ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2003
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ 3-го ПОРЯДКА, ОБЛАДАЮЩИХ ЛИЕВСКИМИ СИММЕТРИЯМИ И ПЕРВЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

П.П. Аврашков (ОрелГТУ), В.Ф. Зайцев (РГПУ им. А.И.Герцена)

Известно [1], что ОДУ 3-го порядка вида

$$y''' = f(x, y, y') \tag{1}$$

допускает точечный оператор Ли вида $X = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$, если и только если

$$X = r(x)\partial_x + [(r'(x) + \alpha)y + \beta(x)]\partial_y, \tag{2}$$

а найденная в этой работе функция $f(x, y, y')$ имеет специальную форму, представимую в виде (при $r(x) \neq 0$)

$$f = r^{-2}E\left[\Phi(u,w) + \Delta w + r^2r'''u + (\alpha^3 + \Delta\alpha + r^2r''')V\right] + \Phi_0(x), \tag{3}$$

где $\Phi_0(x) \equiv r^{-2}(r''\beta - r'\beta' + r\beta'') + \alpha r^{-3}(r\beta' - r'\beta + \alpha\beta)$, $r(x)$ и $\beta(x)$ – произвольные функции, α – произвольная постоянная,

$$E = E(x) \equiv \exp\left(\alpha \int r^{-1}dx\right), \quad V = V(x) \equiv \int \beta r^{-2}E^{-1}\,dx$$

$u = E^{-1}r^{-1}y - V$, $w = E^{-1}r^{-1}(ry' - r'y - \beta) - \alpha V$, $\Phi(u, w)$ – произвольная функция своих аргументов, а $\Delta = 2rr'' - (r')^2$.

Из доказанной там же теоремы, в частности, следует, что уравнение

$$y''' = \psi(x, y) \tag{4}$$

(частный случай уравнения (1)) имеет квадратичный по y'' первый интеграл

$$P = Q(x,y,y')(y'')^2 + R(x,y,y')y'' + S(x,y,y'), \tag{5}$$

если и только если функция

$$\psi(x,y) \equiv Q^{-5/4}\left[g(x) + \frac{c''' - 3u_1'}{4}\int Q^{1/4}\,dy - \frac{5b'''}{4}\int yQ^{1/4}\,dy\right], \tag{6}$$

функции

$$\begin{aligned} Q &= Ay^2 + b(x)y + c(x), && (7)\\ R &= U - Q_x y' - \frac{1}{2}Q_y(y')^2, && (8)\\ S &\equiv H(x,y) - (U_x + 2Q\psi)y' + \frac{1}{2}(Q_{xx} - U_y)(y')^2 + \frac{1}{2}Q_{xy}(y')^3 + \frac{1}{8}Q_{yy}(y')^4, && (9) \end{aligned}$$

а функция $H(x,y)$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} H_y = U_{xx} - U\varphi + 3Q\psi + 2Q\psi_x,\\ H_x + U\psi = 0, \end{cases} \tag{10}$$

(где

$$U(x,y) = u_0(x) + u_1(x)y + b''y^2, \tag{11}$$

а функции $b(x), c(x), u_0(x), u_1(x), g(x)$ и постоянная A – произвольны).

Рассмотрим вопрос о поиске уравнений вида (4), обладающих и первыми интегралами вида (5) и лиевской симметрией вида (2).

Так как функция $\psi(x,y)$ не зависит от y', а инвариант w – зависит, то в (3) должно выполняться равенство: $\Phi(u,w) + w\Delta = \mathrm{const}$, откуда вытекает, что функция Φ должна быть линейна по w, т.е. $\Phi(u,w) \equiv \Psi_1(u)w + \Psi(u)$. Тогда формула (3) принимает вид:

$$\psi(x,y) \equiv r^{-2}E\left[(\Psi_1 + \Delta)w + \Psi + r^2r'''(u+V) + \alpha(\alpha^2 + \Delta)V\right] + \Phi_0(x),$$

причём коэффициент перед w должен быть равен нулю: $\Psi_1(u) + \Delta(x) = 0$, поэтому $\Psi_1(u) = K = \mathrm{const}$, а последнее уравнение можно переписать так: $K + \Delta = 0$, т.е.

$$2rr'' - (r')^2 + K = 0. \tag{12}$$

Решением этого уравнения является функция

$$r(x) = \begin{cases} C_1(x+C_2)^2 - \frac{K}{4C_1} & \text{при} \quad C_1 \neq 0,\\ \pm\sqrt{K}(x+C_2) & \text{при} \quad C_1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что, во-первых, $r''' \equiv 0$, а во-вторых, ненулевая[1] постоянная K является несущественным параметром. Поэтому, обозначив $\pm\sqrt{K}$ через δ, можем переписать решение уравнения (12) в виде

$$r(x) = C_1(x + C_2)^2 + \delta(x + C_2). \tag{13}$$

При этом формула (3) принимает вид:

$$\psi \equiv r^{-2}E\left[\Psi(u) + \alpha(\alpha^2 + \Delta)\right] + \Phi_0.$$

Таким образом, уравнение (4) допускает оператор (2), если

$$\psi(x, y) \equiv r^{-2}E\Psi(u) + \Phi_1(x), \tag{14}$$

где $\Phi_1(x) \equiv \alpha(\alpha^2 - \delta^2)r^{-2}VE + \Phi_0(x)$ (так как из (13) следует, что $\Delta = 2rr'' - (r')^2 = -\delta^2$). При этом формула (6) принимает вид

$$\psi(x, y) \equiv Q^{-5/4}\left[g(x) + \frac{c''' - 3u_1'}{4}\int Q^{1/4}\,dy - \frac{5b'''}{4}\int yQ^{1/4}\,dy\right].$$

Так как

$$\int yQ^{1/4}\,dy = \begin{cases} \frac{2}{5A}Q^{5/4} - \frac{b}{2A}\int Q^{1/4}\,dy & \text{при} \quad A \neq 0, \\ \frac{4}{5b}Q^{5/4}\left(y - \frac{4Q}{9b}\right) & \text{при} \quad A = 0, \quad b(x) \not\equiv 0, \\ \frac{1}{2}y^2Q^{1/4} & \text{при} \quad A = 0, \quad b(x) \equiv 0, \end{cases}$$

то формула для функции $\psi(x, y)$ распадается на три ветви:

$$\psi(x, y) \equiv \begin{cases} gQ^{-5/4} - \frac{b'''}{2A} + \left(\frac{5bb'''}{8A} + \frac{c'''-3u_1'}{4}\right)Q^{-5/4}\int Q^{1/4}\,dy & \text{при} \quad A \neq 0, \\ gQ^{-5/4} - \frac{5b'''}{9b^2}Q + \frac{b'''c}{b^2} + \frac{c'''-3u_1'}{5b} & \text{при} \quad A = 0, \quad b(x) \not\equiv 0, \\ gc^{-5/4} + \frac{c'''-3u_1'}{4c}y & \text{при} \quad A = 0, \quad b(x) \equiv 0. \end{cases} \tag{15}$$

Тем самым вопрос о взаимодействии лиевских симметрий и квадратичных по y'' первых интегралов распадается на три части.

1. Пусть $A \neq 0$. Вводя обозначения:

$$b(x)/2A = p(x), \quad c - Ap^2 = D(x), \tag{16}$$

из (7) получим, что $Q = A(y + p)^2 + D$, при этом из первой строки формулы (15) следует:

$$\psi(x, y) \equiv gQ^{-5/4} - p''' + \left(\frac{5}{2}App''' + \frac{c''' - 3u_1'}{4}\right)Q^{-5/4}\int Q^{1/4}\,dy. \tag{17}$$

[1]При $K = 0$ имеем уравнение $2rr'' - (r')^2 = 0$ с особым решением $r = \text{const} \neq 0$.

