \quad \frac{dw_2}{dz} = w_1 + w_2 + w_2(w_2^3 + w_4^3), \\ \frac{dw_3}{dz} &= w_1 + 2w_3 + w_3(w_2^3 + w_4^3), \quad \frac{dw_4}{dz} = 2w_1 + 3w_4 + w_4(w_2^3 + w_4^3), \end{aligned} \qquad (S_3)$$

система (11) имеет вид

$$\begin{gathered} (1-\lambda)A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4 = 0, \quad (1-\lambda)A_2 = 0, \\ (2-\lambda)A_3 = 0, \quad (3-\lambda)A_4 = 0, \end{gathered} \qquad (S_3.1)$$

характеристическое уравнение которой имеет один двухкратный корень $\lambda_1 = 1$ и два простых корня $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 3$.

На основании представления $a^T = BIB^{-1}$ с помощью преобразования $K = B^{-1}A^T$ систему $(S_3.1)$ приводим к системе

$$(1-\lambda)K_1^0 + K_2^0 = 0, \quad (1-\lambda)K_2^0 = 0, \quad (2-\lambda)K_3^0 = 0, \quad (3-\lambda)K_4^0 = 0. \quad (S_3.2)$$

Пространство $\mathbb{K}^4$ распадается на прямую сумму подпространств $\mathbb{K}_{11}$, $\mathbb{K}_{21}$, $\mathbb{K}_{31}$ соответственно размерностей $s_{11} = 2$, $s_{21} = 1$, $s_{31} = 1$.

В базисе, соответствующем пространству $\mathbb{K}_{11}$, система $(S_3.2)$ примет вид $K_2^0 = 1$, а из системы (15) для $(S_3.1)$ получаем, что $K_2^1 = 1$. Поэтому в подпространстве $\mathbb{K}_{11}$ имеем $K_{11}^0 = \operatorname{colon}(1,0)$, $K_{11}^1 = \operatorname{colon}(1,1)$, а в пространстве $\mathbb{K}^4$ — $K_{11}^0 = \operatorname{colon}(1,0,0,0)$, $K_{11}^1 = \operatorname{colon}(1,1,0,0)$.

В базисе, соответствующем пространству $\mathbb{K}_{21}$, из $(S_3.2)$ получаем, что $(2-\lambda_2)K_3^0 = 0$. Поэтому, полагая $K_{21}^0 = 1$, в $\mathbb{K}^4$ имеем: $K_{21}^0 = \operatorname{colon}(0,0,1,0)$.

Аналогично, в базисе, соответствующем пространству $\mathbb{K}_{31}$, из $(S_3.2)$ получаем, что $(3-\lambda_3)K_4^0 = 0$. Полагая $K_{31}^0 = 1$, в $\mathbb{K}^4$ имеем: $K_{31}^0 = \operatorname{colon}(0,0,0,1)$.

Используя обратное преобразование $A^T = BK$, получаем функции

$$H_{11}^0(w) = w_1, \quad H_{11}^1(w) = 2w_1 + w_2, \quad H_{21}^0(w) = w_1 + w_3, \quad H_{31}^0(w) = w_1 + w_4.$$

На основании функции $H_{i1}^0(w), i = \overline{1,3}$, строим первый интеграл в виде произведения

$$\prod_{i=1}^{3} [H_{i1}^0(w)]^{\alpha_i} = C_1, \qquad (S_3.3)$$

где $\alpha_i, i = \overline{1,3}$, есть некоторые постоянные. Для этого, дифференцируя

$(S_3.3)$ в силу системы (S_3), получаем, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$, $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=$ $=0$. Следовательно, семейство

$$w_1(w_1+w_4)(w_1+w_3)^{-2} \ = \ C_1$$

является первым интегралом системы (S_3).

На основании функций $H_{11}^0(w)$ и $H_{11}^1(w)$, используя тождество (19), находим функцию $v_1^{11}(w)=(2w_1+w_2)w_1^{-1}$, производная которой в силу системы (S_3) равна единице. Поэтому семейство

$$w_1(w_1+w_3)^{-1}\exp[(2w_1+w_2)w_1^{-1}] \ = \ C_2$$

является первым интегралом системы (S_3), а функция $\mu(w)=w_1^{-7}$ будет её последним множителем, построенным в соответствии с формулой (23).

