ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2003
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

СИНТЕЗ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

И.Е.ЗУБЕР
Россия, 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2,
Санкт-Петербургский государственный университет,
e-mail: zuber@EZ7332.spb.edu

Аннотация.

Рассматриваются нелинейные и нестационарные динамические системы в векторно-матричной форме. Определяются условия существования и явный вид канонического преобразования подобия, обеспечивающего матрице объекта и матрице замкнутой преобразованной системы форму Фробениуса. Решение задачи синтеза канонического преобразования проводится единообразно для непрерывных и дискретных систем.

Полученные результаты иллюстрируются решением задачи терминального управления для дискретных нелинейных систем.

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта N НШ-2257.2003.1 Совета по грантам президента РФ и при поддержке РФФИ, проекты 02-01-00542, 02-01-00544.

1 Введение

Рассмотрим нелинейные нестационарные динамические системы в векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = A(x,t)x + b(x,t)u, \quad u = s^*(x,t)x \tag{1}$$

и

$$x_{k+1} = A(x_k,k)x_k + b(x_k,k)u_k, \quad u_k = s^*(x_k,k)x_k. \tag{2}$$

Согласно [1] к такому виду приводятся системы $\dot{x} = F(x,t,u)$ и $x_{k+1} = F(x_k,k,u_k)$ соответственно, линейные относительно скалярного управления.

Каноническим преобразованием подобия типа I будем называть преобразования

$$y = T(x,t)x, \tag{3}$$

$$y_k = T(x_k,k,x_{k-1},k-1), \tag{4}$$

обеспечивающие матрице объекта преобразованной системы форму Фробениуса [2] с последним функциональным столбцом и вид первого единичного орта для вектора распределения управления преобразованной системы.

Канонические преобразования (3), (4) для непрерывных и дискретных систем, соответственно, будем называть каноническими преобразованиями типа II, если они обеспечивают форму Фробениуса с последней функциональной строкой и матрице объекта, и матрице замкнутой преобразованной системы. Это условие, очевидно, выполняется, если матрица объекта переводится в матрицу Фробениуса с последней функциональной строкой, а вектор распределения управления $b(x,t)$ или $b(x_k,k)$, соответственно, в последний единичный орт. Для непрерывных нелинейных стационарных систем каноническое преобразование типа I приводится в [3], для дискретных нелинейных стационарных систем — в [4]. Канонические преобразования подобия типа II для нелинейных непрерывных стационарных систем введены в рассмотрение в [5]. Их явный вид, а также необходимые и достаточные условия их существования приведены в [6], [7], [4] соответственно. Чрезвычайно усложненный вид и способ определения канонических преобразований типа II $y = T(x_{k-n},\ldots,x_0,\ldots,x_k)x_k$ приведен в [8].

Для линейных стационарных систем управления метод канонических преобразований подобия является одним из основных для решения задач анализа и синтеза систем управления. Для нелинейных и нестационарных систем управления метод канонических преобразований очень полезен при решении задач синтеза, поскольку он позволяет получить в явном виде решение задачи стабилизации [5–8]. Для решения задач анализа канонические преобразования подобия значительно менее применимы, поскольку спектры матриц исходной и преобразованной системы не совпадают.

В предлагаемой статье приводится общий метод синтеза канонических преобразований типа II (3), (4) для систем вида (1), (2), приводится их явный вид, а также необходимые и достаточные условия их существования и невырожденности.

В качестве иллюстрации разработанного метода приводится решение задачи синтеза терминального управления для дискретной нелинейной системы.

