ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2015
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных системах

Верхняя оценка размерности Хаусдорфа для инвариантных множеств эволюционных вариационных неравенств

А.В. Крук

Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В данной работе рассматривается класс вариационных эволюционных неравенств, возникающих в механике. Для оценки фрактальной размерности инвариантного множества вариационного неравенства используется метод определяющих наблюдений. Построение определяющего наблюдения реализуется с помощью частотной теоремы для эволюционных систем (теорема Лихтарникова-Якубовича). Аналогичный подход для построения определяющих наблюдения был использован для исследования устойчивости решения и существования аттракторов эволюционных систем. Главным результатом работы является получение частотных условий для существования определяющих наблюдений для диссипативности, играющих центральную роль для получения конечной оценки фрактальной размерности и размерности Хаусдорфа инвариантного множества. В качестве примера показано, как используется полученная общая теорема об оценке размерности в исследовании контактной задачи вязкоупругости.

ключевые слова вариационные эволюционные неравенства,определяюшие наблюдения для диссипативности, оценка размерности Хаусдорфа, контактная задача вязкоупругости

Abstract

In this paper we consider a class of evolutionary variational inequalities arising in mechanics. The method of determining observations is used to obtain upper estimates for fractal and Hausdorff dimension of invariant sets of variational inequalities. The construction of determining observation is realised by frequency theorem for evolution systems (Theorem Likhtarnikov-Yakubovich). A similar approach for the construction of determining observation was used to investigate the system stability and the existence of attractor of evolution systems. The main result of this paper is frequency conditions for the existence of determining observation, which allow us to obtain upper estimates for fractal and the Hausdorff dimension of an invariant set. As an example we show how to apply the obtained results to the investigation of viscoelasticity contact problem.

keywords variational evolutional inequalities,determining observations for dissipativity, estimate of Hausdorff dimension,viscoelasticity contact problem

Введение

Вопрос верхних оценок фрактальной размерности и размерности Хаусдорфа рассматривается в разных работах, как правило, для инвариантных множеств дифференциальных уравнений. Для оценки используются теорема Дуади-Оэстерле ([6]) и теорема О. А. Ладыженской ([7], [8], [17], [19]).

В данной работе рассматривается класс вариационных эволюционных неравенств, возникающих в механике. Для оценки фрактальной размерности инвариантного множества вариационного неравенства используется метод определяющих наблюдений. Построение определяющего наблюдения реализуется с помощью частотных теорем для эволюционных систем (теорема Лихтарникова-Якубовича) ([1],[18]). Аналогичный подход для построения определяющих функционалов был использован для исследования устойчивости и существования аттракторов ([2], [9]).

Главным результатом работы является получение частотных условий для существования определяющих наблюдений для диссипативности, играющую центральную роль для получения конечной оценки фрактальной размерности инвариантного множества.

В качестве примера показано, как используется полученная общая теорема об оценке размерности в исследовании контактной задачи вязко-упругости ([13]).

Приведем краткое содержание статьи. В первой главе приведены основные определения оснащения гильбертова пространства. Во второй главе рассмотрены вопросы существования слабого решения для вариационного эволюционного неравенства с многозначной нелинейностью. В третьей главе приведены определения фрактальной размерности и размерности Хаусдорфа. В четвертой главе представлены определяющие наблюдения для диссипативности, для полного отклонения двух произвольных решений эволюционных систем и для сходимости в подпространстве конечной коразмерности. В пятой главе приводятся частотные условия существование определяющих наблюдений. В последних главах в качестве примера рассматривается контактная задача вязко-упругости. Показан переход от исходной задачи к вариационному неравенству.

1 Оснащение гильбертова пространства

Предположим, что Y_0 является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$ и нормой $||\cdot||_0$. Так же предположим, что $A : \mathcal{D}(A) \subset Y_0 \to Y_0$ неограниченный плотно определенный линейный оператор.

Гильбертово пространство Y_1 определено как область $\mathcal{D}(A)$ со скалярным произведением

$$(y,\eta)_1 := ((\beta I - A)y, (\beta I - A)\eta)_0, \qquad y,\eta \in \mathcal{D}(A) \tag{1}$$

где $\beta \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$ ($\rho(A)$ - резольвента оператора A) это произвольные фиксированные числа.

Гильбертово пространство Y_{-1} определено как замыкание пространства Y_0 с нормой $||z||_{-1} := ||(\beta I - A)^{-1} z||_0$. Теперь мы имеем плотное и непрерывное оснащение

$$Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}, \tag{2}$$

которое называется оснащением гильбертова пространства Y_0. Причем Y_1 плотно вложено в Y_0, Y_0 плотно и непрерывно вложено в Y_{-1}, где Y_{-1} двойственно к Y_1 относительно пространства Y_0([22]).

Скобки двойственности $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ на произведении пространств $Y_{-1} \times Y_1$ является единственным продолжением по непрерывности скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_0$ определенного на $Y_0 \times Y_1$. Если $T > 0$ произвольное число, то определяется норма для измеримых по Бохнеру функций в пространстве $L^2(0,T;Y_j), j = 1, 0, -1$ через

$$||y(\cdot)||_{2,j} := \left(\int_0^T \| \, y(t) \, \|_j^2 \, dt \right)^{1/2}. \tag{3}$$

Пусть $\mathscr{W}_T$ пространство функций $y(\cdot) \in L^2(0,T;Y_1)$, для которых $\dot{y}(\cdot) \in L^2(0,T;Y_{-1})$, снабжена нормой

$$||y(\cdot)||_{\mathscr{W}_T} := (||y(\cdot)||_{2,1}^2 + ||\dot{y}(\cdot)||_{2,-1}^2)^{1/2}. \tag{4}$$

2 Эволюционные вариационные неравенства

Предположим, что $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ оснащение вещественного гильбертова пространства с оператором $A \in \mathscr{L}(Y_1, Y_{-1})$. Предположим также, что Ξ и W вещественные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_\Xi$, $(\cdot,\cdot)_W$ и нормами $||\cdot||_\Xi$, $||\cdot||_W$, соответственно.