Предельные циклы автономной системы Дарбу. Рассмотрим систему (1A) в вещественном случае, то есть когда функции $w_i(z)$ и M являются функциями вещественных переменных, матрица a составлена из вещественных чисел. Система (17) примет вид

$$\frac{d\mathrm{Re}\,H_{lk}^{\nu}}{dz}\Big|_{(1A)} = \nu\,\mathrm{Re}\,H_{lk}^{\nu-1}+\mathrm{Re}\,\lambda_l\mathrm{Re}\,H_{lk}^{\nu}-\mathrm{Im}\,\lambda_l\mathrm{Im}\,H_{lk}^{\nu}+M\,\mathrm{Re}\,H_{lk}^{\nu}, \qquad (24.1)$$

$$\frac{d\mathrm{Im}\,H_{lk}^{\nu}}{dz}\Big|_{(1A)} = \nu\,\mathrm{Im}\,H_{lk}^{\nu-1}+\mathrm{Im}\,\lambda_l\mathrm{Re}\,H_{lk}^{\nu}+\mathrm{Re}\,\lambda_l\mathrm{Im}\,H_{lk}^{\nu}+M\,\mathrm{Im}\,H_{lk}^{\nu}, \qquad (24.2)$$

$$\nu=\overline{0,s_{lk}-1}, \quad k=\overline{1,p_l}, \quad l=\overline{1,r},$$

причём вещественному корню λ_l соотвествуют тождества (24.1), а паре мнимых корней $\lambda_l=\alpha_l\pm i\beta_l$, $\beta_l\neq 0$, — тождества (24.1) и (24.2).

Пусть уравнение (12) имеет $s\geqslant 0$ вещественных корней и $m\geqslant 0$ пар комплексно сопряжённых, $\sum\limits_{l=1}^{s+2m}\sum\limits_{k=1}^{p_l}s_{lk}=n$.

Выполним в системе (1A) линейную замену

$$y_i \ = \ H_{lk}^{\nu}(w), \quad i=\overline{1,\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{p_l}s_{lk}}, \ \nu=\overline{0,s_{lk}-1}, \ k=\overline{1,p_l}, \ l=\overline{1,s};$$

$$y_i \ = \ \mathrm{Re}\,H_{lk}^{\nu}(w), \quad i=\overline{\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{p_l}s_{lk}+1,\sum_{l=1}^{s+m}\sum_{k=1}^{p_l}s_{lk}}, \ \nu=\overline{0,s_{lk}-1},$$

$$k=\overline{1,p_l}, \quad l=\overline{s+1,s+m}, \quad \text{при} \quad \lambda_l=\alpha_l+i\beta_l, \quad \beta_l>0; \qquad (25)$$

$$y_i \ = \ \operatorname{Im} H_{lk}^{\nu}(w), \quad i = \overline{\sum_{l=1}^{s+m}\sum_{k=1}^{p_l} s_{lk}+1, n}, \ \nu = \overline{0, s_{lk}-1}, \ k = \overline{1, p_l},$$
$$l = \overline{s+1, s+m}, \quad \text{при} \quad \lambda_l = \alpha_l + i\beta_l, \ \beta_l > 0,$$

которая является невырожденной в силу функциональной независимости n функций $H_{lk}^{\nu}(w)$.

Введём условное обозначение $\widetilde{y}_j = y_i$ для $i = \overline{\sum\limits_{l=1}^{s+m}\sum\limits_{k=1}^{p_l} s_{lk}+1, n}, \ j = \overline{\sum\limits_{l=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{p_l} s_{lk}+1, \sum\limits_{l=1}^{s+m}\sum\limits_{k=1}^{p_l} s_{lk}}$. Тогда в силу (24.1) и (24.2) получим систему

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_i}{dz} = \nu y_{i-1} + \lambda_l y_i + y_i N(y), \quad i = \overline{1, \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{p_l} s_{lk}}, \\
&\frac{dy_i}{dz} = \nu y_{i-1} + \alpha_l y_i - \beta_l \widetilde{y}_i + y_i N(y), \ i = \overline{\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{p_l} s_{lk}+1, \sum_{l=1}^{s+m}\sum_{k=1}^{p_l} s_{lk}}, \\
&\frac{d\widetilde{y}_i}{dz} = \nu \widetilde{y}_{i-1} + \beta_l y_i \ + \ \alpha_l \widetilde{y}_i + \widetilde{y}_i N(y), \ i = \overline{\sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{p_l} s_{lk}+1, \sum_{l=1}^{s+m}\sum_{k=1}^{p_l} s_{lk}},
\end{aligned} \tag{26}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)$, функция $N(y)$ получена в результате преобразования, обратного к (25), из $M(w)$ и, в силу (25), является однородной функцией порядка ρ.