2 Синтез канонического преобразования подобия типа II для непрерывных нелинейных нестационарных систем вида (1)

Рассматривается система вида (1)

$$\dot{x} = A(x,t)x + b(x,t)u, \tag{5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $A(x,t)$ — матрица объекта системы, $b(x,t)$ — вектор распределения скалярного управления u. Допустимым полагаем управление вида обратной связи по состоянию

$$u = s^*(x,t)x. \tag{6}$$

Предполагаем, что матрица $A(x,t)$ и вектор $b(x,t)$ равномерно ограничены и имеют равномерно ограниченные частные производные порядка до $2n-1$ включительно. Предполагается также равномерная полная управляемость пары $A(x,t)$, $b(x,t)$, т.е. для матрицы управляемости системы (5) [9]

$$W(x,t) = |b(x,t), L_1(x,t)b(x,t), \ldots, L_{n-1}(x,t)b(x,t)|$$
$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad |\det W(x,t)| > \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \ge t_0. \tag{7}$$

Здесь $L_i(x,t)$ — матрица производной Ли [2], т.е. матрица i-той производной от вектора $x(t)$ в силу однородной системы

$$\dot{x} = A(x,t)x. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение преобразование (3),

$$y = T(x,t)x,$$

и преобразованную по формуле (3) систему (5), (6):

$$\dot{y} = \widetilde{A}(y,t)y + \widetilde{b}(y,t)u, \tag{9}$$

$$u = \widetilde{s}^*(y,t)y, \tag{10}$$

где

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{A}(y,t) & = & T(x,t)A(x,t)T^{-1}(x,t) + \dot{T}(x,t)T^{-1}(x,t), \\ \widetilde{b}(y,t) & = & T(x,t)b(x,t), \\ \widetilde{s}^*(y,t) & = & s^*(x,t)T^{-1}(x,t). \end{array} \tag{11}$$

Преобразование (3) будем строить так, чтобы выполнялись два условия: $\widetilde{A}(y,t)$ есть матрица Фробениуса с последней функциональной строкой $\alpha^*(y,t) = (\alpha_n(y,t), \ldots, \alpha_1(y,t))$,

$$\widetilde{A}(y,t) = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_n(y,t) & \alpha_{n-1}(y,t) & & \ldots & \alpha_1(y,t) \end{array} \right|, \tag{12}$$

$$\widetilde{b}(y,t) = T(x,t)b(x,t) \equiv e_n = (0,0,\ldots,1)^* \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > t_0. \tag{13}$$

Перейдем к синтезу преобразования (3), исходя из соотношений (12), (13).

Введем в рассмотрение производящий вектор $m(x,t)$, определяемый в дальнейшем, и полагаем

$$y^* = (y_1, \ldots, y_n), \qquad \begin{array}{rcl} y_1 & = & m^*(x,t)x, \\ y_2 & = & \frac{d}{dt}y_1, \\ \vdots & & \vdots \\ y_n & = & \frac{d}{dt}y_{n-1}, \end{array} \tag{14}$$

где дифференцирование производится в силу однородной системы (8). Тогда матрица $T(x,t)$ принимает вид

$$T(x,t) = \left\| \begin{array}{l} m^*(x,t) \\ \frac{d}{dt}m^*(x,t) + m^*(x,t)L_1(x,t) \\ \vdots \\ \frac{d^k}{dt^k}m^*(x,t) + C_k^1\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}m^*(x,t)L_1(x,t) + \ldots \\ +C_k^{k-1}\frac{d}{dt}m^*(x,t)L_{k-1}(x,t) + m^*(x,t)L_k(x,t) \end{array} \right\|, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{15}$$

где $L_i(x,t)$ — матрица i-той производной Ли в силу системы (8), C_k^j — число сочетаний из k по j.

В силу формулы (14) для матрицы $\widetilde{A}(y,t) = \{a_{ij}(y,t)\}_{i,j=1}^n$ выполняются условия

$$a_{ij}(y,t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j-1, \\ 1 & \text{при} \quad i = j-1 \end{cases}, \quad i \leq n-1, \quad j = \overline{1,n}, \tag{16}$$

т.е. матрица $\widetilde{A}(y,t)$ есть матрица вида (12).

