ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2004
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: diff@osipenko.stu.neva.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ УСТАНОВЛЕНИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПО ВЫХОДУ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ФАЗОВОЙ СИСТЕМЫ.

Н.В.Утина

Россия, 198904, Санкт-Петербург, Петродворец, Библиотечная пл., 2,
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
математико-механический факультет,
кафедра теоретической кибернетики,
e-mail: unv74@mail.ru

Аннотация.

Рассматривается многомерная дискретная система с одной периодической нелинейностью. Объектом исследования является задача оценки одной из характеристик переходного процесса — времени его установления по выходу. Излагается метод, позволяющий сводить оценки времени переходных процессов многомерной дискретной фазовой системы к рассмотрению двумерной системы сравнения и проверке частотного условия. На основе этого метода доказывается частотный критерий получения множества начальных состояний многомерной дискретной системы, для которых соответствующие решения имеют заданную верхнюю оценку времени установления переходного процесса.

В данной работе рассматривается многомерная дискретная система с одной периодической нелинейностью. Такими уравнениями описываются, например, системы фазовой автоподстройки частоты с элементами дискретизации [1, 2]. Любая из этих систем может работать в двух различных режимах: синхронном режиме (режим сопровождения) и режиме захвата (режим установления или переходный процесс). Каждый из этих режимов имеет определенные физические ограничения и характеристики. Одной из информативных характеристик переходного процесса, позволяющих проанализировать работу фазовой системы, является время установления переходного процесса. Эта характеристика определяется как наименьшее время, необходимое для того, чтобы система попала в область притяжения устойчивого состояния равновесия [3, 4].

Говоря об оценках времени переходных процессов в непрерывных системах фазовой синхронизации автоматического регулирования, необходимо начать с теории, предложенной Ричменом [4]. Для различных видов нелинейностей этот метод применяли Бирн [5], Мейер [6], Шахтарин [7]. Другие интересные методы определения времени установления переходных процессов были предложены в работах [8, 9, 10, 11, 12]. Все перечисленные работы, за исключением статьи Мейера, в которой исследуется система третьего порядка, касаются систем фазовой синхронизации второго порядка. Для непрерывных систем произвольного порядка задача оценки времени переходного процесса рассматривалась в диссертации О. Б. Киселевой [13].

Для исследования поведения решений многомерной дискретной фазовой системы в данной работе используется аппарат второго метода Ляпунова, дискретный аналог частотной теоремы Якубовича-Калмана о разрешимости квадратичных матричных неравенств [14, 15, 16] и расширенный на дискретные системы метод нелокального сведения Г. А. Леонова [14, 17, 18], основанный на использовании информации об устойчивости систем более низкого порядка — систем сравнения. Вводятся функции Ляпунова в виде квадратичной формы относительно фазовых переменных системы плюс квадрат решения системы сравнения с определенным типом глобального поведения. Этот прием позволяет установить тот же тип глобального поведения для исследуемой дискретной системы.

Рассмотрим многомерную дискретную фазовую систему вида

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + b\xi(n), \\ \sigma(n+1) &= \sigma(n) + c^*x(n), \\ \xi(n) &= \varphi(\sigma(n)), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

где A — постоянная вещественная $(\nu \times \nu)$-матрица, b, c — постоянные вещественные ν-векторы, x, σ — соответственно ν-мерная и скалярная компоненты вектора состояния системы, $\varphi(\sigma)$ — скалярная непрерывно дифференцируемая Δ-периодическая функция, имеющая на периоде $[0, \Delta)$ два простых нуля. Линейная часть системы характеризуется передаточной функцией от входа ξ к приращению выхода $-(\sigma(n+1) - \sigma(n))$

$$K(p) = c^*(A - pE_\nu)^{-1}b, \tag{2}$$

где E_ν — единичная $(\nu \times \nu)$-матрица, p — комплексная переменная. Предполагаем, что $\chi(p) = (p-1)K(p)$ – невырождена. Дадим следующее определение исследуемой характеристики.

Определение 1. *Временем установления переходного процесса по выходу* для решения $\{x(n), \sigma(n)\}$ системы (1) с начальными данными $\{(x(0), \sigma(0))\}$ будем называть такой момент времени $N_f > 0$, что 1) для любых моментов времени $n_1 \geq N_f$, $n_2 \geq N_f$, $n_1 \leq n_2$ выполнено $|\sigma(n_2) - \sigma(n_1)| < \Delta$, 2) для всякого $0 \leq N < N_f$ найдутся моменты времени $n_3 \leq N$, $\;n_4 > N$, для которых $|\sigma(n_4) - \sigma(n_3)| \geq \Delta$.

Это определение естественным образом обобщает понятие времени установления переходного процесса в фазовых системах автоматического регулирования второго порядка, используемое в [1, 3, 4, 7], на случай фазовых систем произвольной размерности.

Введем в рассмотрение систему сравнения — дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\Theta} + \alpha\dot{\Theta} + \varphi(\Theta) = 0 \tag{3}$$

и соответствующее ему уравнение первого порядка

$$F'(\Theta)F(\Theta) + \alpha F(\Theta) + \varphi(\Theta) = 0, \tag{4}$$

где α — некоторое положительное число, $\varphi(\Theta)$ — непрерывно дифференцируемая Δ-периодическая функция системы (1).