Лемма 1. *Вещественная система Дарбу* (1A) *при* $n = 3$ *не может иметь более одного предельного цикла.*

Доказательство. В зависимости от корней характеристического уравнения (12) рассмотрим следующие логические возможности: 1) все корни вещественные и среди них есть хотя бы два различных, скажем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, причём корень λ_1 — простой; 2) трёхкратному корню λ соответствует не более двух клеток Жордана матрицы I; 3) трёхкратному корню λ соответствуют три клетки Жордана матрицы I; 4) λ_1 — вещественный и существуют два комплексно сопряжённых корня $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta, \ \beta \neq 0$.

Считая $n = 3$, с помощью линейного невырожденного преобразования (25) систему Дарбу (1A) приводим к виду (26).

В первом случае в силу (26) имеем тождество

$$\frac{d}{dz}(y_1 y_2^{-1})\big|_{(26)} = (\lambda_1 - \lambda_2) y_1 y_2^{-1} \not\equiv 0,$$

на основании которого и теоремы 1 из [10] приходим к выводу, что все возможные предельные циклы системы (26) должны быть расположены на многообразии $y_1 y_2 = 0$. Рассматривая поведение траекторий системы на плоскости $y_1 = 0$, получаем двумерную систему, исследованную в [11, 12] при $\rho \geqslant 1$, и, согласно [11, 12], не имеющую предельных циклов при $\rho \geqslant 1$. Аналогичными рассуждениями, как и в [11, 12], приходим к выводу, что эта система не имеет предельных циклов и при $\rho < 1$. Подобным образом доказывается отсутствие предельных циклов на плоскости $y_2 = 0$. Следовательно, система (26), а вместе с ней, в силу невырожденности линейного преобразования (25), и система (1A) в первом случае не имеет предельных циклов.

Во втором случае для определённости полагаем, что клетка Жордана I_{11}, соответствующая характеристическому корню λ_1, имеет размерность $s_{11} \geqslant 2$. Тогда в силу (19) и (21.2) получаем тождество $\dfrac{d}{dz}(y_1^{-1} y_2)\big|_{(26)} = 1$, на основании которого устанавливаем, что семейство плоскостей $y_1^{-1} y_2 = C$ является семейством плоскостей без контакта [13]. Согласно теореме 3 из [13, с. 354] все возможные предельные циклы системы (26) должны располагаться на плоскости $y_1 = 0$. А на ней, как и в предыдущем случае, нет предельных циклов. Следовательно, во втором случае система (26), а значит, и система (1A) не имеют предельных циклов.

В третьем случае существует два функционально независимых рациональных первых интеграла $y_1 y_3^{-1} = C_1$ и $y_2 y_3^{-1} = C_2$, и, следовательно, все траектории систем (26) и (1A) являются алгебраическими. Пэтому в третьем случае предельные циклы отсутствуют.

В четвёртом случае рассмотрим две возможности: а) $\lambda_1 \neq \alpha$; б) $\lambda_1 = \alpha$.

Если $\lambda_1 \neq \alpha$, то имеет место тождество

$$\frac{d}{dz}\left[y_1^2/(y_2^2 + \widetilde{y}_2^2)\right]\big|_{(26)} = 2(\lambda_1 - \alpha) y_1^2/(y_2^2 + \widetilde{y}_2^2),$$

из которого на основании теоремы 1 из [10] приходим к выводу, что все предельные циклы системы (26) могут быть расположены лишь на плоскости $y_1 = 0$. Рассматривая систему (26) при $y_1 = 0$, получаем двумерную систему, которая не может иметь более одного предельного цикла, что устанавливаем рассуждениями, аналогичными приведённым в [11, 12]. Следовательно, в этом случае системы (26) и (1A) не могут иметь более одного предельного цикла.

