

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
№3, 2018  
Электронный журнал,  
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010  
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>  
e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Фильтрация и идентификация

УДК 517.977

## **Идентификация математической модели при наличии неизмеряемых внешних воздействий на моделируемый объект**

С.Ю.Култышев, Л.М.Култышева, М.В.Милюша

Пермский национальный исследовательский политехнический  
университет

### **Аннотация**

Рассматривается задача идентификации приближенной математической модели реального объекта при наличии внешних воздействий на объект, которые не удастся измерить в процессе наблюдений; получены теоремы и алгоритмы, дающие решение этой задачи; приводятся практические примеры идентификации приближенных эpsilon-моделей, полученных при экономико-математическом моделировании некоторых реальных объектов.

**Ключевые слова:** задача идентификации, приближенная эpsilon-модель, неизмеряемые внешние воздействия, экономико-математические модели, функциональный анализ, нормированные пространства.

### **Abstract**

The problem of identification mathematical model of a real object in the presence immeasurable external influence is considered. Theorems and algorithms solving this

problem are obtained. Practical examples of approximate epsilon-models obtained by mathematical-economic modeling are given.

**Key words:** identification, approximate epsilon-model, immeasurable external influence, mathematical-economic model, functional analysis, normed space.

### Введение.

Ставится задача нахождения параметров приближенной модели реального объекта по измерениям его входов и выходов при наличии внешних воздействий, которые не удаётся измерить в процессе наблюдений за поведением объекта. Целью исследования является получение эффективных теорем и алгоритмов, дающих решение этой задачи. Постановка задачи сформулирована в терминах функционального анализа для детерминированных моделей и несколько отличается от общепринятой, которую можно найти например в [1] - [4].

Вводится определение  $\varepsilon$ -модели, которому соответствует постановка задачи идентификации. В этом состоит некоторая новизна подхода к этой задаче. В результате решения задачи идентификации получена приближенная оценка неизмеряемых воздействий на объект, т.е. произведена приближенная идентификация этих воздействий. Аналогичный подход к идентификации в случае, когда все входные воздействия доступны измерению, рассматривался в работах авторов этой статьи [5] - [9].

### Часть 1.

Через  $R^n$  обозначим  $n$ -мерное евклидово пространство векторов  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , компонентами которых являются действительные числа ;  $B_1^m[\theta, T], B_2^n[\theta, T], B_3^q[\theta, T]$  - нормированные [10] пространства  $m, n$  и  $q$ -мерных вектор-функций, определенных на отрезке  $[\theta, T] \subset R^1$ ;  $Y, Z$  и  $W$  - нормированные пространства;  $\|x\|$  - норма элемента  $x$  в том пространстве, которому он принадлежит;  $R_+^1$  - множество неотрицательных чисел из  $R^1$ .

Пусть имеется реальный объект, который мы будем рассматривать на отрезке времени  $[\theta, T]$ . Через  $\bar{v}(t)$  обозначим  $m$ -мерный вектор параметров, характеризующих измеряемые внешние воздействия на объект в момент времени  $t \in [\theta, T]$ ,  $\bar{v}(t) \in R^m$ , через  $\bar{f}(t)$  -  $q$ -мерный вектор параметров, характеризующих неизмеряемые внешние воздействия на объект в момент времени  $t \in [\theta, T]$ ,  $\bar{f}(t) \in R^q$ , а через  $\bar{x}(t)$  -  $n$ -мерный вектор параметров, характеризующих реакцию объекта на внешние воздействия в момент времени  $t \in [\theta, T]$ ,  $\bar{x}(t) \in R^n$ . Будем считать, что вектор-функции  $\bar{v}, \bar{f}$  и  $\bar{x}$  удовлетворяют условиям  $\bar{v} \in V[\theta, T], \bar{f} \in \tilde{F}[\theta, T], \bar{x} \in X[\theta, T]$ , где  $V[\theta, T], \tilde{F}[\theta, T]$  и  $X[\theta, T]$  - некоторые подмножества из  $B_1^m[\theta, T], B_3^q[\theta, T]$  и  $B_2^n[\theta, T]$  соответственно. Вектор функцию  $\{\bar{v}, \bar{f}\}$  будем называть входом, а вектор-функцию  $\bar{x}$  - выходом объекта соответственно.

**Определение 1.** Уравнение  $F(x, v, f) = 0$  назовем  $\varepsilon$ -моделью объекта, если:

- 1)  $F : X[\theta, T] \times V[\theta, T] \times \tilde{F}[\theta, T] \rightarrow W$  - непрерывный оператор;
- 2) уравнение  $F(x, v, f) = 0$  имеет единственное решение  $x \in X[\theta, T]$  при каждом  $v \in V[\theta, T]$  и каждом  $f \in \tilde{F}[\theta, T]$ ;
- 3) выполняется неравенство  $\|F(\bar{x}, \bar{v}, \bar{f})\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - достаточно малое положительное число.

Будем строить  $\varepsilon$ -модель в виде

$$\bar{F}(x, v, f, \omega) = 0, \tag{1}$$

где  $v \in V[\theta, T], f \in \tilde{F}[\theta, T], x \in X[\theta, T], \omega \in \Omega \subseteq B_4, B_4$  - нормированное пространство,  $\omega$  - вектор неизвестных параметров модели,  $\bar{F} : X[\theta, T] \times V[\theta, T] \times \tilde{F}[\theta, T] \times \Omega \rightarrow W$  - непрерывный оператор, который удовлетворяет условиям определения 1 при некотором  $\omega \in \Omega$ .

Далее: пусть

$$y = P(\bar{v}) + \xi \text{ и} \tag{2}$$

$$z = Q(\bar{x}) + \eta - \tag{3}$$

- измерения входных воздействий  $\bar{v}$  и выходной реакции  $\bar{x}$ , где  $P:V[\theta,T] \rightarrow Y$  и  $Q:X[\theta,T] \rightarrow Z$  - непрерывные операторы,  $y \in Y, z \in Z$ , а  $\xi$  и  $\eta$  - ошибки измерений, о которых известно лишь то, что  $\|\xi\| \leq \varepsilon_1$  и  $\|\eta\| \leq \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  - малые положительные числа или нули,  $\xi \in Y, \eta \in Z$ , (см. Рис.1).