Введем в рассмотрение следующие квадратичные формы ν-вектора x и скалярной величины ξ

$$W_i(x, \xi) = \lambda^{-2}(Ax + b\xi)^*H(Ax + b\xi) - x^*Hx + G_i(x, \xi), \tag{5}$$

$$G_i(x,\xi) = \frac{1}{2\lambda^2}\left[(\varkappa+\varepsilon_i)(c^*x)^2 + 2c^*x\xi + \beta(c^*Ax)^2\right], \tag{6}$$

где $H = H^*$ — некоторая матрица, $i = 1, 2$, k, λ, ε_i — параметры.

Сформулируем критерий, позволяющий получить множество начальных состояний дискретной системы (1), для которых соответствующие решения имеют заданную верхнюю оценку времени установления переходного процесса.

Теорема. Предположим, $c^*b \neq 0$. Пусть для чисел $\lambda \in (0,1)$, $\varkappa > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\tau > 0$ выполнены следующие условия:
1) все собственные числа матриц $\lambda^{-1}A$ и $\lambda^{-1}(E - \frac{bc^*}{c^*b})A$ расположены внутри единичного круга,
2) все решения системы (3) ограничены на $[0, +\infty)$;
3) $\{\Theta_i(t), \dot\Theta_i(t)\}$ $(i = 1, 2)$ — решения системы (3) с начальными данными $(\Theta_i(0), \dot\Theta_i(0))$, обладающие свойствами:

3.1. существуют моменты времени T_i, для которых $\dot\Theta_i(T_i) = 0$;

3.2. $\dot\Theta_1(t) > 0, \dot\Theta_2(t) < 0$ для всех $t \in [0, T_i)$;

3.3. $\Theta_2(0) = \Theta_1(T_1)$;

3.4. $0 < \Theta_{01} - \Theta_{02} \leq \Delta$, где $\Theta_{0i} = \Theta_i(T_i)$;

3.5. для любых $t_1, t_2 \geq T_f$ справедливо $|\Theta_1(t_2) - \Theta_1(t_1)| < \Delta$;

3.6. выполнено неравенство $\tau^{-1/2} \leq \Delta\left(\sum_{n=T_f}^{T_1}\dot\Theta_1(n)\right)^{-1}$;

4) для любого $p \in \mathbf{C}$, $|p| = 1$, выполнены частотные условия

$$-2\,\Re e\{K(\lambda p)\} + (\varkappa+\varepsilon_i)\,|K(\lambda p)|^2 + \beta|\lambda p K(\lambda p) + c^*b|^2 < 0, \tag{7}$$

где $i = 1, 2$,

$$\varepsilon_i = \max\{0, \max_{\Theta\in[\Theta_i(0),\Theta_{0i}]}\{-[F_i(\Theta)'F_i(\Theta)]'\}\}, \tag{8}$$

а функции $F_i(\Theta)$ — решения уравнения (4) с начальными данными $F_i(\Theta_i(0)) = \dot\Theta_i(0)$;
5) выполнены условия

$$\alpha^2 \leq \varkappa(1-\lambda^2), \quad \beta(\varkappa+\varepsilon_1) - 1 > 0, \quad 0 < \tau < \frac{1}{\lambda^2}(\varkappa+\varepsilon_1).$$

Тогда время N_f установления переходного процесса системы (1) не превосходит T_f для решений $\{x(n), \sigma(n)\}$ с начальными данными, удовлетворяющими условиям

$$\sigma(0) = \Theta_1(0), \quad x(0)^*Hx(0) < \frac{1}{2}\,\dot\Theta_1^2(0), \tag{9}$$

где матрица $H = H^*$ обеспечивает отрицательную определенность квадратичной формы $W_1(x,\xi)$ для любых x и ξ, $||x|| + ||\xi|| \neq 0$.

Доказательство теоремы. Заметим, что в силу своего определения функции $F_i(\Theta)$ обладают следующими свойствами: $F_i(\Theta_i(0)) = \dot{\Theta}_i(0)$, $F_i(\Theta_{0i}) = 0$, $F_1(\Theta) > 0$ для всех $\Theta \in [\Theta_1(0), \Theta_{01})$, $F_2(\Theta) < 0$ для всех $\Theta \in [\Theta_2(0), \Theta_{02})$.

Для функции $F_1(\Theta)$ и некоторой вещественной $(\nu \times \nu)$-матрицы $H = H^*$ на решениях системы (1) рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V_1(x(n), \sigma(n)) = x^*(n)Hx(n) - \frac{1}{2}F_1^2(\sigma(n)). \tag{10}$$

Из условия (9) на начальные данные решения системы (1) следует неравенство $V_1(x(0), \sigma(0)) < 0$. Предположим, что выполнено $V_1(x(n), \sigma(n)) < 0$ для всех $n \in [0, N] \in [0, T_1)$. Докажем, что это выполнено и для следующего момента, т. е. $V_1(x(N+1), \sigma(N+1)) < 0$. Для этого рассмотрим приращение функции Ляпунова на решениях системы (1)

$$\Delta_\lambda V_1(x(n), \sigma(n), \xi(n))) = \lambda^{-2} V_1(x(n+1), \sigma(n+1)) - V_1(x(n), \sigma(n)). \tag{11}$$

Очевидно, что это приращение можно записать следующим образом:

$$\Delta_\lambda V_1(x(n), \sigma(n), \xi(n))) = W_1(x(n), \xi(n)) + L_1(x(n), \sigma(n), \xi(n)), \tag{12}$$

где

$$L_1(x(n), \sigma(n), \xi(n)) = -\frac{1}{2\lambda^2}F_1^2(\sigma(n+1)) + \frac{1}{2}F_1^2(\sigma(n)) - G_1(x(n), \xi(n)), \tag{13}$$

а квадратичные формы $W_1(x,\xi)$, $G_1(x,\xi)$ определены формулами (5),(6).