Введем линейные непрерывные операторы

$$B : \Xi \to Y_{-1}, \quad C : Y_{-1} \to \Xi, \tag{5}$$

многозначное отображение

$$\phi : W \to 2^\Xi, \tag{6}$$

и отображение

$$\psi : Y_1 \to \mathbb{R}_+ \cup +\infty. \tag{7}$$

Заметим, что в приложениях ϕ *нелинейная материальная функция*, ψ *контактный функционал* и $w(t) = Cy(t)$ *вход в нелинейность*. Введем эволюционное вариационное неравенство с многозначной нелинейностью([10, 19])

$$(\dot{y} - Ay - B\xi, \eta - y)_{-1,1} + \psi(\eta) - \psi(y) \geq 0\,, \quad \forall \eta \in Y_1\,, \tag{8}$$

$$w(t) = Cy(t)\,, \quad \xi(t) \in \phi(w(t))\,, \qquad y(0) = y_0 \in Y_0\,. \tag{9}$$

Замечание 1 *Заметим, что если $\psi \equiv 0$, то эволюционное вариационное неравенство (8), (9) эквивалентно эволюционному уравнению с многозначной нелинейностью ϕ заданное через*

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + B\xi \quad \text{в} \quad Y_{-1}\,, & (8)' \\ w(t) &= Cy(t)\,, \xi(t) \in \phi(w(t))\,, \quad y(0) = y_0 \in Y_0\,. & (9)' \end{aligned}$$

Определение 1 *Функция $y(\cdot) \in \mathcal{W}_T \cap C(0,T;Y_0)$, называется слабым решением эволюционного вариационного неравенства (8), (9) на промежутке $(0,T)$, если существует функция $\xi(\cdot) \in L^2(0,T;\Xi)$ такая, что для почти всех $t \in (0,T)$ неравенство (8), (9)выполнено и $\int\limits_0^T \psi(y(t))dt < +\infty$. Пара $\{y(\cdot), \xi(\cdot)\}$ называется процессом системы (8), (9).*

Приведем достаточные условия существования слабого решения неравенства (8), (9) для которого вводим предварительно два условия.

(A1) Оператор $\mathcal{A} = -A - B\phi(C\cdot)$ является полунепрерывным монотонным оператором, для которого выполнено неравенство

$$||\mathcal{A}y||_{-1} \leq c_1||y||_1 + c_2, \qquad \forall y \in Y_1 \tag{10}$$

где константы $c_1 > 0$ и $c_2 \in \mathbb{R}$.

(A2)

$$(\mathcal{A}y, y)_{-1,1} \geq c_3||y||_1^2 + c_4, \qquad \forall y \in Y_1 \tag{11}$$

где константы $c_3 > 0$ и $c_4 \in \mathbb{R}$.

Справедлива следующая теорема ([7])

Теорема 1 *Пусть выполняются условия* **(A1)** - **(A2)**. *Тогда для любого $y_0 \in Y_0$ существует единственное слабое решение $y \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, Y_1) \cap C(\mathbb{R}, Y_0)$ неравенства (8), (9), где $y(0) = y_0$. Более того, справедливы неравенства*

$$||y||_{L^2(0,T;Y_1)} \leq g_1(||y_0||_0), \tag{12}$$

$$||y||_{C(0,T;Y_0)} \leq g_2(||y_0||_0), \tag{13}$$

где $g_1, g_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ - непрерывные монотонные возрастающие функции.

Допустим. что $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ квадратичные формы на $Y_1 \times \Xi$. Пусть $\mathcal{N}$ есть *класс нелинейностей* для вариационного неравенства (8), (9) обозначенный через $\mathcal{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ($\mathcal{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$) и который состоит из всех таких отображений (6), для которых следующие свойства выполнены:
a) Для любого $T > 0$ и произвольных двух функций $y(\cdot) \in L^2(0, T; Y_1)$ и $\xi(\cdot) \in L^2(0, T; \Xi)$ удовлетворяющих

$$\xi(t) \in \phi(Cy(t)) \text{ для п.в. } t \in [0, T]\,, \tag{14}$$

вытекает, что

$$\mathcal{F}(y(t), \xi(t)) \geq 0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, T] \tag{15}$$

и существуют непрерывная функция $\Phi : Y_1 \to \mathbb{R}$ (*обобщенный потенциал*) и числа $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\int\limits_s^t \mathcal{G}\big(y(\tau), \xi(\tau)\big)\, d\tau \geq \frac{1}{2}\Big[\Phi(y(t)) - \Phi(y(s))\Big] + \ \lambda \int_s^t \Phi(y(\tau) d\tau \tag{16}$$

для всех

$$0 \leq s < t \leq T$$

и

$$\Phi(y) \geq \gamma \|y\|_0^2\,, \quad \forall y \in Y_0\,. \tag{17}$$

b) Для каждого $T > 0$ и для произвольных двух пар функций

$$y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L^2(0, T; Y_1) \quad \text{и} \quad \xi_1(\cdot), \xi_2(\cdot) \in L^2(0, T; \Xi),$$

удовлетворяющих

$$\xi_i(t) \in \phi(Cy_i(t))\,,\ i = 1, 2 \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0, T]\,,$$

следует, что

$$\mathcal{H}(y_1(t) - y_2(t), \xi_1(t) - \xi_2(t)) \geq 0 \quad \text{для п.в.} \quad t \in [0, T].$$

(A3) Для фиксированных линейных операторов A, B, C, фиксированной функции (7), произвольной $y_0 \in Y_0$, $T > 0$ и $\phi \in \mathcal{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ ($\phi \in \mathcal{N}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$) существует процесс $\{y(\cdot), \xi(\cdot)\}$ для системы (8), (9).

Пример 1 Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ область с гладкой границей $\Gamma = \partial\,\Omega$, $h : \Gamma \to \mathbb{R}$ заданная скалярная функция и $u(x, t)$ решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u \quad \text{в} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{18}$$

с заданными граничными условиями

$$u = h \quad \text{на} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0\,, \tag{19}$$

$$u > h \quad \text{на} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \tag{20}$$

и начальным условием

$$u(\cdot, 0) = u_0\,. \tag{21}$$

Система (18) – (21) описывает процесс прохождения жидкости через полунепроницаемую мембрану ([19]).

Вместо (19) – (20) мы рассматриваем граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geq g \quad \text{на} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+\,, \tag{22}$$

где $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ заданная функция.