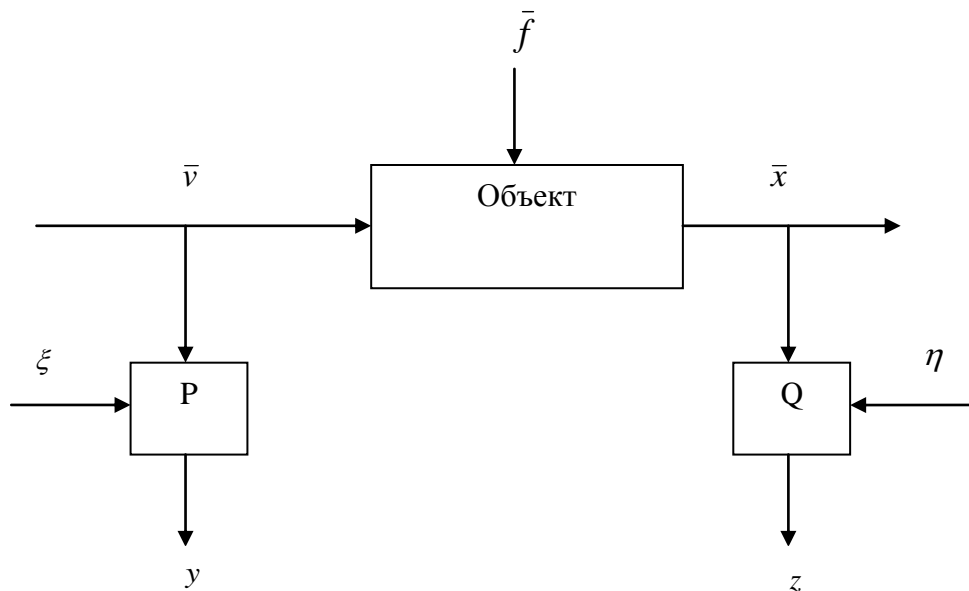


Рис.1.

**Задача идентификации:** по известным  $y, z, P, Q, \bar{F}, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  найти такое  $\omega \in \Omega$ , при котором уравнение (1) является  $\varepsilon$ -моделью объекта.

**Теорема 1.** Пусть

- 1)  $\{\varphi_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$  - полная система элементов в  $B_1^m[\theta, T]$ ;
- 2)  $\{\psi_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$  - полная система элементов в  $B_2^n[\theta, T]$ ;
- 3)  $\{g_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$  - полная система элементов в  $B_3^q[\theta, T]$ ;
- 4) существует такое  $\bar{\omega} \in \Omega$ , что уравнение  $\bar{F}(x, v, f, \bar{\omega}) = 0$  является  $\varepsilon$ -моделью объекта;

5) найдутся такие  $N$  и  $\tilde{\alpha}_i \in R^1, (i = \overline{0, N})$ , что

$$\left\| y - P\left(\sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i \varphi_i\right) \right\| = \min_{\{\alpha_i\}} \left\| y - P\left(\sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_i\right) \right\| \leq \varepsilon_1, \text{ где } \sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_i \in V[\theta, T];$$

6) найдутся такие  $M$  и  $\tilde{\beta}_i \in R^1, (i = \overline{0, M})$ , что

$$\left\| z - Q\left(\sum_{i=0}^M \tilde{\beta}_i \psi_i\right) \right\| = \min_{\{\beta_i\}} \left\| z - Q\left(\sum_{i=0}^M \beta_i \psi_i\right) \right\| \leq \varepsilon_2, \text{ где } \sum_{i=0}^M \beta_i \psi_i \in X[\theta, T];$$

7) найдется такое  $c_1 \in R_+^1$ , что  $\|P(\bar{v}) - P(\tilde{v})\| \leq c_1 \|\bar{v} - \tilde{v}\|$ , где  $\tilde{v} = \sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i \varphi_i$ ;

8) найдется такое  $c_2 \in R_+^1$ , что  $\|Q(\bar{x}) - Q(\tilde{x})\| \leq c_2 \|\bar{x} - \tilde{x}\|$ , где  $\tilde{x} = \sum_{i=0}^M \tilde{\beta}_i \psi_i$ ;

9) выполняется неравенство  $c_1 \|\bar{v} - \tilde{v}\| \leq 2\varepsilon_1$ ;

10) выполняется неравенство  $c_2 \|\bar{x} - \tilde{x}\| \leq 2\varepsilon_2$ ;

11) найдется такое  $\tilde{\omega} \in \Omega$ , что  $\|\bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, 0, \tilde{\omega})\| = \min_{\omega \in \Omega} \|\bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, 0, \omega)\|$ ;

12) найдутся такие  $K$  и  $\tilde{\gamma}_i \in R^1, (i = \overline{0, K})$ , что

$$\left\| \bar{F}\left(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^K \tilde{\gamma}_i g_i, \tilde{\omega}\right) \right\| = \min_{\{\gamma_i\}} \left\| \bar{F}\left(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^K \gamma_i g_i, \tilde{\omega}\right) \right\| \leq \varepsilon, \text{ где } \sum_{i=0}^K \gamma_i g_i \in \tilde{F}[\theta, T];$$

13) найдется такой оператор  $G: X[\theta, T] \times V[\theta, T] \times \tilde{F}[\theta, T] \times W \rightarrow \Omega$ , что

$$\bar{\omega} = G(\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}, \bar{\omega}), \tilde{\omega} = G(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega}), \|G(\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}, \bar{\omega}) - G(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega})\| \leq c_x \|\bar{x} - \tilde{x}\| + c_v \|\bar{v} - \tilde{v}\| + c_f \|\bar{f} - \tilde{f}\| + c_w \|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\|, \text{ где } \bar{\omega} = \bar{F}(\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}, \bar{\omega}), \tilde{\omega} = \bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega}),$$

$$\tilde{f} = \sum_{i=0}^K \tilde{\gamma}_i g_i, c_x \in R_+^1, c_v \in R_+^1, c_f \in R_+^1, c_w \in R_+^1;$$

14) выполняется неравенство  $\|\bar{f} - \tilde{f}\| \leq \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  - достаточно малое положительное число или нуль;

15) уравнение  $\bar{F}(x, v, f, \tilde{\omega}) = 0$  имеет единственное решение  $x \in X[\theta, T]$  при каждом  $v \in V[\theta, T]$  и каждом  $f \in \tilde{F}[\theta, T]$ .