Оценим $W_1(x(n), \xi(n))$. При условии расположения всех собственных чисел матрицы $\lambda^{-1}A$ внутри единичного круга, по частотной теореме [19] для существования матрицы $H = H^*$ такой, что при всех x, ξ имеет место неравенство

$$\lambda^{-2}(Ax + b\xi)^* H (Ax + b\xi) - x^* H x + G_1(x, \xi) < 0, \tag{14}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{G}_1(\tilde{x}, \xi) < 0$ для $\tilde{x} = -(A - \lambda p E)^{-1} b\xi$ и любого ξ. Действительно, в силу определения формы $G_1(x,\xi)$ и частотного условия (7) имеем

$$\tilde{G}_1(\tilde{x}, \xi) == \frac{1}{2\lambda^2}[(\varkappa + \varepsilon_1)|K(\lambda p)|^2 - 2\Re e\{K(\lambda p)\} + \beta|\lambda p K(\lambda p) + c^* b|^2]\xi^2 < 0.$$

Оценим $L_1(x,\sigma,\xi)$.

$$L_1(x(n),\sigma(n),\xi(n)) = -\frac{1}{2\lambda^2}F_1^2(\sigma(n+1)) + \frac{1}{2}F_1^2(\sigma(n)) - G_1(x(n),\xi(n)) =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda^2}[F_1^2(\sigma(n+1)) - F_1^2(\sigma(n))] - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^2}F_1^2(\sigma(n)) - \frac{\varkappa+\varepsilon_1}{2\lambda^2}(c^*x(n))^2 -$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}c^*x(n)\xi(n) - \frac{1}{\lambda^2}\beta(c^*Ax)^2.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора для приращения функции $F_1^2(\sigma(n))$ и заметив, что $F'^{\,2} + FF'' = (F'F)'$, имеем

$$L_1(x(n),\sigma(n),\xi(n)) = -\frac{1}{\lambda^2}F_1(\sigma(n))F_1'(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) -$$

$$-\frac{1}{2\lambda^2}[(F_1'(\sigma_*)F_1(\sigma_*))'](\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^2}F_1^2(\sigma(n)) -$$

$$-\frac{1}{2\lambda^2}(\varkappa+\varepsilon_1)(c^*x(n))^2 - \frac{1}{\lambda^2}c^*x(n)\xi(n) - \frac{1}{\lambda^2}\beta(c^*Ax)^2,$$

где $\sigma(\sigma_*) \in [\sigma(n),\sigma(n+1)]$. Последнее слагаемое отрицательно в силу определения $\beta > 0$. Рассмотрим второе и четвертое слагаемые.

$$-\frac{1}{2\lambda^2}[(F_1'(\sigma_*)F_1(\sigma_*))'](\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 - \frac{1}{2\lambda^2}(\varkappa+\varepsilon_1)(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda^2}(\varepsilon_1 + (F_1'(\sigma_*)F_1(\sigma_*))')(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 - \frac{1}{2\lambda^2}\varkappa(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2.$$

Взяв $\varepsilon_1 > 0$, определенное по формуле (8), получаем следующую оценку второго и четвертого слагаемых.

$$-\frac{1}{2\lambda^2}(\varkappa+\varepsilon_1+(F_1'(\sigma_*)F_1(\sigma_*))')(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 \le -\frac{1}{2\lambda^2}\varkappa(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2.$$

Рассмотрим первое и пятое слагаемые.

$$-\frac{1}{\lambda^2}\ F_1(\sigma(n))F_1'(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) - \frac{1}{\lambda^2}\ c^*x(n)\xi(n) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2}\ [F_1(\sigma(n))F_1'(\sigma(n)) + \xi(n)](\sigma(n+1)-\sigma(n)). \qquad (15)$$

В силу уравнения (4) имеем $F_1(\sigma(n))F_1'(\sigma(n)) + \xi(n) = -\alpha F_1(\sigma(n))$, поэтому равенство (15) можно продолжить

$$-\frac{1}{\lambda^2}\ [F_1(\sigma(n))F_1'(\sigma(n))+\xi(n)](\sigma(n+1)-\sigma(n)) = \frac{1}{\lambda^2}\ \alpha F_1(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)).$$

Таким образом, оценка $L_1(x,\sigma,\xi)$ имеет вид

$$L_1(x(n),\sigma(n),\xi(n)) \le$$

$$\le -\frac{1}{2\lambda^2}[(1-\lambda^2)F_1^2(\sigma(n))-2\alpha F_1(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n))+\varkappa(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2].$$

Проведем следующие преобразования

$$-2\alpha F_1(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n))+\varkappa(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 \pm \frac{\alpha^2}{\varkappa}F_1^2(\sigma(n)) =$$

$$= [\sqrt{\varkappa}(\sigma(n+1)-\sigma(n)) - \frac{\alpha}{2\sqrt{\varkappa}}F_1(\sigma(n))]^2 - \frac{\alpha^2}{\varkappa}F_1^2(\sigma(n)).$$

Тогда

$$-\frac{1}{2\lambda^2}\{(1-\lambda^2)F_1^2(\sigma(n))-2\alpha F_1(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n))+\varkappa(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2\} =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda^2}\{[\sqrt{\varkappa}(\sigma(n+1)-\sigma(n)) - \frac{\alpha}{2\sqrt{\varkappa}}F_1(\sigma(n))]^2 -$$

$$-\frac{\alpha^2}{\varkappa}F_1^2(\sigma(n)) + (1-\lambda^2)F_1^2(\sigma(n))\} =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda^2}\{[\sqrt{\varkappa}(\sigma(n+1)-\sigma(n)) - \frac{\alpha}{2\sqrt{\varkappa}}F_1(\sigma(n))]^2 + (1-\lambda^2-\frac{\alpha^2}{\varkappa})F_1^2(\sigma(n))\}$$

Заметим, что при выполнении условия 5.1.) $\alpha^2 \le \varkappa(1-\lambda^2)$, выражение в фигурных скобках будет положительным, и отсюда следует оценка $L_1(x(n),\sigma(n),\xi(n)) \le 0$.

