ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 2, 2002
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОЙ КВАЗИСТРАТЕГИИ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Александр Георгиевич Ченцов

Россия, 620219, Екатеринбург, С.Ковалевской, д. 16,
Институт математики и механики. Уральское отделение Российской Академии Наук
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Кирилл Валерьевич Корляков

Россия, 620083, Екатеринбург, пр.Ленина, д. 51,
Уральский государственный университет,
Кафедра прикладной математики,
e-mail: kkorlyakov@microtest.ru

Аннотация.

Рассматривается пример применения сравнительно новой модификации метода программных итераций (МПИ) к решению простейшей задачи управления с помехой. Установлено, что "прямая"(по-смыслу) версия МПИ, действующая в пространстве многозначных отображений требует, для построения идеальной управляющей процедуры - многозначной квазистратегии, выполнения бесконечного числа итераций; структура этих

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00348, 01-01-96450) и Международного научно-технического центра (проект 1293)

итераций также выясняется на основе двойственности "прямых"и "непрямых"(используемых ранее при построении стабильных мостов в смысле Н.Н.Красовского) версий МПИ.

1 Введение

В теории дифференциальных игр (ДИ) [1-5] хорошо известна фундаментальная теорема об альтернативе Н.Н.Красовского, А.И.Субботина (см.[3]), которая утверждает, что пространство позиций в ДИ сближения-уклонения допускает альтернативное разбиение в сумму двух множеств, одно из которых - множество позиционного поглощения (стабильный мост) - определяет множество всех начальных позиций, из которых игрок, заинтересованный в сближении, может гарантировать приведение траекторий системы на целевое множество. Для построения стабильных мостов активно использовались программные конструкции (см., например, [3,4,6,7]), которые, при некоторых условиях регулярности [2-4,7], обеспечивали непосредственный переход от управления по программе к синтезу. Если эти условия не выполнены, то данный переход становится более сложным и требует привлечения иных методов. Одним из них является метод программных итераций (МПИ) [8-15] (см. также [5], гл.IV, V). Оказалось, что для некоторых нерегулярных ДИ для построения решения (цена игры, стабильный мост) оказывается достаточным всего двух итераций [8,9] программного поглощения, хотя в других случаях требуется исполнение всей бесконечной последовательности программных итераций (см. [14,15]). Можно отметить, что в [14] и в ряде последующих работ указаны примеры, где решение, определенное посредством МПИ, достигается за любой наперед заданное количество итераций. Следует отметить, что вышеупомянутые варианты МПИ являются "непрямыми"в смысле построения соответствующих управляющих процедур (с помощью МПИ воспроизводится "посредник"в виде функции цены игры или в виде стабильного моста). Эти процедуры можно определить на основе обратной связи (конструкции экстремального прицеливания и экстремального сдвига Н.Н.Красовского) или в виде так называемых квазистратегий (см.[16,17] - "однозначные"квазистратегии, и [5,8-11,13,14] - "многозначные квазистратегии"). Позднее была построены "прямая"версия МПИ [18-22], действующая в пространстве многозначных отображений (МО); в задачах теории ДИ она обеспечивала непосредственное итерационное построение многозначной квазистратегии (в духе [5, гл.IV],[8-

11,13,14]), разрешающей соответствующую задачу управления. Интересно, что в ряде простых примеров ДИ "прямая"версия МПИ реализует решение за две итерации (см. [18,22]). Среди этих примеров есть и регулярные ДИ, в которых функция цены и стабильный мост находятся с помощью вспомогательных программных конструкций непосредственно (фактически речь идет о первой итерации на основе "непрямой"версии МПИ). В настоящей работе будет построен пример ДИ, в которой, при весьма очевидном решении в виде многозначной квазистратегии, "прямая"версия МПИ доставляет решение (квазистратегию) только после исполнения бесконечного числа итераций. Мы имеем здесь, стало быть, некий аналог [14,15]. В некотором смысле итерационная процедура, универсальная в смысле возможности решения ДИ общего вида, оказывается "слепой"в данном конкретном примере. По-видимому, это неизбежно для универсальных процедур решения ДИ. Отметим, что данное свойство устанавливается с использованием специальной двойственности, связывающей "непрямые"версии МПИ, подобные [8-15], и "прямые"версии типа используемых в [18-22]; в связи с этой двойственностью см. [23]. При этом "непрямые"версии объективно являются более простыми; в данном случае речь идет о преобразовании множеств в конечномерном пространстве. Более того, в ряде случаев здесь удается осуществить некоторую параметризацию итерационной процедуры, в результате чего последняя сводится фактически к рекуррентной процедуре на вещественной прямой (такая конструкция рассматривалась на примерах в [14], затем она была распространена на некоторый класс ДИ в [24] и некоторых других работах, и, наконец, в [25] эта конструкция была фактически реализована в виде программы на ЭВМ). Что же касается варианта МПИ в [18-22], то данная схема имеет теоретический характер и связана с преобразованием МО в функциональных пространствах. В этой связи двойственность [23] имеет в ряде случаев смысл сведения требуемой, для построения квазистратегий, конструкции к принципиально реализуемой форме, что проявляется уже и в примере, рассматриваемом ниже.

2 Простейший пример задачи управления с помехами

Рассмотрим простейшую управляемую систему Σ, определяемую скалярным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = u + v, \tag{2.1}$$

на отрезке $[0,1]$. Основной задаче соответствует нулевая начальная позиция $(0,0)$, т.е. $x(0)=0$. В целях согласования с [10,14] полагаем, что в качестве управлений (полезного и помехового соответственно) допустимо использовать любые борелевские функции из $[0,1]$ в $[-2,2]$ и в $[-1,1]$ соответственно. В первом случае множество всех программных управлений обозначаем через $\mathcal{U}$ (элементы $\mathcal{U}$ - полезные борелевские управления из $[0,1]$ в $[-2,2]$ и только они). Во втором случае аналогичное множество возможных помех $v(\cdot)$ обозначаем через $\mathcal{V}$. Если же движение системы Σ (2.1) рассматривается на отрезке $[t_*,1]$, где $0<t_*\leq 1$, из состояния $x_*\in\mathbf{R}$, мы также используем в качестве управлений функции из $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно, хотя фактически "работают"лишь их сужения на $[t_*,1]$: если $u(\cdot)\in\mathcal{U}$ и $v(\cdot)\in\mathcal{V}$, то траектория $x(\cdot,t_*,x_*,u(\cdot),v(\cdot))=(x(t,t_*,x_*,u(\cdot),v(\cdot)))_{t\in[t_*,1]}$ системы Σ есть, очевидно, функция

$$t\longmapsto x_*+\int_{t_*}^{t}u(\xi)d\xi+\int_{t_*}^{t}v(\xi)d\xi:[t_*,1]\longmapsto\mathbf{R}, \tag{2.2}$$