Если же $\lambda_1 = \alpha$, то из первых интегралов $y_2 = \widetilde{y}_2 \operatorname{tg}(\beta z + C_1)$ и

$(y_2^2 + \widetilde{y}_2^2)y_1^{-2} = C_2^2$ системы (26) имеем, что

$$y_2 = C_2 y_1 \cos(\beta z + C_1)\,, \qquad \widetilde{y}_2 = C_2 y_1 \sin(\beta z + C_1). \tag{27}$$

Формулы (27) показывают, что вне плоскости $y_1 = 0$ система (26) не имеет предельных циклов. А на плоскости $y_1 = 0$, как и при $\lambda_1 \neq \alpha$, приходим к выводу [11, 12], что система (26), а значит, и система Дарбу (1A), не может иметь более одного предельного цикла.

Объединяя все случаи, получаем утверждение леммы 1, более того, справедлива следующая закономерность.

Предложение 1. *Система Дарбу* (1A) *при* $n = 3$ *может иметь только один предельный цикл и это возможно лишь в случае, когда характеристическое уравнение* (12) *имеет один вещественный корень и два комплексно сопряжённых корня.*

Учитывая, что всякий возможный предельный цикл системы (1A) при $n = 3$ расположен на плоскости, из леммы 1 и [4, с. 185; 14] следует

Предложение 2. *Если* $M(w)$ *— однородный многочлен, то система Дарбу* (1A) *при* $n = 3$ *не может иметь более одного предельного цикла. Если предельный цикл существует, то он является алгебраическим.*

С целью установления количества возможных предельных циклов у системы Дарбу (1A) при $n > 3$ предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Если существуют* $s \geqslant 0$ *линейно независимых функций* $H_j(w)$ *с вещественными коэффициентами, обладающих свойством* (11), *то всякий предельный цикл системы Дарбу* (1A) *расположен на многообразии*

$$\sum_{j=1}^{s} H_j^2(w) = 0. \tag{28}$$

Доказательство основано на методе математической индукции.

При $n = 2$ справедливость леммы 2 следует из [12], а при $n = 3$ — из доказательства леммы 1. Пусть лемма 2 имеет место при $n = m - 1$. Рассмотрим систему (1A) при $n = m$. Линейным невырожденным преобразованием (25) систему (1A) приведём к виду (26). Пусть существуют $s > 0$ линейно независимых вещественных функций $H_j(w)$, коэффициенты которых находим из системы (11). В силу (26)

$$\frac{d}{dz}\,(y_i/y_j)\big|_{(26)} = (\lambda_{l_1} - \lambda_{l_2})y_i/y_j, \tag{29}$$

где $H_i(w) = H^0_{l_1k_1}(w)$, $H_j(w) = H^0_{l_2k_2}(w)$.

Если $\lambda_{l_1} \neq \lambda_{l_2}$, то на основании теоремы 1 из [10] имеем, что всякий предельный цикл системы (26) расположен на многообразии $y_iy_j = 0$. Так как предельный цикл является голоморфным в области голоморфности правых частей системы (26), то он расположен либо на гиперплоскости $y_i = 0$, либо на гиперплоскости $y_j = 0$, либо на их пересечении $y_i = y_j = 0$.

Пусть предельный цикл расположен на гиперплоскости $y_i = 0$. Тогда, понижая порядок системы (26) при $y_i = 0$, получаем систему $(m-1)$-го порядка, имеющую $s-1$ линейно независимых вещественных функций вида $H(w)$, и предельный цикл расположен на многообразии (28).

Если предельный цикл расположен на гиперплоскости $y_j = 0$, то аналогичными рассуждениями вновь приходим к выводу, что он расположен на многообразии (28).

Следовательно, если существуют хотя бы две вещественные функции вида $H(w)$ с различными характеристическими корнями, их определяющими, то утверждение леммы доказано.

Пусть теперь существует $s > 1$ линейно независимых вещественных функций вида $H(w)$ с одним и тем же характеристическим корнем, их определяющим. Тогда в силу (29) система (26) имеет первый интеграл $y_iy_j^{-1} = C$, и, если учесть связь между y_i и y_j из этого интеграла, то предельный цикл расположен на многообразии $y_iy_j = 0$. Тогда, применяя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, убеждаемся, что предельный цикл расположен на многообразии (28).