Полученные оценки $L_1(x(n),\sigma(n),\xi(n)) \le 0$ для всех $x(n),\xi(n)$ при $n \in [0,N]$ и $W_1(x(n),\sigma(n)) \le 0$ для всех $x(n),\xi(n)$ при $n \ge 0$ приводят к неположительному приращению функции Ляпунова для всех $x(n),\xi(n)$ при $n \in [0,N]$:

$$\Delta_\lambda V_1(x(n),\sigma(n),\xi(n))) = W_1(x(n),\xi(n)) + L_1(x(n),\sigma(n),\xi(n)) \le 0. \quad (16)$$

Т. е. $\lambda^{-2}V_1(x(N+1),\sigma(N+1)) - V_1(x(N),\sigma(N)) \le 0$. Откуда следует, что

$$V_1(x(N+1),\sigma(N+1)) \le \lambda^2 V_1(x(N),\sigma(N)) \le ... \le \lambda^{2N}V_1(x(0),\sigma(0)) < 0,$$

или $V_1(x(N+1),\sigma(N+1)) < 0$. Следовательно, $V_1(x(n),\sigma(n)) < 0$ для всех $x(n),\xi(n)$ при $n \in [0,T_1)$.

Покажем, что для $n \in [0,T_1)$ $\sigma(n) \in [\Theta_1(0),\Theta_{01})$. Действительно, из условия (9) на начальные данные решения системы (1) следует

$\sigma(0) = \Theta_1(0)$. Рассмотрим момент $N: \ [0, N+1] \in [0, T_1)$. Предположим, что для $n \in [0, N]$ выполнено $\sigma(n) < \Theta_{01}$ а для $n = N+1$ выполнено $\sigma(n) \geq \Theta_{01}$. Введем обозначения

$$T(x_s, \sigma_s) = \left\| \begin{array}{c} x_s \\ \sigma_s \end{array} \right\|, \quad \text{где} \quad \begin{array}{rcl} x_s &=& (1-s) \cdot x(N) + s \cdot x(N+1), \\ \sigma_s &=& (1-s) \cdot \sigma(N) + s \cdot \sigma(N+1). \end{array}$$

Рассмотрим непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ вдоль решения (x, σ)

$$h(s) = ||0, ..., 0, 1|| \cdot T(x_s, \sigma_s),$$

обладающее свойствами $h(0) = \sigma(N) < \Theta_{01}$, $h(1) = \sigma(N+1) \geq \Theta_{01}$. По свойству непрерывности отображения $h(s)$ существует момент s^*, для которого $h(s^*) = \sigma(s^*) = \Theta_{01}$. Рассмотрим функцию Ляпунова в этой точке:

$$V_1(x(s^*), \sigma(s^*)) = x(s^*)^* H x(s^*) - \frac{1}{2} F_1^2(\sigma(s^*)) = x(s^*)^* H x(s^*) - \frac{1}{2} F_1^2(\Theta_{01}).$$

Но т.к. $F_1(\Theta_{01}) = 0$ и $H > 0$, то $V_1(x(s^*), \sigma(s^*)) > 0$, что противоречит доказанному ранее факту $V_1(x(n), \sigma(n)) < 0$ для всех $x(n), \xi(n)$ при $n \in [0, T_1)$. Таким образом, для $n \in [0, T_1)$ имеем $\sigma(n) \in [\Theta_1(0), \Theta_{01})$.

Т.к. функция $F_1(\sigma)$ соответствуют решению $\{\Theta_1(t), \dot{\Theta}_1(t)\}$, то

$$\dot{\Theta}_1(t) = F_1(\Theta_1(t)) \tag{17}$$

для всех $\Theta_1(t) \in [\Theta_1(0), \Theta_{01})$. Как показано выше, $\sigma(n) \in [\Theta_1(0), \Theta_{01})$ для $n \in [0, T_1)$, и из условия на начальные данные системы имеем $\sigma(0) = \Theta_1(0)$. Поэтому,

$$\dot{\Theta}_1(n) = F_1(\Theta_i(n)) = F_1(\sigma(n)).$$

Для функции $F_2(\Theta)$ и вещественной $(\nu \times \nu)$-матрицы $H = H^*$ рассмотрим функцию Ляпунова на решениях системы (1)

$$V_2(x(n), \sigma(n)) = x^*(n) H x(n) - \frac{1}{2} F_2^2(\sigma(n)). \tag{18}$$

В силу условия на начальные данные решения $\{\Theta_2(t), \dot{\Theta}_2(t)\}$, существует момент $n_0 \in [0, T_1)$, для которого

$$|F_1(\sigma(n_0))| \leq |F_2(\sigma(n_0))|.$$

Отсюда и из отрицательности функции $V_1(x, \sigma)$ для всех $n \in [0, T_1)$ следует выполнение неравенств

$$x^*(n_0) H x(n_0) < \frac{1}{2} F_1^2(\sigma(n_0)) \leq \frac{1}{2} F_2^2(\sigma(n_0)).$$

Откуда следует

$$x^*(n_0)Hx(n_0) < \frac{1}{2}F_2^2(\sigma(n_0)). \qquad (19)$$

То есть

$$V_2(x(n_0), \sigma(n_0)) = x^*(n_0)Hx(n_0) - \frac{1}{2}F_2^2(\sigma(n_0)) < 0.$$

Считаем теперь n_0 начальным моментом решения $\{\Theta_2(t), \dot{\Theta}_2(t)\}$, и, соответственно, $\dot{\Theta}_2(t) < 0$, на интервале $[n_0, n_0 + T_2]$.