где используются интегралы Лебега, либо, что является более простым, - интегралы в смысле [26,с.69] при оснащении $[0,1]$ стандартной σ-алгеброй борелевских множеств. Конечно, для управления (2.1) использование столь общих конструкций по сути дела является излишним, однако, в их рамках нам будет удобно аппелировать к общей процедуре МПИ [10,14]. Заметим, однако, что в сравнении с задачами [8-11], [13], [14] мы имеем здесь случай, в котором использование управлений-мер является излишним, т.к. эффект действия последних релизуется с помощью борелевских управлений $u(\cdot)\in\mathcal{U}$ и $v(\cdot)\in\mathcal{V}$. В этой связи мы для требуемого далее конкретного случая приведем упрощенное определение оператора $\mathcal{A}_M$ [10,14], достаточное для наших целей. Здесь - целевое множество в задаче наведения [3,гл. III] - определяется условием

$$M\doteq\{(1,x):x\in\mathbf{R},|x|\geq 1\}, \tag{2.3}$$

где $\doteq$ - равенство по определению. Разумеется (2.3) определяет подмножество $\mathbf{D}\doteq[0,1]\times\mathbf{R}$ пространства позиций. Обозначим через $\mathcal{D}$ семейство всех подмноженств $\mathbf{D}$. В связи с общей процедурой [10,14] (см. также [5, с.178]) заметим, что далее рассматривается задача управления без фазовых ограничений, что, в обозначениях [10,14], соответствует случаю $\mathbf{N}=\mathbf{D}$. С учетом вышеупомянутых обстоятельств заметим, что оператор $\mathcal{A}_M$, подобный [10,14], действует в $\mathcal{D}$ и, при $H \in \mathcal{D}$, удовлетворяет условию

$$\begin{gathered}\mathcal{A}_M(H) \doteq \{(t,x) \in H \mid \forall v(\cdot) \in \mathcal{V}\ \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} : \\ ((1, x(1,t,x,u(\cdot),v(\cdot))) \in M)\ \&\ (\forall \xi \in [t,1[: \\ (\xi, x(\xi,t,x,u(\cdot),v(\cdot))) \in H)\} \doteq \{(t,x) \in H \mid \forall v(\cdot) \in \mathcal{V}\ \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} : \\ (|x(1,t,x,u(\cdot),v(\cdot))| \geq 1)\ \&\ (\forall \xi \in [t,1[: (\xi, x(\xi,t,x,u(\cdot),v(\cdot))) \in H)\}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Если $\mathcal{F}$ - семейство всех замкнутых подмножеств $\mathbf{D}$ (ясно, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$), то при $H \in \mathcal{F}$ имеем в (2.4)

$$\begin{gathered}\mathcal{A}_M(H) = \{(t,x) \in H \mid \forall v(\cdot) \in \mathcal{V}\ \exists\ u(\cdot) \in \mathcal{U} : \\ (|x(1,t,x,u(\cdot),v(\cdot))| \geq 1)\ \&\ (\forall \xi \in [t,1] : (\xi, x(\xi,t,x,u(\cdot),v(\cdot))) \in H)\}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что для множеств из $\mathcal{F}$ оператор $\mathcal{A}_M$, определенный в (2.4) "ведет себя"также, как и аналогичный оператор $\mathcal{A}$ [5, с.178-179]. Здесь мы учитываем естественную замкнутость M (2.3) и $\mathbf{D}$, а также тот факт, что $\mathcal{F}$ есть инвариантное подпространство $\mathcal{A}_M$. Стало быть, на языке, используемом в (2.4), мы для $M = \{(1,x) : x \in \mathbf{R}, |x| \geq 1\}$ и $\mathbf{N} = \mathbf{D}$ в виде итерационной последовательности $(W_k; k = 0; 1; 2...)$, определяемой как

$$(W_0 \doteq \mathbf{D})\ \&\ (\forall k \in N : W_k = \mathcal{A}_M(W_{k-1})) \tag{2.6}$$

имеем свойство сходимости к множеству позиционного поглощения W_∞: W_∞ совпадает с пересечением всех множеств $W_k, k = 0,1,2...$ Рассмотрим теперь конкретное построение (2.6), используя методику [14,24]. Суть ее состоит в следующем: все итерации в (2.6) имеют одну и ту же "форму", но различаются значениями некоторого параметра. По этой причине, как и в [14], процедуру (2.6) можно свести к итерациям этого параметра. Введем

$$\mathcal{W} \doteq \{(t,x) \in \mathbf{D} \mid t \leq |x|\} \in \mathcal{D}, \tag{2.7}$$

а также отображение $\mathbf{H}$ из [0,1] в $\mathcal{D}$, для которого при $\vartheta \in [0,1]$

$$\mathbf{H}(\vartheta) \doteq \mathcal{W} \cup ([0,\vartheta] \times \mathbf{R}). \tag{2.8}$$

Рассмотрим $\mathbf{H}$ (2.8), как "функцию формы"множеств в (2.6). Мы покажем, что $W_k = \mathbf{H}(\vartheta_k)$ при $k = 0,1,2,....$ Соответствующая последовательность $(\vartheta_k)_{k=0}^\infty$ будет указана (см.также [24]). Заметим, что в силу (2.8)

$$(W_0 = \mathbf{D} = \mathbf{H}(1))\ \&\ (\mathcal{W} = \mathbf{H}(0)). \tag{2.9}$$

Построение $(\vartheta_k)_{k=0}^{\infty}$ в силу (2.9) можно рассматривать как некоторый переход от 1 к 0.

Далее, можно отметить, что при $\vartheta \in [0,1]$ может быть определено множество $\mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$. Отметим одно простое обстоятельство, которое для несколько иной (но подобной) задачи было установлено в [14] (см. также обзор в [5, §4]); для более общего случая подобное утверждение приведено в [24]: если $\vartheta \in [0,1]$, то

$$\mathcal{A}(\mathbf{H}(\vartheta)) = \mathbf{H}(\vartheta/2). \tag{2.10}$$

В целях полноты изложения рассмотрим обоснование (2.10). Фиксируем $\vartheta \in [0,1]$. Пусть $(t_*, x_*) \in \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$. Тогда, в частности, $(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta)$. Покажем, что $(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta/2)$. Для этого рассмотрим отдельно два возможных, в силу (2.8) случая. Именно в силу (2.8) либо $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$, а в этом случае $(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta/2)$, либо

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta) \setminus \mathcal{W}. \tag{2.11}$$

Отдельного рассмотрения требует лишь случай (2.11). В этом случае у нас $|x_*| < t_*$. Вместе с тем из (2.8), (2.11) имеем $t_* \in [0,\vartheta]$. По выбору (t_*, x_*) имеем (см.(2.8)), что

$$\begin{gathered}\forall v(\cdot) \in \mathcal{V}\ \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}:\ ((1 \le |x(1, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))|)\ \& \\ \&\ (\forall \xi \in [t_*, 1[:\ (\xi, x(\xi, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta))).\end{gathered} \tag{2.12}$$

Напомним, что $|x_*| < t_* \le \vartheta$. Зафиксируем некоторое $\overline{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$. Подберем, используя (2.12) $\overline{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ так, что

$$\begin{gathered}(1 \le |x(1, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))|)\ \& \\ \&\ (\forall \xi \in [t_*, 1[:\ (\xi, x(\xi, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta)).\end{gathered} \tag{2.13}$$

Из (2.13) вытекает, что справедливо неравенство

$$\vartheta \le |x(\vartheta, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))|. \tag{2.14}$$

В самом деле, при $\vartheta = 1$ (2.14) есть первое утверждение в (2.13). Пусть $\vartheta < 1$. Тогда $\vartheta \in [t_*, 1[$, причем $]\vartheta, 1[\neq \emptyset$ и, вместе с тем, $\forall \tau \in]\vartheta, 1[$: $(\tau, x(\tau, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta)$. Стало быть (см.(2.8)), при $\tau \in]\vartheta, 1[$ у нас $(\tau, x(\tau, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))) \in \mathcal{W}$ и, следовательно, $\tau \le |x(\tau, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))|$. Полагая $\forall k \in \mathcal{N} : \vartheta_k \doteq \vartheta + (1-\vartheta)/k$, мы получаем последовательность в $]\vartheta, 1[$, сходящуюся к ϑ справа. В силу (2.7) $\forall k \in \mathcal{N} : \vartheta_k \le |x(\vartheta_k, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))|$.

Используя непрерывность траектории, получаем (2.14) в случае $\vartheta < 1$. Итак, (2.14) полностью доказано.

