ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2003
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Управление в нелинейных системах

СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

М.С.Кабриц

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Университетская ул., д. 28,
С.-Петербургский государственный университет,
кафедра Теоретической кибернетики,
e-mail: mkabrits@mail.ru

Аннотация.

Рассматривается, описываемая функционально - дифференциальным уравнением импульсная система, состоящая из нелинейной непрерывной части и импульсного модулятора с нелинейной статической характеристикой.

С помощью преобразования Исидори, метода усреднения и второго метода Ляпунова решена задача аналитического синтеза сигнала на входе модулятора, стабилизирующего систему, если частота импульсации удовлетворяет полученной нижней оценке.

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N02-01-00542), Совета по грантам президента РФ для поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2257.2003.1) и программы "Университеты России"

1 Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную импульсную систему, описываемую функцио– нально-дифференциальным уравнением.

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x + b(x)\xi, \qquad \xi = \mathcal{M}\zeta, \quad \zeta = \psi(\sigma), \quad \sigma(x) = c^*(x)x, \tag{1}$$

где $A \in \mathbf{R}^{m\times m}, b, x, c \in \mathbf{R}^m$, $\sigma \in \mathbf{R}^1$, $*$ — знак транспонирования, все величины вещественные, $A(x)$ и $b(x)$ имеют равномерно ограниченные в $\mathbf{R}^m$ частные производные до порядка m и 1 соответственно. $\mathcal{M}$ — нелинейный оператор, описывающий работу импульсного модулятора. $\xi(t)$ — сигнал на выходе импульсного модулятора, $\zeta(t)$ — сигнал на его входе. $\mathcal{M}$ — отображает каждую непрерывную на $[0, +\infty)$ функцию $\zeta(t)$ в функцию $\xi(t)$ и последовательность $\{t_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; t_0 = 0)$, обладающие следующими свойствами:

1) существуют такие положительные постоянные T и δ_0, что для всех n верна оценка

$$\delta_0 T \le t_{n+1} - t_n \le T$$

2) функция $\xi(t)$ кусочно непрерывна на каждом промежутке $[t_n, t_{n+1})$ и не меняет знака на нем;

3) $\xi(t)$ зависит только от значений $\zeta(\tau)$ при $\tau \le t$, t_n зависит только от значений $\zeta(\tau)$ при $\tau \le t_n$;

4) Для каждого n существует $\widetilde{t}_n \in [t_n, t_{n+1})$ такое, что среднее значение импульса

$$v_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \xi(t)\, dt$$

удовлетворяет равенству

$$v_n = \varphi(\zeta(\widetilde{t}_n)), \tag{2}$$

где $\varphi(\zeta)$ — монотонная и непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ функция, которая описывает статическую характеристику импульсного модулятора, причем $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(+\infty) = +\infty, \quad \varphi(-\infty) = -\infty$.

Свойствами 1)–4) обладают различные виды комбинированной импульсации [1]. Например широтно-амплитудная модуляция первого и второго рода.

Задача состоит в построении такой вектор-функции $c(x)$ и скалярной функции $\psi(\sigma)$, чтобы решение системы (1) $x \equiv 0$ было устойчиво в целом, если параметр T удовлетворяет некоторой верхней оценке.

2 Формулировка результата

Рассмотрим систему (1) в отсутствии управления:

$$\dot{x} = A(x)x \tag{3}$$

Обозначим через $L_k(x)$ — производные Ли: $L_0 = I, L_1 = A(x), \ldots,$ $L_k = \dfrac{d}{dt}L_{k-1} + L_{k-1}A(x)$, $k = (2, 3, \ldots, m-1)$.

Выберем в системе (1) в качестве функции ψ функцию φ^{-1}, обратную к функции $\varphi(\sigma)$. Тогда система (1) примет вид

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)\xi, \quad \xi = \mathcal{M}_1\sigma, \quad \sigma = c^*(x)x, \tag{4}$$