Предположим, найдется такой момент $N: [n_0, N+1] \in [n_0, n_0 + T_2)$, что выполнено $V_2(x(n), \sigma(n)) < 0$ для всех $n \in [n_0, N]$, а $V_2(x(N+1), \sigma(N+1)) \geq 0$. Докажем, что такого быть не может и $V_2(x(n), \sigma(n)) < 0$ выполнено для всех $n \in [n_0, n_0 + T_2)$. Для этого рассмотрим приращение функции Ляпунова на решениях системы (1)

$$\Delta_\lambda V_2(x(n), \sigma(n), \xi(n))) = \lambda^{-2}V_2(x(n+1), \sigma(n+1)) - V_2(x(n), \sigma(n)). \qquad (20)$$

Очевидно, что это приращение можно записать следующим образом:

$$\Delta_\lambda V_2(x(n), \sigma(n), \xi(n))) = W_2(x(n), \xi(n)) + L_2(x(n), \sigma(n), \xi(n)), \qquad (21)$$

где

$$L_2(x(n), \sigma(n), \xi(n)) = -\frac{1}{2\lambda^2}F_2^2(\sigma(n+1)) + \frac{1}{2}F_2^2(\sigma(n)) - G_2(x(n), \xi(n)), \qquad (22)$$

а квадратичные формы $W_2(x, \xi)$, $G_2(x, \xi)$ определены формулами (5),(6).

Оценим $W_2(x(n), \xi(n))$. В силу определения формы $G_2(x, \xi)$ и частотного условия (7) имеет место неравенство $\tilde{G}_2(-(A - \lambda pE)^{-1}b\xi, \xi) < 0$, откуда по частотной теореме следует справедливость неравенства

$$\lambda^{-2}(Ax + b\xi)^*H(Ax + b\xi) - x^*Hx + G_2(x, \xi) < 0, \qquad (23)$$

при всех x, ξ. То есть, $W_2(x(n), \xi(n)) < 0$.

Оценим $L_2(x, \sigma, \xi)$.

$$L_2(x(n), \sigma(n), \xi(n)) = -\frac{1}{2\lambda^2}F_2^2(\sigma(n+1)) + \frac{1}{2}F_2^2(\sigma(n)) - G_1(x(n), \xi(n)) =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda^2}[F_2^2(\sigma(n+1)) - F_2^2(\sigma(n))] - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^2}F_2^2(\sigma(n)) - \frac{1}{2\lambda^2}(\varkappa + \varepsilon_2)(c^*x(n))^2 -$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}c^*x(n)\xi(n) - \frac{1}{\lambda^2}\beta(c^*Ax)^2.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора для приращения функции $F_2^2(\sigma(n))$, получим

$$L_2(x(n),\sigma(n),\xi(n)) = -\frac{1}{\lambda^2}F_2(\sigma(n))F_2'(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) -$$

$$-\frac{1}{2\lambda^2}[(F_2'(\sigma_*)F_2(\sigma_*))'](\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda^2}F_2^2(\sigma(n)) -$$

$$-\frac{1}{2\lambda^2}(\varkappa+\varepsilon_2)(c^*x(n))^2 - \frac{1}{\lambda^2}c^*x(n)\xi(n) - \frac{1}{\lambda^2}\beta(c^*Ax)^2, \text{ где } \sigma(\sigma_*) \in [\sigma(n),\sigma(n+1)].$$

Последнее слагаемое отрицательно в силу определения $\beta > 0$. Рассмотрим второе и четвертое слагаемые.

$$-\frac{1}{2\lambda^2}[(F_2'(\sigma_*)F_2(\sigma_*))'](\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 - \frac{1}{2\lambda^2}(\varkappa+\varepsilon_2)(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda^2}(\varepsilon_2 + (F_2'(\sigma_*)F_2(\sigma_*))')(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 - \frac{1}{2\lambda^2}\varkappa(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2.$$

Взяв $\varepsilon_2 > 0$, определенное по формуле (8), получаем следующую оценку второго и четвертого слагаемых.

$$-\frac{1}{2\lambda^2}(\varkappa+\varepsilon_2+(F_2'(\sigma_*)F_2(\sigma_*))')(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2 \le -\frac{1}{2\lambda^2}\varkappa(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2.$$

Рассмотрим первое и пятое слагаемые.

$$-\frac{1}{\lambda^2}\; F_2(\sigma(n))F_2'(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) - \frac{1}{\lambda^2}\; c^*x(n)\xi(n) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2}\; [F_2(\sigma(n))F_2'(\sigma(n)) + \xi(n)](\sigma(n+1)-\sigma(n)). \tag{24}$$

В силу уравнения (4) имеем $F_2(\sigma(n))F_2'(\sigma(n)) + \xi(n) = -\alpha F_2(\sigma(n))$, поэтому оценку (24) можно продолжить

$$-\frac{1}{\lambda^2}\; [F_2(\sigma(n))F_2'(\sigma(n))+\xi(n)](\sigma(n+1)-\sigma(n)) = \frac{1}{\lambda^2}\; \alpha F_2(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)).$$

Таким образом, оценка $L_2(x,\sigma,\xi)$ имеет вид

$$L_2(x(n),\sigma(n),\xi(n)) \le$$

$$\le -\frac{1}{2\lambda^2}[(1-\lambda^2)F_2^2(\sigma(n)) - 2\alpha F_2(\sigma(n))(\sigma(n+1)-\sigma(n)) + \varkappa(\sigma(n+1)-\sigma(n))^2].$$

Проведя аналогичные случаю $L_1(x,\sigma,\xi)$ преобразования, получим оценку $L_2(x(n),\sigma(n),\xi(n)) \le 0$.