Полезно отметить, что $x(t_*, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot)) = x_*$ и $|x(t_*, t_*, x_*, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))| < t_*$, что в сравнении с (2.14) дает $t_* \neq \vartheta$, т.е. $t_* < \vartheta$. Напомним также, что $|x_*| < t_*$. Из (2.14) мы имеем неравенство $\vartheta \leq |x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} \overline{u}(t)dt + \int_{t_*}^{\vartheta} \overline{v}(t)dt|$. Тем более у нас

$$\begin{aligned}\vartheta \leq |x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} \overline{v}(t)dt| + |\int_{t_*}^{\vartheta} \overline{u}(t)dt| \leq |x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} \overline{v}(t)dt| + \int_{t_*}^{\vartheta} |\overline{u}(t)|dt \leq \\ \leq |x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} \overline{v}(t)dt| + 2(\vartheta - t_*).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Напомним, что $\overline{v}(\cdot)$ выбиралось произвольно. Итак, в силу (2.15) у нас $\forall v(\cdot) \in \mathcal{V} : |x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} v(t)dt| + 2(\vartheta - t_*) \geq \vartheta$. Из (2.15), в частности, следует, что

$$\forall v(\cdot) \in \mathcal{V}\ \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} :\ |x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} v(t)dt + \int_{t_*}^{\vartheta} u(t)dt| \geq \vartheta. \tag{2.16}$$

Разумеется, (2.16) извлекается и из (2.14). Рассмотрим отдельно следующие два возможных случая:

1. $\exists v(\cdot) \in \mathcal{V} : x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} v(t)dt = 0$,
2. $\forall v(\cdot) \in \mathcal{V} : |x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} v(t)dt| > 0$.

Сначала рассмотрим случай 1. Возвращаясь к (2.15) и (2.16) мы получаем

$$2(\vartheta - t_*) \geq \vartheta$$

или $t_* \leq \vartheta/2$. Рассмотрим случай 2. В этом случае $x_* \neq 0$. Подберем управление $v_*(\cdot) \in \mathcal{V}$ следующим образом: полагаем $v_*(t) \equiv -sgn(x_*)$. Тогда

$$x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} v_*(t)dt = [|x_*| - (\vartheta - t_*)]sgn(x_*). \tag{2.17}$$

Допустим, что $|x_*| - (\vartheta - t_*) < 0$. Тогда $|x_*| < \vartheta - t_*$, где, как уже отмечалось, $\vartheta - t_* > 0$. Введем постоянное управление $v_{**}(\cdot) \in \mathcal{V}$ по правилу

$$v_{**}(t) \equiv -\tfrac{x_*}{\vartheta - t_*}$$

(мы знаем уже, что $|v_{**}(t)| < 1$). Тогда $x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} v_{**}(t)dt = x_* - x_* = 0$, что невозможно в случае 2. Стало быть, у нас $|x_*| - (\vartheta - t_*) \geq 0$ и, как следствие, имеет место

$$|x_* + \int_{t_*}^{\vartheta} v_*(t)dt| = |x_*| - (\vartheta - t_*).$$

Используя следствие (2.15), мы получаем $|x_*| + (\vartheta - t_*) \geq \vartheta$, т.е. $|x_*| \geq t_*$, что невозможно. Итак, случай 2 невозможен. Мы установили, что $t_* \leq \vartheta/2$ и, стало быть, $(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta/2)$. Вложение

$$\mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta)) \subset \mathbf{H}(\vartheta/2) \tag{2.18}$$

установлено. На самом деле в (2.18) имеет место равенство. Пусть $(t^*, x^*) \in \mathbf{H}(\vartheta/2)$. В частности $(t^*, x^*) \in \mathbf{H}(\vartheta)$. Тогда в силу (2.8) имеем, что либо $(t^*, x^*) \in \mathcal{W}$, либо $t^* \leq \vartheta/2$. Заметим, что в первом случае определяем постоянное управление $u^* \in [-2, 2]$, полагая, что $u^* = +2$ при $x^* \geq 0$ и $u^* = -2$ при $x^* < 0$. Тогда, при $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $t \in [t^*, 1]$ имеем

$$\begin{gathered} |x(t, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot))| = |(x^* + u^*(t - t^*)) + \int_{t^*}^{t} v(\tau)d\tau| \geq \\ \geq |x^* + u^*(t - t^*)| - |\int_{t^*}^{t} v(\tau)d\tau| \geq |x^*| + 2(t - t^*) - \int_{t^*}^{t} |v(\tau)|d\tau \geq \\ \geq |x^*| + (t - t^*) \geq t^* + (t - t^*) \geq t, \end{gathered} \tag{2.19}$$

где $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ определяется как $u^*(t) \equiv u^*$. Стало быть, в случае $(t^*, x^*) \in \mathcal{W}$ у нас при $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ и $t \in [t^*, 1]$ верно $(t, x(t, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot))) \in \mathcal{W}$, а $\mathcal{W} \subset \mathbf{H}(\vartheta)$. Кроме того, из (2.19) следует, что $|x(1, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot))| \geq 1$. С учетом (2.4) имеем в случае $(t^*, x^*) \in \mathcal{W}$ свойство $(t^*, x^*) \in \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$.

Осталось рассмотреть случай, когда $(t^*, x^*) \notin \mathcal{W}$, т.е. $|x^*| < t^*$. Тогда $t^* \leq \vartheta/2$. Выберем произвольно $\widehat{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$ и, полагая $y^* \doteq x^* + \int_{t^*}^{\vartheta} \widehat{v}(\tau)d\tau$, введем $\widehat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ по правилу: при всех $t \in [0, 1]$ $\widehat{u}(t) \doteq 2sgn(y^*)$, где функция $sgn(\cdot)$ определяется условиями: $sgn(\xi) \doteq -1$ при $\xi \in]-\infty, 0[$, $sgn(\xi) \doteq 1$ при $\xi \in [0, \infty[$. Тогда, при $t \in [\vartheta, 1]$ имеем

$$x(t, t^*, x^*, \widehat{u}(\cdot), \widehat{v}(\cdot)) = x(\vartheta, t^*, x^*, \widehat{u}(\cdot), \widehat{v}(\cdot)) + \int_{\vartheta}^{t} \widehat{u}(\tau)d\tau + \int_{\vartheta}^{t} \widehat{v}(\tau)d\tau. \tag{2.20}$$

В (2.20) рассмотрим выражение в правой части: $x(\vartheta, t^*, x^*, \widehat{u}(\cdot), \widehat{v}(\cdot)) = (x^* + \int_{t_*}^{\vartheta} \widehat{v}(\tau)d\tau) + \int_{t^*}^{\vartheta} \widehat{u}(\tau)d\tau = [|x^* + \int_{t^*}^{\vartheta} \widehat{v}(\tau)d\tau| + 2(\vartheta - t^*)]sgn(x^* + \int_{t^*}^{\vartheta} \widehat{v}(\tau)d\tau)$. Учтем это выражение в (2.20): при $t \in [\vartheta, 1]$

$$\begin{gathered} |x(t, t^*, x^*, \widehat{u}(\cdot), \widehat{v}(\cdot))| = |[|x^* + \int_{t^*}^{\vartheta} \widehat{v}(\tau)d\tau| + \\ +2(\vartheta - t^*) + 2(t - \vartheta)]sgn(x^* + \int_{t_*}^{\vartheta} \widehat{v}(\tau)d\tau) + \int_{\vartheta}^{t} \widehat{v}(t)dt| \geq \\ \geq |x^* + \int_{t^*}^{\vartheta} \widehat{v}(\tau)d\tau| + 2(\vartheta - t^*) + 2(t - \vartheta) - (t - \vartheta) = \\ = y^* + 2(t - t^*) - (t - \vartheta) \geq t + \vartheta - 2t^* \geq t, \end{gathered} \tag{2.21}$$

мы учли, что $t^* \leq \vartheta/2$. Стало быть, при $t \in [\vartheta, 1]$ имеет место $(t, x(t, t^*, x^*, \widehat{u}(\cdot), \widehat{v}(\cdot))) \in \mathcal{W}$. Но в этом случае непременно

$$(t, x(t, t^*, x^*, \widehat{u}(\cdot), \widehat{v}(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta) \tag{2.22}$$

при $t \in [t^*, 1]$. Заметим, что из (2.21) вытекает неравенство

$$|x(1, t^*, x^*, \widehat{u}(\cdot), \widehat{v}(\cdot))| \geq 1. \tag{2.23}$$

Итак (см.(2.22), (2.23)), установлено, что и при $(t^*, x^*) \notin \mathcal{W}$ у нас $\forall v(\cdot) \in \mathcal{V} \;\; \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}$:

$$(|x(1, t^*, x^*, u(\cdot), v(\cdot))| \geq 1) \;\&\; (\forall t \in [t^*, 1] : (t, x(t, t^*, x^*, u(\cdot), v(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta)).$$

В силу (2.4) получаем $(t^*, x^*) \in \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$. Итак, сопоставляя два возможных (в отношении (t^*, x^*)) случая, мы имеем вложение $\mathbf{H}(\vartheta/2) \subset \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$, что с учетом (2.19) означает равенство (2.10). Итак, (2.10) доказано.