Предположим теперь, что $s = 1$ и единственному вещественному корню λ_1 характеристического уравнения (12) соответствует лишь одна клетка Жордана I_{11}, а её размерность $s_{11} \geqslant 2$. Тогда в силу (21.2) и (26) имеем тождество

$$\frac{d}{dz}\,(y_2/y_1)\big|_{(26)} = 1.$$

Аналогичными рассуждениями, как и во втором случае при доказательстве леммы 1, приходим к выводу, что все возможные предельные циклы системы (26) расположены на гиперплоскости $y_1 = 0$. Понижая порядок системы (26) при $y_1 = 0$, получаем, что все предельные циклы системы (26) расположены на многообразии (28).

Пусть теперь $s = 1$ и единственному вещественному корню λ_1 характеристического уравнения (12) соответствует лишь одна клетка Жордана I_{11}, а её размерность $s_{11} = 1$. Заметим, что тогда m нечётно.

Предположим сначала в этом случае, что существует хотя бы одна пара комплексно сопряжённых корней $\alpha_l \pm i\beta$ характеристического уравнения (12), такая, что $\alpha_l \neq \lambda_1$. Тогда из тождества

$$\frac{d}{dz}\left[y_1^2/(y_i^2+\widetilde{y}_i^2)\right]\Big|_{(26)} = 2(\lambda_1-\alpha_l)y_1^2/(y_i^2+\widetilde{y}_i^2),$$

где $y_i = \operatorname{Re} H_{lk}^0(w)$, в силу теоремы 1 из [10] имеем, что все предельные циклы расположены на многообразии $y_1(y_i^2+\widetilde{y}_i^2) = 0$. Поэтому аналогичными рассуждениями, как и в случае $s > 1$, приходим к выводу, что все предельные циклы расположены на многообразии (28).

Рассмотрим случай, когда все пары комплексно сопряжённых корней характеристического уравнения (12) имеют вид $\alpha_1 \pm i\beta_l$, а хотя бы одной паре соответствует хотя бы одна вещественная клетка Жордана размерности, большей или равной четырём. Тогда в силу (26) имеем тождество

$$\frac{d}{dz}\left[(y_iy_{i+1}+\widetilde{y}_i\widetilde{y}_{i+1})/(y_i^2+\widetilde{y}_i^2)\right]\Big|_{(26)} = 1,$$

где $y_i = \operatorname{Re} H_{lk}^0(w)$, $y_{i+1} = \operatorname{Re} H_{lk}^1(w)$, как и во втором случае при доказательстве леммы 1 устанавливаем, что все предельные циклы системы (26) расположены на многообразии $y_i^2+\widetilde{y}_i^2 = 0$. Понижая порядок системы (26) при $y_i = \widetilde{y}_i = 0$, убеждаемся, что предельные циклы расположены на гиперплоскости $y_1 = 0$.

И, наконец, рассмотрим случай, когда всякой из пар корней $\lambda_1 \pm i\beta_l$ характеристического уравнения (12) соответствуют вещественные клетки Жордана, размерность которых равна двум. Тогда система (26) имеет первые интегралы

$$\widetilde{y}_i = y_i \operatorname{tg}(\beta_i z + C_i), \quad y_1^{-2}(y_i^2+\widetilde{y}_i^2) = \widetilde{C}_i^2, \quad i = \overline{2,(n+1)/2}. \tag{30}$$

Из системы (30) имеем:

$$y_i = \widetilde{C}_i y_1 \cos(\beta_i z + C_i), \quad \widetilde{y}_i = \widetilde{C}_i y_1 \sin(\beta_i z + C_i), \; i = \overline{2,(n+1)/2}. \tag{31}$$

Системы (30) и (31) показывают, что вне гиперплоскости $y_1 = 0$ система (26) не имеет предельных циклов.

Объединяя все случаи, а также учитывая линейность и невырожденность преобразования (25), завершаем доказательство леммы 2.

Теорема 4. *Вещественная система Дарбу* (1A) *не может иметь более чем* $[n/2]$ *предельных циклов, где символом* $[\;]$ *обозначена целая часть числа.*

Доказательство будем вести методом математической индукции.