Определим теперь производящий вектор $m(x,t)$, для которого выполняется тождество (13). Выпишем подробнее тождество (13) с учетом вида матрицы $T(x,t)$, заданной соотношениями (15), и рассмотрим полученную систему дифференциальных относительно $m(x,t)$ уравнений. Введем обозначения:

$$\varphi_i(x,t) = t_i^*(x,t, \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}m^*(x,t), \ldots, \frac{d}{dt}m^*(x,t), m^*(x,t))b(x,t), \tag{17}$$

где $t_i^*(\cdot)$ — i-я строка матрицы $T(x,t)$ вида (15), $i = \overline{1,n}$. Рассматриваемая система дифференциальных уравнений (13), (15) записывается в виде

$$\varphi_i(x,t)b(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \leq n-1, \\ 1 & \text{при} \quad i = n. \end{cases} \tag{18}$$

Теорема 1 *Система* (13), (18) *эквивалентна линейной алгебраической системе уравнений относительно вектора* $m(x,t)$ *вида*

$$m^*(x,t)G(x,t) = e_n^*, \tag{19}$$

где $G(x,t) = \|g_1(x,t), \ldots, g_n(x,t)\|$,

$$\begin{gathered} g_{k+1}(x,t) = L_k(x,t)b(x,t) - C_k^1\frac{d}{dt}(L_{k-1}(x,t)b(x,t)) + \\ +C_k^2\frac{d^2}{dt^2}(L_{k-2}(x,t)b(x,t)) + \ldots + (-1)^k\frac{d^k b(x,t)}{dt^k}. \end{gathered} \tag{20}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение конструкции

$$\begin{aligned}\psi_k(x,t) = \varphi_k(x,t) - C_{k-1}^1\frac{d\varphi_{k-1}}{dt}(x,t) + C_{k-1}^2\frac{d^2\varphi_{k-2}}{dt^2}(x,t) + \ldots \\ + (-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}\varphi_1}{dt^{k-1}}(x,t).\end{aligned} \tag{21}$$

В силу тождества (13) $\quad \psi_k(x,t) \equiv \varphi_k(x,t), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ \ t \geq t_0, \ \ k = 1,2,\ldots$ Имеем

$$\psi_1(x,t) = m^*(x,t)b(x,t),$$
$$\psi_2(x,t) = m^*(x,t)(L_1(x,t) - \frac{d}{dt})b(x,t).$$

Выпишем $\qquad \psi_5(x,t) = m^*(x,t)L_4(x,t)b(x,t) - 4\frac{d}{dt}(L_3(x,t)b(x,t)) +$ $+6\frac{d^2}{dt^2}(L_2(x,t)b(x,t)) - 4\frac{d^3}{dt^3}(L_1(x,t)b(x,t)) + \frac{d^4}{dt^4}b(x,t)$. База для математической индукции построена. Предположим теперь, что утверждение теоремы 1 справедливо для некоторого $k > 5$, и рассмотрим $\varphi_{k+1}(x,t)$ и $\psi_{k+1}(x,t)$. Имеем для ψ_{k+1} вид формулы (21) и непосредственным подсчетом коэффициентов при производных от $m^*(x,t)$ с учетом равенства $C_k^j = C_k^{k-j}$ получаем для φ_{k+1} выражение

$$\varphi_{k+1} = \psi_{k+1} = m^*(x,t)g_{k+1}(x,t).$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (13), (18) эквивалентна линейной относительно $m(x,t)$ системе (19), (20).

Отметим, что полученные формулы (20) для определения производящего вектора $m(x,t)$ эквивалентны в случае нелинейной стационарной системы соответствующим формулам в [6], но имеют значительно более простой вид. Отметим также, что при $b(x,t) = \mathrm{const}$ матрица $G(x,t)$ совпадает с матрицей управляемости (7).