Чтобы получить представление системы(18)-(22) в форме вариационного неравенства (8), (9) мы введем пространства

$$\begin{aligned} Y_0 &:= L^2(\Omega)\,, \\ Y_1 &:= W^{1,2}(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\} \text{ и} \\ \Xi &:= W^{-1/2,2}(\partial\Omega)\,. \end{aligned}$$

Оператор $A \in \mathcal{L}(Y_1, Y_{-1})$ определен как

$$(Au, v)_{-1,1} = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx\,, \quad \forall u, v \in Y_1\,. \tag{23}$$

Введем оператор $B \in \mathcal{L}(\Xi, Y_{-1})$, заданный как

$$(B\xi, y)_{-1,1} = -\int_{\partial\Omega} \xi y dS\,, \quad \forall \xi \in \Xi\,, \quad \forall y \in Y_1\,, \tag{24}$$

нелинейное отображение $\phi : Y_1 \to \Xi$, заданное как

$$\phi(y(x)) := g\,(y)(x) \quad \text{на} \quad \Gamma\,, \tag{25}$$

и контактный функционал $\psi : Y_1 \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, определенный с помощью

$$\psi(\eta) := \begin{cases} 0, & \text{если } \eta(x) \geq h(x) \ \ \Gamma\,, \\ +\infty & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{26}$$

Таким образом, процесс прохождения жидкости через полунепроницаемую мембрану (18) – (22) может быть рассмотрен как эволюционное вариационное неравенство

$$(\dot{y} - Ay - B\xi\,,\, \eta - y)_{-1,1} + \psi(\eta) - \psi(y) \geq 0\,, \quad \forall \eta \in Y_1\,, \tag{27}$$

$$\xi(t) = \phi(y(t))\,, \quad y(0) = y_0 \in Y_0\,. \tag{28}$$

Опишем класс $\mathcal{N}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ для (27), (28). Мы предполагаем, что нелинейность ϕ из (25) удовлетворяет следующим двум свойствам:

(A4)

$$\begin{aligned}&\exists \mu_0 > 0 \quad \forall y_1, y_2 \in Y_1 \quad : \\ &0 \le (B\phi(y_1) - B\phi(y_2)\,,\, y_1 - y_2)_{-1,1} \le \mu_0 \|y_1 - y_2\|_1^2\,.\end{aligned} \tag{29}$$

(A5) Существуют дифференцируемое по Фреше отображение $\Phi : Y_0 \to \mathbb{R}$ и число $\lambda > 0$ такие, что с производной Фреше $\Phi' \in \mathcal{L}(Y_0, \mathbb{R})$ выполнимо неравенство

$$(\phi(y), \eta)_1 \ge \Phi'(y)\eta + \lambda\Phi(\eta)\,, \quad \forall \eta \in Y_1. \tag{30}$$

Ясно, что неравенства (29) и (30) могут быть рассмотрены как свойства монотонности и свойства потенциала, соответственно. Используя (29), мы можем ввести квадратичную форму

$$\mathcal{F}(y,\xi) := \mu_0\|y\|_1^2 - (B\xi, y)_{-1,1}\,, \quad (y,\xi) \in Y_1 \times \Xi\,, \tag{31}$$

которая удовлетворяет (15). Неравенство (30) может быть использовано при определении квадратичной формы

$$\mathcal{G}(y,\xi) := (G_1 A y, \xi)_\Xi + (G_2 B\xi, \xi)_\Xi \quad \text{на} \quad Y_1 \times \Xi, \tag{32}$$

где $G_i : Y_{-1} \to \Xi \quad (i = 1, 2)$. Легко увидеть, что форма $\mathcal{G}$ из (32) и обобщенный потенциал Φ из (30) удовлетворяют неравенству (16) .

3 Определение фрактальной размерности и размерности Хаусдорфа

В этом параграфе мы введем некоторые основные понятия фрактальной размерности и размерности Хаусдорфа. Некоторые из этих утверждений можно найти, например, в книге [6].

Дадим определение внешней меры и размерности Хаусдорфа для компактного подмножества $\mathcal{K}$ в метрическом пространстве (X, ρ). Для любых вещественных чисел $\varepsilon > 0$ и $d \ge 0$ введем функцию

$$\mu_H(\mathcal{K}, d, \varepsilon) := \inf \sum_i r_i^d, \tag{33}$$

где инфинум берется по всем счетным покрытиям $\mathcal{K}$ шарами $B_{r_i}(u_i) = \{v \in X |\ \rho(u_i, v) \le r_i\}$, где радиус $r_i \le \varepsilon$. Очевидно, что для фиксированных $\mathcal{K}$ и d функция $\mu_H(\mathcal{K}, d, \varepsilon)$ не уменьшается при уменьшении ε. Следовательно, предел

$$\mu_H(\mathcal{K}, d) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \mu_H(\mathcal{K}, d, \varepsilon) \tag{34}$$

существует и *называется внешней d-мерой Хаусдорфа* множества $\mathcal{K}$. Для любого компактного множества $\mathcal{K} \subset X$ существует критическое значение d^* такое, что

$$\mu_H(\mathcal{K}, d) = \begin{cases} \infty & \text{при } 0 \le d < d^*, \\ 0 & \text{при } d > d^*. \end{cases} \tag{35}$$

Это критическое значение, которое может быть записано как

$$d^* = \sup\{d \le 0|\ \mu(\mathcal{K}, d) = \infty\}, \tag{36}$$

называется *размерностью Хаусдорфа* множества $\mathcal{K}$ и обозначается как $\dim_H(\mathcal{K})$.

Приведем определение фрактальной размерности для компактного подмножества $\mathcal{K}$ на метрическом пространстве (X, ρ). Для $\varepsilon > 0$ пусть $N_\varepsilon(\mathcal{K})$ обозначает минимальное число шаров радиуса ε, необходимых для покрытия $\mathcal{K}$. Тогда верхний предел

$$\dim_F(\mathcal{K}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \frac{\ln N_\varepsilon(\mathcal{K})}{-\ln \varepsilon} \tag{37}$$

называется *фрактальной размерностью* множества $\mathcal{K}$.

Для любых $\varepsilon > 0$ и $d \ge 0$ функция

$$\mu_F(\mathcal{K}, d, \varepsilon) = N(\mathcal{K}, \varepsilon)\varepsilon^d \tag{38}$$

называется *внешней фрактальной мерой*. Верхний предел

$$\mu_F(\mathcal{K}, d) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \sup \mu_F(\mathcal{K}, d, \varepsilon) \tag{39}$$

называется *внешней фрактальной d-мерой* множества $\mathcal{K}$ Для функции $\mu_F(\mathcal{K}, d)$ существует критическое значение d^* такое, что

$$\mu_F(\mathcal{K}, d) = \begin{cases} \infty & \text{при } 0 \le d < d^*, \\ 0 & \text{при } d > d^* \end{cases} \tag{40}$$

выполнимо. Это значение соответствует определению фрактальной размерности и поэтому $\dim_F(\mathcal{K}) = d^*$.

Замечание 2 *Для компактного множества $\mathcal{K} \subset X$ всегда выполняется ([6])*

$$\dim_H \mathcal{K} \le \dim_F \mathcal{K}. \tag{41}$$

Для верхней оценки фрактальной размерности инвариантного множества эволюционного неравенства в данной работе используется теорема О.А. Ладыженской ([17]). Приводим эту теорему в удобном для нас виде.