При $n = 2$ теорема 4 доказывается рассуждениями, аналогичными приведённым в [12], а при $n = 3$ следует из леммы 1. Пусть теорема 4 справедлива при $n = m-1$. Тогда при $n = m$ линейным невырожденным преобразованием (25) систему Дарбу (1A) приводим к виду (26).

Если характеристическое уравнение (12) имеет хотя бы один вещественный корень, то на гиперплоскости $y_1 = 0$ согласно лемме 2 находятся все возможные предельные циклы системы (26). Рассматривая поведение траекторий при $y_1 = 0$, получаем систему $(m-1)$-го порядка, которая не может иметь более $[(m-1)/2]$ предельных циклов.

Пусть характеристическое уравнение (12) не имеет вещественных корней. Тогда m — чётное.

Если среди пар комплексно сопряжённых корней существует хотя одна, скажем, $\alpha_l \pm i\beta_l$, которой соответствует по крайней мере одна вещественная клетка Жордана размерности, большей или равной четырём, то, как и в аналогичном случае при доказательстве леммы 2, существует $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ такое, что все возможные предельные циклы системы (26) расположены на многообразии $y_i^2 + \widetilde{y}_i^2 = 0$. Рассматривая поведение траекторий системы (26) на этом многообразии, устанавливаем, что она не может иметь более $(m-2)/2$ предельных циклов.

Пусть вещественная матрица I имеет ровно $m/2$ вещественных клеток Жордана, каждой из которых соответствует своя пара комплексно сопряжённых корней $\alpha_l \pm i\beta_l$. Тогда в силу (21.1) и (26) имеют место тождества

$$\frac{d}{dz}\left[(y_i^2 + \widetilde{y}_i^2)/(y_j^2 + \widetilde{y}_j^2)\right]\Big|_{(26)} = 2(\alpha_{l_1} - \alpha_{l_2})(y_i^2 + \widetilde{y}_i^2)/(y_j^2 + \widetilde{y}_j^2), \qquad (32)$$

где $H_i(w) = H^0_{l_1k_1}(w)$, $H_j(w) = H^0_{l_2k_2}(w)$.

Если $\alpha_{l_1} \neq \alpha_{l_2}$, то, согласно теореме 1 из [10], предельные циклы системы (26) расположены на многообразии

$$(y_i^2 + \widetilde{y}_i^2)(y_j^2 + \widetilde{y}_j^2) = 0. \qquad (33)$$

Пусть $\alpha_{l_1} = \alpha_{l_2}$. Тогда аналогично (30) имеем два первых интеграла $\widetilde{y}_i = y_i \operatorname{tg}(\beta_{l_1} z + C_1)$ и $\widetilde{y}_j = y_j \operatorname{tg}(\beta_{l_2} z + C_2)$, а в силу (32) существует ещё один первый интеграл

$$(y_i^2 + \widetilde{y}_i^2)/(y_j^2 + \widetilde{y}_j^2) = C_3^2. \qquad (34)$$

Из этих трёх интегралов получаем:

$$y_i = C_3 y_j \cos(\beta_{l_1} z + C_1)/\cos(\beta_{l_2} z + C_2). \tag{35}$$

Значит, при $y_j \not\equiv 0$ изолированных периодических решений нет, если $C_3 \neq 0$. Поэтому при $y_j \not\equiv 0$ из (34) следует, что предельные циклы должны располагаться на многообразии (33). Если же $y_j = 0$, то из тождества (35) следует, что предельные циклы расположены на этом же многообразии. С учётом голоморфности предельных циклов заключаем, что всякий предельный цикл расположен или на многообразии $y_i^2 + \widetilde{y}_i^2 = 0$, или на многообразии $y_j^2 + \widetilde{y}_j^2 = 0$, или на их пересечении. Рассматривая всевозможные пары α_{l_1} и α_{l_2}, получаем $m/2$ многообразий вида $\sum\limits_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{m/2}(y_i^2 + \widetilde{y}_i^2) = 0,\ j \in \{1, \dots, m/2\}$, размерности два, на которых могут располагаться предельные циклы системы (26). Исходя из поведения траекторий системы (26) на каждом таком многообразии, подобно [12], приходим к выводу, что на каждом из них расположено не более одного предельного цикла. Следовательно, система (26) имеет не более чем $m/2$ предельных циклов. Теорема 4 доказана.