Рассмотрим теперь комбинацию (2.6) и (2.10). Из (2.6), (2.9), (2.10) мы получаем , что $\mathcal{W}_0 = \mathbf{H}(1)$ и

$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{A}_M(\mathcal{W}_0) = \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(1)) = \mathbf{H}(1/2).$$

Дальнейшее построение $(\mathcal{W}_k)_{k \in \mathcal{N}_0}$ осуществляется по индукции: мы знаем, что $\mathcal{W}_0 = \mathbf{H}(1/2^0)$ и $\mathcal{W}_1 = \mathbf{H}(1/2^1)$. Пусть вообще $n \in \mathcal{N}$ таково, что $\mathcal{W}_n = \mathbf{H}(1/2^n)$. Тогда из (2.6), (2.10) имеем, что

$$\mathcal{W}_{n+1} = \mathcal{A}_M(\mathcal{W}_n) = \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(1/2^n)) = \mathbf{H}(1/2^{n+1}).$$

Итак, по индукции установлено, что

$$\forall k \in \mathcal{N}_0 : \mathcal{W}_k = \mathbf{H}(1/2^k) = \mathcal{W} \cup ([0, 1/2^k] \times \mathbf{R}). \tag{2.24}$$

Тогда, в частности, $\mathcal{W}_\infty$ есть пересечение всех множеств (2.24), т.е.

$$\mathcal{W}_\infty = \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} (\mathcal{W} \cup ([0, 1/2^k] \times \mathbf{R}))$$

и $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_\infty$. Если же $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_\infty \setminus \mathcal{W}$, то при всех $k \in \mathcal{N}_0$ имеем $t_* \in [0, 1/2^k]$ и, стало быть, $t_* = 0$, а тогда в силу (2.7) имеем $(t_*, x_*) = (0, x_*) \in \mathcal{W}$, что невозможно. Итак, $\mathcal{W}_\infty \setminus \mathcal{W} = \emptyset$, т.е. $\mathcal{W}_\infty = \mathcal{W}$ (см.[14]). В (2.24), таким образом, завершено построение "непрямой"(в терминологии [19-22]) и, по смыслу, вспомогательной версии МПИ для нашего конкретного примера.

3 Итерационное построение многозначной квазистратегии

В [16,17] и в ряде других использовалась формализация игрового управления в классе так называемых квазистратегий, т.е. физически реализуемых откликов на помеховое управление. Произвольные отклики именовались в [17] псевдостратегиями. В работах [5, 8-11, 13, 14, 28, 29] использовались (и это существенно с точки зрения конструктивного построения разрешающих процедур управления) многозначные квазистратегии, что сопровождалось, для линейных задач теории ДИ, расширением пространства управлений с использованием скользящих режимов.

В [18-22] рассматривались итерационные методы построения многозначных квазистратегий, являющиеся по смыслу прямыми версиями МПИ (в [18-22] рассматривались абстрактные задачи управления, не обязательно сводящиеся к ДИ, но мы сейчас не рассматриваем процедуры [18-22] в полной общности). Сейчас рассмотрим конкретизацию конструкций [19-22] для случая нашей задачи наведения на M (2.3). Рассмотрим в качестве основных траектории (2.2) при $t_* = 0$ и $x_* = 0$; "нулевую"позицию $(0,0) \in \mathcal{D}$ будем рассматривать в качестве начальной. Введем естественный тип многозначной псевдостратегии (аналог [17]) разрешающей задачу M-наведения. Если $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, то через $x_{\leftarrow}(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) = (x_{\leftarrow}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))_{t \in I_0}$ обозначаем непрерывную функцию из $\mathbf{C} \doteq \mathcal{C}([0,1])$, для которой

$$(\forall t \in [0, t_*[: x_{\leftarrow}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \doteq x_*) \ \&$$
$$\& \ (\forall t \in [t_*, 1] : x_{\leftarrow}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \doteq x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))).$$

Если $t_* \in [0,1], x_* \in \mathbf{R}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, то, в согласии с [23], введем

$$\mathcal{S}((t_*, x_*), v(\cdot)) \doteq \{x_{\leftarrow}(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{U}\}. \tag{3.1}$$

В (3.1) введен пучок траекторий, продолжающих влево траектории (2.2), при зафиксированном помеховом управлении $v(\cdot)$. В частности, при $t_* = 0$ и $x_* = 0$ в виде (3.1) имеем пучок обычных траекторий. В духе [18-22] введем требуемую многозначную псевдостратегию: в терминах семейства $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ всех подмножеств $\mathbf{C}$ определяем оператор $\mathcal{C}$, действующий из $\mathcal{V}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{C})$, посредством правила

$$\mathcal{C}(v(\cdot)) \doteq \{\mathbf{x} \in \mathcal{S}((0,0), v(\cdot)) \mid 1 \leq |\mathbf{x}(1)|\}. \tag{3.2}$$

В виде $\mathcal{C}$ имеем вышеупомянутый многозначный вариант псевдостратегии [17]. Нашей целью является перевод этой "псевдостратегии"в многозначную квазистратегию, разрешающую в классе траекторий системы (2.1) задачу о гарантированной реализации условия $|x(1)| \geq 1$. В этой связи заметим, что при $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ у нас

$$x_{\leftarrow}(\cdot, 0, 0, u(\cdot), v(\cdot)) = x(\cdot, 0, 0, u(\cdot), v(\cdot)). \tag{3.3}$$

С учетом (3.3) мы получаем, что для $v(\cdot) \in \mathcal{V}$

$$\mathcal{S}((0,0), v(\cdot)) = \{x(\cdot, 0, 0, u(\cdot), v(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{U}\}. \tag{3.4}$$

Стало быть, $\mathcal{C}$ (3.2) можно определить (см. (3.4)) в терминах "настоящих"траекторий системы (2.1):

$$\mathcal{C}(v(\cdot)) = \{x(\cdot, 0, 0, u(\cdot), v(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{U},\ 1 \leq |x(1, 0, 0, u(\cdot), v(\cdot))|\}.$$

Введем в рассмотрение множество $\mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$ всех отображений из $\mathcal{V}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. Иными словами, $\mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$ есть множество всех многозначных отображений (МО) из $\mathcal{V}$ в $\mathbf{C}$. В частности $\mathcal{C} \in \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$. Следуя [19-22] мы введем специальный оператор, действующий в $\mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$ и реализующий перевод $\mathcal{C}$ в многозначную квазистратегию, разрешающую нашу основную задачу. Если $w \in \mathcal{V}$ и $t \in [0, 1]$, то полагаем в согласии с [22, с.25], что

$$\Omega^0(w|t) \doteq \{\tilde{w} \in \mathcal{V} \mid \forall \tau \in [0, t] : w(\tau) = \tilde{w}(\tau)\}, \tag{3.5}$$

разумеется $w = v(\cdot)$ и, при $\tilde{w} \in \Omega^0(w|t)$, $\tilde{w} = \tilde{v}(\cdot)$ - суть борелевские функции из $[0, 1]$ в $[-1, 1]$. Введем оператор

$$\Gamma : \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C}) \to \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C}) \tag{3.6}$$