Таким образом, оценки $L_2(x(n),\sigma(n),\xi(n))\le 0$ для всех $x(n),\xi(n)$ при $n\in[n_0,N]$ и $W_2(x(n),\sigma(n))\le 0$ для всех $x(n),\xi(n)$ при $n\ge 0$ приводят к неположительному приращению функции Ляпунова для всех $x(n),\xi(n)$ при $n\in[n_0,N]$:

$$\Delta_\lambda V_2(x(n),\sigma(n),\xi(n)))=W_2(x(n),\xi(n))+L_2(x(n),\sigma(n),\xi(n))\le 0. \qquad (25)$$

Т. е. $\lambda^{-2}V_2(x(N+1),\sigma(N+1))-V_2(x(N),\sigma(N))\le 0$. Откуда следует, что

$$V_2(x(N+1),\sigma(N+1))\le\lambda^2 V_2(x(N),\sigma(N))\le ...\le\lambda^{2N}V_2(x(0),\sigma(0))<0,$$

то есть $V_2(x(N+1),\sigma(N+1))<0$, что противоречит сделанному предположению о выполнении $V_(x(n),\sigma(n))<0$ для всех $n\in[n_0,N]$ и $V_2(x(N+1),\sigma(N+1))\ge 0$. Следовательно, $V_2(x(n),\sigma(n))<0$ для всех $n\in[n_0,n_0+T_2)$.

Покажем, что для $n\in[n_0,n_0+T_2)$ $\sigma(n)\in[\Theta_{01},\Theta_{02})$. Действительно, как было показано выше, $\sigma(n_0)\le\Theta_{01}$. Рассмотрим момент $N:\ [0,N+1]\in[n_0,n_0+T_2)$. Предположим, что для $n\in[0,N]$ выполнено $\sigma(n)>\Theta_{02}$, а для $n=N+1$ выполнено $\sigma(n)\le\Theta_{02}$. Введем обозначения

$$T(x_s,\sigma_s)=\left\|\begin{array}{c}x_s\\ \sigma_s\end{array}\right\|,\qquad\text{где}\qquad \begin{array}{rcl}x_s&=&(1-s)\cdot x(N)+s\cdot x(N+1),\\ \sigma_s&=&(1-s)\cdot\sigma(N)+s\cdot\sigma(N+1).\end{array}$$

Рассмотрим непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ вдоль решения (x,σ)

$$h(s)=||0,...,0,1||\cdot T(x_s,\sigma_s),$$

обладающее свойствами $h(0)=\sigma(N)>\Theta_{02}$, $h(1)=\sigma(N+1)\le\Theta_{02}$. По свойству непрерывности отображения $h(s)$ существует момент s^*, для которого $h(s^*)=\sigma(s^*)=\Theta_{02}$. Рассмотрим функцию Ляпунова в этой точке:

$$V_2(x(s^*),\sigma(s^*))=x(s^*)^*Hx(s^*)-\frac{1}{2}F_2^2(\sigma(s^*))=x(s^*)^*Hx(s^*)-\frac{1}{2}F_2^2(\Theta_{02}).$$

Но т.к. $F_2(\Theta_{02})=0$ и $H>0$, то $V_2(x(s^*),\sigma(s^*))>0$, что противоречит доказанному ранее факту $V_2(x(n),\sigma(n))<0$ для всех $x(n),\xi(n)$ при $[n_0,n_0+T_2)$.

Заметим, что, рассуждая аналогично и используя свойства функций $\Theta_1(t)$ и $\Theta_2(t)$, можно показать, что $\sigma(n)\in[\Theta_{02},\Theta_{01})$ для всех $n\ge n_0$.

Из условия 3) следует, что $\Theta_{01}-\Theta_{02}<\Delta$, и, значит, имеет место оценка

$$|\sigma(n_1)-\sigma(n_2)|<\Delta\ \text{для}\ n_1,n_2\ge n_0. \qquad (26)$$

Таким образом, можно сказать, что для решений $\{x(n), \sigma(n)\}$ системы (1), удовлетворяющих начальным условиям (9), время установления переходного процесса не превосходит некоторого момента n_0 из интервала $[T_f, T_1]$.

Введем параметр $\tau > 0$ и покажем, что при условиях 5.2.) и 5.3.) на варьируемые параметры будет справедливо неравенство

$$x^*Hx - \frac{\tau}{2}\ (c^*x)^2 \geq 0 \text{ для всех } x. \qquad (27)$$

Положим в (14) $\xi = 0$, тогда имеем

$$W_1(x,0) = \lambda^{-2}(Ax)^*H(Ax) - x^*Hx + \frac{1}{2\lambda^2}[(\varkappa + \varepsilon_1)(c^*x)^2 + \beta(c^*Ax)^2] < 0$$

или

$$W_1(x,0) = \lambda^{-2}(Ax)^*H(Ax) - x^*Hx < -\frac{(\varkappa + \varepsilon_1)}{2\lambda^2}(c^*x)^2.$$

Отсюда, из наблюдаемости пары (A, c) и условия 2) на спектр матрицы $\lambda^{-1}A$ по теореме 10.1.4. [20] следует, что у матрицы H все собственные значения положительные. Откуда следует $x^*Hx \geq 0$ для всех x.