Отметим, что характер устойчивости исходной системы совпадает с характером устойчивости $T(x,t)$ преобразованной системы, поскольку выполняются условия [2]

1) $T(x,t) = 0$ только при $x = 0, \ t \geq t_0$,

2) все компоненты $T(x,t)$ — непрерывные функции в окрестности $\|x\| \leq \varepsilon$. Условие 2) выполняется построением матрицы $T(x,t)$ с учетом

(20):

$$T(x,t)=\left|\begin{array}{l} e_n^*G^{-1}(x,t) \\ \frac{d}{dt}(e_n^*G^{-1}(x,t))+e_n^*G^{-1}(x,t)L_1(x,t) \\ \quad\vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e_n^*G^{-1}(x,t))+C_{n-1}^1\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(e_n^*G^{-1}(x,t))+\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\ldots e_n^*G^{-1}(x,t)L_{n-1}(x,t) \end{array}\right|. \qquad (22)$$

Перейдем к определению необходимых и достаточных условий невырожденности матрицы (22).

Теорема 2 *Для существования и единственности преобразования* (3), (22) *необходимо и достаточно полная равномерная невырожденность матрицы управляемости* (7) *системы* (5), *т.е. выполнение условия* $\exists\ \varepsilon>0:\ |\det W(x,t)|>\varepsilon$.

Доказательство теоремы 2.

Рассмотрим систему (5) и произведем каноническое преобразование подобия типа I [3]

$$z=W^{-1}(x,t)x(t)$$
$$\dot z=\widetilde{\widetilde{A}}(z,t)z+\widetilde{\widetilde{b}}(z,t)u,$$

где $\widetilde{\widetilde{A}}(z,t)$ — вертикальная матрица Фробениуса, $\widetilde{\widetilde{b}}=e_1$, $W(x,t)$ — матрица управляемости системы (5).

Рассмотрим систему (9), т.е. систему (5) после преобразования (4), $y=T(x,t)x$, и произведем каноническое преобразование подобия типа I

$$z=W_0^{-1}(y,t)y(t),$$

где $W_0(y,t)$ — матрица управляемости системы (9). Отметим, что матрица управляемости системы (9) W_0 равномерно невырождена и $\det W_0=1$ [4]. Отсюда

$$T(x,t)=W^{-1}(x,t)W_0(y,t),$$

что доказывает справедливость утверждения теоремы.

Следствие. Из равномерной ограниченности параметров системы (1) следует равномерная ограниченность матриц $\widetilde{A}(y,t)$ и $e_n\widetilde{s}^*(y,t)$.

Доказательство. Справедливость последнего утверждения следует непосредственно из структуры матрицы $T(x,t)$, задаваемой формулой (22).

3 Синтез канонического преобразования подобия типа II для дискретных систем

Вернемся к дискретной нелинейной нестационарной системе вида (2)

$$x_{k+1} = A(x_k,k)x_k + b(x_k,k)u_k, \quad u_k = s^*(x_k,k)x_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^n,\ k = 0,1,\dots \tag{23}$$

где x_k — вектор состояния системы в момент k, матрица $A(x_k,k)$ и вектор $b(x_k,k)$ равномерно ограничены. Введем обозначения, полагая

$$A(x_k,k) = A_k, \quad b(x_k,k) = b_k, \quad s(x_k,k) = s_k, \tag{24}$$

и рассмотрим оператор сдвига P на 1 шаг вперед в силу однородной системы

$$x_{k+1} = A_k x_k. \tag{25}$$

Тогда $Px_k = A_k x_k,\ P^2 x_k = A_{k+1}A_k x_k,\ P^j x_k = \prod_{i=j-1}^{0} A_{k+i}x_k$, т.е. P^j — оператор сдвига вперед на j шагов в силу системы (25). Полагаем для произвольных векторов v_1, v_2 и матрицы M

$$\begin{aligned} P(v_1^* v_2) &= P v_1^* v_2 + v_1^* P v_2, \\ P(M(v_1)v_2) &= M(Pv_1)v_2 + M(v_1)Pv_2. \end{aligned} \tag{26}$$

Введем в рассмотрение преобразование подобия (4) с учетом обозначений (24), т.е.