Если $D(x) \not\equiv 0$, то $\int Q^{1/4}\,dy$ является дифференциальным биномом, не интегрирующемся в конечном виде. Поэтому начнем со случая

1.1. $D(x) \equiv 0$, тогда

$$Q = A(y+p)^2, \quad c''' = 2A(3p'p''+pp'''), \quad \int Q^{1/4}\,dy = \frac{2}{3\sqrt{A}}Q^{3/4},$$

и формула (17) примет вид:

$$\psi(x,y) \equiv gQ^{-5/4} - p''' + \left(2App''' + Ap'p'' - \frac{1}{2}u_1'\right)A^{-1/2}Q^{-1/2}.$$

Выразим Q через u и V:

$$Q = A(y+p)^2 = Ar^2E^2(u+V+pr^{-1}E^{-1})^2,$$

тогда

$$\psi(x,y) \equiv g(x)(Ar^2E^2)^{-5/4}\left(u+V+\frac{p}{rE}\right)^{-5/2} + \\ + \frac{2A(2pp'''+p'p'')-u_1'}{2ArE}\left(u+V+\frac{p}{rE}\right)^{-1} - p'''. \quad (18)$$

Сравнивая[2] (18) и (14), приходим к выводу, что функция $\psi(x,y)$ имеет структуру (14), если

$$\begin{cases} \frac{gr^2E^{-1}}{(Ar^2E^2)^{5/4}} = k_1, \\ \frac{2A(2pp'''+p'p'')-u_1'}{2ArE(r^{-2}E)} = k_2, \\ V + \frac{p}{rE} = k_3, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} p = rE(k_3 - V), \\ u_1' = 2A(2pp'''+p'p''-k_2r^{-1}E^2), \\ g = k_1A^{5/4}r^{1/2}E^{7/2}, \end{cases} \quad (19)$$

(здесь k_1, k_2, k_3 – константы[3]). При этом

$$\psi(x,y) \equiv r^{-2}E\left[k_1(u+k_3)^{-5/2} + k_2(u+k_3)^{-1}\right] - p''',$$

то есть в основных переменных имеем уравнение

$$y''' = k_1r^{1/2}E^{7/2}(y+p)^{-5/2} + k_2r^{-1}E^2(y+p)^{-1} - p'''. \quad (20)$$

Так как замена $y(x)+p(x) = Y(x)$ приводит уравнение (20) к уравнению того же вида, но с $p \equiv 0$, то функция $p(x)$ является несущественным параметром. Поэтому вместо уравнения (20) будем рассматривать уравнение

$$y''' = k_1r^{1/2}E^{7/2}y^{-5/2} + k_2r^{-1}E^2y^{-1}; \quad (21)$$

[2]Точнее: приравнивая правые части (14) и (18), разделим их на $r^{-2}E$ и продифференцируем обе части полученного равенства по u и по x.

[3]При $k_1 = k_2 = 0$ k_3 может зависеть от x; но этот случай неинтересен, так как приводит к уравнению $y''' = -p'''$ с очевидным общим решением $y(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0 - p$.

при этом условие совместного наличия точечной симметрии и первого интеграла – система (19) – упрощается до системы

$$\begin{cases} V = k_3, \\ u_1' = -2Ak_2 r^{-1} E^2, \\ g = k_1 A^{5/4} r^{1/2} E^{7/2}, \end{cases} \tag{22}$$

третье уравнение которой определяет функцию g и в дальнейшей проверке не нуждается.

Заметим, что из определения функции V следует, что $V' = \beta r^{-2} E^{-1}$; тогда из первого уравнения системы (22) следует, что $\beta(x) \equiv 0$, следовательно, все уравнения вида (21) допускают группу Ли с оператором

$$X = r\partial_x + (r' + \alpha) y \partial_y, \tag{23}$$

где r определяется по формуле (13), причем, не нарушая общности, можно считать, что $C_2 = 0$, т.е.

$$r(x) = C_1 x^2 + \delta x. \tag{24}$$

Положим в (21) (для удобства и сокращения выкладок)

$$E^2 r^{-1} = q'(x), \quad r^{1/2} E^{7/2} = s(x), \tag{25}$$

и применим к уравнению

$$y''' = k_1 s y^{-5/2} + k_2 q' y^{-1} \tag{26}$$

алгоритм поиска квадратичных по y'' первых интегралов, описанный в [1].

Так как $Q = Ay^2$, то по формуле (11) получаем: $U = u_0 + u_1 y$; тогда из первого уравнения системы (10) имеем:

$$H_y = u_0'' + u_1'' y + 2Ak_1 s' y^{-1/2} + 2Ak_2 q'' y.$$

Следовательно,

$$H = h_0(x) + u_0'' y + \frac{1}{2}(u_1'' + 2Ak_2 q'') y^2 + 4Ak_1 s' y^{1/2},$$

и второе уравнение системы (10) принимает вид:

$$k_1 s u_0 y^{-5/2} + k_1 s u_1 y^{-3/2} + k_2 q' u_0 y^{-1} + h_0' + k_2 q' u_1 + \\ + u_0''' y + \frac{1}{2}(u_1''' + 2Ak_2 q''') y^2 + 4Ak_1 s'' y^{1/2} = 0$$

и расщепляется по степеням y в систему

$$\begin{cases} k_1 s u_0 = 0, \\ k_1 s u_1 = 0, \\ k_2 q' u_0 = 0, \\ h_0' + k_2 q' u_1 = 0, \\ u_0''' = 0, \\ u_1''' + 2Ak_2 q''' = 0, \\ 4Ak_1 s'' = 0, \end{cases} \tag{27}$$

шестое уравнение которой оказывается следствием второго уравнения системы (22). Следовательно, $u_1(x) = C_3 - 2Ak_2q$. Из последнего уравнения системы (27) следует, что либо $k_1 = 0$, либо $s'' = 0$. Рассмотрим обе ситуации.

1.1.a). Пусть $k_1 = 0$, тогда уравнение (26) принимает вид

$$y''' = k_2 q' y^{-1} \tag{28}$$

и имеет очевидный первый интеграл

$$P_l = yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - k_2 q, \tag{29}$$

линейный по y''. Продолжая алгоритм поиска квадратичных по y'' первых интегралов, из 3-го уравнения системы (27) получим: $u_0(x) \equiv 0$ (так как $k_2 \neq 0$ – иначе имеем тривиальный случай – $y''' = 0$, а $q' \neq 0$ в силу определения по формуле (25)); следовательно, $U = (C_3 - 2Ak_2q)y$; из 4-го уравнения системы (27) находим функцию h_0 (с точностью до постоянного слагаемого): $h_0(x) = k_2 A k_2 q^2 - C_3 q)$, следовательно, $H = A(k_2q)^2 - C_3 k_2 q$.

Используя формулы (8) и (9), последовательно получаем: $R = (C_3 - 2Ak_2q)y - A(y')^2$; $S = A\left[k_2q + \frac{1}{2}(y')^2\right]^2 - C_3\left[k_2q + \frac{1}{2}(y')^2\right]$; тогда первый интеграл (5) приводится к виду:

$$P = A\left[yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - k_2q\right]^2 + C_3\left[yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - k_2q\right],$$

т.е. P является квадратичной функцией от P_l: $P = AP_l^2 + C_3 P_l$ и фактически для уравнения (28) имеем только линейный по y'' первый интеграл (29).

Остаётся только учесть, что из определения q по формуле (25) следует, что

$$q(x) = \int r^{-1} E^2\, dx = \begin{cases} \int r^{-1}\, dx & \text{при} \quad \alpha = 0, \\ \frac{1}{2\alpha} E^2 & \text{при} \quad \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Тогда 3 случая интегрируемости функции r^{-1} ($C_1 = 0, \delta \neq 0$; $C_1 \neq 0, \delta = 0$; $C_1\delta \neq 0$) позволяют выписать 6 уравнений вида (28), имеющих первый интеграл (29) и допускающих точечный оператор вида (23). Рассмотрение особого решения – $r(x) \equiv 1$ – добавляет ещё 2 уравнения с указанным свойством. Результаты собраны в таблице 1.

Таблица 1

Уравнения подкласса $y''' = \lambda r^{-1} E^2 y^{-1}$ из класса дифференциальных уравнений $y''' = f(x, y)$, допускающие точечный оператор Ли и имеющие первый интеграл

При $\alpha \neq 0$:

$r(x)$	$f(x,y)$	Допускаемый оператор X	Первый интеграл P
1	$\lambda e^{2\alpha x} y^{-1}$	$\partial_x + \alpha y \partial_y$	$yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{\lambda}{2\alpha} e^{2\alpha x}$
$\delta x, \frac{\alpha}{\delta} = \gamma$	$\lambda x^{2\gamma-1} y^{-1}$	$x\partial_x + (1+\gamma) y \partial_y$	$yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{\lambda}{2\gamma} x^{2\gamma}$
$C_1 x^2$	$\lambda e^{-2\alpha/x} x^{-2} y^{-1}$	$x^2 \partial_x + (2x + \alpha) y \partial_y$	$yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{\lambda}{2\alpha} e^{-2\alpha/x}$
$C_1 x^2 + \delta x, \frac{\alpha}{\delta} = \gamma$	$\frac{\lambda x^{2\gamma-1}}{(C_1 x + \delta)^{2\gamma+1} y}$	$(C_1 x^2 + \delta x)\partial_x + (2C_1 x + \delta + \delta\gamma) y \partial_y$	$yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{\lambda}{2\gamma\delta} \frac{x^{2\gamma}}{(C_1 x + \delta)^{2\gamma}}$

При $\alpha = 0$:

$r(x)$	$f(x,y)$	Допускаемый оператор X	Первый интеграл P
1	λy^{-1}	∂_x	$yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - \lambda x$
δx	$\lambda x^{-1} y^{-1}$	$x\partial_x + y\partial_y$	$yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - \lambda \ln x$
$C_1 x^2$	$\lambda x^{-2} y^{-1}$	$x^2 \partial_x + 2xy\partial_y$	$yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{\lambda}{x}$
$C_1 x^2 + \delta x$	$\frac{\lambda}{(C_1 x^2 + \delta x) y}$	$(C_1 x^2 + \delta x)\partial_x + (2C_1 x + \delta) y \partial_y$	$yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{\lambda}{\delta} \ln \frac{x}{C_1 x + \delta}$