Тогда  $\tilde{\omega}$  является приближенным решением задачи идентификации для  $\varepsilon$ -модели (1) при измерениях входа и выхода (2),(3), причем выполняется

неравенство  $\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\| \leq 2\left(\frac{c_x \varepsilon_2}{c_2} + \frac{c_v \varepsilon_1}{c_1} + c_w \varepsilon\right) + c_f \varepsilon_0$ , где  $\bar{\omega}$  - искомое решение этой задачи.

Доказательство. В силу условий 5),6),7),8),9),10) выполняются неравенства

$$\|\bar{v} - \tilde{v}\| \leq \frac{2\varepsilon_1}{c_1}, \|\bar{x} - \tilde{x}\| \leq \frac{2\varepsilon_2}{c_2}, \text{ так как } \|P(\bar{v}) - P(\tilde{v})\| = \|P(\bar{v}) - y + y - P(\tilde{v})\| \leq \\ \leq \|y - P(\bar{v})\| + \|y - P(\tilde{v})\| \leq 2\varepsilon_1 \text{ и } \|P(\bar{v}) - P(\tilde{v})\| \leq c_1 \|\bar{v} - \tilde{v}\|, \text{ (аналогично и для } \|\bar{x} - \tilde{x}\|).$$

Далее в силу условий 11),12),13),14) имеем

$$\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\| = \|G(\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}, \bar{\omega}) - G(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega})\| \leq c_x \|\bar{x} - \tilde{x}\| + c_v \|\bar{v} - \tilde{v}\| + c_f \|\bar{f} - \tilde{f}\| + \\ + c_w \|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\| \leq \frac{2c_x \varepsilon_2}{c_2} + \frac{2c_v \varepsilon_1}{c_1} + c_f \varepsilon_0 + c_w (\|\bar{\omega}\| + \|\tilde{\omega}\|) = 2\left(\frac{c_x \varepsilon_2}{c_2} + \frac{c_v \varepsilon_1}{c_1}\right) + c_f \varepsilon_0 + \\ + c_w (\|\bar{F}(\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}, \bar{\omega})\| + \|\bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega})\|) \leq 2\left(\frac{c_x \varepsilon_2}{c_2} + \frac{c_v \varepsilon_1}{c_1} + c_w \varepsilon\right) + c_f \varepsilon_0.$$

Следовательно, и в силу условия 15),  $\tilde{\omega}$  является приближенным решением задачи идентификации для (1),(2),(3), причем выполняется указанное неравенство для отклонения  $\tilde{\omega}$  от искомого решения  $\bar{\omega}$ . Теорема доказана.

**Замечание 1.** Если оператор  $\bar{F}$  имеет вид  $\bar{F}(x, v, f, \omega) = F_1(x, v) - F_2(x, v, f, \omega)$ , то при практической идентификации имеет смысл взять  $\varepsilon$  согласно неравенству

$$\varepsilon \leq 0.01 \|F_1(\tilde{x}, \tilde{v})\|, \text{ так как в этом случае } \frac{\|F_1(\tilde{x}, \tilde{v}) - F_2(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega})\|}{\|F_1(\tilde{x}, \tilde{v})\|} \leq 0.01, \text{ т.е.}$$

невязка  $\|\bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega})\|$  достаточно мала.

Обсудим условия этой теоремы. Условия 1),2),3) означают, что в пространствах  $B_1^m[\theta, T], B_2^n[\theta, T], B_3^q[\theta, T]$  есть базисные системы элементов. Это могут быть системы степенных, тригонометрических, экспоненциальных и других вектор-функций, как часто бывает на практике. Условие 4) вообще говоря проверить затруднительно, так как  $\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}$  неизвестны, а известны могут быть только  $\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}$ , но если  $\varepsilon$ -модель строится из естественнонаучных законов (законов физики, электротехники, экономики, биологии, и т.д.) и

$\varepsilon \leq 0.01 \|F_1(\tilde{x}, \tilde{v})\|$ , согласно замечанию 1, то можно надеяться, что это условие выполняется. Проверка условий 5),6),12) сводится к решению задач на условный минимум функций многих переменных, которые довольно хорошо изучены и для них есть стандартные программы в широко известных пакетах, таких как Maple, Excel, MatLab. Условия 7),8) - это обобщенные условия Липшица, проверка которых обычно сводится к применению теоремы Лагранжа о среднем (формулы конечных приращений) и её обобщений. Условия 9),10) на практике проверить тоже затруднительно, так как  $\bar{x}, \bar{v}$  неизвестны, но в силу неравенств  $\|P(\bar{v}) - P(\tilde{v})\| \leq 2\varepsilon_1$  и  $\|P(\bar{v}) - P(\tilde{v})\| \leq c_1 \|\bar{v} - \tilde{v}\|$  естественно предположить, что  $c_1 \|\bar{v} - \tilde{v}\| \approx 2\varepsilon_1$  и аналогично  $c_2 \|\bar{x} - \tilde{x}\| \approx 2\varepsilon_2$ . Тогда получается приближенное неравенство  $\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\| \leq 2\left(\frac{c_x \varepsilon_2}{c_2} + \frac{c_v \varepsilon_1}{c_1} + c_w \varepsilon\right) + c_f \varepsilon_0$ , то есть приближенная оценка отклонения  $\tilde{\omega}$  от  $\bar{\omega}$ , которую можно использовать на практике. Условие 11) приводит к необходимости решать задачу на условный минимум в нормированном пространстве, т.е. к вариационной задаче, которой посвящены многие фундаментальные работы и книги (например [11],[12]), но если  $\omega$  - это вектор числовых параметров, то приходим снова к задаче условной минимизации функций многих переменных. Условие 13) сводится к аналитическому решению уравнения  $\bar{F}(x, v, f, \omega) = w$  относительно  $\omega$ , что можно делать с помощью методов функционального анализа (если  $\omega$  - вектор функциональных параметров) и приёмов обычного математического анализа (если  $\omega$  - вектор числовых параметров). Условие 14) тоже трудно проверить, так как  $\bar{f}$  неизвестно, но если  $\varepsilon$ -модель строится из естественнонаучных законов и  $\varepsilon_0 = 0.01 \|\tilde{f}\|$ , то можно надеяться, что оно выполняется. Условие 15) проверяется с помощью методов функционального анализа, теории дифференциальных и интегральных уравнений, краевых задач и т.д. и т.п., в зависимости от вида модели (см. например [10], [13],[14],[16],[18],[21]).

