ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2004
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

СИНТЕЗ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

И.Е.ЗУБЕР

Россия, 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., д. 2,
Санкт-Петербургский государственный университет,
e-mail: zuber@EZ7332.spb.edu

Аннотация.

Для нелинейных гладких вполне управляемых систем проводится решение задачи терминального управления как определение спектра матрицы замкнутой системы, трансформированной в каноническую форму, при котором выполняется терминальное условие. Если измерим не вектор состояния системы, а скалярный выход системы, то строится экспоненциально устойчивый наблюдатель, позволяющий задать матрице преобразованной в каноническую форму замкнутой системы спектр специального вида. Выбор этого спектра и условие на скорость убывания функции Ляпунова ошибок наблюдателя обеспечивает выполнение слабого терминального условия.

1 Введение

Задача терминального управления была поставлена в 1948 г. [1], и ее решение известно в основном для линейных и узкого класса нелинейных

[0]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта N НШ-2257.2003.1 Совета по грантам президента РФ и при поддержке РФФИ, проекты 02-01-00542, 02-01-00544.

систем. Полученное терминальное управление, как правило, представлено программным управлением [2].

В литературе рассматриваются два варианта задачи терминального управления. В первом варианте (сильного) терминального управления задаются начальное и конечное состояния системы и момент времени, в который конечное состояние должно быть достигнуто. Во втором варианте рассматривается слабое терминальное управление: задаются начальное состояние системы и окрестность конечного состояния системы, которую требуется достигнуть в заданный момент времени.

Предлагаемая статья представляет собой продолжение работы [3], в которой рассматривалось решение задачи терминального управления для некоторого класса гладких вполне управляемых систем в предположении измеримости вектора состояния системы.

Следует отметить, что в [3] не приведен способ решения полученных терминальных уравнений. Кроме того, в [3] вводились существенные ограничения на задание векторов начального и конечного состояния, в частности предполагалось совпадение знака их первых компонент. Последнего ограничения удалось избежать, слегка модифицируя вид допустимого управления по состоянию.

В статье приводится постановка и решение задачи слабого терминального управления, формируемого как оператор от скалярного выхода системы.

2 Синтез модального терминального управления для нелинейных систем специального вида

Рассматривается система управления

$$\dot{y} = A_0(y)y + b_0(y)u, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где y — вектор состояния системы, $A_0(y)$ — заданная матрица Фробениуса с последней строкой $\alpha^*(y) = (\alpha_n(y), \dots, \alpha_1(y))$, причем $\exists\, m < \infty : \|\alpha(y)\| \leq m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $b_0(y) = e_n = (0, \dots, 0, 1)^*$.

Допустимым предполагается управление вида

$$u = s_0^*(y)y + c_0, \tag{2}$$

где $c_0 = \mathrm{const}$, определяемая в дальнейшем. Заданными предполагаются вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$, число τ и вектор $r_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0)^*$.

Задача I. Определить допустимое управление (2), т.е. вектор $s_0(y)$ и число c_0, при которых выполняется терминальное условие

$$y(\tau) = r_0, \tag{3}$$

где $y(\tau)$ — решение системы (1), (2) в момент τ.

Решение задачи I. Выпишем матрицу замкнутой системы (1), (2)

$$D_0(y) = A_0(y) + e_n \widetilde{s}_0^*(y) \tag{4}$$

и рассмотрим ее спектральное разложение [4], задавая ей постоянный спектр $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Имеем

$$D_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i g_i^*, \tag{5}$$

где d_i — собственные векторы матрицы D_0, $d_i = (1, \lambda_i, \ldots, \lambda_i^{n-1})^*$ [5], $i = \overline{1,n}$, g_i — собственные векторы матрицы D_0^* и согласно [6]

$$\begin{gathered} g_j = \frac{p_j}{\prod_{i\neq j}(\lambda_i - \lambda_j)}, \qquad \text{где} \quad p_j^* = (p_j^1, \ldots, p_j^n), \\ p_j^n = (-1)^{n-1}, \quad p_j^{n-1} = (-1)^{n-2} \sum_{i\neq j} \lambda_i, \quad \ldots \quad p_j^1 = \prod_{i \neq j}^{n} \lambda_i, \end{gathered} \tag{6}$$

т.е. компоненты векторов p_j есть коэффициенты характеристического полинома $f^j = \prod_{i\neq j}(\lambda - \lambda_i)$ и, следовательно, коэффициенты последней строки матрицы Фробениуса порядка $(n-1) \times (n-1)$.