Пусть существует вещественный корень λ_1 характеристического уравнения (12) системы (1A), которому соответствует клетка Жордана I_{lk} размерности s_{lk}. Тогда, согласно хода доказательства леммы 2, существует гиперповерхность $H_{lk}^0(w) = 0$, на которой должен быть расположен любой предельный цикл системы (1A). Приводя систему (1A) к виду (26), можем понизить порядок новой системы для нахождения предельного цикла, то есть рассматривать систему (26) будем при $y_i = 0$, где $y_i = H_{lk}^0(w)$. В результате получим новую систему, корню λ_l характеристического уравнения типа (12) которой соответствует функция y_{i+1}. Применяя ещё раз подобные рассуждения, получаем систему ещё более низкого порядка. При этом всякий раз понижением порядка системы (26) размерность клетки Жордана I_{lk} уменьшается на единицу. И таким образом можно при нахождении предельных циклов понизить порядок системы (26) на s_{lk} единиц. Принимая во внимание эти рассуждения и ход доказательств леммы 2 и теоремы 4, получаем следующие утверждения.

Теорема 5. *Если все корни характеристического уравнения* (12) *вещественные, то система Дарбу* (1A) *не имеет предельных циклов.*

Теорема 6. *Если характеристическое уравнение* (12) *имеет* p *вещественных корней с учётом их кратности, то система Дарбу* (1A) *не* *может иметь более* $[(n-p)/2]$ *предельных циклов.*

Из [4, с. 185; 14] и хода доказательства теоремы 4 следует.

Теорема 7. *Если* $M(w)$ *— однородный многочлен, то всякий предельный цикл системы Дарбу* (1А) *является алгебраическим.*

Заметим, что в [15] возможность наличия предельных циклов рассматривается у системы Дарбу второго порядка иного вида.

Системы (S_1), (S_2) и (S_3) имеют только вещественные характеристические корни, поэтому, в соответствии с теоремой 5, у них нет предельных циклов.

Система Дарбу четвёртого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 - x_2 + x_1\sqrt{(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - 2x_2 + x_2\sqrt{(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3}, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -x_3 - x_4 + x_3\sqrt{(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3}, \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_3 - x_4 + x_4\sqrt{(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^3} \end{aligned} \qquad (S_4)$$

имеет характеристическое уравнение с двумя парами комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ и $\lambda_{3,4} = -1 \pm i$, которым соответствуют две клетки Жордана $I_{11} = I_{21}$ и $I_{31} = I_{41}$ действительной матрицы I.

Поэтому, как и в соответствующем случае при доказательстве теоремы 4, возможные предельные циклы системы (S_4) расположены на интегральных плоскостях $x_1^2 + x_2^2 = 0$ и $x_3^2 + x_4^2 = 0$.

Поведение траекторий системы (S_4) на интегральной плоскости $x_1^2 + x_2^2 = 0$ описывается системой

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_3 - x_4 + x_3\sqrt{(x_3^2 + x_4^2)^3}, \quad \frac{dx_4}{dt} = x_3 - x_4 + x_4\sqrt{(x_3^2 + x_4^2)^3}, \qquad (S_4.1)$$

единственным состоянием равновесия которой является устойчивый фокус, расположенный в начале координат $x_3 = x_4 = 0$ фазовой плоскости.

Система $(S_4.1)$ имеет траекторию $x_3^2 + x_4^2 = 1$, которая является предельным циклом. Более того, этот цикл единственный, что устанавливаем посредством признака Бендиксона-Дюлака, взяв в качестве функции Дюлака $B(x_3, x_4) = \sqrt[4]{(x_3^2 + x_4^2)^{-7}}$.

На интегральной плоскости $x_3^2 + x_4^2 = 0$ систему (S_4) приводим к системе

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 - x_2 + x_1\sqrt{(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)^3}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - 2x_2 + x_2\sqrt{(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)^3}, \end{aligned} \qquad (S_4.2)$$

имеющей единственное состояние равновесия в точке $x_1 = x_2 = 0$, являющееся устойчивым фокусом. Согласно [4, 12], система $(S_4.2)$ имеет предельный цикл, который в полярных координатах (ρ, φ) задаётся функцией

$$\begin{aligned} \rho^{-3} \;=\; 3e^{6\varphi} \Bigg[&\frac{1}{1 - e^{-12\pi}} \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\frac{(2 + \sin 2\varphi)^3}{8}}\, e^{-6\varphi} d\varphi \;- \\ &- \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{\frac{(2 + \sin 2\theta)^3}{8}}\, e^{-6\theta} d\theta \Bigg]. \end{aligned} \qquad (S_4.3)$$

Единственность предельного цикла $(S_4.3)$ системы $(S_4.2)$ доказываем с помощью признака Бендиксона-Дюлака, взяв в качестве функции Дюлака $B(x_1, x_2) = \sqrt[4]{(x_1^2 + x_2^2)^{-7}}$.