Учитывая эти замечания можно предложить следующий алгоритм идентификации, вытекающий из теоремы 1.

**Алгоритм №1.**

1. Положить  $N = 0$ .

2. Найти такие  $\tilde{\alpha}_i \in R^1, (i = \overline{0, N})$ , что  $\left\| y - P\left(\sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i \varphi_i\right) \right\| = \min_{\{\alpha_i\}} \left\| y - P\left(\sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_i\right) \right\|$  при

условии  $\sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_i \in V[\theta, T]$ .

3. Проверить неравенство  $\left\| y - P\left(\sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i \varphi_i\right) \right\| \leq \varepsilon_1$ . Если оно выполняется, то перейти

к пункту 4. Если - нет, то положить  $N = N_{np} + 1$ , где  $N_{np}$  - предыдущее значение  $N$ , и перейти к пункту 2.

4. Положить  $M = 0$ .

5. Найти такие  $\tilde{\beta}_i \in R^1, (i = \overline{0, M})$ , что  $\left\| z - Q\left(\sum_{i=0}^M \tilde{\beta}_i \psi_i\right) \right\| = \min_{\{\beta_i\}} \left\| z - Q\left(\sum_{i=0}^M \beta_i \psi_i\right) \right\|$  при

условии  $\sum_{i=0}^M \beta_i \psi_i \in X[\theta, T]$ .

6. Проверить неравенство  $\left\| z - Q\left(\sum_{i=0}^M \tilde{\beta}_i \psi_i\right) \right\| \leq \varepsilon_2$ . Если оно выполняется, то

перейти к пункту 7. Если - нет, то положить  $M = M_{np} + 1$  и перейти к пункту 5.

7. Найти такое  $c_1 \in R_+^1$ , что  $\left\| P(\bar{v}) - P(\tilde{v}) \right\| \leq c_1 \|\bar{v} - \tilde{v}\|$ , где  $\tilde{v} = \sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i \varphi_i$ .

8. Найти такое  $c_2 \in R_+^1$ , что  $\left\| Q(\bar{x}) - Q(\tilde{x}) \right\| \leq c_2 \|\bar{x} - \tilde{x}\|$ , где  $\tilde{x} = \sum_{i=0}^M \tilde{\beta}_i \psi_i$ .

9. Найти такое  $\tilde{\omega} \in \Omega$ , что  $\left\| \bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, 0, \tilde{\omega}) \right\| = \min_{\omega \in \Omega} \left\| \bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, 0, \omega) \right\|$ .

10. Положить  $K = 0$ .



11. Найти такие  $\tilde{\gamma}_i \in R^1, (i = \overline{0, K})$ , что  $\left\| \bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^K \gamma_i g_i, \tilde{\omega}) \right\| = \min_{\{\gamma_i\}} \left\| \bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^K \gamma_i g_i, \tilde{\omega}) \right\|$

при условии  $\sum_{i=0}^K \gamma_i g_i \in \tilde{F}[\theta, T]$ .

12. Проверить неравенство  $\left\| \bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega}) \right\| \leq \varepsilon$ , где  $\tilde{f} = \sum_{i=0}^K \tilde{\gamma}_i g_i$ . Если оно

выполняется, то перейти к пункту 13. Если - нет, то положить  $K = K_{np} + 1$  и перейти к пункту 11.

13. Построить оператор  $G$ , при котором выполняются условия пункта 13) теоремы 1.

14. Положить  $\varepsilon_0 = 0.01 \left\| \tilde{f} \right\|$ .

15. Проверить условие 15) теоремы 1. Если оно выполняется, то перейти к пункту 16. Если - нет, то выдать ответ:  $\tilde{\omega}$  не является приближенным решением задачи идентификации.

16. Вычислить  $\varepsilon_\omega = 2\left(\frac{c_x \varepsilon_2}{c_2} + \frac{c_v \varepsilon_1}{c_1} + c_w \varepsilon\right) + c_f \varepsilon_0$ .

17. Выдать ответ:  $\tilde{\omega}$  является приближенным решением задачи идентификации для  $\varepsilon$ -модели (1) при измерениях (2),(3), причем выполняется приближенное неравенство  $\left\| \bar{\omega} - \tilde{\omega} \right\| \leq \varepsilon_\omega$ .

18. Конец алгоритма.

Приведем пример идентификации по теореме 1 и алгоритму №1.

**Пример 1.** Пусть  $\bar{v}_1(t)$ - основной капитал для внутренней частной экономики США в момент времени  $t$  в миллиардах долларов,  $\bar{v}_2(t)$ - отработанные человеко-часы в этой экономике в момент  $t$  в миллиардах,  $\bar{x}(t)$ - конечный продукт в этой экономике в момент  $t$  в миллиардах долларов,  $t \in [0, 4], t = 0 = \theta$  соответствует 1946 году,  $t = 1$  соответствует 1947 году,  $t = 2$  - 1948 году,  $t = 3$  - 1949 году,  $t = 4 = T$  - 1950 году,  $\bar{v}_1 \in C[0, 4], \bar{v}_2 \in C[0, 4], \bar{x} \in C[0, 4], C[0, 4]$  - пространство

непрерывных на отрезке  $[0,4]$  функций с нормой  $\|x\| = \max_{t \in [0,4]} |x(t)|$ . Тогда

$$\bar{v} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} \in V[0,4], \bar{x} \in X[0,4], \quad \text{где} \quad X[0,4] = \{x \in C[0,4] : x(t) \geq 0\},$$

$$V[0,4] = \{v = \{v_1, v_2\} : v_1 \in C[0,4], v_2 \in C[0,4], v_1(t) \geq 0, v_2(t) \geq 0\}, \|v\| = \|v_1\| + \|v_2\|.$$