где оператор $\mathcal{M}_1$ удовлетворяет тем же свойствам, что и оператор $\mathcal{M}$, с той лишь разницей, что равенство (2) примет форму

$$v_n = \sigma(\widetilde{t_n}) \tag{5}$$

Рассмотрим матрицу управляемости

$S(x) = \|b(x), L_1(x)b(x), \ldots, L_{m-1}(x)b(x)\|$ и предположим, что

$$\inf_{x \in \mathbf{R}^m} |\det S(x)| > 0 \tag{6}$$

Сделав в системе (4) замену переменных[2]

$$y = S^{-1}(x)x \tag{7}$$

приведем ее к виду

$$\dot{y} = A_0(x)y + e_1\xi, \quad \sigma = c_0^*(x)y, \tag{8}$$

где $e_1^* = (1, 0, \ldots, 0), \quad c_0^*(x) = c^*(x)S(x), \quad A_0(x) = A_1 + A_2(x),$

$$A_1 = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$A_2 = \left\| \begin{matrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1(x) \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_2(x) \\ & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_m(x) \end{matrix} \right\|$$

Будем искать постоянную положительно определенную матрицу H и постоянную строку c_0^*, при которых справедливо неравенство

$$HD(x) + D^*(x)H < -\beta H, \tag{9}$$

где $D(x) = A_0(x) + e_1 c_0^*, \quad \beta$ — положительное число.

Неравенство (9) равносильно следующему:

$$K(x) < 0, \tag{10}$$

где $K(x) = D(x)H^{-1} + H^{-1}D^*(x) + \beta H^{-1}$. Следуя [3] выберем H^{-1} в виде

$$H^{-1} = \left\| \begin{matrix} h_1 & h_{1\,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_{1\,2} & h_2 & h_{2\,3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_{2\,3} & h_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{m-1} & h_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{m-1,m} & h_m \end{matrix} \right\|$$

где $h_{i\,j} = -\frac{1}{2}\sqrt{h_i h_j}, \quad h_i$ — положительные числа. При любых $h_i > 0$, матрица H^{-1} является положительно определенной. Попытаемся выбрать такие числа h_i и строку c_0^*, чтобы было выполнено неравенство (10). Представим матрицу $K(x)$ в следующем виде:

$$K(x) = N+R, \quad N = A_0(x)H^{-1}+H^{-1}A^*(x)+\beta H^{-1}, \quad R = e_1 c_0^* H^{-1}+H^{-1}c_0 e_1^*.$$

В качестве c_0 возьмем постоянный вектор $c_0 = \lambda H e_1$, где λ — параметр, который будет выбран ниже. Тогда матрица R имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} 2\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\|$$

Преставим $N = P + F(x)$, $P = A_1H^{-1} + H^{-1}A_1^* + \beta H^{-1}$, $F(x) = A_2(x)H^{-1} + H^{-1}A_2^*(x)$, где матрицы P и $F(x)$ имеют вид:

$$P = \left\| \begin{array}{ccccc} \beta h_1 & h_1 + \beta h_{12} & h_{12} & \cdots & 0 \\ h_1 + \beta h_{12} & 2h_{12} + \beta h_2 & h_2 + \beta h_{23} & \cdots & 0 \\ h_{12} & h_2 + \beta h_{23} & 2h_{23} + \beta h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{m-1} + \beta h_{m-1,m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2h_{m-1,m} + \beta h_m \end{array} \right\|,$$

$$F(x) = \left\| \begin{array}{cc} O & M \\ M^* & J \end{array} \right\|,$$

где O — нулевая матрица размерности $(m-2) \times (m-2)$,

$$M = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_1 h_{m-1,m} & \alpha_1 h_m \\ \alpha_2 h_{m-1,m} & \alpha_2 h_m \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-2} h_{m-1,m} & \alpha_{m-2} h_m \end{array} \right\|,$$

$$J = \left\| \begin{array}{cc} 2\alpha_{m-1} h_{m-1,m} & \alpha_m h_{m-1,m} + \alpha_{m-1} h_m \\ \alpha_{m-1} h_{m-1,m} + \alpha_{m-1} h_m & 2\alpha_m h_m \end{array} \right\|$$

Рассмотрим главные диагональные миноры матрицы $N(x)$ $\Delta_1, \ldots, \Delta_{m-1}$, отсчитываемые от правого нижнего угла. Тогда

$$\Delta_1 = 2h_{m-1,m} + \beta h_m + 2\alpha_m(x) h_m = -\sqrt{h_{m-1} h_m} + (\beta + 2\alpha_m(x)) h_m.$$