Теорема 2 *Предположим, что $\mathcal{K}$ компактное множество в гильбертовом пространстве $(Y, \|\cdot\|)$ и $\phi : \mathcal{K} \to \phi(\mathcal{K})$ непрерывное отображение такое, что $\mathcal{K} \subset \phi(\mathcal{K})$ и такое, что*

$$\|\phi(y) - \phi(\eta)\| \le l\|y - \eta\|\,, \quad \|(1 - \pi_n)(\phi(y) - \phi(\eta))\| \le q\|y - \eta\|\,,\ \forall y, \eta \in Y.$$

Здесь $l \ge 0$, $0 \le q < 1$ константы, π_n проектор в Y на подпространство размерности n.

$$\textit{Тогда} \quad \dim_F \mathcal{K} \le n\ \ln \frac{2\nu^2 l^2}{1 - q^2} \left(\ln \frac{2}{1 + q^2}\right)^{-1}.$$

4 Определяющие наблюдения

a) *Наблюдения, которые являются определяющими для диссипативности*

Предположим, что S вещественное гильбертово пространство (*пространство наблюдений*), $M : Y_1 \to S$ заданный линейный ограниченный оператор (*оператор наблюдения*) и оператор $P \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1), P = P^*$ в Y_0, заданы так, что следующие свойства выполняются:

1) $V_1(y) := \frac{1}{2}\,(y, Py)_0 \geq 0 \quad , \quad \forall y \in Y_0\,;$
2) $V(y) := V_1(y) + \frac{1}{2}\,\Phi\,(y) \geq \mathrm{const} \cdot \|y\|_0^2\,, \quad \forall\, y \in Y_0\,;$
3) Существуют числа $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ такие, что для произвольного решения $y(\cdot)$ эволюционного вариационного неравенства (8), (9) функция $m(t) := V(y(t))$ удовлетворяет следующему соотношению

$$\dot{m}(t) + 2\,\lambda m(t) + \psi(y\,(t)) - \psi(-Py(t) + y(t)) \leq \mu \|My(t)\|_S^2\,,\ \text{для п.в. } t \geq 0. \tag{42}$$

Тогда наблюдение

$$\sigma(t) := \mu \|My(t)\|_S^2 \tag{43}$$

является *определяющим для диссипативности относительно области* $\mathcal{D}$ эволюционного вариационного неравенства (8), (9), т.е., из свойства

$$\int_t^{t+1} \|My(\tau)\|_S^2\, d\tau \to 0 \qquad t \to +\infty$$

вытекает, что

$$\limsup_{t \to +\infty} m(t) \leq C$$

и, следовательно, что эволюционное вариационное неравенство (8), (9) *диссипативно* с *областью диссипативности*

$$\mathcal{D} := \left\{ y \in Y_0 : \|y\|_0^2 \leq \frac{2C}{\gamma} \right\}, \tag{44}$$

где $\gamma > 0$.

b) *Наблюдения, которые являются определяющими для полного отклонения двух произвольных решений*

Предположим, что $M \in \mathcal{L}(Y_1, S)$ задан аналогично предыдущему пункту. Предположим также, что существуют оператор $P_1 \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1)\,,\ P_1 = P_1^*$ в Y_0, числа $\lambda_1 > 0, \alpha_1 > 0, \delta_1 > 0$ и $\mu_1 > 0$ такие, что для произвольных двух решений $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ эволюционного вариационного неравенства (8), (9) функция

$$m_1(t) := \Big(y_1(t) - y_2(t),\ P_1\big(y_1(t) - y_2(t)\big)\Big)_0$$

удовлетворяет для п.в. $t > 0$ неравенству

$$\begin{aligned}\dot m_1(t) + 2\,\lambda_1 m_1(t) + \psi(y_1\,(t)) - \psi(y_1(t) - P_1(y_2(t) - y_1(t)))\\ - \psi(y_2(t) + P_1(y_1(t) - y_2(t))) + \psi(y_2(t))\\ + \delta_1\|e^{-\alpha_1 t}(y_1(t) - y_2(t))\|_0^2 \le \mu_1\|M(y_1(t) - y_2(t))\|_S^2\,.\end{aligned} \tag{45}$$

Тогда наблюдение

$$\sigma_1(t) = \mu_1\|M(y_1(t) - y_2(t))\|_S^2 \tag{46}$$

является *определяющим для полного отклонения* $y_1(t) - y_2(t)$, т.е. , из свойства

$$\int_t^{t+1} \|M(y_1(\tau) - y_2(\tau))\|_S^2\,d\tau \to 0 \quad \text{для} \quad t \to +\infty \tag{47}$$

вытекает, что для п.в. $t > 0$

$$\|y_1(t) - y_2(t)\|_0^2 \le c_1 e^{2\alpha_1 t}\|y_1(0) - y_2(0)\|_0^2\,, \tag{48}$$

где $c_1 > 0$ некоторая константа, не зависящая от решений.

Неравенство (48) следует из (45) поскольку

$$\int_0^{\infty} \|e^{-\alpha_1 t}(y_1(t) - y_2(t))\|_S^2\,dt < +\infty. \tag{49}$$

c) *Наблюдения, которые являются определяющими для сходимости в подпространстве коразмерности n*

Предположим, что $M \in \mathcal{L}(Y_1, S)$ задан, как выше. Предположим также, что существуют оператор $P_2 \in \mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0, Y_1), P_2 = P_2^*$ в Y_0, натуральное число n, числа $\lambda_2 > 0, \alpha_2 > 0\,, \delta_2 > 0$ и $\mu_2 > 0$ такие, что для произвольных двух решений $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ эволюционного вариационного неравенства (8), (9) функция

$$m_2(t) := (y_1(t)) - y_2(t)\,, P_2(y_1(t) - y_2(t)))_0$$

удовлетворяет для п.в. $t > 0$ неравенству

$$\begin{aligned}\dot m_2(t) + 2\,\lambda_2 m_2(t) + \psi(y_1\,(t)) - \psi(y_1(t) - P_2(y_2(t) -\ y_1(t)))\\ -\psi(y_2(t) + P_2(y_1(t) - y_2(t))) +\ \psi(y_2(t))\\ +\delta_2\|e^{-\alpha_2 t}(1 - \pi_n)(y_1(t) - y_2(t))\|_0^2 \le \mu_2\|M(y_1(t) - y_2(t)\|_S^2\,.\end{aligned} \tag{50}$$

Тогда наблюдение

$$\sigma_2(t) := \mu_2\|M(y_1(t) - y_2(t))\|_S^2 \tag{51}$$

является *определяющим для сходимости в подпространстве* Y_1 *коразмерности* n, т.е., свойство

$$\int_t^{t+1} \|M(y_1(\tau) - y_2(\tau))\|_S^2\,d\tau \to 0 \quad \text{для} \quad t \to +\infty \tag{52}$$

влечет за собой, что для п.в. $t > 0$

$$\|(1-\pi_n)(y_1(t)-y_2(t))\|_0^2 \le c_2 e^{-2\alpha_2 t}\|y_1(0)-y_2(0)\|_0^2\,, \tag{53}$$

где $c_2 > 0$ некоторая константа, которая не зависит от решений.