Измерения входа и выхода объекта (внутренней частной экономики США) имеют вид

$$y_i = \{y_{1i}, y_{2i}\} = \{\bar{v}_1(t_i) + \xi_{1i}, \bar{v}_2(t_i) + \xi_{2i}\}, z_i = \bar{x}(t_i) + \eta_i, t_i = i, i = \overline{1,3}.$$

По данным из [15]

$$y_1 = \{204.203151, 109.310305\}, y_2 = \{212.31108, 110.02401\},$$

$$y_3 = \{196.20213, 109.10542\},$$

$$z_1 = 285.1, z_2 = 296.5, z_3 = 295.7, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.000005.$$

Будем строить  $\varepsilon$ -модель объекта согласно [15] в преобразованном (с помощью логарифмирования) виде

$$\ln x(t) = \omega_1 + \omega_2 t + \omega_3 [\ln v_1(t) - \ln v_2(t)] + \ln v_2(t) + f(t), t \in [0,4], \quad (4)$$

где  $\bar{f}(t)$  - неизмеряемые внешние возмущения действующие на объект в момент

$$\text{времени } t, \bar{f} \in \tilde{F}[0,4], \tilde{F}[0,4] = \{f \in C[0,4] : \|f\| \leq 1\},$$

$$v = \{v_1, v_2\} \in V[0,4], x \in X[0,4], \omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \in \Omega =$$

$$= \{\omega \in R^3 : \omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0, \omega_3 \in [0,1]\}, \|\omega\| = \max_{i=1,2,3} |\omega_i|, W = C[0,4].$$

Тогда  $\bar{F}(x, v, f, \omega) = F_1(x, v) - F_2(x, v, f, \omega)$ , где  $F_1(x, v)(t) = \ln x(t) - \ln v_2(t)$ ,

$$F_2(x, v, f, \omega)(t) = \omega_1 + \omega_2 t + \omega_3 [\ln v_1(t) - \ln v_2(t)] + f(t).$$

Возьмем  $\varepsilon = 0.0001, \varepsilon_0 = 0.0002, \varphi_i(t) = \psi_i(t) = g_i(t) = t^i$ ,

$$\text{тогда } \tilde{v}_1(t) = 171.85021 + 44.47559 \times t - 12.12257 \times t^2, \tilde{v}_2(t) = 106.96431 +$$

$$+ 3.16215 \times t - 0.81615 \times t^2, \tilde{x}(t) = 257.72885 + 28.41174 \times t - 5.79587 \times t^2,$$

$$c_1 = c_2 = 1, \tilde{\omega}_1 = 0.76221, \tilde{\omega}_2 = 0.024, \tilde{\omega}_3 = 0.249,$$

$$\tilde{f}(t) = -0.00086 + 0.00355 \times t - 0.002785 \times t^2 + 0.00062 \times t^3.$$

Оператор  $G$  возьмем в виде  $G(x, v, f, w) = A^{-1} \mu$ , где  $A^{-1}$  - матрица обратная к

матрице  $A$  линейной алгебраической системы (относительно  $\omega$ )

$$\{\omega_1 + \omega_2 t_i + \omega_3 [\ln v_1(t_i) - \ln v_2(t_i)] = \ln x(t_i) - \ln v_2(t_i) - f(t_i) - w(t_i), t_i = i\}, i = 1, 2, 3,$$

а  $\mu$  - вектор правых частей этой системы, то есть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ln v_1(1) - \ln v_2(1) \\ 1 & 2 & \ln v_1(2) - \ln v_2(2) \\ 1 & 3 & \ln v_1(3) - \ln v_2(3) \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \ln x(1) - \ln v_2(1) - f(1) - w(1) \\ \ln x(2) - \ln v_2(2) - f(2) - w(2) \\ \ln x(3) - \ln v_2(3) - f(3) - w(3) \end{bmatrix}.$$

Тогда  $c_x = 0.13599, c_v = 13.70456, c_f = c_w = 38.77096, \varepsilon_\omega = 0.01564$ .

Таким образом приближенное решение задачи идентификации имеет вид  $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3\}$ , а  $\varepsilon$ -модель внутренней частной экономики США, построенная по данным 1947-1949 года, имеет вид (4), где  $\bar{\omega} \approx \tilde{\omega}$ , а  $\varepsilon = 0.0001$ , причем выполняется приближенное неравенство  $\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\| \leq 0.01564$ . Пример закончен.

## Часть 2.

**Определение 2.** Уравнение  $F(x, v, f) = 0$  назовем приближенной  $\varepsilon$ -моделью объекта, если:

- 1)  $F : X[\theta, T] \times V[\theta, T] \times \tilde{F}[\theta, T] \rightarrow W$  - непрерывный оператор;
- 2) уравнение  $F(x, v, f) = 0$  имеет единственное решение  $x \in X[\theta, T]$  при каждом  $v \in V[\theta, T]$  и  $f \in \tilde{F}[\theta, T]$ ;
- 3) выполняется неравенство  $\|F(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f})\| \leq \varepsilon$ , где  $\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}$  - некоторые приближения к  $\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}$ , а  $\varepsilon$  - достаточно малое положительное число или нуль.

Будем строить приближенную  $\varepsilon$ -модель в виде (1), тогда задача идентификации формулируется следующим образом.

**Задача идентификации:** по известным  $y, z, P, Q, \bar{F}, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  найти такое  $\omega \in \Omega$ , при котором уравнение  $\bar{F}(x, v, f, \omega) = 0$  является приближенной  $\varepsilon$ -моделью объекта.