1.1.б). Пусть теперь $k_1 \neq 0$, а $s'' = 0$, тогда из второго уравнения системы (27) следует, что $u_1 = 0$, а и из второго уравнения системы (22) следует, что $k_2 = 0$, и уравнение (26) принимает вид

$$y''' = k_1 s y^{-5/2}. \tag{30}$$

При этом остальные уравнения системы (27) дают: $u_0 = 0$, $h_0' = 0$, следовательно, $U = 0$, $H = C + 4Ak_1 s' y^{1/2}$, и для уравнения (30) по формулам (8) и

(9) получаем первый интеграл (5), в котором $Q = Ay^2$, $R = -Ay(y')^2$, $S = C + 4Ak_1 s' y^{1/2} - 2Ak_1 s y^{-1/2} y' + \frac{1}{4}A(y')^4$, т.е.

$$P = A\left[\left(yy'' - \frac{1}{2}(y')^2\right)^2 + 2k_1(2s'y^{1/2} - sy^{-1/2}y')\right]. \tag{31}$$

Остаётся использовать условие $s'' = 0$. Из определения s по формуле (25) следует, что

$$s'' = \frac{1}{4}r^{-3/2}E^{7/2}[2rr'' - (r')^2 + 49\alpha^2] = \frac{1}{4}r^{-3/2}E^{7/2}(49\alpha^2 - \delta^2),$$

значит,

$$49\alpha^2 - \delta^2 = 0, \tag{32}$$

откуда получаем, что $\alpha = \pm\delta/7$.

Вычисление функции s по формуле (25) для трёх различных значений: $\alpha = 0$, $\alpha = \pm\delta/7 \neq 0$ приводят к трём семействам уравнений вида (30), имеющих первый интеграл (31) и допускающих точечный оператор вида (23). Рассмотрение особого решения – $r(x) \equiv 1$ – добавляет ещё 1 уравнение с указанным свойством. Результаты собраны в таблице 2.

Таблица 2

Уравнения подкласса $y''' = \lambda r^{1/2}E^{7/2}y^{-5/2}$ из класса дифференциальных уравнений $y''' = f(x,y)$, допускающие точечный оператор Ли и имеющие первый интеграл

	$r(x)$	$f(x,y)$	Допускаемый оператор X	Первый интеграл P
$\alpha = 0$; $\alpha \neq 0$	C_1x^2; δx	$\lambda x y^{-5/2}$	$X_1 = x^2\partial_x + 2xy\partial_y$; $X_2 = 7x\partial_x + 8y\partial_y$	$\left(yy'' - \frac{1}{2}(y')^2\right)^2 + 2\lambda\frac{2y - xy'}{y^{1/2}}$
$\alpha \neq 0$	$C_1x^2 + \delta x$	$\lambda(C_1x + \delta)y^{-5/2}$; $C_1\delta \neq 0$	$X = (C_1x^2 + \delta x)\partial_x + (2C_1x + 6\delta/7)y\partial_y$	$\left(yy'' - \frac{1}{2}(y')^2\right)^2 + 2\lambda\frac{2C_1y - (C_1x+\delta)y'}{y^{1/2}}$
$\alpha = 0$; $\alpha \neq 0$	1; δx	$\lambda y^{-5/2}$	$X_1 = \partial_x$; $X_2 = 7x\partial_x + 6y\partial_y$	$\left(yy'' - \frac{1}{2}(y')^2\right)^2 - 2\lambda y^{-1/2}y'$
$\alpha \neq 0$	1	$\lambda e^{7\alpha x/2}y^{-5/2}$	$X = \partial_x + \alpha y\partial_y$	$\left(yy'' - \frac{1}{2}(y')^2\right)^2 - 2\lambda(y' - \frac{4}{7\alpha}y)e^{7\alpha x/2}y^{-1/2}$

Итак, доказана

Теорема 1. При $r(x) \not\equiv 0$ среди нетривиальных уравнений класса (4), допускающих группу Ли с оператором (23) и имеющих первый интеграл

(5), в котором $Q = Ay^2$, существует 2 и только 2 подкласса – уравнения вида (28) и (30), причём первый из них содержит 8 типов уравнений, собранных в таблице 1, а второй – 4 типа уравнений, собранные в таблице 2.

1.2. Пусть теперь $D(x) \not\equiv 0$. Не нарушая общности, можем считать, что $A = 1$. Тогда $Q = (y+p)^2 + D = D[D^{-1}(y+p)^2 + 1]$. Если обозначить через $\Xi(z)$ одну из первообразных функции $(1+z^2)^{1/4}$, то

$$\int Q^{1/4}\,dy = D^{3/4}\Xi(D^{-1/2}\cdot(y+p));$$

а так как из (16) следует, что $c''' = D''' + 2(3p'p'' + pp''')$, то из (17) находим:

$$\psi(x,y) \equiv \left[(y+p)^2 + D\right]^{-5/4}\Bigg[g - \\ -D^{3/4}\frac{D''' + 6p'p'' + 12pp''' - 3u_1'}{4}\Xi\left(D^{-1/2}(y+p)\right)\Bigg] - p'''.$$

Учитывая, что $y + p = rE\left(u + V + \frac{p}{rE}\right)$, получаем, что

$$\psi \equiv D^{-5/4}\left\{\left[D^{-1/2}rE\left(u + V + \frac{p}{rE}\right)\right]^2 + 1\right\}^{-5/4}\Bigg[g - \\ - D^{3/4}\frac{D''' + 6p'p'' + 12pp''' - 3u_1'}{4}\Xi\left(D^{-1/2}rE\left(u + V + \frac{p}{rE}\right)\right)\Bigg] - p'''.$$

Сравнивая эту формулу с (14), приходим к выводу, что функция $\psi(x,y)$ имеет структуру (14), если (и только если) $g(x)r^2E^{-1}D^{-5/4} = k_1$, $D^{-1/2}rE = = k_2 \neq 0$, $V + pr^{-1}E^{-1} = k_3$, $r^2E^{-1}D^{-1/2}(D''' + 6p'p'' + 12pp''' - 3u_1')/4 = k_4$, т.е.

$$\begin{cases} D = k_2^{-2}r^2E^2, \\ g(x) = k_1 D^{5/4}r^{-2}E, \\ V = k_3 - pr^{-1}E^{-1}, \\ 3u_1' = D''' + 6p'p'' + 12pp''' - 4k_4D^{1/2}r^{-2}E. \end{cases} \tag{33}$$

При этом функция $\psi = r^{-2}E\left\{[k_2(u+k_3)]^2 + 1\right\}^{-5/4}[k_1 - k_4\Xi(k_2(u+k_3))] - p'''$ или, возвращаясь к основным переменным и используя обозначение (25), $\psi(x,y) \equiv k_2^{-5/2}s(x)Q^{-5/4}[k_1 - k_4\Xi(D^{-1/2}(y+p)] - p'''$.

Опять функция $p(x)$ является несущественным параметром. Поэтому будем рассматривать уравнение

$$y''' = k_2^{-5/2}s(x)(y^2 + D)^{-5/4}[k_1 - k_4\Xi(D^{-1/2}y)], \tag{34}$$

для которого условие совместного наличия точечной симметрии и первого интеграла – система (33) – упрощается до системы

$$\begin{cases} D = k_2^{-2} r^2 E^2, \quad V = k_3, \\ 3u_1' = D''' - 4k_4 D^{1/2} r^{-2} E, \\ g(x) = k_1 D^{5/4} r^{-2} E. \end{cases} \tag{35}$$

Так как второе уравнение системы (35) совпадает с первым уравнением системы (22), то оператор точечной симметрии, допускаемый уравнением (34), опять имеет вид (23).

Теорема 2. При $r(x) \not\equiv 0$ среди нетривиальных уравнений класса (4), допускающих группу Ли с оператором (23) и имеющих первый интеграл (5), в котором $Q = y^2 + D$, существует 2 и только 2 семейства уравнений – уравнения вида

$$y''' = k_1 \sqrt{C_1} x (k_2^2 y^2 + C_1^2 x^4)^{-5/4}, \tag{36}$$

имеющие первый интеграл

$$P = \left[yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 \right]^2 + k_2^{-2} \left[C_1^2 (2y - 2xy' + x^2 y'')^2 + \right.$$
$$\left. + 2k_1 \sqrt{C_1} (2y - xy')(k_2^2 y^2 + C_1^2 x^4)^{-1/4} \right] \tag{37}$$

и допускающие лиевский оператор

$$X = x^2 \partial_x + 2xy \partial_y, \tag{38}$$

и уравнения вида

$$y''' = k_1 (k_2^2 y^2 + 1)^{-5/4}, \tag{39}$$

имеющие первый интеграл

$$P = \left[yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 \right]^2 + k_2^{-2} \left[(y'')^2 - 2k_1 (k_2^2 y^2 + 1)^{-1/4} y' \right] \tag{40}$$