посредством следующего правила: если $\alpha \in \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$ и $w \in \mathcal{V}$, то

$$\begin{gathered} \Gamma(\alpha)(w) \doteq \{f \in \alpha(w) \mid \forall t \in [0, 1]\ \forall \tilde{w} \in \Omega^0(w|t) \\ \exists \tilde{f} \in \alpha(\tilde{w})\ \forall \tau \in [0, t] : f(\tau) = \tilde{f}(\tau)\}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

С оператором (3.6), (3.7) связываем последовательность его конечных степеней

$$\Gamma^k : \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C}) \to \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C}), \tag{3.8}$$

$k \in \mathcal{N}_0$, для которой, как обычно,

$$(\forall \alpha \in \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C}) : \Gamma^0(\alpha) = \alpha)\ \&\ (\forall k \in \mathcal{N} : \Gamma^k = \Gamma \circ \Gamma^{k-1}),$$

где $\circ$ обозначает операцию суперпозиции. Последовательность степеней (3.8) дополним бесконечной степенью Γ^∞ (подробнее см. в [19-22]); именно,

$$\Gamma^\infty : \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C}) \to \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C}) \tag{3.9}$$

определяется по следующему естественному правилу: при $\alpha \in \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$ и $w \in \mathcal{V}$

$$\Gamma^\infty(\alpha)(w) \doteq \bigcap_{k \in \mathcal{N}_0} \Gamma^k(\alpha)(w).$$

В соответствии с теоремой 5.1 [22] для наших целей важно построить не саму последовательность (3.8) и оператор (3.9), а результат их воздействия на $\mathcal{C}$, т.е. реализовать $(\Gamma^k(\mathcal{C}))_{k\in\mathcal{N}_0}$ и МО $\Gamma^\infty(\mathcal{C})$. Мы полагаем, что $\forall k \in \mathcal{N}_0 : \mathcal{C}_k \doteq \Gamma^k(\mathcal{C})$; кроме того, пусть $\mathcal{C}_\infty \doteq \Gamma^\infty(\mathcal{C})$. Тогда из определения последовательности (3.8) видно, что

$$(\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}) \ \& \ (\forall k \in \mathcal{N} : \mathcal{C}_k = \Gamma(\mathcal{C}_{k-1})). \tag{3.10}$$

В (3.10) имеем основной итерационный процесс. По определению Γ (3.9) имеем теперь для $\mathcal{C}_\infty = \Gamma^\infty(\mathcal{C})$ представление: для $w \in \mathcal{V}$

$$\mathcal{C}_\infty(w) = \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0} \mathcal{C}_k(w). \tag{3.11}$$

Разумеется (3.11) может использоваться для представления $\mathcal{C}_\infty$ как предела $(\mathcal{C}_k)_{k\in\mathcal{N}}$. Для этого отметим, что в силу (3.10) $\mathcal{C}_k(v(\cdot)) \subset \mathcal{C}_{k-1}(v(\cdot))$ при $k \in \mathcal{N}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$. В сочетании с (3.11) это означает (см. [30, гл.I]), что при $w \in \mathcal{V}$ имеет место монотонная сходимость $(\mathcal{C}_k(w))_{k\in\mathcal{N}} \downarrow \mathcal{C}_\infty(w)$. Такое свойство в [19-22] интерпретируется как поточечная сходимость в пространстве МО: в обозначениях [22, с.225]

$$(\mathcal{C}_k)_{k\in\mathcal{N}} \Downarrow \mathcal{C}_\infty. \tag{3.12}$$

Отметим, что конструкция оператора Γ соответствует [19-22]. Это позволяет использовать результаты этих работ в нашем конкретном случае. Укажем конкретизацию основных параметров общей постановки [19-22]. Именно, в качестве множества X (в [19-22]) следует использовать отрезок $[0,1]$, Υ [19-22] определяем в виде [-1,1], семейство $\mathcal{X}$ [19-22] определяем в виде $\{[0,t] : t \in [0,1]\}$, (Y,τ) [19-22] отождествляется с $(\mathbf{R}, \tau_{\mathbf{R}})$, где $\tau_{\mathbf{R}}$ есть обычная $|\cdot|$-топология вещественной прямой $\mathbf{R}$, в качестве Z [19-22] используем множество $\mathbf{C} = \mathrm{C}([0,1])$ всех непрерывных функций из $[0,1]$ в $\mathbf{R}$, Ω [19-22] полагаем совпадающим с $\mathcal{V}$. В этих условиях при $w \in \Omega$ и $A = [0,t]$, где $t \in [0,1]$, имеем

$$\Omega_0(w|A) = \Omega^0(w|t),$$

где $\Omega_0(w|A)$ определено в [21, с.69]. В этих предположениях с учетом (3.7) оператор Γ [19-22] определяется выражениями: при $\alpha \in \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$ и $w \in \mathcal{V}$

$$\Gamma(\alpha)(w) = \{f \in \alpha(w) \mid \forall A \in \mathcal{X} \ \forall \tilde{w} \in \Omega_0(w|A) \ \exists \tilde{f} \in \alpha(\tilde{w}) : (f|A) = (\tilde{f}|A)\} =$$
$$= \{f \in \alpha(w) \mid \forall t \in [0,1] \ \forall \tilde{w} \in \Omega_0(w|[0,t]) \ \exists \tilde{f} \in \alpha(\tilde{w}) : (f|[0,t]) = (\tilde{f}|[0,t])\} =$$
$$= \{f \in \alpha(w) \mid \forall t \in [0,1] \ \forall \tilde{w} \in \Omega^0(w|t) \ \exists \tilde{f} \in \alpha(\tilde{w}) : (f|[0,t]) = (\tilde{f}|[0,t])\} =$$
$$= \{f \in \alpha(w) \mid \forall t \in [0,1] \ \forall \tilde{w} \in \Omega^0(w|t) \ \exists \tilde{f} \in \alpha(\tilde{w}) \ \forall \tau \in [0,t] :$$
$$f(\tau) = \tilde{f}(\tau)\}.$$

Наконец, полезно отметить, что МО $\mathcal{C}$ (3.2) непременно является компактнозначным в смысле топологии равномерной сходимости пространства $\mathbf{C}$; напомним, что в нашей простейшей системе (2.1) борелевские управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ исчерпывающим образом воспроизводят (компактный) пучок обобщенных решений для нелинейных систем общего вида, рассматриваемых в [7-11, 13, 14]. Итак, при $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ множество $\mathcal{C}(v(\cdot))$ компактно в $\mathbf{C}$ с топологией равномерной сходимости. Вместе с тем в теоремах [19-22] используется другая топология, а именно топология поточечной сходимости в $\mathrm{Z} = \mathbf{C}$ (напомним, что (Y, τ) [19-22] здесь совпадает с $(\mathbf{R}, \tau_{\mathbf{R}})$).