**Теорема 2.** Пусть

- 1)  $\{\varphi_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$  - полная система элементов в  $V_1^m[\theta, T]$ ;

2)  $\{\psi_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$  - полная система элементов в  $B_2^n[\theta, T]$ ;

3)  $\{g_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$  - полная система элементов в  $B_3^q[\theta, T]$ ;

4) найдутся такие  $N$  и  $\left\{ \tilde{\alpha}_i \in R^1, i = \overline{0, N} \right\}$ , что

$$\left\| y - P\left(\sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i \varphi_i\right) \right\| = \min_{\{\alpha_i\}} \left\| y - P\left(\sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_i\right) \right\| \leq \varepsilon_1, \text{ где } \sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_i \in V[\theta, T];$$

5) найдутся такие  $M$  и  $\left\{ \tilde{\beta}_i \in R^1, i = \overline{0, M} \right\}$ , что

$$\left\| z - Q\left(\sum_{i=0}^M \tilde{\beta}_i \psi_i\right) \right\| = \min_{\{\beta_i\}} \left\| z - Q\left(\sum_{i=0}^M \beta_i \psi_i\right) \right\| \leq \varepsilon_2, \text{ где } \sum_{i=0}^M \beta_i \psi_i \in X[\theta, T];$$

6) найдется такое  $\tilde{\omega}$ , что  $\|\bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, 0, \tilde{\omega})\| = \min_{\omega \in \Omega} \|\bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, 0, \omega)\|$ , где

$$\tilde{v} = \sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i \varphi_i, \tilde{x} = \sum_{i=0}^M \tilde{\beta}_i \psi_i;$$

7) найдутся такие  $K$  и  $\left\{ \tilde{\gamma}_i \in R^1, i = \overline{0, K} \right\}$ , что

$$\left\| \bar{F}\left(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^K \tilde{\gamma}_i g_i, \tilde{\omega}\right) \right\| = \min_{\{\gamma_i\}} \left\| \bar{F}\left(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^K \gamma_i g_i, \tilde{\omega}\right) \right\| \leq \varepsilon, \text{ где } \sum_{i=0}^K \gamma_i g_i \in \tilde{F}[\theta, T];$$

8) уравнение  $\bar{F}(x, v, f, \tilde{\omega}) = 0$  имеет единственное решение  $x \in X[\theta, T]$  при каждом  $v \in V[\theta, T]$  и каждом  $f \in \tilde{F}[\theta, T]$ .

Тогда  $\omega = \tilde{\omega}$  является решением задачи идентификации для приближенной

$\varepsilon$ -модели (1) при измерениях входа и выхода (2),(3), а  $\tilde{f} = \sum_{i=0}^K \tilde{\gamma}_i g_i$ .

Доказательство. В силу условий 1),2),3),4),5),6),7) выполняются приближенные равенства  $\tilde{v} \approx \bar{v}, \tilde{x} \approx \bar{x}$  и  $\tilde{f} \approx \bar{f}$ , следовательно в силу 8)  $\omega = \tilde{\omega}$  является решением задачи идентификации для приближенной  $\varepsilon$ -модели (1) при измерениях (2),(3). Теорема доказана.

Аналогично алгоритму №1 можно сформулировать алгоритм №2 вытекающий из теоремы 2.

**Алгоритм №2.**

1. Положить  $N = 0$ .

2. Найти такие  $\tilde{\alpha}_i \in R^1, (i = \overline{0, N})$ , что  $\left\| y - P\left(\sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i \varphi_i\right) \right\| = \min_{\{\alpha_i\}} \left\| y - P\left(\sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_i\right) \right\|$  при

условии  $\sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_i \in V[\theta, T]$ .

3. Проверить неравенство  $\left\| y - P\left(\sum_{i=0}^N \tilde{\alpha}_i \varphi_i\right) \right\| \leq \varepsilon_1$ . Если оно выполняется, то перейти

к пункту 4. Если – нет, то положить  $N = N_{np} + 1$ , где  $N_{np}$  - предыдущее значение  $N$  и перейти к пункту 2.

4. Положить  $M = 0$ .

5. Найти такие  $\tilde{\beta}_i \in R^1, (i = \overline{0, M})$ , что  $\left\| z - Q\left(\sum_{i=0}^M \tilde{\beta}_i \psi_i\right) \right\| = \min_{\{\beta_i\}} \left\| z - Q\left(\sum_{i=0}^M \beta_i \psi_i\right) \right\|$  при

условии  $\sum_{i=0}^M \beta_i \psi_i \in X[\theta, T]$ .

6. Проверить неравенство  $\left\| z - Q\left(\sum_{i=0}^M \tilde{\beta}_i \psi_i\right) \right\| \leq \varepsilon_2$ . Если оно выполняется, то перейти к

пункту 7. Если - нет, то положить  $M = M_{np} + 1$  и перейти к пункту 5.

7. Найти такое  $\tilde{\omega} \in \Omega$ , что  $\left\| \bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, 0, \tilde{\omega}) \right\| = \min_{\omega \in \Omega} \left\| \bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, 0, \omega) \right\|$ .

8. Положить  $K = 0$ .

9. Найти такие  $\tilde{\gamma}_i \in R^1, (i = \overline{0, K})$ , что  $\left\| \bar{F}\left(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^K \tilde{\gamma}_i g_i, \tilde{\omega}\right) \right\| = \min_{\{\gamma_i\}} \left\| \bar{F}\left(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^K \gamma_i g_i, \tilde{\omega}\right) \right\|$

при условии  $\sum_{i=0}^K \gamma_i g_i \in \tilde{F}[\theta, T]$ .

10. Проверить неравенство  $\|\bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega})\| \leq \varepsilon$ , где  $\tilde{f} = \sum_{i=0}^K \tilde{\gamma}_i g_i$ . Если оно выполняется, то перейти к пункту 11. Если - нет, то положить  $K = K_{np} + 1$  и перейти к пункту 9.
11. Проверить условие 8) теоремы 2. Если оно выполняется, то перейти к пункту 12. Если - нет, то выдать ответ:  $\tilde{\omega}$  не является решением задачи идентификации.
12. Выдать ответ:  $\tilde{\omega}$  является решением задачи идентификации для приближенной  $\varepsilon$ -модели (1) при измерениях (2),(3).
13. Конец алгоритма.

Приведём пример идентификации по теореме 2 и алгоритму №2.

**Пример 2.** Пусть  $\bar{x}(t)$ - сумма основных производственных фондов (ОПФ) рыболовецкой и рыбопродуктовой отрасли Российской Федерации в момент времени  $t$  в миллиардах руб., а  $\bar{v}(t)$ - внешние инвестиции в эту отрасль в момент  $t$  в миллиардах руб. в год. Время измеряется в годах на отрезке  $[0,6]$ , где  $t=0 = \theta$  соответствует 2004 году, а  $t=6 = T - 2010$  году.