и допускающие лиевский оператор

$$X = \partial_x. \tag{41}$$

Доказательство. Так как $Q = y^2 + D$, то, по формуле (11), $U = u_0(x) + u_1(x) y$, тогда из первого уравнения системы (10) получаем:

$$H_y = h_1(x) + h_2(x) y + k_2^{-5/2} \left(2s' Q^{-1/4} + \frac{1}{2} s D' Q^{-5/4} \right) \left[k_1 - k_4 \Xi(D^{-1/2} y) \right],$$

где
$$h_1(x) \equiv u_0'', \quad h_2(x) \equiv u_1'' + k_4 k_2^{-5/2} s D^{-7/4} D'. \tag{42}$$
Так как
$$\int Q^m \, dy = \frac{1}{1+2m} y Q^m + 2mD \int Q^{m-1} \, dy, \tag{43}$$
то
$$H(x,y) = h_0(x) + h_1 y + \frac{1}{2} h_2 y^2 + k_1 k_2^{-5/2} \left(4s' y Q^{-1/4} + h_3 \int Q^{-5/4} \, dy \right) -$$
$$- \frac{1}{2} k_4 k_2^{-5/2} \int \left(4s' Q^{-1/4} + sD' Q^{-5/4} \right) \Xi \, dy,$$
где
$$h_3(x) \equiv (sD' - 4s'D)/2. \tag{44}$$

Вновь используя формулу (43), приводим второе уравнение системы (10) к виду:

$$h_0' + h_1' y + \frac{1}{2}(h_2' + k_4 k_2^{-5/2} D^{-7/4} D' s') y^2 + k_2^{-5/2}(u_0 + u_1 y) s Q^{-5/4}(k_1 - k_4 \Xi) +$$
$$+ k_1 k_2^{-5/2} \left[\left(4s'' - \frac{1}{2} f_2 D^{-2} \right) y Q^{-1/4} + \frac{1}{6}(f_2 D^{-1} - 2f_1) y Q^{-5/4} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} f_2 D^{-2} \int Q^{-1/4} \, dy \right] + \frac{1}{8} k_4 k_2^{-5/2} \left[D^{-7/4} (D')^2 s \ln Q - \right.$$
$$\left. - \int (16 s'' Q^2 + 4sD'' Q - 5s(D')^2) Q^{-9/4} \Xi \, dy \right] = 0, \tag{45}$$

где $f_1(x) \equiv 2h_3' + 3s'D'$, $f_2(x) \equiv 4h_3' D - 3h_3 D'$.

Предположим, что $k_4 \neq 0$. Тогда из уравнения (45), в частности, вытекает, что $u_0(x) = u_1(x) \equiv 0$ и $D' = 0$, что противоречит третьему условию системы (35), т.е. случай $k_4 \neq 0$ невозможен.

Рассмотрим случай $k_4 = 0$, тогда $\psi(x,y) \equiv k_1 k_2^{-5/2} s(x) Q^{-5/4}$, где постоянная $k_1 \neq 0$, а уравнение (45) принимает вид

$$h_0' + h_1' y + \frac{1}{2} h_2' y^2 - \frac{1}{4} k_1 k_2^{-5/2} f_2 D^{-2} \int Q^{-1/4} \, dy + k_1 k_2^{-5/2} Q^{-5/4} \left[s u_0 + \right.$$
$$\left. + \left(s u_1 + 4s'' D - \frac{1}{3} f_2 D^{-1} - \frac{1}{3} f_1 \right) y + \left(4s'' - \frac{1}{2} f_2 D^{-2} \right) y^3 \right] = 0$$

и расщепляется в систему

$$\begin{cases} 8s'' - f_2 D^{-2} = 0, \\ 3su_1 + 12s''D - f_2 D^{-1} - f_1 = 0, \\ f_2 D^{-2} = 0, \\ su_0 = 0, \\ h_2' = h_1' = h_0' = 0. \end{cases} \tag{46}$$

Из третьего уравнения системы (46) следует, что $f_2(x) \equiv 0$, т.е. $4h_3'D - 3h_3D' = 0$. Подставляя сюда выражение h_3 по формуле (44) и учитывая, что из первого уравнения системы (46) следует, что $s'' = 0$, после сокращения на $s(x) \not\equiv 0$ получаем: $4DD'' - 3(D')^2 = 0$. Подставляя сюда значение D из первого уравнения системы (35), после упрощения получим: $2rr'' - (r')^2 + \alpha^2 = 0$, т.е., используя (24),

$$\alpha^2 - \delta^2 = 0. \tag{47}$$

Но из $s'' = 0$ опять следует (32). Объединяя (47) и (32), приходим к выводу, что

$$\alpha = \delta = 0. \tag{48}$$

Тогда $E(x) \equiv 1$, следовательно, $s(x) = r^{1/2}$, $D(x) = k_2^{-2}r^2$, $Q = y^2 + k_2^{-2}r^2$, $h_3(x) \equiv \frac{1}{2}(sD' - 4s'D) \equiv 0$, а функция r удовлетворяет уравнению

$$2rr'' - (r')^2 = 0. \tag{49}$$

При этом система (46) упрощается до системы

$$\begin{cases} 3su_1 - f_1 = 0, \\ u_0 = 0, \\ h_2' = h_1' = h_0' = 0. \end{cases} \tag{50}$$

Подставляя f_1 в первое уравнение системы (50) и используя (44), приводим его к виду $(3u_1 - D'')s = 0$, следовательно, $u_1(x) = \frac{1}{3}D'' = \frac{2}{3}k_2^{-2}(rr'' + (r')^2)$, что согласуется с третьим уравнением системы (35).

Тогда из (42) имеем: $h_2(x) \equiv u_1'' = \frac{1}{3}D^{(4)} = 2k_2^{-2}(r'')^2$, $\quad h_1(x) \equiv u_0'' = 0$, и три последних уравнения системы (50) выполняются тождественно. При этом функция $H(x, y)$ приводится к виду:

$$H(x, y) = k_2^{-2}(r'')^2y^2 + 2k_1k_2^{-2}r^{-1/2}r'y(k_2^2y^2 + r^2)^{-1/4},$$

функция U – в силу равенства (49) – к виду

$$U(x,y)=\frac{2}{3}k_2^{-2}((r')^2+rr'')y=k_2^{-2}(r')^2y,$$

тогда из (8) и (9) последовательно получаем:

$$R=k_2^{-2}(r')^2y-2k_2^{-2}rr'y'-y(y')^2,$$

$$S=k_2^{-2}\left[(r'')^2y^2-2r'r''yy'+(r')^2(y')^2\right]+ \\ +2k_1k_2^{-2}r^{-1/2}(r'y-ry')(k_2^2y^2+r^2)^{-1/4}+\frac{1}{4}(y')^4,$$

и первый интеграл, по формуле (5) равный

$$(y^2+k_2^{-2}r^2)(y'')^2+(k_2^{-2}(r')^2y-2k_2^{-2}rr'y'-y(y')^2)y''+ \\ +k_2^{-2}(r''y-r'y')^2+2k_1k_2^{-2}r^{-1/2}(r'y-ry')(k_2^2y^2+r^2)^{-1/4}+\frac{1}{4}(y')^4,$$

после использования равенства (49) приводится к виду

$$P=\left(yy''-\frac{1}{2}(y')^2\right)^2+k_2^{-2}\left[(ry''-r'y'+r''y)^2+\right. \\ \left.+2k_1r^{-1/2}(r'y-ry')(k_2^2y^2+r^2)^{-1/4}\right]. \quad (51)$$

Так как уравнению (49), в силу условия (48), удовлетворяют только 2 функции: $r(x)\equiv C_1x^2$ и $r(x)\equiv \text{const}$, то, подставляя их в (51) и (23), получим, что уравнение (36) имеет первый интеграл (37) и допускает лиевский оператор (38), а уравнение (39) имеет первый интеграл (40) и допускает лиевский оператор (41). Теорема 2 доказана.

2. Пусть теперь $A=0$, $b(x)\not\equiv 0$, тогда $Q=by+c$, при этом из 2-й строки формулы (15) следует:

$$\psi(x,y)\equiv g(x)Q^{-5/4}-\frac{5b'''}{9b^2}Q+\frac{b'''c}{b^2}+\frac{c'''-3u_1'}{5b}.$$

Положим $c(x)/b(x)=p(x)$, тогда $Q=b(y+p)$, $c=bp$, а

$$\psi(x,y)\equiv g(x)Q^{-5/4}-\frac{5b'''}{9b^2}Q+\frac{6b'''p+bp'''+3(b'p')'-3u_1'}{5b}.$$

Обозначив

$$\frac{6b'''p+bp'''+3(b'p')'-3u_1'}{5b}\equiv\chi(x), \quad (52)$$

получим, что

$$\psi(x,y) \equiv g(x)Q^{-5/4} - \frac{5b'''}{9b^2}Q + \chi(x).$$

Выражая Q (и ψ) через u и V, имеем:

$$Q = b(y+p) = brE\left(u + V + \frac{p}{rE}\right),$$

тогда

$$\psi \equiv g\cdot(brE)^{-5/4}\left(u + V + \frac{p}{rE}\right)^{-5/4} - \frac{5b'''}{9b}rE\left(u + V + \frac{p}{rE}\right) + \chi. \qquad (53)$$