$$y_k = T_k x_k, \quad \text{где } T_k = T(x_k,k,x_{k-1},k-1), \tag{27}$$

и рассмотрим систему (23), преобразованную по формуле (27),

$$y_{k+1} = \widetilde{A}_k y_k + \widetilde{b}_k u_k, \quad u_k = \widetilde{s}_k^* y_k,$$

где $\widetilde{A}_k = T_{k+1}A_kT_k^{-1},\ \ \widetilde{b}_k = T_{k+1}b_k,\ \ \widetilde{s}_k^* = s_k^*T_k^{-1}$. Введем в рассмотрение преобразование (4), полагая $y_k^* = (y_k^1,\dots,y_k^n),\ n_k$ —производящий вектор

$$\begin{array}{ll} y_k^1 = n_k^* x_k, & y_{k+1}^1 = y_k^2, \\ y_k^2 = P y_k^1, & y_{k+1}^2 = y_k^3, \\ \vdots & \vdots \\ y_k^n = P^{n-1} y_k^1, & y_{k+1}^n = P^{n-1} y_{k+1}^1. \end{array} \tag{28}$$

При этом $Px_k = A_k x_k,\ P^i x_k = \prod_{j=i-1}^{0} A_{j+k}x_k$ и для произвольных векторов v_1, v_2 и произвольной матрицы $B(x_k,k)$ выполняются соотношения

$$P(v_1^* v_2) = (Pv_1)^* v_2 + v_1^*(Pv_2), \quad PB(x_k,k) = B(A_k x_k, k+1).$$

В силу соотношений (28) матрица $\widetilde{A}_k$ есть матрица Фробениуса с последней функциональной строкой. Определим производящий вектор n_k, исходя из требования

$$b_k = T_{k+1} b_k \equiv e_n, \quad k = 0, 1, \dots \tag{29}$$

Выпишем матрицу рассматриваемого преобразования T_k

$$T_k = \left| \begin{array}{l} n_k^* \\ P n_k^* + n_k^* A_k \\ \quad\vdots \\ P^{n-1} n_k^* + C_{n-1}^1 P^{n-2} n_k^* M_1 + \ldots + C_{n-1}^{n-2} P n_k^* M_{n-2} + n_k^* M_{n-1} \end{array} \right|, \tag{30}$$

$M_i = \prod_{j=i-1}^{0} A_{j+k}$.

Сформируем систему уравнений относительно $P^i n_k$ в силу требования (29) и формулы (30)

$$\begin{array}{l} n_k^* b_{k-1} = 0, \\ P n_k^* b_{k-1} + n_k^* A_k b_{k-1} = 0, \\ \quad\vdots \\ P^{n-1} n_k^* b_{k-1} + C_{n-1}^1 P^{n-2} n_k^* A_k b_{k-1} + \ldots + n_k^* M_{n-1} b_{k-1} = 1. \end{array} \tag{31}$$

Как и ранее, перейдем от системы уравнений (31) относительно $P^i n_k$ к линейной алгебраической системе относительно вектора n_k.

Теорема 3 *Система уравнений* (31) *эквивалентна линейной системе вида*

$$\begin{array}{l} n_k^* G_k = e_n^*, \quad \text{где} \quad G_k = \|g_1^k, \dots, g_n^k\|, \\ g_1^k = b_{k-1}, \\ g_i^k = M_k b_{k-1} - C_k^1 P(M_{k-1} b_{k-1}) + C_k^2 P^2 (M_{k-2} b_{k-1}) + \ldots + (-1)^k P^k b_{k-1}. \end{array} \tag{32}$$

Доказательство теоремы 3 почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Перейдем к определению необходимых и достаточных условий существования преобразования (4), (30), т.е. условий его невырожденности. Введем в рассмотрение матрицу

$$W_k = |b_{k-1}, A_k b_{k-1}, \dots, M_{n-1} b_{k-1}|, \tag{33}$$

где матрицы M_j, $j = \overline{1, n-1}$, заданы формулами (30), $M_k^1 = A_k$. По аналогии с непрерывным вариантом называем матрицу W_k матрицей управляемости системы (2).