Неравенство (53) следует из (50), поскольку

$$\int_0^\infty \|e^{\alpha_2 t}(y_1(t)-y_2(t))\|_0^2\,dt < +\infty\,. \tag{54}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3 *Предполагаем, что для вариационного неравенства (8), (9) существуют наблюдения, которые являются определяющими для диссипативности с областью $\mathcal{D}$, определяющими для полного отклонения и определяющими для сходимости в подпространстве коразмерности n, соответственно. Тогда любое положительно инвариантное относительно (8), (9) компактное множество в $\mathcal{D}$ имеет конечную фрактальную размерность.*

Идея доказательства: Неравенства (42), (48), (53) позволяют использовать теорему 2. ■

5 Частотные условия существования определяющих наблюдений

Рассмотрим существование наблюдений, которые являются определяющими для диссипативности. Существование наблюдений, которые являются определяющими для полного отклонения двух решений и которые являются определяющими для сходимости в подпространстве коразмерности n рассматриваются аналогично. Наша задача найти эффективные условия существования функций Ляпунова V, удовлетворяющие условия a)- c) из предыдущего раздела.

Введем для этого ряд предположений, используемых в дальнейшем. В предположении, которое называется *частотным условием* необходимо использовать комплексификацию пространств и операторов. Элементы комплексификации Y_0^c вещественного гильбертова пространства Y_0 могут быть записаны как $x + iy$, где $x, y \in Y_0$, и скалярное произведение Y_0^c будет определенно, как $(\cdot,\cdot)_{Y_0^c}$. Комплексификация других пространств определяется аналогичным образом.

Для линейного оператора $A : Y_1 \to Y_{-1}$ задается линейный оператор $A^c : Y_1^c \to Y_{-1}^c$, определенный через $A^c(x+iy) = Ax + iAy$. Комплексификация других линейных операторов, представленных ранее, определяется аналогично.

Рассмотрим комплексификацию квадратичной формы $\mathcal{F}$ (аналогично, рассматривается комплексификация для $\mathcal{G}$). Предположим, что

$$\mathcal{F}(y,\xi) = (F_1 y, y)_{-1,1} + 2(F_2 y, \xi)_\Xi + (F_3\xi,\xi)_\Xi \tag{55}$$

для $(y,\xi)\in Y_1\times\Xi$, где $F_1=F_1^*\in\mathcal{L}(Y_1,Y_{-1})$, $F_2\in\mathcal{L}(Y_1,\Xi)$ и $F_3=F_3^*\in\mathcal{L}(\Xi,\Xi)$.

Комплексификацией квадратичной формы (55) является эрмитова форма $\mathcal{F}^c$ определенной на $Y_1^c\times\Xi^c$ через следующее уравнение

$$\mathcal{F}^c(y,\xi)=(F_1^cy,y)_{Y_{-1}^c,Y_1^c}+2\mathrm{Re}\,(F_2^cy,\xi)_{\Xi^c}+(F_3^c\xi,\xi)_{\Xi^c}\,. \tag{56}$$

Пусть существуют числа $\lambda>0$ и $\mu>0$, такие что выполняются следующие условия.

(A6) Для любого $T>0$ и любого $f\in L^2(0,T;Y_{-1})$ задача

$$\dot y=(A+\lambda I)y+f(t)\;,\;y(0)=y_0 \tag{57}$$

корректна, т.е., для произвольных $y_0\in Y_0, f(\cdot)\in L^2(0,T;Y_{-1})$ существует единственное решение $y(\cdot)\in\mathcal{W}_T$, удовлетворяющее уравнению (57) в следующем смысле

$$(\dot y,\eta)_{-1,1}=((A+\lambda I)y,\eta)_{-1,1}+(f(t)\;,\eta)_{-1,1}\;,\quad\forall\eta\in Y_1\ \text{для п.в.}\ t\in[0,T] \tag{58}$$

и непрерывно зависящее от начальных данных, т.е.,

$$\|y(\cdot)\|^2_{\mathcal{W}_T}\le c_1\|y_0\|_0^2+c_2\|f(\cdot)\|^2_{2,-1}\;, \tag{59}$$

где $c_1>0$ и $c_2>0$ - некоторые константы. Более того, любое решение задачи

$$\dot y=(A+\lambda I)y,\quad y(0)=y_0 \tag{60}$$

экспоненциально убывает для $t\to+\infty$, т.е., существуют константы $c_3>0$ и $\varepsilon>0$ такие, что

$$\|y(t)\|_0\le c_3e^{-\varepsilon t}\|y_0\|_0\;,\;t>0\;. \tag{61}$$

(A7) Оператор $A+\lambda I\in\mathcal{L}(Y_1,Y_{-1})$ является *регулярным*, т.е., для любых $T>0, y_0\in Y_1, z_T\in Y_1$ и $f\in L^2(0,T;Y_0)$ решения *прямой задачи*

$$\dot y=(A+\lambda I)y+f(t),\quad y(0)=y_0\quad\text{для п.в.}\ t\in[0,T] \tag{62}$$

и *двойственной задачи*

$$\dot z=-(A+\lambda I)^*z+f(t),\quad z(0)=z_T\quad\text{для п.в.}\ t\in[0,T] \tag{63}$$

непрерывны в t в норме Y_1.

(A8) (Частотное условие)

Выполняются следующие соотношения :

a) $\mathcal{F}^c(y,\xi)+\mathcal{G}^c(y,\xi)-\mu\|M^cy\|^2_{S^c}\le 0\;\forall\;(y,\xi)\in Y_1^c\times\Xi^c:\exists\,\omega\in\mathbb{R}\;,$

где $i\omega\,y=(A^c+\lambda I^c)y+B^c\,\xi\,;$

b) Функционал $\quad J(y(\cdot),\xi(\cdot)) := \int_0^\infty [\mathcal{F}^c(y(\tau),\xi(\tau)) + \mathcal{G}^c(y(\tau),\xi(\tau)) - \mu\|M^c y(\tau)\|^2_{S^c}]\, d\tau$
ограничен сверху на множестве

$$\mathcal{M}_{y_0} := \Big\{ y(\cdot),\xi(\cdot) : \dot{y} = (A^c + \lambda I^c)y + B^c\xi,$$

$$y(0) = y_0\,,\ y(\cdot) \in \mathcal{W}^c_\infty\,,\ \xi(\cdot) \in L^2(0,\infty;\Xi^c) \Big\}$$