Согласно [16] и [17] математическая модель одноотраслевой экономики с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -px(t) + qx(t-h) + v(t), t \in [0, T], \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \xi \leq 0, \end{cases}$$

где  $v \in L_2[0, T], x \in D_2[0, T], \varphi$  - непрерывная начальная функция,  $p \in R_+^1, q \in R^1, h \in R_+^1, v(t) \in R^1, x(t) \in R_+^1, \varphi(\xi) \in R_+^1, L_2[0, T]$  - пространство квадратично суммируемых на  $[0, T]$  функций,  $D_2[0, T]$ - пространство абсолютно непрерывных на  $[0, T]$  функций с производной из  $L_2[0, T]$ .

Согласно [18] эту модель можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -px(t) + qx_h(t) + q\varphi^h(t) + v(t), t \in [0, T], \\ x(0) = \varphi(0), \end{cases}$$

$$\text{где } x_h(t) = \begin{cases} x(t-h) & \text{при } t-h \in [0, T], \\ 0 & \text{при } t-h \notin [0, T], \end{cases} \quad \varphi^h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t-h \in [0, T], \\ \varphi(t-h) & \text{при } t-h \notin [0, T]. \end{cases}$$

Модифицируем эту модель учитывая, что не все инвестиции идут на увеличение ОПФ (коэффициент  $r$ ), а действие неизмеряемых внешних воздействий  $\bar{f}$  (таких как погода, аварии, изменения коэффициентов во времени, человеческие ошибки и т.д. и т.п., в том числе и действие предистории  $\varphi$ ) будем учитывать с помощью функции  $f(t)$  в виде слагаемого в правой части уравнения.

То есть получаем модель вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + px(t) - qx_h(t) - rv(t) - f(t), t \in [0, 6], \\ x(0) - \alpha = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где  $v \in L_2[0, 6] = B_1^1[\theta, T]$ ,  $x \in D_2[0, 6] = B_2^1[\theta, T]$ ,  $f \in L_2[0, 6] = B_3^1[\theta, T]$ ,

$x(t) \geq 0, t \in [0, 6]$ ,  $L_2[0, 6]$  - пространство квадратично суммируемых на  $[0, 6]$

функций  $v$  с нормой  $\|v\| = \left\{ \int_0^6 [v(t)]^2 dt \right\}^{0.5}$ , а  $D_2[0, 6]$  - пространство абсолютно-

непрерывных на  $[0, 6]$  функций  $x$  с производной из  $L_2[0, 6]$  и нормой

$$\|x\| = \left\{ [x(0)]^2 + \int_0^6 [\dot{x}(t)]^2 dt \right\}^{0.5}.$$

Здесь

$$\bar{F}(x, v, f, \omega)(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) + px(t) - qx_h(t) - rv(t) - f(t), t \in [0, 6], \\ x(0) - \alpha, \end{cases}$$

$W = L_2[0, 6] \times R^1$  - линейное пространство с нормой  $\|g, \mu\| = \left\{ \mu^2 + \int_0^6 [g(t)]^2 dt \right\}^{0.5}$ ,

$g \in L_2[0, 6]$ ,  $\mu \in R^1$ ,  $\{g, \mu\} \in W$ ,  $\omega = \{p, q, h, r, \alpha\}$ , а  $\alpha = \varphi(0) \in R_+^1$ .

Из практических соображений можно считать, что  $p \in [0, 1]$ ,  $q \in [0, 2]$ ,  $h \in [0.1, 2]$ ,  $r \in [0, 1]$ .

Будем строить приближенную  $\varepsilon$ -модель в виде (5), положив  $V[0,6] = C[0,6]$ ,  $X[0,6] = \{x \in D_2[0,6] : x(t) \geq 0\}$ ,  $\tilde{F}[0,6] = L_2[0,6]$ , где  $C[0,6]$ -пространство непрерывных на  $[0,6]$  функций с нормой  $\left\{ \int_0^6 [v(t)]^2 dt \right\}^{0.5}$ .

А измерения входа и выхода объекта (рыбоводческой и рыболовецкой отрасли РФ) имеют вид

$$y_0 = \bar{v}(t_0) + \xi_0 = 3.1,$$

$$y_1 = \bar{v}(t_1) + \xi_1 = 3.1, y_2 = \bar{v}(t_2) + \xi_2 = 4.5, y_3 = \bar{v}(t_3) + \xi_3 = 4.8,$$

$$y_4 = \bar{v}(t_4) + \xi_4 = 5.0, y_5 = \bar{v}(t_5) + \xi_5 = 4.6, t_i = i, i = \overline{0,5},$$

$$z_0 = \bar{x}(t_0) + \eta_0 = 56.7, z_1 = \bar{x}(t_1) + \eta_1 = 55.1, z_2 = \bar{x}(t_2) + \eta_2 = 59.9, z_3 = \bar{x}(t_3) + \eta_3 = 79.3,$$

$$z_4 = \bar{x}(t_4) + \eta_4 = 91.2, z_5 = \bar{x}(t_5) + \eta_5 = 97.4, \text{ где } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.15.$$

Эти измерения можно записать в виде (2),(3), полагая  $y = \{y_0, y_1, \dots, y_5\}$ ,

$$z = \{z_0, z_1, \dots, z_5\}, P(\bar{v}) = \{\bar{v}(t_0), \bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_5)\}, Q(\bar{x}) = \{\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1), \dots, \bar{x}(t_5)\},$$

$$Y = Z = R^6, \xi = \{\xi_0, \dots, \xi_5\}, \eta = \{\eta_0, \dots, \eta_5\}, \|\xi\| = \left( \sum_{i=0}^5 \xi_i^2 \right)^{0.5}, \|\eta\| = \left( \sum_{i=0}^5 \eta_i^2 \right)^{0.5}.$$

Возьмем  $\varphi_i(t) = \psi_i(t) = g_i(t) = t^i, (i = 0, 1, 2, \dots)$ , тогда согласно условиям 4) и 5)

теоремы 2 получаем

$$\tilde{v}(t) = \sum_{i=0}^5 \tilde{\alpha}_i t^i = 3.1 - 3.4t + 5.6375t^2 - 2.75t^3 + 0.5625t^4 - 0.04167t^5,$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=0}^5 \tilde{\beta}_i t^i = 56.7 + 16.21787t - 36.97842t^2 + 24.4947t^3 - 5.7165t^4 + 0.4464t^5, \text{ где}$$

$$N = M = 5.$$

Параметр  $\tilde{p} = 0.693$  согласно данным из [19].