Теорема 4 *Для существования и единственности преобразования* (4), (30) *необходима и достаточна равномерная невырожденность матрицы* W_k *для всех* $k = 0, 1, \ldots$

Доказательство теоремы 4 почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.

4 Синтез терминального управления для дискретной нелинейной системы

Рассмотрим стационарный вариант системы (2)

$$x_{k+1} = A(x_k)x_k + b(x_k)u_k \tag{34}$$

в предположении существования для нее преобразования (4), (30), (32), т.е. равномерной ограниченности пары $A(x_k), b(x_k)$ и равномерной невырожденности матрицы W_k, заданной формулой (33).

Сформулируем задачу терминального управления: для заданных векторов x_0, r, $r \neq 0$, и числа шагов $m \geq n$ определить управление u_k, обеспечивающее для заданного вектора r выполнение условия

$$x_m = r. \tag{35}$$

Решение поставленной задачи начнем с рассмотрения специального случая системы (2):

$$y_{k+1} = A_k^0(y_k)y_k + b_0(y_k)u, \tag{36}$$

где

$$A_k^0 = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_n^k & \alpha_{n-1}^k & & \ldots & \alpha_1^k \end{array} \right|, \quad b_0(y_k) = e_n, \quad k = 0, 1 \ldots, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Полагаем, что допустимо управление вида

$$u_k = s_k^{0*}(y_k)y_k + c, \tag{37}$$

где c — определяемая в дальнейшем константа. Замкнутая система (36), (37) имеет вид

$$y_{k+1} = D_k^0 y_k + \gamma, \quad D_k^0 = A_k^0 + e_n s_k^{0*}, \quad \gamma^* = (0, 0, \dots, 0, c).$$

Терминальное условие имеет вид

$$y_m = r^0. \tag{38}$$

Матрица D_k^0 есть матрица Фробениуса, т.е. полностью задается своим спектром.

Задавая постоянный спектр матрицы D_k^0, выбором управления (37) переходим к рассмотрению линейной стационарной системы с матрицей $D^0 = \mathrm{const}$. Перейдем к определению постоянного спектра матрицы D^0, обеспечивающего выполнение терминального условия (38). Выпишем y_m в силу линейной стационарной системы

$$y_{k+1} = D^0 y_k + e_n s^{0*} + \gamma. \tag{39}$$

Имеем

$$y_m = (D^0)^m y_0 + \sum_{j=0}^{m-1} (D^0)^j \gamma. \tag{40}$$

Рассмотрим спектральное разложение матрицы D^0 в предположении, что ее собственные числа λ_i, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют условию $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$

$$D^0 = \sum \lambda_i d_i l_i^*,$$

где d_i — собственные векторы матрицы D^0, l_i — собственные векторы матрицы D^{0*}. Тогда [9]

$$l_j = \frac{p_j}{\prod_{i \neq j}(\lambda_i - \lambda_j)}, \quad p_j^n = (-1)^{n-1}, \quad p_j^{n-1} = (-1)^{n-2} \sum_{i \neq j} \lambda_i, \quad p_j^1 = \prod_{i \neq j} \lambda_i, \tag{41}$$

т.е. коэффициенты вектора p_j есть коэффициенты характеристического полинома $f^j = \prod_{i \neq j}(\lambda - \lambda_i)$.