Сравнивая (53) и (14), приходим к выводу, что функция $\psi(x,y)$ имеет структуру (14), если (и только если)

$$\frac{r^2E^{-1}g}{(brE)^{5/4}} = k_1, \quad r^2E^{-1}\frac{5b'''}{9b}rE = k_2, \quad V + \frac{p}{rE} = k_3,$$

т.е.

$$\begin{cases} p = rE(k_3 - V), \\ 5b''' = 9k_2r^{-3}b, \\ g = k_1b^{5/4}r^{-3/4}E^{9/4} \end{cases} \qquad (54)$$

(здесь опять k_1, k_2, k_3 – константы). При этом

$$\psi(x,y) \equiv r^{-2}E\cdot[k_1(u+k_3)^{-5/4} - k_2(u+k_3)] + \chi,$$

или, возвращаясь к основным переменным и полагая $E^{9/4}r^{-3/4} \equiv \sigma(x)$,

$$\psi(x,y) \equiv k_1\sigma(x)(y+p)^{-5/4} - k_2r^{-3}(y+p) + \chi.$$

Из (11) для уравнения

$$y''' = k_1\sigma(x)(y+p)^{-5/4} - k_2r^{-3}(y+p) + \chi. \qquad (55)$$

имеем:

$$U(x,y) = u_0(x) + u_1(x)y + b''y^2,$$

тогда из первого уравнения системы (10) получаем:

$$H_y = h_1(x) + h_2(x)y + h_3(x)y^2 + k_1[h_4(x)(y+p)^{-1/4} + h_5(x)(y+p)^{-5/4}],$$

где

$$h_1(x) \equiv u_0'' + 3\chi(bp)' + 2bp\chi' - k_2r^{-4}p(5rbp' + 3rb'p - 6r'bp), \qquad (56)$$

$$h_2(x) \equiv u_1'' + 2b\chi' + 3b'\chi - k_2r^{-4}(5rbp' + 6rb'p - 12r'bp), \qquad (57)$$

$$h_3(x) \equiv b^{(4)} - 3k_2r^{-4}(rb' - 2r'b), \qquad (58)$$

$$h_4(x) \equiv 3\sigma b' + 2\sigma' b, \qquad (59)$$

$$h_5(x) \equiv \sigma bp'/2; \qquad (60)$$

следовательно,

$$H(x,y) = h_0(x) + h_1 y + \frac{1}{2}h_2 y^2 + \frac{1}{3}h_3 y^3 + k_1\left[\frac{4}{3}h_4(y+p)^{3/4} - 4h_5(y+p)^{-1/4}\right],$$

и второе уравнение системы (10) приводится к виду:

$$\begin{gathered}
h_0' - (k_2 r^{-3}p - \chi)u_0 + \left[h_1' - k_2 r^{-3}u_0 - (k_2 r^{-3}p - \chi)u_1\right]y + \\
+ \left[\frac{1}{2}h_2' - k_2 r^{-3}u_1 - b''(k_2 r^{-3}p - \chi)\right]y^2 + \left(\frac{1}{3}h_3' - k_2 r^{-3}b''\right)y^3 + \\
+ k_1(y+p)^{-5/4}\left\{\sigma u_0 + h_5 p' + (h_4 p' - 4h_5')p + \frac{4}{3}h_4' p^2 + \right. \\
\left. + \left[\sigma u_1 + (h_4 p' - 4h_5') + \frac{8}{3}h_4' p\right]y + \left(\sigma b'' + \frac{4}{3}h_4'\right)y^2\right\} = 0. \qquad (61)
\end{gathered}$$

Если $k_1 = 0$, то уравнение (61) расщепляется в систему:

$$\begin{cases}
h_3' - 3k_2 r^{-3}b'' = 0, \\
h_2' - 2k_2 r^{-3}u_1 - 2b''(k_2 r^{-3}p - \chi) = 0, \\
h_1' - k_2 r^{-3}u_0 - (k_2 r^{-3}p - \chi)u_1 = 0, \\
h_0' - (k_2 r^{-3}p - \chi)u_0 = 0.
\end{cases} \qquad (62)$$

Если же $k_1 \neq 0$, то к системе (62) добавляются еще 3 уравнения:

$$\begin{cases}
3\sigma b'' + 4h_4' = 0, \\
3\sigma u_1 + 3(h_4 p' - 4h_5') + 8h_4' p = 0, \\
3\sigma u_0 + 3h_5 p' + 3(h_4 p' - 4h_5')p + 4h_4' p^2 = 0,
\end{cases}$$

которые после подстановки в них выражений для h_4 и h_5 принимают вид:

$$\begin{cases}
8b\sigma'' + 20b'\sigma' + 15b''\sigma = 0, \\
3\sigma(u_1 + b'p' - 2bp'' - 2b''p) + 2(15b''\sigma + 20b'\sigma' + 8b\sigma'')p = 0, \\
6\sigma u_0 + 3b\sigma(p')^2 + 6\sigma(b'p' - 2bp'')p + 8p^2(3b''\sigma + 5b'\sigma' + 2b\sigma'') = 0.
\end{cases} \qquad (63)$$

Если $k_1 = 0$, то искомое уравнение (55) оказывается линейным:

$$y''' = -k_2 r^{-3}(y+p) + \chi,$$

причем оно интегрируется в квадратурах, так как общее решение соответствующего однородного уравнения, в силу условия $r''' = 0$, представимо (см. [2], №3.1.2.179) в виде

$$y(x) = r(x) \sum_{j=1}^{3} K_j \varepsilon_j(x),$$

где K_j – постоянные, $\varepsilon_j(x) \equiv e^{\lambda_j \int r^{-1}\,dx}$, а λ_j – корни уравнения $\lambda^3 - \delta^2\lambda + k_2 = 0$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $k_1 \neq 0$.

Из первого и третьего уравнений системы (63) найдем, что

$$u_0(x) \equiv b''p^2 - 2b'pp' + b\left(2pp'' - \frac{1}{2}(p')^2\right), \tag{64}$$

а из первого и второго уравнений этой системы получаем, что $3\sigma(u_1 + b'p' - 2bp'' - 2b''p) = 0$, следовательно,

$$u_1 = 2bp'' - b'p' + 2b''p, \tag{65}$$

но тогда из (52) следует, что $\chi(x) \equiv -p'''$, и искомое уравнение (55) принимает вид

$$y''' = k_1\sigma(x)(y+p)^{-5/4} - k_2 r^{-3}(y+p) - p''',$$

откуда видно, что функция $p(x)$ опять является несущественным параметром. Поэтому в качестве искомого будем рассматривать уравнение

$$y''' = k_1\sigma(x)y^{-5/4} - k_2 r^{-3} y, \tag{66}$$

при этом в формулах (56), (57), (60), (62)-(65) следует положить $p(x) \equiv 0$, что, в частности, даёт: $u_0 = 0, u_1 = 0, h_1 = 0, h_2 = 0, h_5 = 0$.

Так как из второго уравнения системы (54) следует, что

$$b^{(4)} = \frac{9}{5}k_2 r^{-4}(rb' - 3r'b), \quad b^{(5)} = \frac{9}{5}k_2 r^{-5}\left\{r^2 b'' - 6rr'b' + 3[4(r')^2 - rr'']b\right\},$$

то система (62) упрощается до системы

$$\begin{cases} k_2\left[7r^2b'' - 7r'rb' + (4(r')^2 - r''r)b\right] = 0, \\ h_0' = 0, \end{cases} \tag{67}$$

из второго уравнения которой следует, что $h_0(x) \equiv C$.

2.1. Если $k_2 = 0$, то система (67) удовлетворяется, а из второго уравнения системы (54) вытекает, что $b''' = 0$, т.е.

$$b(x) \equiv B_0 + B_1 x + B_2 x^2, \tag{68}$$

но тогда из (58) имеем:

$$h_3(x) \equiv 0.$$

Используя (59)-(60), после преобразований получим, что

$$H(x,y) = C + \frac{4}{3}k_1(3b'\sigma + 2b\sigma')y^{3/4};$$

при этом $U = b''y^2$,

$$R = b''y^2 - b'yy' - \frac{1}{2}b(y')^2,$$

$$S = k_1\left[\frac{4}{3}(3b'\sigma + 2b\sigma')y^{3/4} - 2b\sigma y^{-1/4}y'\right] - \frac{1}{2}(y')^2(b''y - b'y');$$

тогда первый интеграл, по формуле (5) равный

$$P = by(y'')^2 + \left(b''y^2 - b'yy' - \frac{1}{2}b(y')^2\right)y'' + \\ + k_1\left[\frac{4}{3}(3b'\sigma + 2b\sigma')y^{3/4} - 2b\sigma y^{-1/4}y'\right] - \frac{1}{2}(y')^2(b''y - b'y'),$$

после преобразований приводится к виду

$$P = (b''y - b'y' + by'')\left(y''y - \frac{1}{2}(y')^2\right) + k_1\left[\frac{4}{3}(3b'\sigma + 2b\sigma')y^{3/4} - 2b\sigma y^{-1/4}y'\right]. \tag{69}$$

Таким образом, уравнение

$$y''' = k_1\sigma(x)y^{-5/4} \tag{70}$$

имеет первый интеграл (69), в котором функция $b(x)$ определяется формулой (68).