Оценим сверху коэффициент $\tau/2$ при котором остается справедливость неравенства (27). Для этого добавим к обеим частям неравенства (14) квадратичную форму

$$\hat{G}(x,\xi) = -\frac{\tau}{2}\lambda^{-2}(Ax + b\xi)^*cc^*(Ax + b\xi) + \frac{\tau}{2}(c^*x)^2. \qquad (28)$$

Тогда из (14) получим при всех x, ξ

$$\lambda^{-2}(Ax + b\xi)^*H(Ax + b\xi) - x^*Hx + G_1(x,\xi) - \frac{\tau}{2}\lambda^{-2}(Ax + b\xi)^*cc^*(Ax + b\xi) +$$

$$+\frac{\tau}{2}x^*cc^*x < \hat{G}(x,\xi),$$

то есть справедливость неравенства

$$\lambda^{-2}(Ax + b\xi)^*(H - \frac{\tau}{2}cc^*)(Ax + b\xi) - x^*(H - \frac{\tau}{2}cc^*)x < \hat{G}(x,\xi) - G_1(x,\xi). \qquad (29)$$

Выберем вектор $\tilde{\xi} = -\frac{c^*Ax}{c^*b}$, это можно сделать, так как $c^*b \neq 0$. Таким образом, обеспечим выполнение $c^*(Ax + b\tilde{\xi}) = 0$. Отсюда же справедливо равенство

$$(Ax + b\tilde{\xi}) = (E - \frac{bc^*}{c^*b})Ax.$$

Введем обозначение $D = (E - \frac{bc^*}{c^*b})A$. Подставляя $\tilde{\xi}$ в неравенство (29) имеем

$$\lambda^{-2}x^*D^*(H - \frac{\tau}{2}cc^*)Dx - x^*(H - \frac{\tau}{2}cc^*)x < -(G_1(x,\tilde{\xi}) - \hat{G}(x,\tilde{\xi})). \qquad (30)$$

Получим условия, при которых правая часть в этом неравенстве отрицательная. Первое слагаемое отрицательно, рассмотрим второе и третье слагаемые

$$G_1(x,\tilde{\xi}) - \hat{G}(x,\tilde{\xi}) = -\frac{\tau}{2}(c^*x)^2 + \frac{(\varkappa+\varepsilon_1)}{2\lambda^2}(c^*x)^2 - \frac{(c^*Ax)(c^*x)}{\lambda^2 c^* b} + \frac{\beta(c^*Ax)^2}{2\lambda^2}.$$

Таким образом, разность $G_1(x,\tilde{\xi}) - \hat{G}(x,\tilde{\xi})$ представлена как квадратичная форма от c^*x и c^*Ax. По критерию Сильвестра для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы ее коэффициентов были положительны. Матрица коэффициентов данной квадратичной формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{(\varkappa+\varepsilon_1)}{2\lambda^2} - \frac{\tau}{2}\right] & -\frac{1}{(2\lambda^2 c^* b)} \\ -\frac{1}{(2\lambda^2 c^* b)} & \frac{\beta}{2\lambda^2 |c*b|^2} \end{pmatrix}.$$

Соответственно, условия положительности квадратичной формы будут следующими:

$$\frac{(\varkappa+\varepsilon_1)}{2\lambda^2} - \frac{\tau}{2} > 0, \quad \left[\frac{(\varkappa+\varepsilon_1)}{2\lambda^2} - \frac{\tau}{2}\right]\frac{\beta}{2\lambda^2|c*b|^2} - \frac{1}{(2\lambda^2 c^* b)^2}.$$

Выразим условия на соотношения варьируемых параметров, при которых рассматриваемая квадратичная форма будет положительна:

$$0 < \tau < \frac{\varkappa+\varepsilon_1}{\lambda^2}, \qquad 0 < \tau < \frac{\beta(\varkappa+\varepsilon_1)-1}{\lambda^2\beta}.$$

Для обеспечения положительности правой части во втором условии требуется выполнение дополнительного условия $\beta(\varkappa+\varepsilon_1)-1>0$. Заметим также, что первое условие при $\beta > 0$ гарантирует выполнение второго условия. И, окончательно, требование на соотношения варьируемых параметров, при которых рассматриваемая квадратичная форма будет положительна, будут следующими:

$$0 < \tau < \frac{\varkappa+\varepsilon_1}{\lambda^2}, \qquad \beta(\varkappa+\varepsilon_1)-1>0. \tag{31}$$

Условия 5) теоремы обеспечивают выполнение данных требований. Таким образом, получили оценку сверху коэффициента $\tau/2$, при котором справедливо $-(G_1(x,\tilde{\xi}) - \hat{G}(x,\tilde{\xi})) < 0$. Откуда следует

$$\lambda^{-2}x^*D^*(H - \frac{\tau}{2}cc^*)Dx - x^*(H - \frac{\tau}{2}cc^*)x < 0. \tag{32}$$

По условию 1) все собственные числа матрицы $\lambda^{-1}D$ расположения внутри единичного круга. Отсюда, и из (32) по теореме 10.1.4. [20] у матрицы $(H - \tau/2\ cc^*)$ все собственные числа положительные.