Тогда  $\tilde{\omega} = \{\tilde{\alpha}, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{h}, \tilde{r}\} = \{56.7, 0.693, 0.774, 0.1, 0.823\}$ , где



$$(\tilde{\alpha}, \tilde{q}, \tilde{h}, \tilde{r}) = \arg \min_{(\alpha, q, h, r)} \left\{ [\tilde{x}(0) - \alpha]^2 + \int_0^6 [\dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{p}\tilde{x}(t) - q\tilde{x}_h(t) - r\tilde{v}(t)]^2 dt \right\}^{0.5} \text{ при}$$

сформулированных выше ограничениях (согласно теореме 2). И наконец  $\tilde{f}$  можно взять в виде

$$\tilde{f}(t) = \dot{\tilde{x}}(t) + \tilde{p}\tilde{x}(t) - \tilde{q}\tilde{x}_h(t) - \tilde{r}\tilde{v}(t), t \in [0, 6]. \text{ При этом } \|\bar{F}(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega})\| = 0, \text{ а } K = 5.$$

Таким образом получаем приближенную  $\varepsilon$ -модель объекта в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \tilde{p}x(t) - \tilde{q}x_h(t) - \tilde{r}v(t) - f(t) = 0, t \in [0, 6], \\ x(0) - \tilde{\alpha} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\tilde{\alpha} = \tilde{x}(0) = z_0 = 56.7$ , а  $\varepsilon = 0$ . Пример закончен.

**Замечание 2.** Мы рассматриваем задачу параметрической идентификации имея в виду, что вектор параметров принадлежит некоторому нормированному пространству. То есть параметрами модели могут быть не только числа, но и функции одной или нескольких переменных.

**Замечание 3.** При идентификации  $\varepsilon$ -модели по теореме 1 мы получаем приближенную оценку  $\tilde{f}$  неизмеряемых внешних воздействий  $\bar{f}$  на объект, то есть приближенно идентифицируем  $\bar{f}$ . Аналогично и для теоремы 2.

**Замечание 4.** Задача идентификации параметров модели при наличии неизмеряемых (ненаблюдаемых) внешних воздействий рассматривалась в [1] - [4] и [20] в вероятностной постановке.

**Замечание 5.** Вычисления проводились при помощи стандартных программ в пакете Maple с точностью до десятого знака после запятой. Результаты вычислений указаны с округлением по обычным правилам.

**Замечание 6.** Мы считаем, что  $\tilde{x} \approx \bar{x}$ , если выполняется неравенство  $\|\bar{x} - \tilde{x}\| \leq 0.01\|\tilde{x}\|$ , где  $\bar{x} \in X, \tilde{x} \in X, X$  - нормированное пространство, но не всегда знак приближённого равенства означает выполнение этого неравенства.

### **Заключение.**

Рассмотрена задача нахождения параметров  $\varepsilon$ -модели и приближённой  $\varepsilon$ -модели реального объекта по измерениям его входа и выхода при наличии неизмеряемых внешних воздействий на этот объект (задача идентификации).

Получены теоремы и алгоритмы, дающие решение этой задачи. Эффективность этих алгоритмов проверена на практических примерах.

В результате решения задачи идентификации получена приближённая оценка неизмеряемых внешних воздействий, то есть произведена приближённая идентификация этих воздействий.

Вектор внешних воздействий можно рассматривать как вектор параметров, который надо идентифицировать. Таким образом задача идентификации сводится к случаю, когда имеются только измеряемые входные воздействия, который рассмотрен в работах [5] - [9] и [19] при условии, что искомыми параметрами могут быть не только числа, но и функции (элементы функциональных пространств).

Статья имеет прикладную направленность и рекомендуется для практического использования при решении задач построения математических моделей реальных объектов.

### **Список литературы**

1. Сейдж Э.П., Мелса Д.Л. Идентификация систем управления.- М.:Наука, 1974. - 248 с.
2. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления.- М.:Мир, 1975.-684 с.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем.- М.:Мир, 1979.-302 с.
4. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя.- М.:Наука, 1991.- 432 с.
5. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. К вопросу об идентификации функционально-дифференциальных систем с последействием // Известия вузов. Математика. 1998.№3.С.16-27.

6. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Об идентификации некоторых классов операторных моделей эволюционного типа // Известия вузов. Математика. 2004. №6. С.30-40.
7. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Гарантированные оценки искомым параметров в задаче идентификации математических моделей реальных объектов // Наука и бизнес: пути развития.- М.:ТМБпринт, 2014. №3(33).С.47-52.
8. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Приближенная идентификация при измерениях с погрешностями // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. 2010, №15.С.53-61.
9. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Идентификация математических моделей реальных объектов.- Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2017.- 330 с. (ISBN: 978-3-659-81826-4).
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.-изд.3, перераб.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.-752 с.
11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач.- М.: Наука, 1974. - 180 с.
12. Азбелев Н.В., Култышев С.Ю., Цалюк В.З. Функционально-дифференциальные уравнения и вариационные задачи.- Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2006. -122 с.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.: Наука, 1968.-496 с.
14. Треногин В.А. Функциональный анализ.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.-495 с.
15. Кротов В.Ф., Лагоша Б.А., Лобанов С.М., Данилина Н.И., Сергеев С.И. Основы теории оптимального управления.- М.: Высшая школа, 1990.-428 с.
16. Максимов В.П. Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды.- Пермь: ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003.-306с.
17. Симонов П.М. Экономико-математическое моделирование. Динамические модели экономики: учебное пособие. Часть 2.- Пермь: ПГУ, 2009.-270 с.

18. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.- М.:Наука.Гл.ред.физ.-мат.лит., 1991.-280 с.
19. Култышев С.Ю., Култышева Л.М., Харитонов Д.Е. Идентификация математической модели одноотраслевой экономики // Наука и бизнес: пути развития. - М.: ТМБпринт, 2015, №6(48), С.81-84.
20. Гельфандбейн Я.А., Колосов Л.В. Ретроспективная идентификация возмущений и помех.- М.: изд."Советское радио", 1972.-232 с.
21. Бравый Е.И. Разрешимость краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений.- Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011.-372 с.