Выпишем решение системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{y} = D_0 y + \gamma, \quad \gamma = c_0 e_n,$$

в которую при условии постоянства спектра матрицы $D_0(y)$ превратилась замкнутая система (1), (2). Имеем при $t = \tau$

$$y(\tau) = e^{D_0 \tau} y_0 + \int_0^{\tau} e^{D_0(t-\tau)} \gamma \, dt. \tag{7}$$

Умножим терминальное условие (3), (7) слева на векторы p_j, $j = \overline{1,n}$. Отсюда

$$p_j^* r_0 = e^{\lambda_j \tau} p_j^* y_0 + c_0 \frac{e^{\lambda_j \tau} - 1}{\lambda_j} p_j^n. \tag{8}$$

Уравнения (8) будем называть спектральными терминальными уравнениями. Покажем теперь, что специфическим выбором спектра D_0, $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$,

$$\lambda_i = \lambda_1 + (i-1)\delta, \qquad \lambda_1 \equiv \lambda, \tag{9}$$

можно обеспечить существование решения спектральных терминальных уравнений (8).

Пусть $r_0 = (r_1^0, \ldots, r_n^0)^*$, $y_0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)^*$, $r_n^0 \neq 0$, $y_n^0 \neq 0$. Перепишем j-тое уравнение системы (8) с учетом первого из соотношений (6) в виде

$$p_j^* r_0 = e^{\lambda_j \tau} \sum_{i=1}^n p_j^i y_i^0 + (-1)^{n-1} \Big(e^{\lambda_j \tau} y_n^0 + c_0 \frac{e^{\lambda_j \tau} - 1}{\lambda_j} \Big). \tag{10}$$

Выберем c_0 в виде

$$c_0 = k \prod_{i=1}^n \lambda_i. \tag{11}$$

Тогда имеем

$$p_j^* r_0 = e^{\lambda_j \tau} \prod_{i \neq j} \lambda_i \beta + P_\lambda^j(\lambda, \delta, y_0, k), \tag{12}$$

где

$$\beta = y_1^0 + k y_n^0, \tag{13}$$

P_λ^j — полином, степень которого по λ меньше $n-1$. Выберем теперь число k из условия

$$\operatorname{sign} r_1^0 = \operatorname{sign} \beta. \tag{14}$$

Согласно [6], в предположении (9) векторы p_j, $j = \overline{1, n}$, связаны соотношением

$$p_1 - (n-1)p_2 + (n-2)p_3 + \ldots + (-1)^{n-1} p_n = ((-1)^{n-1}, 0, \ldots, 0)^* (n-1)! \delta^{n-1}. \tag{15}$$

Введем обозначения, положив

$$\varphi_i = p_j^* r_0, \quad \chi_j = e^{\lambda_j \tau} \prod_{i \neq j} \lambda_i \beta + P_\lambda^j(\lambda, \delta, y_0, k). \tag{16}$$

Тогда

$$\varphi_1 - (n-1)\varphi_2 + (n-2)\varphi_3 + \ldots + (-1)^{n-1} \varphi_n = (-1)^{n-1} (n-1)! \delta^{n-1} r_1^0 \tag{17}$$

и в силу (8)

$$\chi_1 - (n-1)\chi_2 + \ldots + (-1)^{n-1} \chi_n = (-1)^{n-1} (n-1)! \delta^{n-1} r_1^0. \tag{18}$$

Отметим, что соотношения (15), а следовательно и соотношения (17), (18) не зависят от номера спектрального терминального уравнения (8) и, следовательно, система (18) эквивалентна системе (8).

Перепишем равенство (18) в виде

$$\Big(e^{\lambda_1\tau}\prod\nolimits_{i\neq 1}\lambda_i-(n-1)e^{\lambda_2\tau}\prod\nolimits_{i\neq 2}\lambda_i+\ldots+(-1)^{n-1}e^{\lambda_n\tau}\prod\nolimits_{i\neq n}\lambda_i\Big)\beta+P_\lambda= \\ =(-1)^{n-1}(n-1)!\delta^{n-1}r_1^0, \tag{19}$$

где $P_\lambda=P_\lambda^1-(n-1)P_\lambda^2+\ldots+(-1)^{n-1}P_\lambda^n$, т.е. степень P_λ по λ меньше $n-1$. Равенство (19) будем рассматривать как уравнение относительно λ и δ.