для любых $y_0 \in Y^c_0$, т.е., для любых таких y_0 существует $\gamma(y_0) \in \mathbb{R}$ такое, что $J(y(\cdot),\xi(\cdot)) \le \gamma(y_0)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4 *Предположим, что существуют числа $\lambda > 0$ и $\delta > 0$ такие, что предположения* **(A3), (A6) - (A8)** *выполнены для вариационного неравенства (6) - (9), где $\phi \in \mathcal{N}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ и наблюдение $\sigma(t)$ задано через (43). Тогда наблюдение $\sigma(t)$ является определяющим для диссипативности задачи (8), (9), где область диссипативности $\mathcal{D}$ задана через(44).*

Набросок доказательства: Найдем оператор $P = P^* \in \mathcal{L}(Y_{-1},Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0,Y_1)$, где $(y,Py)_0 \ge 0\ ,\quad \forall y \in Y_0\,$, и числа $\lambda > 0, \mu > 0$ такие, что для любых решений $y(\cdot)$ эволюционного вариационного неравенства (8), (9) и существует соответствующий обобщенный потенциал Φ из условия (16). Проинтегрируем неравенство (42) на отрезке времени $0 < s < t$, т.е.,

$$m(t) - m(s) + 2\lambda\int_s^t m(\tau)d\tau + \int_s^t p(\tau)d\tau \le \int_s^t g(\tau)d\tau\,. \tag{64}$$

В неравенстве (64) введены функции

$$m(t) := \frac{1}{2}\big(y(t),Py(t)\big)_0 + \frac{1}{2}\Phi(y(t))\,, \tag{65}$$

$$p(t) := \psi(y(t)) - \psi\big(y(t) - Py(t)\big)\,, \tag{66}$$

и

$$g(t) := -\,\mu\|My(t)\|^2_S\,. \tag{67}$$

Для того чтобы гарантировать неравенство (64) выбираем оператор $P = P^* \in \mathcal{L}(Y_{-1},Y_0) \cap \mathcal{L}(Y_0,Y_1)$ и числа $\lambda > 0, \mu > 0$ такими, что

$$(-(A+\lambda I)v - B\zeta, Pv)_{-1,1} \ge \mathcal{F}(v,\zeta) + \mathcal{G}(v,\zeta) -\, \mu\|Mv\|^2_S\,,\ \forall y \in Y_1\,,\ \forall \zeta \in \Xi\,. \tag{68}$$

Существование такого P, где $(y,Py)_0 \ge 0\,,\quad \forall y \in Y_0\,$, следует из предположений **(A3), (A6) - (A8)** и из леммы Калмана-Якубовича-Попова ([1, 18]). Из эволюционного вариационного неравенства (8), (9) следует, что

$$\begin{aligned}&(\dot{y}(t),Py(t))_{-1,1} + \lambda(y(t),Py(t))_0 - ((A+\lambda I)y(t)\\ &+ B\xi(t),Py(t))_{-1,1} + p(t) \le 0 \qquad \text{для п.в. } t > 0\,,\end{aligned} \tag{69}$$

где $v := y(t)$ и $\zeta := \xi(t)$.

Используя оценку (68), получаем из неравенства (69)

$$(\dot{y}(t), Py(t))_{-1,1} + \lambda(y(t), Py(t))_0 + \mathcal{F}(y(t), \xi(t)) + \mathcal{G}\,(y(t), \xi(t)) \\ -\mu\|My(t)\|_S^2 + p(t) \le 0 \quad \text{для п.в. } t > 0\,. \tag{70}$$

В результате интегрирования неравенства (70) на временном интервале $0 < s < t$ неравенство (70) представляется следующим образом:

$$\frac{1}{2}(y(t), Py(t))_0 - \frac{1}{2}(y(s), Py(s))_0 + \lambda \int_s^t (y(\tau), Py(\tau))_0 d\tau \\ + \int_s^t \mathcal{F}(y(\tau), \xi(\tau))d\tau + \int_s^t \mathcal{G}(y(\tau), \xi(\tau))d\tau + \int_s^t p(\tau)d\tau \\ \le \mu \int_s^t \|Mv(t)\|_S^2 d\tau\,. \tag{71}$$

Из неравенств (15) и (16) следует, что

$$\int_s^t \mathcal{F}(y(\tau), \xi(\tau))d\tau \ge 0 \tag{72}$$

и

$$\int_s^t \mathcal{G}(y(\tau), \xi(\tau))d\tau \ge \frac{1}{2}\Big[\Phi\big(y(t)\big) - \Phi\big(y(s)\big)\Big] + \lambda \int_s^t \Phi(y(\tau))d\tau\,, \quad \text{на} \quad 0 < s < t\,. \tag{73}$$

Принимая во внимание (71) – (73), получаем, что

$$\frac{1}{2}(y(t), Py(t))_0 + \frac{1}{2}\Phi(y(t)) - \frac{1}{2}(y(s), Py(s))_0 - \frac{1}{2}\Phi(y(s)) \tag{74} \\ +2\lambda \int_s^t \Big[\frac{1}{2}\big(y(\tau), Py(\tau)\big)_0 - \frac{1}{2}\Phi\big(y(\tau)\big)\Big]d\tau + \int_s^t p(\tau)d\tau \\ \le \mu \int_s^t \|My(\tau)\|_S^2\, d\tau\,.$$

Отсюда вытекает, что (74) является неравенством типа (64), где $m(\cdot), p(\cdot)$ и $g(\cdot)$ заданы через (65) – (67) .

■

6 Контактная задача вязко-упругости

Опишем коротко контактную задачу вязко-упругости описанную в работе [13]. Пусть вязко-упругое тело находится в открытой, ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2$ или $d = 3$ с границей $\Gamma = \cup_{i=1}^3 \Gamma_i$, где $meas(\Gamma_1) > 0$. Нас интересует эволюционный процесс изменения состояния тела на интервале $[0, T]$, где $T > 0$. Тело закреплено на $\Gamma_1 \times (0, T)$ и следовательно, перемещение там равно нулю.

Предполагается, что силы в системе изменяются медленно во времени так, что ускорение системы не учитывается. Пусть тело имеет контакт с поверхностью $\Gamma_3 \times (0,T)$. Задача сходится к нахождению перемещения $u : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$ и напряжения $\sigma : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ для системы

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \tag{75}$$

$$\operatorname{Div} \sigma = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \tag{76}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0,T), \tag{77}$$

$$\sigma\nu = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \times (0,T), \tag{78}$$

$$\left.\begin{aligned} -\sigma_\nu = p_\nu(\dot{u}_\nu), |\sigma_\tau| \leqslant p_\tau(\dot{u}_\nu) \\ |\sigma_\tau| < p_\tau(\dot{u}_\nu) \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = p_\tau(\dot{u}_\nu) \Rightarrow \sigma_\tau = -\lambda\dot{u}_\tau, \lambda \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{на} \quad \Gamma_3 \times (0,T) \tag{79}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{на} \quad \Omega. \tag{80}$$

Здесь $\mathbb{S}^d$ представляет собой пространство симметричных тензоров второго ранга на $\mathbb{R}^d$. Оператор вязкости $\mathcal{A}$ и оператор упругости $\mathcal{B}$ являются нелинейными. Тензор $\varepsilon(u)$ является тензором малой деформации. Уравнение (76) является уравнением равновесия. Уравнения (77) и (78) описывают граничные условия перемещения, где ν является единичной внешней нормалью к Γ. Функция u_0 описывает начальное перемещение.