Известно, однако [31], что топология поточечной сходимости в $\mathbf{C}$ слабее топологии равномерной сходимости, а тогда при $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ множество $\mathcal{C}(v(\cdot))$ компактно в смысле топологии поточечной сходимости пространства $\mathbf{C}$. Итак, $\mathcal{C}$ компактнозначно и в смысле $\mathbf{C}$ с топологией поточечной сходимости. Стало быть, у нас выполнны все условия теоремы 5.1 [22]. Приведем соответствующую конкретизацию этой теоремы. На непустом множестве $\mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$ введем (частичный) порядок $\sqsubseteq$, полагая def : $\forall \alpha_1 \in \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$ $\forall \alpha_2 \in \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$:

$$(\alpha_1 \sqsubseteq \alpha_2) \Longleftrightarrow (\forall v(\cdot) \in \mathcal{V} : \alpha_1(v(\cdot)) \subset \alpha_2(v(\cdot))). \tag{3.13}$$

В частности, в качестве α_2 в (3.13) может использоваться $\mathcal{C}$. Рассмотрим непустое множество $\mathbf{N} \doteq \{\alpha \in \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C}) \mid \alpha = \Gamma(\alpha)\}$ (всех неподвижных точек Γ, т.е. множество всех неупреждающих МО на $\Omega = \mathcal{V}$). Тогда (см. (3.13))

$$\mathbf{N}_0[\mathcal{C}] \doteq \{\alpha \in \mathbf{N} \mid \alpha \sqsubseteq \mathcal{C}\} \tag{3.14}$$

есть множество всех неупреждающих мультиселекторов (м/с) МО $\mathcal{C}$. Элементы (3.14) подобны многозначным квазистратегиям [5, 8-14, 28, 29], но могут иметь в отдельных "точках"$\mathcal{V}$ своими значениями пустое множество $\emptyset$. В частности, элементом (3.14) является постоянное МО $\alpha_\emptyset \in \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$, для которого $\alpha_\emptyset(v(\cdot)) \equiv \emptyset$. С другой стороны, (3.14) имеет [21, 22] наибольший в $(\mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C}), \sqsubseteq)$ элемент $(na)[\mathcal{C}]$ в виде отображения из $\mathcal{V}$ в семейство всех подмножеств $\mathbf{C}$, для которого (см. [22, §5])

$$\forall v(\cdot) \in \mathcal{V} : (na)[\mathcal{C}](v(\cdot)) \doteq \bigcup_{\alpha \in \mathbf{N}_0[\mathcal{C}]} \alpha(v(\cdot)). \tag{3.15}$$

Известно (см.[21, 22]), что $(na)[\mathcal{C}] \in \mathbf{N}_0[\mathcal{C}]$ и при этом

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}_0[\mathcal{C}] : \alpha \sqsubseteq (na)[\mathcal{C}].$$

Таким образом, $(na)[\mathcal{C}]$ есть требуемый $\sqsubseteq$-наибольший элемент $\mathbf{N}_0[\mathcal{C}]$. Согласно теореме 5.1 [22] (см. также теор. 4.1.6 [21]) имеет место равенство $\Gamma^\infty(\mathcal{C}) = (na)[\mathcal{C}]$. С учетом (3.10), (3.11) имеем для МО (3.15) представление

$$(na)[\mathcal{C}] = \mathcal{C}_\infty. \tag{3.16}$$

Отметим, что (3.16) непременно является многозначной квазистратегией, т.е. при $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ непременно $\mathcal{C}_\infty(v(\cdot)) \neq \emptyset$. В самом деле, введем в рассмотрение постоянное управление $\mathrm{U}_\uparrow \in \mathcal{U}$, полагая, что при $t \in [0,1]$ имеет место $\mathrm{U}_\uparrow(t) \doteq 2$. Теперь введем отображение $\alpha_\uparrow$ из $\mathcal{V}$ в $\mathbf{C}$, полагая, что $\forall v(\cdot) \in \mathcal{V}\ \forall t \in [0,1]$:

$$\alpha_\uparrow(v(\cdot))(t) \doteq x(t,0,0,\mathrm{U}_\uparrow, v(\cdot)) = \int_0^t \mathrm{U}_\uparrow(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)d\tau. \tag{3.17}$$

Из (3.17) следует, что $\alpha_\uparrow$ - неупреждающее отображение в смысле [16,17,27], т.е. (однозначная) квазистратегия. Введем "фиктивное"МО $\alpha^\uparrow \in \mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C})$ по правилу: при $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ выполняется $\alpha^\uparrow(v(\cdot)) = \{\alpha_\uparrow(v(\cdot))\}$. Ясно, что $\alpha^\uparrow \in \mathbf{N}$. Вместе с тем, из (3.17) следует, что $\forall v(\cdot) \in \mathcal{V}$

$$\alpha_\uparrow(v(\cdot))(1) \geq \int_0^1 \mathrm{U}_\uparrow(t)dt - 1 = 2 - 1 = 1. \tag{3.18}$$

Стало быть, при $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ в силу (3.4)

$$\alpha^\uparrow(v(\cdot)) \subset \mathcal{S}((0,0), v(\cdot))$$

удовлетворяет (3.18), т.е. (в согласии с (3.4)) $\alpha^\uparrow(v(\cdot)) \subset \mathcal{C}(v(\cdot))$. Как следствие $\alpha^\uparrow \sqsubseteq \mathcal{C}$, а тогда в силу неупреждаемости $\alpha^\uparrow$ имеем из (3.14), что $\alpha^\uparrow \in \mathbf{N}_0[\mathcal{C}]$ и, стало быть, $\alpha^\uparrow \sqsubseteq (na)[\mathcal{C}]$.

Итак, $\forall v(\cdot) \in \mathcal{V} : \alpha^\uparrow(v(\cdot)) \subset (na)[\mathcal{C}](v(\cdot))$. Таким образом, $\forall v(\cdot) \in \mathcal{V} : (na)[\mathcal{C}](v(\cdot)) \neq \emptyset$.

Тем самым, установлено, что $(na)[\mathcal{C}]$ есть многозначная квазистратегия: $(na)[\mathcal{C}]$ является неупреждающим многозначным отображением с непустыми значениями. Кроме того, из свойства $(na)[\mathcal{C}] \in \mathbf{N}_0[\mathcal{C}]$ следует, что эта многозначная квазистратегия разрешает задачу наведения на $\mathbf{M}$ (2.3) (см. определение $\mathcal{C}$). Наконец, в силу (3.15) данная квазистратегия является наибольшей в $(\mathbf{M}(\mathcal{V}, \mathbf{C}), \sqsubseteq)$ среди всех таких разрешающих квазистратегий. Соотношение (3.15) определяет многозначную квазистратегию $(na)[\mathcal{C}]$ как предел итерационной процедуры, имеющей смысл прямой версии МПИ. Известно, что во многих случаях (для конкретных ДИ) процедуры на основе МПИ доставляют решение ДИ за конечное число итераций (см. [5,8,9] и др.). В то же время иногда (см.[15]) необходимо построение всей последовательности итераций. Сказанное выше относится, однако, к "непрямым"вариантам МПИ, т.е. к несколько иным итерационным процедурам. Для "прямых"версий МПИ в [19, 22] построены примеры, где решение достигается за две итерации, считая и нулевое приближение. С использованием утверждений работы [23] мы покажем, что в нашем случае "прямая"версия МПИ требует (как и в [15]) построения всей бесконечной последовательности итераций. Для этой цели мы введем более удобное представление оператора $\mathcal{A}_M$. Условимся о следующих обозначениях. Если H - подмножество $\mathbf{D}$, $z_* = (t_*, x_*) \in \mathbf{D}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, то через $\Pi(v(\cdot) \mid z_*, H)$ обозначаем множество всех $h \in S(z_*, v(\cdot))$ таких, что

$$\exists \vartheta \in [t_*, 1] : ((\vartheta, h(\vartheta)) \in M) \ \& \ (\forall t \in [t_*, \vartheta[: (t, h(t)) \in H). \tag{3.19}$$

Далее, как и в [23] полагаем, что $\mathbf{A} : \mathcal{P}(\mathbf{D}) \to \mathcal{P}(\mathbf{D})$ действует по правилу: при $H \in \mathcal{P}(\mathbf{D})$

$$\mathbf{A}(H) \doteq \{z \in H \mid \forall v(\cdot) \in \mathcal{V} : \Pi(v(\cdot) \mid z, H) \neq \emptyset\}. \tag{3.20}$$

Определение (3.19), (3.20) соответствуют [23] при условии, что в [23]: $t_0 = 0$, $\vartheta_0 = 1$, $\Omega = \mathcal{V}$. В силу (2.4), (3.1) и (3.19) имеем очевидное равенство $\mathbf{A} = \mathcal{A}_M$, т.е. $\mathbf{A}(H) \equiv \mathcal{A}_M(H)$.