Перепишем (19) в виде

$$F_1(\lambda,\delta)=F_2(\delta),$$

где $F_1(\lambda,\delta)$ и $F_2(\delta)$ — соответственно левая и правая части равенства (19). Положим

$$f(\lambda,\delta)=F_2(\delta)-F_1(\lambda,\delta).$$

Пусть для определенности $\beta>0$, т.е. предполагаем, что $r_1^0>0$. Покажем, что при каждом δ функция $f(\lambda,\delta)$ меняет знак в интервале $\lambda\in(-\infty,\infty)$. Рассмотрим в соотношении (19) сначала $\delta<0$, т.е. максимальный член при $|\lambda|>>\delta$ есть $e^{\lambda_1\tau}\prod\limits_{i\neq 1}\lambda_i$. Имеем

$$\begin{array}{lll} \text{при} & \lambda\to\infty & f(\lambda,\delta)<0, \\ \text{при} & \lambda\to-\infty & f(\lambda,\delta)=F_2(\delta)>0, \end{array}$$

т.е. существует значение $\lambda=\lambda^0$, при котором $f(\lambda,\delta)=0$.

Пусть теперь $\delta>0$, т.е. максимальным по модулю членом правой части соотношений (19) является $(-1)^{n-1}e^{\lambda_n\tau}\prod\limits_{i\neq n}\lambda_i\beta$. Пусть $n=2m+1$. Тогда

$$\begin{array}{llccc} \text{при} & \lambda\to\infty & F_1(\lambda,\delta)>0,\quad F_2(\delta)>0, & f(\lambda,\delta)<0, \\ \text{при} & \lambda\to-\infty & F_1(\lambda,\delta)=0, & f(\lambda,\delta)>0, \end{array}$$

т.е. существует λ^0, при котором $f(\lambda,\delta)=0$.

Пусть, наконец, $n=2m$. Тогда

$$\begin{array}{llll} \text{при} & \lambda\to\infty & F_1(\lambda,\delta)<0, & f(\lambda,\delta)>0, \\ \text{при} & \lambda\to-\infty & F_1(\lambda,\delta)=0, & f(\lambda,\delta)<0, \end{array}$$

т.е. и в этом случае существует λ^0 — корень уравнения $f(\lambda, \delta) = 0$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1 *Для любого заданного δ существует и численно определяется такое значение λ, что спектр матрицы D_0 вида (9) при выбранных числах δ и λ обеспечивает выполнение терминального условия (3).*

Решение задачи терминального управления системы (1), (2) достигается синтезом вектора $s(y)$, реализующего выбранный спектр вида (9), т.е. решение уравнений (19) при произвольно заданном δ.

3 Постановка и решение задачи спектрального модального управления для нелинейных систем в предположении полной измеряемости вектора состояния системы

Рассматривается нелинейная система в векторно-матричной форме, линейная относительно управления

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u, \tag{20}$$

$x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, пара $A(x), b(x)$ вполне управляема в целом, и матрица управляемости пары $A(x), b(x)$ равномерно невырождена, т.е.

$$\exists\, \kappa > 0 : \quad |\det W(A(x), b(x))| > \kappa,$$

где

$$W(x) = |b(x), L_1(x)b(x), \ldots, L_{n-1}(x)b(x)|,$$

$L_i(x)$ — матрица i-той производной Ли, т.е. производной по t в силу однородной системы

$$\dot{x} = A(x)x.$$

Предполагается также равномерная ограниченность пары $A(x), b(x)$ вместе с ее частными производными порядка до $2n-1$ включительно. Допустимым предполагается управление вида

$$u = s^*(x)x + c, \qquad c = \mathrm{const}. \tag{21}$$

Заданными предполагаются пара $A(x), b(x)$, векторы x_0, r и число τ.