Для нахождения точечного оператора, допускаемого уравнением (70), учтем, что первое уравнение системы (54) совпадает с первым уравнением системы (19), значит, уравнение (70) допускает оператор (23). Подставив определение $\sigma(x)$ в первое уравнение системы (63), получим после упрощений уравнение

$$10b''r^2 - 10b'(r' - 3\alpha)r - b(4r''r - 7(r')^2 + 30\alpha r' - 27\alpha^2) = 0.$$

Подставляя сюда значения $r(x) = C_1x^2 + \delta x$ и $b(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2$, придём к уравнению

$$[B_2(\delta + 3\alpha)(7\delta + 9\alpha) - 10B_1C_1(\delta + 3\alpha) + 20B_0C_1^2]x^2 + \\ + (\delta - 3\alpha)[20B_0C_1 - 3B_1(\delta + 3\alpha)]x + B_0(\delta - 3\alpha)(7\delta - 9\alpha) = 0,$$

которое расщепляется в систему:

$$\begin{cases} B_2(\delta+3\alpha)(7\delta+9\alpha)-10B_1C_1(\delta+3\alpha)+20B_0C_1^2=0,\\ (\delta-3\alpha)\left[20B_0C_1-3B_1(\delta+3\alpha)\right]=0,\\ B_0(\delta-3\alpha)(7\delta-9\alpha)=0. \end{cases} \tag{71}$$

2.1.1. Если $B_0=0$, то система (71) принимает вид:

$$\begin{cases} B_2(\delta+3\alpha)(7\delta+9\alpha)-10B_1C_1(\delta+3\alpha)=0,\\ -3B_1(\delta+3\alpha)(\delta-3\alpha)=0. \end{cases}$$

2.1.1а). Если $B_1=0$, то $B_2\neq 0$ (иначе $b(x)\equiv 0$), значит, $\alpha=-7\delta/9$, следовательно, $r(x)=C_1x^2+\delta x$, тогда

$$X=(C_1x^2+\delta x)\partial_x+\left(2C_1x+\frac{2}{9}\delta\right)\partial_y,$$

а определяемая с точностью до постоянного множителя функция $\sigma(x)\equiv$ $\equiv E^{9/4}r^{-3/4}=(C_1x+\delta)x^{-5/2}$.

Таким образом, уравнение $y'''=\lambda x^{-5/2}y^{-5/4}$ допускает точечный оператор $X=9x\partial_x+2y\partial_y$ и имеет первый интеграл (69) с $b(x)=B_2x^2$, а уравнение $y'''=\lambda x^{-5/2}(x+\gamma)y^{-5/4}$ допускает точечный оператор $X=$ $=9x(x+\gamma)\partial_x+2(9x+\gamma)y\partial_y$ и имеет первый интеграл (69) с $b(x)=B_2x^2$ (здесь $\gamma=\delta/C_1=\mathrm{const}$).

2.1.1б). Если $\alpha=+\delta/3$, то $B_1\neq 0$ (иначе $B_2=0$, т.е. $b(x)\equiv 0$), значит, $C_1=\delta B_2/B_1$, следовательно, $r(x)=(B_2x^2+B_1x)\delta/B_1$, тогда

$$X=3(B_2x^2+B_1x)\partial_x+(6B_2x+4B_1)y\partial_y,$$

а $\sigma(x)$, с точностью до постоянного множителя, имеет вид:
$\sigma(x)\equiv E^{9/4}r^{-3/4}=(B_2x+B_1)^{-3/2}$.

Таким образом, уравнение $y'''=\lambda y^{-5/4}$ допускает точечный оператор $X=3x\partial_x+4y\partial_y$ и имеет первый интеграл (69) с $b(x)=B_1x$, а уравнение $y'''=\lambda(x+\gamma)^{-3/2}y^{-5/4}$ допускает точечный оператор $X=3x(x+\gamma)\partial_x+$ $(6x+4\gamma)y\partial_y$ и имеет первый интеграл (69) с $b(x)=B_2x(x+\gamma)$ (здесь $\gamma=B_1/B_2=\mathrm{const}\neq 0$).

2.1.1в). Если $\alpha=-\delta/3$, то C_1,B_2,B_1 – любые, т.е. $r(x)=C_1x^2+\delta x$, тогда

$$X=(C_1x^2+\delta x)\partial_x+2(C_1x+\delta/3)y\partial_y,$$

а $\sigma(x)$, с точностью до постоянного множителя, имеет вид:
$\sigma(x) \equiv E^{9/4} r^{-3/4} = x^{-3/2}$.

Таким образом, уравнение $y''' = \lambda x^{-3/2} y^{-5/4}$ имеет 2 (независимых) первых интеграла (69) с $b(x) = B_2 x^2 + B_1 x$ и допускает 2 точечных оператора: $X_1 = 3x\partial_x + 2y\partial_y$ и $X_2 = x^2\partial_x + 2xy\partial_y$.

2.1.2. Если $B_0 \neq 0$, то из третьего уравнения системы (71) получаем 2 возможные ситуации.

2.1.2а). Если $\alpha = +\delta/3$, то второе уравнение системы (71) удовлетворяется тождественно, а первое принимает вид $9\alpha^2 B_2 - 3\alpha B_1 C_1 + B_0 C_1^2 = 0$, из которого следует, что $C_1 = 3\alpha \dfrac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4B_0 B_2}}{2B_0} \gtrless 0$, следовательно, $r(x) = C_1 x^2 + \delta x$, тогда

$$X = (C_1 x^2 + \delta x)\partial_x + 2(C_1 x + 2\delta/3) y \partial_y,$$

а $\sigma(x)$, с точностью до постоянного множителя, имеет вид:
$\sigma(x) \equiv E^{9/4} r^{-3/4} = (C_1 x + \delta)^{-3/2}$.

Таким образом, если $B_2 = 0$, то уравнение $y''' = \lambda y^{-5/4}$ допускает уже найденный точечный оператор $X = 3x\partial_x + 4y\partial_y$ и имеет 2 первых интеграла (69) с $b(x) = B_1 x + B_0$, а уравнение $y''' = \lambda (x+\gamma)^{-3/2} y^{-5/4}$ допускает (также уже найденный) точечный оператор $X = 3x(x+\gamma)\partial_x + {}$ $+ (6x + 4\gamma) y\partial_y$ и имеет первый интеграл (69) с $b(x) = B_1 x + B_0 = B_1(x+\gamma)$; если же $B_2 \neq 0$, то $C_1 \neq 0$ и для уравнения $y''' = \lambda(x+\gamma)^{-3/2} y$ получаем 2 первых интеграла (69) с $b(x) = B_2 x^2 + \gamma B_1 x + \gamma^2 (B_1 - B_2)$, объединяющих ранее полученные первые интегралы.

2.1.2б). Если $\alpha = 7\delta/9$, то из системы (71) находим: $C_1 = \dfrac{\delta}{2}\dfrac{B_1}{B_0}$, $B_2 = \dfrac{B_1^2}{4B_0}$. Если $B_1 = 0$, то $B_2 = 0$ (т.е. $b(x) = B_0$) и $C_1 = 0$ (т.е. $r(x) = \delta x$), тогда $\sigma(x) \equiv E^{9/4} r^{-3/4} = \delta^{-3/4} x$, т.е. уравнение $y''' = \lambda x y^{-5/4}$ допускает точечный оператор $X = 9x\partial_x + 16y\partial_y$ и имеет первый интеграл (69) с $b(x) = B_0$; если же $B_1 \neq 0$, то $b(x) = \frac{B_1^2}{4B_0} x^2 + B_1 x + B_0 = \frac{B_1^2}{4B_0}(x+\gamma)^2$, $r(x) = \frac{\delta B_1}{2B_0}(x^2 + \gamma x)$; следовательно, $\sigma(x) \equiv E^{9/4} r^{-3/4} = \left(\frac{\delta B_1}{2B_0}\right)^{-5/2} x(x+\gamma)^{-5/2}$, т.е. уравнение $y''' = \lambda x (x+\gamma)^{-5/2} y^{-5/4}$ допускает точечный оператор $X = {}$ $= 9x(x+\gamma)\partial_x + 2(9x + 8\gamma) y\partial_y$ и имеет первый интеграл (69) с $b(x) = {}$ $= (x+\gamma)^2$.

2.1.3. Рассматривая при $\delta = 0$ особое решение: $r(x) \equiv 1$, из первого уравнения системы (67) и второго уравнения системы (54) получим, что

$k_2 = 0$; при этом $\alpha = 0$, значит, $\sigma(x) \equiv 1$, и из первого уравнения системы (63) следует, что $b'' = 0$. Тогда для уравнения $y''' = \lambda y^{-5/4}$ получаем (очевидный) второй допускаемый оператор $X_2 = \partial_x$ и первый интеграл (69), в котором $b(x) = B_1 x + B_0$. Результаты объединены в таблице 3.