Рассмотрим подробнее систему (79). Компонента σ_ν обозначает нормаль напряжения, σ_τ обозначает касательную составляющую, u_ν и u_τ являются компонентами перемещения, нормалью и касательной, соответственно.

Условия (79) являются версией закона Кулона, описывающей трение.

Введем пространства:

$$V = \{v = (v_i) \in (H^1(\Omega))^d : v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1\}, \tag{81}$$

$$Q = \{\tau = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega))^{d\times d} : \tau_{ij} = \tau_{ji}, 1 < i,j < d\}, \tag{82}$$

$$Q_1 = \{\tau \in Q : \operatorname{Div} \tau \in (L^2(\Omega))^d\}. \tag{83}$$

Эти пространства являются вещественными гильбертовыми со стандартными внутренними произведениями.

Предполагаем, что операторы вязкости $\mathcal{A}$ и упругости $\mathcal{B}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} (a)\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\ (b)\text{Существует} \quad L_A > 0 \quad \text{такое, что} \\ |\mathcal{A}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,\varepsilon_2)| \leqslant L_A|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \quad x \in \Omega. \\ (c)\text{Существует} \quad M > 0 \quad \text{такое, что} \\ (\mathcal{A}(x,\varepsilon_1) - \mathcal{A}(x,\varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geqslant M|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \quad \forall \varepsilon_1,\varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \quad x \in \Omega. \\ (d)\text{Для всех} \quad \varepsilon \in \mathbb{S}^d, x \mapsto \mathcal{A}(x,\varepsilon) \quad \text{измеримо по Лебегу на} \quad \Omega. \\ (e)\text{Имеем отображение} \quad x \mapsto \mathcal{A}(x,0) \in Q. \end{cases} \tag{84}$$

.

$$
\begin{cases}
(a)\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\
(b)\text{Существует} \quad L_B > 0 \quad \text{такое, что} \\
|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)| \leqslant L_B|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \quad x \in \Omega. \\
(c)\text{Для всех} \quad \varepsilon \in \mathbb{S}^d, x \mapsto \mathcal{B}(x, \varepsilon) \quad \text{измеримо по Лебегу} \\
(d)\text{Имеем отображение} \quad x \mapsto \mathcal{B}(x, 0) \in Q.
\end{cases}
\tag{85}
$$

Пусть функция $j : V \times V \to \mathbb{R}$ определяется как

$$
j(v, w) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(v_\nu) w_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\tau(v)\nu)|w_\tau| da \quad \forall v, w \in V. \tag{86}
$$

Используя выше изложенное ([13]), можем записать систему (75) - (80) в терминах вариационного неравенства для перемещений:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_V + (\mathcal{B}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)))_V \\
+ j(\dot{u}(t), v) - j(\dot{u}(t), \dot{u}(t)) \geqslant 0, \quad \forall v \in V\,.
\end{aligned}
\tag{87}
$$

7 Определяющие наблюдения для вязко-упругой задачи второго порядка

Рассмотрим выше изложенную контактную проблему, которая моделируется с помощью эволюционного вариационного неравенства второго порядка. Требуется найти функцию перемещения u такую, что для п.в. $t \in [0, T]$

$$
\begin{aligned}
(\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1} + (\mathcal{A}\,\dot{u}(t), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1} \\
+ \Big(g\big(u(t)\big), v - \dot{u}(t)\Big)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1} + J(v) - J\big(\dot{u}(t)\big) \geq 0\,, \quad \forall\, v \in \mathcal{V}_1\,,
\end{aligned}
\tag{88}
$$

$$
u(0) = u_0 \in \mathcal{V}_1\,,\ \dot{u}(0) = v_0 \in \mathcal{V}_0\,. \tag{89}
$$

Здесь $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{-1}$ - оснащение вещественного гильбертова пространства $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{A} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_{-1}$ - линейный непрерывный оператор, который представляет оператор вязкости.

Нелинейное отображение $g : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_{-1}$ является оператором упругости. Здесь функция j, из исходной задачи, приводиться в следующем более простом виде $J : \mathcal{V}_1 \to \mathbb{R}_+$ и представляет собой контактный функционал.

Под решением u системы (88), (89) на $(0, T)$ понимается функция $u(\cdot) \in L^2(0, T; \mathcal{V}_1)$ такая, что $\dot{u}(\cdot) \in L^2(0, T; \mathcal{V}_1), \ddot{u}(\cdot) \in L^2(0, T; \mathcal{V}_1\,, \int_0^T J(\dot{u}(\tau))d\tau < \infty\,$, и удовлетворяет эволюционному вариационному неравенству (88), (89) для п.в. $t \in (0, T)$.

Будем считать, что для любого $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_0$ и при любом времени $T > 0$ решение неравенства(88), (89) существует. Чтобы переписать неравенство(88), (89) как вариационное неравенство первого порядка (8), (9), мы определяем оснащения гильбертова пространства Y_0, т.е. $Y_1 \subset Y_0 \subset Y_{-1}$ как

$$Y_0 = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_0\,, \quad Y_1 = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_1\,, \quad Y_{-1} = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_{-1}\,. \tag{90}$$

Введем новые переменные $y_1 = u$, $y_2 = \dot{u}$ и $\eta_2 = v$. Отсюда следует, что $\dot{y}_1 = y_2$ и $\dot{y}_2 = \ddot{u}$. В этих обозначениях вариационное неравенство (88) может быть переписано, следующим образом

$$\begin{aligned}(\dot{y}_2, \eta_2 - y_2)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1} + (\mathcal{A}y_2, \eta_2 - y_2)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1} + \big(g(y_1), \eta_2 - y_2\big)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1}& \\ +J(\eta_2) - J(y_2) \geq 0\,, \quad \forall\, \eta_2 \in \mathcal{V}_1\,.&\end{aligned} \tag{91}$$

Используя топологию для произведения пространств, мы получаем для произвольных $y = (y_1, y_2) \in Y_{-1} = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{V}_{-1}$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in Y_1 = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_1$, представление скобки двойственности на $Y_{-1} \times Y_1$ как

$$(y, \eta)_{-1,1} = (y_1, \eta_1)_{\mathcal{V}_1} + (y_2, \eta_2)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1}\,. \tag{92}$$