Фиксировав $h_m > 0$, выберем h_{m-1} столь большим, чтобы $\Delta_1 < 0$ при всех $t > 0$. Для этого h_{m-1} должно удовлетворять неравенству

$$\sqrt{\frac{h_{m-1}}{h_m}} > \beta + 2 \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \alpha_m(x).$$

Обозначим через N_i $(i = 2, \ldots, m)$ матрицу размерности $i \times i$ и составленную из элементов матрицы N, стоящих на пересечении ее последних i строк и i столбцов. Тогда $\Delta_i = \det N_i$. Представим матрицу N_i в блочном виде:

$$N_i = \left\| \begin{array}{cc} n_{ii} & n_i^* \\ n_i & N_{i-1} \end{array} \right\|,$$

где $n_{22} = 2h_{m-2,m-1} + \beta h_{m-1} + 2\alpha_{m-1}h_{m-1,m}$

$n_{i\,i} = 2h_{m-i,m-i+1} + \beta h_{m-i+1}$ при $i = 3, \ldots, m-1$

$n_{mm} = \beta h_1$, n_i — столбец размерности $i-1$.

Согласно свойству блочных матриц справедлива формула

$$\det N_i = \det N_{i-1}(n_{ii} - n_i^* N_{i-1}^{-1} n_i),$$

которую можно представить в виде

$$\Delta_i = 2\Delta_{i-1}h_{m-i,m-i+1} + \gamma_i(x),$$

где $\gamma_i(x)$ зависит от h_k только для $k = m, m-1, \ldots, m-i+1$. Справедливо соотношение

$$\Delta_i = -\Delta_{i-1}\sqrt{h_{m-i}h_{m-i+1}} + \gamma_i(x). \tag{11}$$

Следовательно, если выбор $h_{m-1}, \ldots, h_{m-i+1}$ обеспечивает выполнение свойства

$$sign\,\Delta_k = (-1)^k \tag{12}$$

при $k = 1, 2, \ldots, i-1$, то, если взять в (11) h_{m-i} достаточно большим, будет обеспечено выполнение свойства (12) и при $k = i$. Ввиду равенства $K(x) = N(x) + R$ справедлива формула

$$\det K = 2\lambda\Delta_{m-1} + \det N. \tag{13}$$

Выберем теперь λ таким образом, чтобы

$$sign\,(\det L) = (-1)^m. \tag{14}$$

Согласно (13) следует соотношение

$$(-1)^m \det K = -2\lambda|\Delta_{m-1}| + (-1)^m \det N.$$

Поэтому свойство (14) будет выполнено, если

$$\lambda < -\frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbf{R}^m}\frac{|\det N(x)|}{|\Delta_{m-1}(x)|}.$$

Из (12), (14) в силу критерия Сильвестра вытекает неравенство (10).

Желая воспользоваться методом усреднения[4], введем функции $v(t) = v_n$ при $t_n \le t < t_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $u(t) = \int\limits_0^t [\xi(\lambda) - v(\lambda)]d\lambda$. Сделав в уравнении (8) замену

$$y = z + e_1 u, \tag{15}$$

получим следующие уравнения

$$\dot{z} = A_0(x)z + e_1 v + A_0(x)e_1 u, \tag{16}$$

$$\sigma = c_0^* z + c_0^* e_1 u \tag{17}$$

Уравнение (16) можно представить в виде

$$\dot{z} = D(x)z + w, \tag{18}$$

где $w = e_1(v - c_0^* z) + A_0(x)e_1 u$.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(z) = z^* H z.$$

Производная её по t в силу уравнения (18) имеет вид

$$\dot{V} = z^*(HD + D^*H)z + 2z^*Hw \tag{19}$$

Очевидно неравенство

$$2z^*Hw \leq \mu V + \frac{1}{\mu}\|H^{\frac{1}{2}}w\|^2, \tag{20}$$

где μ — положительный параметр, который будет выбран ниже. Воспользовавшись соотношениями (2), (17), представим w следующим образом:

$$w = w_1 + w_2, \tag{21}$$

где $w_1 = e_1 c_0^* e_1 \overline{u} + A_0 e_1 u$, $w_2 = e_1 c_0^*(\overline{z} - z)$, а чертой отмечены "замороженные"функции, равные при $t_n \leq t < t_{n+1}$ их значениям, вычисленным в точке $\widetilde{t}_n$. В [4,5] были установлены неравенства

$$|u(t)| \leq T|v(t)|, \tag{22}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} u^2(t)dt \leq \frac{T^2}{3}\int_{t_n}^{t_{n+1}} v^2(t)dt \tag{23}$$