Итак, при оценке (31) коэффициента $\tau/2$ для всех x справедливо неравенство (27) или, в силу системы (1),

$$x^*(n)Hx(n) - \frac{\tau}{2}\ [\sigma(n+1) - \sigma(n)]^2 \geq 0 \text{ для всех } n. \tag{33}$$

Из $V_1(x(n), \sigma(n)) < 0$ для всех $n \in [0, T_1)$ следует неравенство $x^*(n)Hx(n) < 1/2\ F_1^2(\sigma(n))$. Добавим к обеим частям отрицательное слагаемое

$$x^*(n)Hx(n) - \frac{\tau}{2}\ [\sigma(n+1) - \sigma(n)]^2 < \frac{1}{2}\ F_1^2(\sigma(n)) - \frac{\tau}{2}\ [\sigma(n+1) - \sigma(n)]^2.$$

Тогда из (33) следует

$$\frac{1}{2}\ F_1^2(\sigma(n)) - \frac{\tau}{2}\ [\sigma(n+1) - \sigma(n)]^2 \geq 0$$

или, в силу положительности параметра τ и функции $F_1(\sigma)$ на интервале $[0, T_1)$,

$$|\sigma(n+1) - \sigma(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{\tau}} F_1(\sigma(n)). \tag{34}$$

Рассмотрим произвольные моменты n_1 и n_2 $(n_1 \leq n_2)$ из интервала $[T_f, T_1]$. В силу оценки (34) и свойства функции $F_1(\sigma(n)) = \dot{\Theta}_1(n)$ для них выполнено

$$|\sigma(n_2) - \sigma(n_1)| \leq \sum_{n=n_1}^{n_2-1} |\sigma(n+1) - \sigma(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \dot{\Theta}_1(n).$$

С учетом положительности функции $\dot{\Theta}_1(n)$ на интервале $[0, T_1)$ при увеличении интервала суммирования $[n_1, n_2]$ до $[T_f, T_1]$ рассматриваемая сумма не уменьшится, а в силу условия 3.6.) рассматриваемая величина не превосходит Δ

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \dot{\Theta}_1(n) \leq \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{n=T_f}^{T_1} \dot{\Theta}_1(n) \leq \int_{T_f}^{T_1} \dot{\Theta}_1(t)dt = \Theta_1(T_1) - \Theta_1(T_f) \leq \Delta.$$

Таким образом, имеет место

$$|\sigma(n_1) - \sigma(n_2)| < \Delta \text{ для } n_1, n_2 \in [T_f, T_1]. \tag{35}$$

Объединяя оценки (26) и (35), получаем, что для решений $\{x(n), \sigma(n)\}$ системы (1), удовлетворяющих начальным условиям (9), время установления переходного процесса не превосходит T_f.

Теорема доказана.

Литература

[1] **Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.** Системы фазовой автоподстройки частоты. М. Связь, 1972.

[2] Системы фазовой автоподстройки частоты с элементами дискретизации. (под редакцией В.В. Шахгильдяна), М. Связь, 1979.

[3] **Линдсей В.** Системы синхронизации в связи и управлении. М. Сов.радио. 1978.

[4] **Richman D.** Color carrier reference phase synchronization accuracy in NTFC color television. Proc. IRE, v. 42, N 1, 1954.

[5] **Byrne C.I.** Properties and design of the phase controlled oscillator with a sawtooth comparator. Bell System Technical Jornal, v. 41, N 3, 1962.

[6] **Meer S.A.** Analysis of phase-locked loop acquisition: a quasi stationary approach. IEEE International Convention Record, 1966, part 7, Recived Signal Processing, Session 13, p. 85-107.

[7] **Шахтарин Б.И.** О некоторых характеристиках нелинейной системы фазовой синхронизации. Радиотехника, т. 26, N 4, 1971.

[8] **Shaft P.D., Dorf R.C.** Minimization of communication-signal acquisition time in tracking loops. IEEE Trans. on Communications Technology, v. 16, N 6, 1968.

[9] **Protonotarios E.N.** Pull-in time in second-order phase-locked loop with sawtooth comparator. IEEE Trans. on Circuit Theory, v. 17, N 8, 1970.

[10] **Splitt F.G.** Design and analysis of linear phase-locked loop of wide dynamic range. IEEE Trans. on Communications Technology, v. 14, N 8, 1970.

[11] **Mengali U.** Acquisition behavior of generalized tracking systems in the absence of noise. IEEE Trans. on Communications, v. 21, N 7, 1973.

[12] **Mancianti M., Russo F., Verrazzani L.** An extension of Richman analysis to the second-order SCS. Proc. IEEE, v. 62, N 3, 1974.

[13] **Киселева О.Б.** Частотные оценки характеристик переходных процессов в нелинейных фазовых системах. Диссертация на соискание уч. степ. к.ф.-м.н. СПб, 1987.

[14] **Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.** Устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия. М. Наука, 1978.

[15] **Леонов Г.А.** Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации. Прикладная математика и механика. N 2, 1976.

[16] **Леонов Г.А.** Теорема сведения для нестационарных нелинейностей. Вестник ЛГУ. Сер. матем., механ., астр., N 7, 1977.

[17] **Леонов Г.А., Шепелявый А.И.** Частотный критерий неустойчивости дискретных фазовых систем. ВИНИТИ. Депонирована от 02.07.84.г. N 4502-84.

[18] **Леонов Г.А., Шепелявый А.И.** Неустойчивость дискретных систем управления с периодической нелинейностью. ВИНИТИ. Депонирована от 07.08.84.г. N 5758-84.

[19] **Якубович В.А.** Частотная теорема в теории управления. Сиб. мат. журнал, т. 14, N 2, 1973.

[20] **Leonov G.A., Reitman V., Smirnova V.B.** Non-local methods for pendulum-like feedback systems. Stuttgard-Leizig, 1992.