Из уравнения (92) следует, что

$$(\dot{y}_2, \eta_2 - y_2)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1} = (\dot{y}, \eta - y)_{-1,1} - (y_2, \eta_1 - y_1)_{\mathcal{V}_1}\,. \tag{93}$$

Линейный ограниченный оператор $A : Y_1 \to Y_{-1}$ определяем через

$$\begin{aligned}&(-Ay, \eta - y)_{-1,1} = -(y_2, \eta_1 - y_1)_{\mathcal{V}_1} + (\mathcal{A}y_2, \eta_2 - y_2)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1}\,,\\ &\forall\, y = (y_1, y_2), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2) \in Y_1 = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_1\,.\end{aligned} \tag{94}$$

Легко увидеть, что A определенное через уравнение (94) имеет следующее представление

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & -\mathcal{A} \end{bmatrix}. \tag{95}$$

Чтобы определить линейный оператор $B : \Xi = \mathcal{V}_1 \to Y_{-1}$ мы используем уравнение

$$\begin{aligned}&(-B\phi(y_1), \eta - y)_{-1,1} = (\phi(y_1), \eta_2 - y_2)_{\mathcal{V}_{-1},\mathcal{V}_1},\\ &\forall\, y = (y_1, y_2), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2) \in Y_1 = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_1\,.\end{aligned} \tag{96}$$

Из уравнения (96) следует, что

$$B\phi(Cy) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g(y_1) \end{bmatrix}, \tag{97}$$

где линейный оператор $C : Y_1 \to W := \mathcal{V}_1$ определен через $(y_1, y_2) \mapsto y_1$.

Последний элемент в неравенстве (8) контактный функционал $\psi : Y_1 \to \mathbb{R}_+$ задан через

$$\psi(y) := J(y_2)\,, \quad \forall\, (y_1, y_2) \in Y_1 = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_1\,. \tag{98}$$

Используя условия (84), (85) можно показать, что при определенных условиях на параметры, имеется квадратичная форма, описывающая нелинейную часть системы. Относительно пространства Y_1 и функционала ψ заданного через (98), можно построить квадратичную форму (15) и определить класс $\mathcal{N}(\mathcal{F})$. Тогда можно рассмотреть теорему 4 и следствия к нему относительно настоящего примера.

На основании условий (84), (85) для полученной преобразованной системы (8), (9), где операторы A, B, C, ϕ, ψ заданы через (95) - (98), соответственно, можно построить квадратичную форму $\mathcal{F}$ заданной на пространстве $Y_1 \times \Xi$. Относительно этой квадратичной формы выполнено условие теоремы 4. Теорема гарантирует существование определяющего наблюдения для диссипативности. Аналогичным путем можно построить определяющие наблюдения для других типов.

Список литературы

[1] Брусин В.А. Уравнения Лурье в гильбертовом пространстве и их разрешимость Прикл. Мат. Мех. 1976. Том 40., № 5. стр. 947-955.

[2] Ермаков, И. В., Калинин, Ю. Н., Райтманн Ф. Определяющие медоты и почти периодические интегралы для коциклов. Диффер. Урав. и Проц. Управ. 2011, № 4., стр.113-137.

[3] Лихтарников А. Л., Якубович В. А., Частотная теорема для уравнений эволюционного типа Сибирский математический журнал, 1976, том 17, №5, стр. 1069 - 1085.

[4] Панков, А. А., Ограниченность и пости-периодичность по времени решений эволюционных вариационных неравенств , Известия АН СССР. Серия математическая, 1982, том 46, вып.2, стр. 314-346.

[5] Райтманн, Ф., *Динамические системы, аттракторы и оценки их размерности*, Изд-во С.-Петерб. ун-та. Санкт-Петербург. 2013.

[6] Boichenko, V.A., Leonov,G.A., Reitmann, V., *Dimension Theory for Ordinary Differential Equations.* Wiesbaden:Vieweg-Teubner Verlag, 2005.

[7] Brezis, H. , Problemes uni lateraux. J. Math. Pures. Appl., 1972, Vol. 51, page 1 – 168 .

[8] Chueshov, I. D., *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems.* ACTA. Kharkov, 1999.

[9] Chueshov, I. D., On functionals that uniquely determine the long-time behaviour of solutions to von Karman evolution equations. Uspekhi Matem. Nauk, 1996, Vol. 51, Is. 5, page 162 .

[10] Duvant, G. and J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics.* Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[11] Foias, C. and G. Prodi, Sur le comportement global des solutions nonstationaires des equations de Navier-Stokes en dimension deux. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1967, Vol. 36, page 1 – 34.

[12] Foias, C. and R. Temam, Determination of solutions of the Navier-Stokes equations by a set of nodal values. Math. Comput., 1984, Vol. 43, page 117 – 133 .

[13] Han, W. and M. Sofonea, Evolutionary variational inequalities arising in viscoelastic contact problems. SIAM J. Numer. Anal., 2000, Vol. 38, Is. 2, page 556 – 579 .

[14] Hoffmann, K.-H. and J. Sprekels, On the identification of parameters in general variational inequalities by asymptotic regularization. SIAM J. Math. Anal., 1986, Vol. 17, page 1198–1217 .

[15] Jarusek, J. and Ch. Eck, Dynamic contact problem with friction in linear viscoelasticity. C. R. Acad. Sci. Paris, 1996, Vol. 322, page 497 – 502.

[16] Kruk, A. and Reitmann, V., Upper Hausdorff dimension estimates for invariant sets of evolutionary variational inequalities. Proc. Inter. Conf. "Spatio-temporal dynamical systems Moscow, Russia 2014.

[17] Ladyzhenskaya, O. A., A dynamical system generated by the Navier-Stokes equations. J. Soviet Math. 1975, Vol. 3 Is. 4, page 458 – 479 .

[18] Likhtarnikov, A. L. and V. A. Yakubovich, The frequency theorem for equations of evolutionary type. Siberian Math. J. 1976, Vol. 17, Is. 5, page 790 – 803 .

[19] Lions, J.-L., *Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites nou Lineaires*. Dunad, Paris 1969.

[20] Maksimov, V. I., Inverse problems for variational inequalities. Intern. Series of Numerical Math., Birkhouser Verlag, Basel, 1992, Vol. 107, page 275 – 286.

[21] Reitmann, V., Upper fractal dimension estimates for invariant sets of evolutionary variational inequalities. Proc. Inter. Conf. "Fractal Geometry ans Stochastics III“, Friedrichrode, 2003.

[22] Triebel, H., *Interpolation Theorie, Function Spaces, Differential Operators*. Amsterdam, North-Holland 1978.