В силу (22) имеем оценку

$$\|w_1\| \leq \delta_1 T|v|, \tag{24}$$

где $\delta_1 = |c_0^*| + \sup_{x \in R^m}[\|A_0(x)e_1\|]$. Теперь оценим w_2.

$$\|w_2\| \leq \delta_2\|\overline{z} - z\|, \tag{25}$$

где $\delta_2 = |c_0|$. Из (21), (24), (25) слеует оценка

$$\|w\| \le \delta_1 T|v| + \delta_2\|\overline{z} - z\| \tag{26}$$

В силу (2), (17) представим

$$v = c_0^*(\overline{z} - z) + c_0^* z + e_1 c_0^* \overline{u}$$

Отсюда в силу (22) получаем неравенство

$$|v| \le \delta_2(\|\overline{z} - z\| + \|z\|) + T\delta_2|v|.$$

Предположим, что T удовлетворяет оценке

$$T\delta_2 < 1 \tag{27}$$

Тогда

$$|v| \le \delta_3\|\overline{z} - z\| + \delta_3\|z\|, \tag{28}$$

где $\delta_3 = \dfrac{\delta_2}{1 - T\delta_2}$.

Согласно (28) и (26), получим соотношение

$$\|w\| \le \delta_4\|\overline{z} - z\| + \delta_5 T\|z\|,$$

где $\delta_4 = \delta_2 + \delta_1\delta_3 T,\ \ \delta_5 = \delta_1\delta_3$. Отсюда следует неравенство

$$\|w\|^2 \le 2\delta_4^2\|\overline{z} - z\|^2 + 2\delta_5^2 T^2\|z\|^2. \tag{29}$$

В силу неравенства Виртингера [5], (3) и (18) справедливы соотношения

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|\overline{z} - z\|^2 dt \le \frac{4T^2}{\pi^2}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|Dz + w\|^2 dt \le \frac{8T^2}{\pi^2}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} (\|Dz\|^2 + \|w\|^2)dt. \tag{30}$$

Из двух последних соотношений получаем оценку

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|w\|^2 dt \le \frac{16\delta_4 T^2}{\pi^2}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} (\|Dz\|^2 + \|w\|^2)dt + 2T^2\delta_5^2\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|z\|^2 dt.$$

Предположим, что T удовлетворяет неравенству

$$16T^2\delta_4^2 < \pi^2. \tag{31}$$

Тогда

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|w\|^2 dt \le \delta_6 T^2 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|Dz\|^2 dt + \delta_7 T^2 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|z\|^2 dt,$$

где $\delta_6 = \dfrac{16\delta_4^2}{\pi^2 - 16\delta_4^2 T^2}$, $\delta_7 = \dfrac{2\pi^2\delta_5^2}{\pi^2 - 16\delta_4^2 T^2}$. Отсюда следует оценка

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|w\|^2 dt \le \delta_8 T^2 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|z\|^2 dt, \tag{32}$$

где $\delta_8 = \delta_7 + \delta_6 \sup\limits_{x>0} \|D(x)\|^2$.

Обозначим через λ_+ и λ_- максимальное и минимальное число матрицы H. Тогда в силу (32) справедливы соотношения

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|H^{\frac{1}{2}} w\|^2 dt \le \lambda_+ \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|w\|^2 dt \le \lambda_+ \delta_8 T^2 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \|z\|^2 dt \le$$

$$\le \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \delta_8 T^2 \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} V dt$$

Отсюда ввиду (19), (20), (7) вытекает неравенство

$$V(z(t_{n+1})) - V(z(t_n)) \le -p \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} V dt,$$

где $p = \beta - \mu - \dfrac{\lambda_+}{\mu\lambda_-}\delta_8 T^2$. Просуммировав эти неравенства по n от 0 до $N-1$, получим для произвольного N оценку

$$p \int\limits_0^{t_N} V dt \le V(z(0)) - V(z(t_N)) \le V(z(0)). \tag{33}$$

Выберем теперь положительный параметр μ таким образом, чтобы $p > 0$. Последнее неравенство равносильно следующему:

$$\mu^2 - \beta\mu + \frac{\lambda_+}{\lambda_-}\delta_8 T^2 < 0.$$

Положительное μ, удовлетворяющее этому неравенству, найдется, если T удовлетворяет оценке

$$T < \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\lambda_-}{\delta_8\lambda_+}} \tag{34}$$

В силу леммы, доказанной в [3] можно выбрать такое β, что неравенство (34) будет выполняться, если справедливы условия (27),(31).