Таблица 3

Уравнения подкласса $y''' = \lambda\sigma(x)y^{-5/4}$ из класса дифференциальных уравнений $y''' = \psi(x,y)$, допускающие точечный оператор Ли и имеющие первый интеграл

$\sigma(x)$	Допускаемый оператор X	Первый интеграл $P(x,y,y',y'')$
1	$X_1 = 3x\partial_x + 4y\partial_y$; $X_2 = \partial_x$	$P_1 = y''\left[yy'' - \frac{1}{2}(y')^2\right]^2$ $P_2 = (xy''-y')\left[yy''-\frac{1}{2}(y')^2\right] + 2\lambda(2y^{3/4} - xy^{-1/4}y')$
x	$X = 9x\partial_x + 16y\partial_y$	$y''\left[yy''-\frac{1}{2}(y')^2\right] + 2\lambda\left(\frac{4}{3}y^{3/4} - xy^{-1/4}y'\right)$
$x^{-3/2}$	$X_1 = 3x\partial_x + 2y\partial_y$; $X_2 = x^2\partial_x + 2xy\partial_y$	$P_1 = (x^2y''-2xy'+2y)\left[yy''-\frac{1}{2}(y')^2\right] +$ $+2\lambda(2x^{-1/2}y^{3/4} - x^{1/2}y^{-1/4}y')$ $P_2 = (xy''-y')\left[yy''-\frac{1}{2}(y')^2\right] - 2\lambda x^{-1/2}y^{-1/4}y'$
$(x+\gamma)^{-3/2}$	$X = 3x(x+\gamma)\partial_x +$ $+(6x+4\gamma)y\partial_y$	$P_1 = [x(x+\gamma)y''-(2x+\gamma)y' + 2y]\left[yy''-\frac{1}{2}(y')^2\right] +$ $+2\lambda(x+\gamma)^{-1/2}(2y^{3/4} - xy^{-1/4}y')$; $P_2 = [(x+\gamma)y''-y']\left[yy''-\frac{1}{2}(y')^2\right] +$ $+2\lambda(x+\gamma)^{-1/2}y^{-1/4}y'$
$x^{-5/2}$	$X = 9x\partial_x + 2y\partial_y$	$(x^2y'' - 2xy' + 2y)\left[yy''-\frac{1}{2}(y')^2\right] +$ $+\lambda\left(\frac{4}{3}x^{-3/2}y^{3/4} - 2x^{-1/2}y^{-1/4}y'\right)$
$x^{-5/2}(x+\gamma)$	$X = 9x(x+\gamma)\partial_x +$ $+2(9x+\gamma)y\partial_y$	$(x^2y'' - 2xy' + 2y)\left[yy''-\frac{1}{2}(y')^2\right] +$ $+\lambda\left[\frac{4}{3}x^{-3/2}(3x+\gamma)y^{3/4} - 2x^{-1/2}(x+\gamma)y^{-1/4}y'\right]$
$x(x+\gamma)^{-5/2}$	$X = 9x(x+\gamma)\partial_x +$ $+2(9x+8\gamma)y\partial_y$	$\left[(x+\gamma)^2y'' - 2(x+\gamma)y' + 2y\right]\left[yy'' - \frac{1}{2}(y')^2\right] +$ $+\lambda\left[\frac{4}{3}(3x+2\gamma)y^{3/4} - 2x^{-1/2}(x+\gamma)^{-1/2}y^{-1/4}y'\right]$

2.2. Вернемся к случаю $k_2 \neq 0$, тогда искомое уравнение имеет вид (66):

$$y''' = k_1\sigma(x)y^{-5/4} - k_2 r^{-3} y,$$

а первое уравнение системы (67) принимает вид:

$$7r^2b'' - 7r'rb' + [4(r')^2 - r''r]b = 0, \tag{72}$$

причем функция $b\,(x)$ должна удовлетворять второму уравнению системы (54), из которого, в силу условия $r''' = 0$, получаем (см. [2], №3.1.2.179):

$$b(x) = r(x)\sum_{j=1}^{3} B_j\varepsilon_j(x), \tag{73}$$

где B_j – постоянные, $\varepsilon_j(x) \equiv e^{\lambda_j \int r^{-1}dx}$, а λ_j – корни уравнения

$$\lambda^3 - \delta^2\lambda - 9k_2/5 = 0. \tag{74}$$

Так как $\varepsilon_j' = \lambda_j\varepsilon_j r^{-1}$, то из (73) имеем:

$$b' = \sum_{j=1}^{3} B_j(r' + \lambda_j)\varepsilon_j, \quad b'' = \sum_{j=1}^{3} B_j r^{-1}\left[r''r + \lambda_j(r' + \lambda_j)\right]\varepsilon_j.$$

Подставив в уравнение (72), получим уравнение:

$$\sum_{j=1}^{3} B_j r\left[3(2r''r - (r')^2) + 7\lambda_j^2\right]\varepsilon_j = 0.$$

Но из определения $r(x)$ следует, что $2rr'' - (r')^2 = -\delta^2$, тогда последнее уравнение принимает вид

$$\sum_{j=1}^{3} B_j r(7\lambda_j^2 - 3\delta^2)\varepsilon_j = 0$$

и расщепляется в систему

$$\begin{cases} B_j \cdot (7\lambda_j^2 - 3\delta^2) = 0, \\ j = 1,\ 2,\ 3. \end{cases} \tag{73}$$

Если $B_j \neq 0$, то $\lambda_j = \gamma_0\delta$, где для краткости обозначено

$$\gamma_0 = \pm\sqrt{3/7};$$

тогда из уравнения (74) получаем, что

$$k_2 = \frac{5}{9}\gamma_0(\gamma_0^2 - 1)\delta^3,$$

значит, $\delta \neq 0$, а уравнение (74) имеет вид $\lambda_j^3 - \delta^2\lambda_j - \gamma_0(\gamma_0^2 - 1)\delta^3 = 0$. Так как корни этого уравнения есть $\lambda_1 = \gamma_0\delta$ и $\lambda_{2,3} = \frac{-\gamma_0 \pm \sqrt{4 - 3\gamma_0^2}}{2}\delta \neq \gamma_0\delta$, то из системы (73) имеем: $B_2 = B_3 = 0$, т.е. с точностью до постоянного множителя $b(x) = r(x)\varepsilon_1(x)$. Но

$$\varepsilon_1(x) \equiv e^{\gamma_0\delta \int r^{-1}dx} = \begin{cases} x^{\gamma_0} & \text{при} \quad C_1 = 0, \\ (x^2 r^{-1})^{\gamma_0} & \text{при} \quad C_1 \neq 0; \end{cases}$$

следовательно,

$$b(x) = \begin{cases} \delta x^{1+\gamma_0} & \text{при} \quad C_1 = 0, \\ x^{1+\gamma_0}(C_1 x + \delta)^{1-\gamma_0} & \text{при} \quad C_1 \neq 0. \end{cases}$$

А так как функция $b(x)$ определяется с точностью до постоянного множителя, то в обоих случаях

$$E = E(x) \equiv e^{\alpha \int r^{-1} dx}. \tag{74}$$

Тогда из формул (59) и (58) имеем:

$$h_4(x) \equiv 3\sigma b' + 2\sigma' b = x^{2\gamma_0} r^{-\gamma_0} \left[3(r' + \gamma_0 \delta)\sigma + 2r\sigma' \right];$$

$$h_3(x) \equiv b^{(4)} - 3k_2 r^{-4}(rb' - 2r'b) = \frac{3}{5} k_2 r^{-4}(rb' - 2r'b);$$

следовательно,

$$H(x, y) = \frac{4}{3} k_1 (3b'\sigma + 2b\sigma') y^{3/4} + \frac{1}{5} k_2 r^{-4}(rb' - 2r'b) y^3;$$

$U(x, y) = b'' y^2;$

$$R = b'' y^2 - b' y y' - \frac{1}{2} b (y')^2,$$

$$S = k_1 \left[\frac{4}{3}(3b'\sigma + 2b\sigma') y - 2b\sigma y' \right] y^{-1/4} + \\ + \frac{1}{5} k_2 r^{-4} \left[(rb' - 2r'b) y^3 + rby^2 y' \right] - \frac{1}{2} b'' y (y')^2 + \frac{1}{2} b' (y')^3;$$

и по формуле (5) получаем первый интеграл

$$P = by(y'')^2 + \left(b'' y^2 - b' y y' - \frac{1}{2} b (y')^2 \right) y'' - \frac{1}{2} b'' y (y')^2 + \frac{1}{2} b' (y')^3 + \\ + k_1 \left[\frac{4}{3}(3b'\sigma + 2b\sigma') y - 2b\sigma y' \right] y^{-1/4} + \frac{1}{5} k_2 r^{-4} \left[(rb' - 2r'b) y^3 + rby^2 y' \right],$$

в котором функция $\sigma(x)$ удовлетворяет первому уравнению системы (63). Подставив в него определение $\sigma(x)$, получим уравнение

$$10b'' r^2 - 10b'(r' - 3\alpha) r - b[4r'' r - 7(r')^2 + 30\alpha r' - 27\alpha^2] = 0,$$