Задача II. Определить допустимое управление, т.е. вектор обратных связей $s(x)$ и число c, при которых выполняется терминальное условие

$$x(\tau) = r. \tag{22}$$

Отметим, что для системы (20), (21) существует [7] преобразование подобия

$$y = T(x)x, \tag{23}$$

которое матрице преобразованной системы

$$\widetilde{A}(y) = T(x)A(x)T^{-1}(x) + \dot{T}(x)T^{-1}(x)$$

обеспечивает форму Фробениуса с последней функциональной строкой и выполнение условия

$$\widetilde{b}(y) = T(x)b(x) = e_n.$$

При этом имеет место равномерная ограниченность матрицы $\widetilde{A}(y)$. Согласно [7] такое преобразование задается соотношениями

$$T(x) = \left\| \begin{matrix} e_n^* B^{-1}(x) \\ \dfrac{d}{dt}(e_n^* B^{-1}(x)) + e_n^* B^{-1}(x) L_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e_n^* B^{-1}(x)) + C_{n-1}^1 \dfrac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}(e_n^* B^{-1}(x)) L_1(x) + \ldots \\ + e_n^* B^{-1}(x) L_{n-1}(x) \end{matrix} \right\| \tag{24}$$

где $L_j(x)$ — (как и ранее) — матрица j-той производной Ли.

$$\begin{aligned} &B(x) = \|b_0(x), \ldots, b_{n-1}(x)\|, \\ &b_k(x) = f_k(x) - \sum_{j=1}^{k-1} C_j^k \frac{d^j}{(dt)^j} f_{k-j}(x), \quad b_0(x) = b(x), \\ &f_k(x) = \Big(L_k(x) - \frac{d^k}{(dt)^k}\Big) b(x), \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{25}$$

C_j^k — биномиальные коэффициенты.

Таким образом, преобразованная система (20), (21)

$$\dot{y} = \widetilde{A}(y)y + e_n(\widetilde{s}^* y + c) \tag{26}$$

имеет форму замкнутой системы (1), (2), терминальное условие (22) принимает вид

$$T(x(\tau))r = y(\tau),$$

и решение задачи синтеза терминального управления для системы (20), (21) проводится в точности так же, как для системы (1), (2), но выбирается не спектр исходной матрицы $D(x) = A(x)x + b(x)s^*(x)$, а спектр матрицы преобразованной замкнутой системы, т.е. спектр матрицы

$$\widetilde{D} = \widetilde{A}(y) + e_n\widetilde{s}^*(y).$$

Решение задачи II задается, таким образом, следующей теоремой.

Теорема 2 *Решение задачи терминального управления системы* (20), (21) *достигается синтезом вектора обратной связи преобразованной системы* (20), (21) *и выбором числа c в силу* (11), (13), *обеспечивающим матрице замкнутой преобразованной системы спектр вида (9), удовлетворяющим при произвольно заданном δ уравнениям* (19).

В исходных обозначениях системы (20), (21) *искомый вектор обратной связи $s(x)$ определяется соотношениями $s^*(x) = \widetilde{s}^*(y)T(x)$, где $\widetilde{s}(y)$ — вектор обратной связи, реализующий для системы* (26) *выбранный спектр.*

4 Решение задачи слабого терминального управления для нелинейных систем с измеримым скалярным выходом

Рассматривается нелинейная система вида (20)

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u \tag{27}$$

в предположении, что измеримым является скалярный выход

$$\sigma = \rho^*(x)x, \tag{28}$$

$\rho(x)$ — заданная векторная функция.

Задача III. Определить управление как оператор от функции (28), обеспечивающее выполнение слабого терминального условия: для заданных векторов $x_0 \neq 0$, $r \neq 0$ и чисел $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$:

$$|x(\tau) - r| < \varepsilon. \tag{29}$$

Решение этой задачи производится в дополнительном предположении полной равномерной наблюдаемости для системы (27), (28), т.е. для матрицы наблюдаемости

$$Q(x) = |\rho^*(x)L_1(x), \ldots, \rho^*(x)L_{n-1}(x)|,$$

где L_i — матрица i-той производной Ли, выполняется условие

$$\exists\, m > 0: \quad |\det Q(x)| > m, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{30}$$