Из (33) вытекает, что $\|z(t)\| \in L_2[0,+\infty)$. Согласно (32) $\|w(t)\| \in L_2[0,+\infty)$. Поэтому в силу (30) $\|\overline{z} - z(t)\| \in L_2[0,+\infty)$. Отсюда и из (28) следует, что $v(t) \in L_2[0,+\infty)$. Поскольку функция $v(t)$ постоянна на промежутке $[t_n, t_{n+1})$, то ввиду свойств последовательности t_n $v(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Отсюда в силу (22) $u(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Из (33) следует равномерная по n ограниченность $\|z(t_n)\|$. Согласно (2), (15) $\|z(t)\|$ ограничена равномерно по $t > 0$. А тогда из (16) следует равномерная ограниченность $\|\dot{z}(t)\|$. Отсюда и из $\|z(t)\| \in L_2[0,+\infty)$ вытекает асимптотика $z(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Согласно равенству (15) $z(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Отсюда и из (7) вытекает, что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Докажем теперь устойчивость по Ляпунову решения $x \equiv 0$.

Из неравенства (33) следует, что $p\lambda_- \int\limits_0^\infty \|z\|^2 dt \le V(z(0))$.

В силу (32) справедливо соотношение

$$\int\limits_0^\infty \|w\|^2 dt \le \frac{\delta_8 T^2}{p\lambda_-} V(z(0)) \tag{35}$$

Согласно (19) оценим производную $\dot{V}$ следующим образом:

$$\dot{V} \le \frac{\lambda_+}{\beta}\|w\|^2$$

Отсюда следует неравенство

$$V(z(t)) - V(z(0)) \le \frac{\lambda_+}{\beta}\int\limits_0^\infty \|w\|^2 dt$$

Из этой оценки и (35) мы получаем соотношение

$$\lambda_-\|z\|^2 \le (1 + \frac{\lambda_+\delta_8 T^2}{p\beta\lambda_-})V(z(0)) \tag{36}$$

В силу (5), (17), (22) справедливо неравенство $|v| \leq \delta_3 \|z\|$.

Согласно (15), (22) и предыдущему неравенства получаем соотношение

$$\|y\| \leq \|z\|(1 + T\delta_3) \tag{36}$$

Из (35), (36) и равенств $z(0) = y(0) = S^{-1}(x(0))x(0)$ следует, что $\sup\limits_{t>0} \|y(t)\| > 0$ сколь угодно мал, если достаточно мала $\|x(0)\|$. Поскольку $x = Sy$, и норма $\|S\|-$ равномерно ограничена по $x \in R^m$, то состояние равновесия $x \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

Таким образом, получен следующий результат:

Теорема. Пусть система (1) вполне управляема [5]. Предположим, кроме того, что справедливы свойства (2), (6), (27), (31), (34) и

$$s(x) = \lambda[S^{-1}(x)]^* He_1.$$

Тогда решение системы (1) $x \equiv 0$ устойчиво в целом.

3 Заключение

Для вполне управляемой импульсной системы, описываемой функционально - дифференциальными уравнениями (1), с помощью нелинейного преобразования подобия[2,3], построения функции Ляпунова с трехполосной матрицей и метода усреднения[4,5] построена вектор-функция $c(x)$ стабилизирующая систему, если параметр T удовлетворяет оценкам (27), (31), (34).

Литература

[1] Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н. Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. Киев: Наука, 1970.

[2] Isidory A. Nonlinear Control Systems. Berlin, 1989.

[3] Гелиг А.Х., Зубер И.Е. Стабилизация импульсных систем с нестационарной линейной частью.// Вестник СПбГУ, Сер.1), вып.1(N1), 2003.

[4] Gelig A.Kh., Churilov A.N. Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-modulated Systems. Boston: Birkhauser, 1998.

[5] Gelig A.Kh., Churilov A.N. Pulse-modulated Systems: a Review of Mathematical Approach// Fanctional-Differentional Equations, 1996, v.3,N3-4.