которое после подстановки в него (74) и упрощений принимает вид:

$$x^{2\gamma_0} r^{1-\gamma_0} \left(6r'' r - 3(r')^2 + 10(\gamma_0 \delta)^2 + 30\alpha\gamma_0\delta + 27\alpha^2 \right) = 0.$$

В силу условия $2rr'' - (r')^2 = -\delta^2$ приходим к уравнению

$$27\alpha^2 + 30\gamma_0\delta\alpha + (10\gamma_0^2 - 3)\delta^2 = 0$$

с корнями $\alpha_{1,2} = \frac{-5\gamma_0 \pm \sqrt{9-5\gamma_0^2}}{9}\delta$ или, используя значение $\gamma_0 = \pm\sqrt{3/7}$, $\alpha_{1,2} = \frac{-5\gamma_0 \pm 4\gamma_0}{9}\delta$. Из определения функции $E(x)$ тогда имеем:

$$E \equiv e^{\alpha \int r^{-1}dx} = \begin{cases} (x^2r^{-1})^{-\gamma_0} & \text{при} \quad \alpha = -\gamma_0\delta, \\ (x^2r^{-1})^{\gamma_0/9} & \text{при} \quad \alpha = -\gamma_0\delta/9; \end{cases}$$

следовательно,

$$\sigma(x) = \begin{cases} x^{-9\gamma_0/2}r^{(9\gamma_0-3)/4} & \text{при} \quad \alpha = -\gamma_0\delta, \\ x^{-\gamma_0/2}r^{(\gamma_0-3)/4} & \text{при} \quad \alpha = -\gamma_0\delta/9. \end{cases}$$

2.2.1. Если $\alpha = \alpha_1 = -\gamma_0\delta$, то первый интеграл принимает вид

$$P = by(y'')^2 + \left(b''y^2 - b'yy' - \frac{1}{2}b(y')^2\right)y'' - \frac{1}{2}b''y(y')^2 + \frac{1}{2}b'(y')^3 + \\ + \frac{1}{9}\gamma_0(\gamma_0^2 - 1)\delta^3x^{2\gamma_0}r^{-\gamma_0-3}y^2\left[ry' - (r' + 2\gamma_0\delta)y\right] + \\ + 2k_1x^{-5\gamma_0/2}r^{(9\gamma_0-3)/4}\left[(r' - \gamma_0\delta)y - ry'\right]y^{-1/4}, \quad (75)$$

функция $\psi(x, y) \equiv k_1x^{-9\gamma_0/2}r^{(9\gamma_0-3)/4}y^{-5/4} - \frac{1}{9}\gamma_0(\gamma_0^2 - 1)\delta^3r^{-3}y$, т.е. уравнение

$$y''' = k_1x^{-9\gamma_0/2}r^{(9\gamma_0-3)/4}y^{-5/4} - \frac{1}{9}\gamma_0(\gamma_0^2 - 1)\delta^3r^{-3}y$$

имеет первый интеграл (75) и допускает точечный оператор $X = r(x)\partial_x + (r' - \gamma_0\delta)y\partial_y$.

2.2.2. Если $\alpha = \alpha_2 = -\gamma_0\delta/9$, то первый интеграл

$$P = by(y'')^2 + \left(b''y^2 - b'yy' - \frac{1}{2}b(y')^2\right)y'' - \frac{1}{2}b''y(y')^2 + \frac{1}{2}b'(y')^3 + \\ + \frac{1}{9}\gamma_0(\gamma_0^2 - 1)\delta^3x^{2\gamma_0}r^{-\gamma_0-3}y^2\left[ry' - (r' + 2\gamma_0\delta)y\right) + \\ + k_1x^{3\gamma_0/2}r^{(-3\gamma_0-3)/4}\left[\frac{2}{3}(3r' + 5\gamma_0\delta)y - 2ry'\right]y^{-1/4}, \quad (76)$$

функция $\psi(x, y) \equiv k_1x^{-\gamma_0/2}r^{(\gamma_0-3)/4}y^{-5/4} - \frac{1}{9}\gamma_0(\gamma_0^2 - 1)\delta^3r^{-3}y$, т.е. уравнение

$$y''' = k_1x^{-\gamma_0/2}r^{(\gamma_0-3)/4}y^{-5/4} - \frac{1}{9}\gamma_0(\gamma_0^2 - 1)\delta^3r^{-3}y$$

имеет первый интеграл (76) и допускает точечный оператор $X = 9r(x)\partial_x + $ $+(9r' - \gamma_0\delta)y\partial_y$.

Таким образом, уравнения

$$y''' = k_1 x^{-9\gamma_0/2} r^{(9\gamma_0-3)/4} y^{-5/4} + \frac{4}{63}\gamma_0\delta^3 r^{-3} y \tag{77}$$

(в которых $r(x) = C_1x^2 + \delta x, \delta \neq 0,\ \gamma_0 = \pm\sqrt{3/7}$) имеют первый интеграл (75) (в котором $b(x) = x^{2\gamma_0} r^{1-\gamma_0}$) и допускают точечный оператор

$$X = r(x)\partial_x + (r' - \gamma_0\delta)y\partial_y, \tag{80}$$

а уравнения

$$y''' = k_1 x^{-\gamma_0/2} r^{(\gamma_0-3)/4} y^{-5/4} + \frac{4}{63}\gamma_0\delta^3 r^{-3} y \tag{81}$$

имеют первый интеграл (76) и допускают точечный оператор

$$X = 9r(x)\partial_x + (9r' - \gamma_0\delta)y\partial_y. \tag{82}$$

Итак, доказана

Теорема 3: При $r(x) \not\equiv 0$ среди нелинейных уравнений класса (4), допускающих группу Ли с оператором (23) и имеющих первый интеграл (5), в котором $Q = b(x)y$, существует 2 и только 2 подкласса – уравнения вида

$$y''' = k_1\sigma(x)y^{-5/4},$$

имеющие первый интеграл (69) (в котором $b''' = 0$, а $\sigma(x) \equiv E^{9/4}r^{-3/4}$), и уравнения вида

$$y''' = k_1\sigma(x)y^{-5/4} - k_2r^{-3}y,$$

причём первый подкласс содержит 7 типов уравнений (собранных в таблице 3), а второй – 4 типа уравнений, два из которых имеют вид (77), обладают первым интегралом (75) и допускают точечный оператор (80), а два других имеют вид (81), обладают первым интегралом (76) и допускают точечный оператор (82) (здесь $r(x) = C_1x^2 + \delta x, \delta \neq 0,\ \gamma_0 = \pm\sqrt{3/7}$, $b(x) = x^{2\gamma_0}r^{1-\gamma_0}$).

3. Рассмотрим, наконец, случай $A = 0, b(x) \equiv 0$.

Теорема 4. При $r(x) \not\equiv 0$ уравнения класса (4) допускают группу Ли с оператором (23) и имеют первый интеграл (5), в котором $Q = c(x)$, если и только если эти уравнения являются линейными вида

$$y''' = kr^{-3}y + \chi(x). \tag{83}$$

Доказательство. При $Q(x) = c(x)$, в соответствии с формулой (15),

$$\psi(x,y) \equiv gc^{-5/4} + \frac{c''' - 3u_1'}{4c}y,$$

или, в терминах u и V,

$$\psi(x,y) \equiv g(x)c^{-5/4} + \frac{c''' - 3u_1'}{4c}rE(u+V). \tag{84}$$

Сравнивая (84) и (14), приходим к выводу, что функция $\psi(x,y)$ имеет структуру (14), если (и только если) $r^2E^{-1}\frac{c'''-3u_1'}{4c}rE = k = \mathrm{const}$, т.е.

$$c''' - 3u_1' = 4kr^{-3}c.$$

При этом в основных переменных

$$\psi(x,y) \equiv gc^{-5/4} - kr^{-3}y.$$

Полагая $gc^{-5/4} \equiv \chi(x)$, получим в качестве искомого уравнения (4) линейное уравнение вида (83). Теорема 4 доказана.

Отметим, что уравнение (83) интегрируется в квадратурах, так как общее решение соответствующего однородного уравнения, в силу условия $r''' = 0$, представимо (см. [2], №3.1.2.179) в виде

$$y(x) = r(x)\sum_{j=1}^{3} K_j\varepsilon_j(x),$$

где K_j – постоянные, $\varepsilon_j(x) \equiv e^{\lambda_j\int r^{-1}dx}$, а λ_j – корни уравнения $\lambda^3 - \delta^2\lambda + k = 0$.

Поэтому все его первые интегралы можно найти из общего решения.

Таким образом, теоремы 1–4 исчерпывающим образом выделяют в классе уравнений без промежуточных производных 25 подклассов нелинейных уравнений, допускающих точечную симметрию и обладающих квадратичными по y'' первыми интегралами.

Литература

[1] Аврашков П.П., Зайцев В.Ф. Лиевские симметрии и первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений // Сборник научных трудов, т.8. – Орел: ОрелГТУ, 1996. – С.44-49.

[2] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.