4 Построение многозначной квазистратегии с помощью двойственных конструкций метода программных итераций

Мы воспользуемся (2.24) и положениями [23] для того, чтобы установить свойство

$$\forall k \in \mathbf{N}_0 : (na)[\mathcal{C}] \neq \mathcal{C}_k. \tag{4.1}$$

В этой связи заметим, что отображение S, переводящее $\mathbf{D} \times \mathcal{V}$ в семейство $\mathcal{P}'(\mathbf{C}) \doteq \mathcal{P}(\mathbf{C}) \setminus \{\emptyset\}$ всех непустых подмножеств $\mathbf{C}$ и определяемое в (3.1), удовлетворяет всем условиям [23]. Тогда (см. лемму 5.1 [23]) при $H \in \mathcal{P}(\mathbf{D})$

$$\Gamma(\Pi(\cdot|(0,0), H)) = \Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{A}(H)). \tag{4.2}$$

Теперь заметим, что в силу (2.3), (3.2), (3.19) имеет место $\forall v(\cdot) \in \mathcal{V}$

$$\begin{gathered}\Pi(v(\cdot) \mid (0,0), \mathbf{D}) = \{h \in S((0,0), v(\cdot)) \mid \exists \vartheta \in [0,1] : \\ ((\vartheta, h(\vartheta)) \in M) \;\&\; (\forall t \in [0,1[: (t, h(t)) \in \mathbf{D})\} = \\ = \{h \in S((0,0), v(\cdot)) \mid \exists \vartheta \in [0,1] : (\vartheta, h(\vartheta)) \in M\} = \\ = \{h \in S((0,0), v(\cdot)) \mid |h(1)| \geq 1\} = \mathcal{C}(v(\cdot)).\end{gathered} \tag{4.3}$$

Это означает, что $\Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{D}) = \mathcal{C}$. Заметим, что из (4.2), (4.3) следует, в частности, что

$$\Gamma(\mathcal{C}) = \Gamma(\Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{D})) = \Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{A}(\mathbf{D})).$$

С учетом (2.24), (3.10) и равенства $\mathbf{A} = \mathcal{A}_M$ получаем теперь, что

$$\begin{gathered}\mathcal{C}_1 = \Gamma(\mathcal{C}_0) = \Gamma(\mathcal{C}) = \Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{A}(\mathbf{D})) = \Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{A}(W_0)) = \\ = \Pi(\cdot|(0,0), W_1) = \Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{H}(1/2)).\end{gathered} \tag{4.4}$$

Соотношение (4.4) с помощью индукции распространяется на любой номер $k \in \mathcal{N}$ в следующем смысле.

Предложение 4.1. $\forall k \in \mathcal{N}$: $\mathcal{C}_k = \Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{H}(1/2^k))$.

Доказательство. Воспользуемся следствием 5.1 и теоремой 5.1 [23]. Тогда, если $k \in N$, то (см. [23])

$$\Gamma^k(\Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{D})) = \Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{A}^k(\mathbf{D})) = \Pi(\cdot|(0,0), \mathcal{A}_M^k(\mathbf{D}))$$

в силу (3.21). Как следствие (см. (3.10))

$$\Gamma^k(\mathcal{C}) = \Pi(\cdot|(0,0), \mathcal{A}_M^k(\mathbf{D})). \tag{4.5}$$

С учетом (3.10) и (4.5) получаем $\mathcal{C}_k = \Pi(\cdot|(0,0), \mathcal{A}_M^k(\mathbf{D}))$. Но из (2.6), (2.24) следует, что справедливо равенство

$$\mathcal{A}_M^k(\mathbf{D}) = W_k = \mathbf{H}(1/2^k).$$

В итоге получаем совпадение $\mathcal{C}_k = \Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{H}(1/2^k))$.

С учетом (3.19) и (4.3) имеем из предложения 4.1, что $\forall k \in \mathcal{N}_0$:

$$\mathcal{C}_k = \Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{H}(1/2^k)). \tag{4.6}$$

Рассмотрим теперь представление [23] для $\mathcal{C}_\infty$, определяемого в соответствии с [22]. В самом деле, согласно следствию 5.2 [23] и (3.11) имеет место равенство

$$\mathcal{C}_\infty = \Pi(\cdot|(0,0), \mathbf{A}^\infty(\mathbf{D})), \tag{4.7}$$

где $\mathbf{A}^\infty$ определяется в соответствии с [23]. Для нас существенно, что

$$\mathbf{A}^\infty(\mathbf{D}) = \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0} \mathbf{A}^k(\mathbf{D}) = \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0} \mathcal{A}_M^k(\mathbf{D}) = \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0} \mathcal{W}_k.$$

С учетом (2.24) получаем

$$\mathbf{A}^\infty(\mathbf{D}) = \bigcap_{k\in\mathcal{N}_0} \mathbf{H}(1/2^k) = \mathcal{W}_\infty = \mathcal{W}. \tag{4.8}$$

Из (4.7), (4.8) получаем равенство

$$\mathcal{C}_\infty = \Pi(\cdot|(0,0),\mathcal{W}). \tag{4.9}$$

Но $\mathcal{W} \subset \mathbf{H}(1/2^k)$ при $k \in \mathcal{N}_0$. Из (3.19), (4.6) и (4.9) следует, что

$$\forall k \in \mathcal{N}_0\ \forall v(\cdot) \in \mathcal{V} : \mathcal{C}_\infty(v(\cdot)) \subset \mathcal{C}_k(v(\cdot)). \tag{4.10}$$

Теорема 4.1. Имеет место $\forall k \in \mathcal{N}_0$: $\mathcal{C}_\infty \neq \mathcal{C}_k$.
Доказательство. Из (4.6), (4.9) мы имеем

$$(\forall k \in \mathcal{N}_0 : \mathcal{C}_k = \Pi(\cdot|(0,0),\mathbf{H}(1/2^k)))\ \&\ (\mathcal{C}_\infty = \Pi(\cdot|(0,0),\mathcal{W})). \tag{4.11}$$

В силу (4.10) достаточно установить, что

$$\forall k \in \mathcal{N}_0\ \exists v(\cdot) \in \mathcal{V} : \mathcal{C}_k(v(\cdot)) \setminus \mathcal{C}_\infty(v(\cdot)) \neq \emptyset. \tag{4.12}$$

Будем использовать (4.11). Фиксируем $n \in \mathcal{N}_0$. Тогда в силу (4.11) имеем

$$\mathcal{C}_n = \Pi(\cdot|(0,0),\mathbf{H}(1/2^n)). \tag{4.13}$$

В силу (2.8) имеем следующее представление множества $\mathbf{H}(1/2^n)$ в (4.13):

$$\mathbf{H}(1/2^n) = \mathcal{W} \cup ([0,1/2^n] \times \mathbf{R}). \tag{4.14}$$

Заметим, что точка $w \doteq (1/2^n, 1/2^n) \in \mathcal{W}$. Если $\theta \in [0,1/2^n]$, то рассмотрим функцию $f_\theta : [\theta,1] \to [0,\infty[$, для которой $\forall t \in [\theta,1]\ f_\theta(t) \doteq 2(t-\theta)$. Если $\theta \in [0,1/2^n]$, то $1/2^n \in [\theta,1]$ и корректно определяется значение $f_\theta(1/2^n) \in [0,\infty[$. Нам потребуется решить следующее простейшее уравнение

$$(1/2^n, f_\theta(1/2^n)) = w. \tag{4.15}$$

Уравнение (4.15) эквивалентно (по определению w) следующему

$$f_\theta(1/2^n) = 1/2^n. \tag{4.16}$$

Через θ_0 обозначаем решение (4.16). Используя определение f_{θ_0}, получаем из (4.16) равенство $2(1/2^n - \theta_0) = 1/2^n$, означающее, что

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2^{n-1}} - \tfrac{1}{2^n}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2^n} = \tfrac{1}{2^{n+1}}. \tag{4.17}$$