На данном примере нами реализована возможность существования алгебраического предельного цикла $x_1^2 + x_2^2 = 0$, $x_3^2 + x_4^2 = 1$ и трансцендентного предельного цикла $(S_4.3)$ при $x_3^2 + x_4^2 = 0$, а также показано, что системы с алгебраическими правыми частями имеют трансцендентные предельные циклы. То, что алгебраический предельный цикл может существовать у системы с трансцендентными правыми частями, покажем на следующем примере.

Для системы

$$\frac{dx_1}{dt} = 5x_1 + x_1(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\alpha},\; \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 - x_3 + x_2(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\alpha},$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_3(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\alpha}, \qquad (S_5)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, функция $H_1(x) = x_1$, и, как в соответствующем случае при доказательстве лемм 1 и 2, все возможные предельные циклы расположены на интегральной плоскости $x_1 = 0$.

Рассматривая поведение траекторий системы (S_5) на интегральной плоскости $x_1 = 0$, приходим к тому, что уравнение [4]

$$\frac{dx_2}{dx_3} = \frac{-2x_2 - x_3 + x_2(x_2^2 + x_3^2)^\alpha}{x_2 - 2x_3 + x_3(x_2^2 + x_3^2)^\alpha} \qquad (S_5.1)$$

имеет алгебраический предельный цикл $x_2^2+x_3^2 = 2^{1/\alpha}$ при любом ненулевом действительном α. Единственность этого предельного цикла доказываем на основании признака Бендиксона-Дюлака, выбрав в качестве функции Дюлака $B(x_2, x_3) = (x_2^2 + x_3^2)^{-0,5(\alpha+2)}$ для уравнения $(S_5.1)$.

Литература

1. Горбузов В.Н., Самодуров А.А. Уравнение Дарбу и его аналоги. – Гродно: ГрГУ, 1985. – 94 с.

2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

3. Горбузов В.Н. К вопросу об интегрируемости в квадратурах // Докл. Акад. наук БССР. – 1981. – Т. 25, № 7. – С. 584 – 585.

4. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 210 с.

5. Бабарико Н.Н., Горбузов В.Н. К вопросу об интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка // Докл. Акад. наук БССР. – 1984. – Т. 28, № 7. – С. 581 – 584.

6. Горбузов В.Н., Самодуров А.А. Уравнение Рикатти и Абеля. – Гродно: ГрГУ, 1986. – 101 с.

7. Бабарико Н.Н., Горбузов В.Н. К вопросу о построении первого интеграла или последнего множителя нелинейной системы дифференциальных уравнений // Докл. Акад. наук БССР. – 1986. – Т. 30, № 9. – С. 791 – 792.

8. Самодуров А.А. О построении первого интеграла квадратичной системы по известным частным интегралам // Вестник БГУ. Сер. 1, физ., мат., мех. – 1986. – № 1. – С. 69 – 71.

9. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. II. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 564 с.

10. Черкас Л.А. Методы оценки числа предельных циклов автономных систем // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 779 – 802.

11. Горбузов В.Н. Исследование поведения интегральных кривых одного частного случая уравнения Дарбу // Исследования по математике: Тр. / Гродненск. гос. ун-т. – Гродно, 1979. – С. 2 – 7.

12. Горбузов В.Н. Системы со специальными аналитическими и каче-

ственными свойствами: Дис. канд. ... физ.-мат. наук. 01.01.02 / Бел. гос. ун-т. – Минск, 1981. – 154 с.

13. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

14. Лукашевич Н.А. Интегральные кривые уравнения Дарбу // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2, № 5. – С. 628 – 633.

15. Маханек М.М. Предельные циклы системы Дарбу // Весцi Акад. навук БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1983. – № 1. – С. 6 – 11.