В последнем предположении и предположениях на систему (20), (27) производится, как это указано в [8], синтез экспоненциально устойчивого наблюдателя для системы (27), (28). Формируем управление для системы (27), (28) вида

$$u = s^*(x)\widehat{x} + c, \tag{31}$$

где $\widehat{x}$ — экспоненциально устойчивый наблюдатель для системы (27), (28), $c = \mathrm{const}$, выбираемая в соответствии с соотношениями (11), (13) для преобразованной по формулам (24) системы (27), (28), т.е. системы

$$\dot{y} = \widetilde{A}(y)y + e_n(\widetilde{s}^*(y)\widehat{y} + c).$$

По определению экспоненциально устойчивого в целом наблюдателя $z = \widehat{y} - y$ стремится к нулю экспоненциально с заданной скоростью. Задание скорости убывания величины z определяется выбором вектора коэффициентов усиления наблюдателя, т.е. вектора $d(y)$ в формуле

$$\dot{\widehat{y}} = \widetilde{D}(\widehat{y})\widehat{y} + e_n c + d(y)\rho^*(y - \widehat{y}),$$

где $\widetilde{D}(y)$ — матрица замкнутой системы (27), (31), $\widetilde{D}(y) = \widetilde{A}(y) + e_n\widetilde{s}^*(y)$.

Перепишем систему (27), (31) в виде

$$\dot{y} = \widetilde{D}(y)y + e_n(\widetilde{s}^* z + c) \tag{32}$$

и отметим, что выбором постоянного спектра матрицы Фробениуса $\widetilde{D}(y)$ обеспечивается ее постоянство. Выберем спектр матрицы $\widetilde{D}$ вида (9) как решение уравнений (19), при котором выполняется терминальное условие $y(\tau) = T(x)r = \widetilde{r}$. Имеем в силу системы (32)

$$y(\tau) = \widetilde{r} + \int_0^\tau e^{D(t-\tau)} e_n \widetilde{s}^*(t) z(t)\, dt,$$

где $\widetilde{s}(t) = \widetilde{s}(y(t))$ — равномерно ограниченный вектор, обеспечивающий матрице $\widetilde{D}(y)$ выбранный спектр. Таким образом, выбором вектора коэффициентов усиления наблюдателя обеспечивается выполнение условия

$$\left| \int_0^\tau e^{D(t-\tau)} e_n \widetilde{s}^*(t) z(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Итак, справедлива следующая

Теорема 3 *Для вполне равномерно наблюдаемой и управляемой системы вида* (27), (28) *существует и определяется при управлении обратной связью по экспоненциально устойчивому наблюдателю с задаваемой скоростью убывания функции Ляпунова уравнения ошибок наблюдателя спектр матрицы замкнутой системы, обеспечивающий выполнение слабого терминального условия.*

5 Заключение

Решение задачи (сильного) терминального управления свелось к определению специального спектра матрицы замкнутой системы, преобразованной в каноническую форму. Выбор такого спектра, сугубо неоднозначный, производится численным решением уравнений (19). Искомое управление реализуется как управление, обеспечивающее матрице преобразованной в каноническую форму замкнутой системы выбранный спектр. Для решения задачи слабого терминального управления вводится дополнительное предположение о полной равномерной наблюдаемости системы, управление обратной связью по состоянию заменяется управлением обратной связью по наблюдателю, у которого скорость убывания функции Ляпунова уравнения ошибок наблюдателя задается произвольно. Для матрицы замкнутой управлением по наблюдателю системы обеспечивается спектр специального вида (9), (19), обеспечивающий системе, замкнутой управлением обратной связью по состоянию, выполнение (сильного) терминального условия. Тогда для системы, замкнутой обратной связью по наблюдателю, выполняется слабое терминальное условие.

Литература

[1] Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения системы регулирования. // АиТ, 1948, N 4, С.253-279.

[2] Lee E.B., Markus L. Foundation of Optimal Control Theory. New York, London: John Wily & Sons, 1967, 631 c.

[3] Зубер И.Е. Терминальное управление для нелинейных систем. // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2001, вып. 1 (N 3), С.15-22.

[4] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.

[5] Мироновский Л.А. Функциональная диагностика динамических систем. М.: МГУ-ГРИФ, 1998.

[6] Зубер И.Е. О некоторых свойствах матриц Фробениуса. // Электронный журнал. Диф. уравнения и процессы управления, 2002, вып. 2, С.14-18.

[7] Зубер И.Е. Спектральная стабилизация нелинейных систем на основе специального преобразования подобия. // Вестник СПбГУ, Сер. 1, 2000, вып. 2 (N 8), С.8-13.

[8] Зубер И.Е. Экспоненциально устойчивый наблюдатель для управляемых и наблюдаемых нелинейных систем. // Вестник СПбГУ, Сер. 1 (в печати).