В терминах (4.17) мы установим, что для управления $\mathbf{O} \in \mathcal{V}$, тождественно равного нулю, т.е. $\mathbf{O}(t) \equiv 0$, имеет место

$$\mathcal{C}_n(\mathbf{O}) \setminus \mathcal{C}_\infty(\mathbf{O}) \neq \emptyset. \tag{4.18}$$

Пусть $u_0(\cdot) = (u_0(t) \in \mathbf{R}, 0 \leq t \leq 1) \in \mathcal{U}$ таково, что

$$(\forall t \in [0, \theta_0[: u_0(t) \doteq 0) \ \& \ (\forall t \in [\theta_0, 1] : u_0(t) \doteq 2). \tag{4.19}$$

В силу (3.4) имеем, что траектория $x_0(\cdot) = (x_0(t), 0 \leq t \leq 1)$, определяемая условием $x_0(\cdot) = x(\cdot, 0, 0, u_0(\cdot), \mathbf{O})$, есть элемент $S((0,0), \mathbf{O})$, т.е.

$$x_0(\cdot) \in S((0,0), \mathbf{O}). \tag{4.20}$$

Из (2.2) вытекает, что имеет место $\forall t \in [0,1]$:

$$x_0(t) = x(t, 0, 0, u_0(\cdot), \mathbf{O}) = \textstyle\int_0^t u_0(t)dt. \tag{4.21}$$

Из (4.21) имеем, что при $t \in [0, \theta_0]$ непременно $x_0(t) = 0$. Если же $t \in [\theta_0, 1]$, то в силу аддитивности (неопределенного) интеграла

$$x_0(t) = \textstyle\int_{\theta_0}^t 2dt = 2(t - \theta_0) = f_{\theta_0}(t). \tag{4.22}$$

Ясно, что в силу (4.14) верно

$$(t, x_0(t)) \in \mathbf{H}(1/2^n) \tag{4.23}$$

при $t \in [0, 1/2^n]$. Далее, используем (4.22). При $t \in [1/2^n, 1]$ имеем $x_0(t) = 2(t - \theta_0) = 2(t - 1/2^{n+1}) = t + (t - 1/2^n) \geq t$. Последнее означает, что в силу (2.7) $\forall t \in [1/2^n, 1]$: $(t, x_0(t)) \in \mathcal{W}$. С учетом (4.14) имеем теперь при $t \in [1/2^n, 1]$ также выполнено (4.23). Стало быть, у нас

$$\forall t \in [0,1] : (t, x_0(t)) \in \mathbf{H}(1/2^n). \tag{4.24}$$

Далее, по определению f_{θ_0} имеем $x_0(1) = 2 - 1/2^n \geq 1$. Стало быть, $(1, x_0(1)) \in M$. С учетом (3.19), (4.20) и (4.24) имеем теперь свойство $x_0(\cdot) \in \Pi(\mathbf{O}|(0,0), \mathbf{H}(1/2^n))$. С учетом (4.13) мы получили свойство

$$x_0(\cdot) \in \mathcal{C}_n(\mathbf{O}). \tag{4.25}$$

С другой стороны, для момента $\theta_0 \in]0,1[$, определенного в (4.17) мы имеем равенство $x_0(\theta_0) = 0$. Поэтому $|x_0(\theta_0)| < \theta_0$ и, стало быть, в силу (2.7)

$$(\theta_0, x_0(\theta_0)) \notin \mathcal{W}. \tag{4.26}$$

Возвращаясь к (3.19), мы замечаем, что $x_0(\cdot) \notin \Pi(\mathbf{O}|(0,0), \mathcal{W})$; как следствие, из (4.11) имеем

$$x_0(\cdot) \notin \mathcal{C}_\infty(\mathbf{O}). \tag{4.27}$$

Из (4.26), (4.27) вытекает свойство

$$x_0(\cdot) \in \mathcal{C}_n(\mathbf{O}) \setminus \mathcal{C}_\infty(\mathbf{O}).$$

Тем самым, установлено (4.18), что означает справедливость (4.12) в силу произвольного выбора n; итак $\mathcal{C}_\infty \neq \mathcal{C}_k$ при $k \in \mathcal{N}_0$.

Литература

[1] Айзекс Р. Дифференциальные игры.-М.: Мир, 1967.

[2] Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений.-М.: Наука, 1970.

[3] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры.-М.:Наука, 1974.

[4] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.-М.:Наука, 1985.

[5] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантий в задачах упавления.-М.:Наука, 1981.

[6] Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения, I.-Изв. АН СССР (Техн. киберн.), 1973, N 2.

[7] Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения, II.-Изв. АН СССР (Техн. киберн.), 1973, N 3.

[8] Ченцов А.Г. ДАН СССР, 1975, 224, N 6, с.1272-1275.

[9] Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени.-"Мат.сб.", 1976, Т.99, N 3, 394-420.

[10] Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения.-ДАН СССР, 1976, 226, N 1.

[11] Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения с информационной памятью.- "Докл. АН СССР", 1976, Т.227, N2, 306-308.

[12] Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования.-ПММ, 1977, 41, N 5.

[13] Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения к заданому моменту времени.-Изв. АН СССР. Серия матем., 1978, 42, N2.

[14] Ченцов А.Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения.-Свердловск, 1979.-102с.-(Рукоп. деп. в ВИНИТИ 4 июля 1979 г.; N1933-79 Деп.)

[15] Ченцов А.Г. Об одном примере нерегулярной дифференциальной игры.-ПММ, 1977, 40, N 6.

[16] Roxin E. Axiomatic approach in differential games.-J. Optimiz. Theory & Appl., 1969, 3 N 3, p.153-163.

[17] Elliott R.J., Kalton N.J. The existense of value in differential games //Memoires of the Amer.Math.Soc.-1972.-N126.-67p.

[18] Ченцов А.Г. Метод программных итераций в классе конечно-аддитивных управлений-мер //Дифференциальные уравнения -1997.-N 11.-С.1528-1536.

[19] Ченцов А.Г. Итерационная реализация неупреждающих многозначных отображений //Докл. РАН.-1997.-Т.357, N5.-с.595-598.

[20] Ченцов А.Г. К вопросу о параллельной версии абстрактного аналога метода програмных итераций //Докл. РАН.-1998.-Т.362, N5.-с.602-605.

[21] Ченцов А.Г. К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений //Известия ВУЗов, Математика, 2000, N3(454), с.66-76.

[22] A.Chentsov Nonanticipating selectors of set-valued mappings and iterated procedures // FDE 1999, 6, N 3-4, 249-274p.

[23] Ченцов А.Г. К вопросу о согласованности различных версий метода программных итераций //Докл. РАН.-2000.-Т.372, N5.-с.600-603.

[24] Дятлов В.П., Ченцов А.Г. Управление с гибкими коррекциями при ограничении на общее число переключений //Гагаринские науч.чтения по космонавтике и авиации. 1987г.: Сб.науч.тр.-М.:Наука, 1988.-с.70-75.

[25] Дятлов В.П., Ченцов А.Г. Об одном классе линейных дифференциальных игр с ограниченным числом коррекций.-В кн.:Управление и оценивание в динамических системах. Свердловск, 1982, с.9-16.

[26] Ченцов А.Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач.-Екатеринбург: УИФ "Наука", 1993.

[27] Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in differential games.-SIAM J.Control, 1969, 7, N1, p.141-157.

[28] Krasovskii N.N., Chentsov A.G. On the design of differential games. I.-Probl. Control & Inform. Theory, 1977, 6, N 5-6, p.381-395.

[29] Krasovskii N.N., Chentsov A.G. On the design of differential games. I.-Probl. Control & Inform. Theory, 1979, 8, N 1, p.3-11.

[30] Неве Ж. Математические основы теории вероятностей.-М.:Мир, 1969.

[31] Келли Дж.Л. Общая топология.-М.:Наука, 1981.