Вернемся к терминальному условию (38), (40) и умножим его слева на вектор p_j. Имеем

$$p_j^* r^0 = \lambda_j^m p_j^* y_0 + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_j^i p_j^* \gamma. \tag{42}$$

Выберем теперь число c в формуле (36), полагая $c = k\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - 1)$, где k выбирается из условий

$$y_0 = (y_0^1, \ldots, y_0^n)^*, \ r^0 = (r_1^0, \ldots, r_m^0)^*, \ \beta = y_0^1 + k y_0^n, \ \operatorname{sign} r_1^0 = \operatorname{sign}\beta. \qquad (43)$$

Пусть спектр матрицы D^0 удовлетворяет условиям

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_i = \lambda + (i-1)\delta, \quad \operatorname{sign}\delta = \operatorname{sign}\lambda.$$

В [10] доказывается теорема о существовании (неединственного) решения терминальных уравнений (42) в предположении (43) при $m = n$. Тогда для любого δ существует и определяется значение $\lambda = \lambda_1$, при котором $\lambda_i = \lambda_1 + (i-1)\delta$, $i = \overline{1,n}$, представляет собой решение системы терминальных уравнений вида (42). При этом вектор s^0 определяется соотношением $s^{0*}(A_0 - \lambda_i I)^{-1} e_n = -1$.

Вернемся теперь к системе общего вида (34) с учетом сделанных относительно нее предположений. Тогда существует преобразование

$$y_k = \begin{vmatrix} e_n^* G_k^{-1} \\ \vdots \\ P^{n-1}(e_n^* G_k^{-1}) + C_{n-1}^1 P^{n-2}(e_n^* G_k^{-1}) M_1 \ldots e_n^* G_k^{-1} M_{n-1} \end{vmatrix},$$

приводящее систему (34) к виду (36). Таким образом, доказана следующая

Теорема 5 *Пусть параметры системы* (34) *равномерно ограничены и* $|\det W_k(y_k)| > \varepsilon$, $k = 0, 1, \ldots$, $y_k \in \mathbb{R}^n$, *где матрица* W_k *определена формулой* (33).

Тогда для произвольной пары векторов x_0, r *существует и определяется решение задачи терминального управления.*

5 Заключение

Следует отметить, что приведенное в статье решение задачи синтеза канонических преобразований подобия единообразно для непрерывных и дискретных систем, т.е. совпадает при замене оператора дифференцирования на оператор сдвига. При этом достаточными условиями существования рассмотренного преобразования являются для непрерывных систем наличие частных производных порядка до $2n-1$ включительно и равномерная невырожденность матрицы управляемости, а для дискретных систем — равномерная невырожденность аналога матрицы управляемости.

Требование равномерной невырожденности в отличие от просто невырожденности обусловлено тем, что сформированные преобразования сохраняют свойство равномерной ограниченности параметров преобразованной системы. Отметим, что полученное каноническое преобразование подобия для нелинейных нестационарных систем зависит только от шагов k и $k-1$, в отличие от полученных ранее результатов для нелинейных стационарных систем, где преобразование на k-том шаге определяется с учетом n предыдущих шагов.

Литература

[1] Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.

[2] Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977.

[3] Isidory A. Nonlinear Control Systems. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, London, Paris. 1989.

[4] Зубер И.Е. Стабилизация нелинейных наблюдаемых систем при управлении по выходу. // Вестник СПбГУ, Сер. 1, 2002, вып. 3 (N 3), С. 17–29.

[5] Zak S.H., Maccarley C.A. State-feedback control of nonlinear systems. // Int J. Control, 1986, V. 43, N 5, P. 1497–1514.

[6] Зубер И.Е. Спектральная стабилизация нелинейных систем на основе специального преобразования подобия. // Вестник СПбГУ, Сер. 1, 2000, вып. 2 (N 8), С. 8–13.

[7] Zuber I.E. Stabilization of nonlinear systems by similarity transformations.// Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 11:4, 1998, P.519–526.

[8] Зубер И.Е. Канонические преобразования и стабилизация нелинейных дискретных систем управления. // Вестник СПбГУ, Сер. 1, 2003, в печати.

[9] Зубер И.Е. О некоторых свойствах матриц Фробениуса. // Диф. уравнения и процессы управления. Электронный журнал, 2002, N 3, www.neva.ru.journal.

[10] Зубер И.Е. Синтез модального терминального управления для нестационарных дискретных систем. // Вестник СПбГУ, Сер. 1, 2003, в печати.