ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2011
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Управление в нелинейных системах

ВИБРАЦИОННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И ПРОБЛЕМА БРОКЕТТА

Г.А.Леонов, М.М.Шумафов

Аннотация

Настоящая работа посвящена изложению методов решения проблемы Брокетта о стабилизации линейных систем управления нестационарной обратной связью. Работа состоит из двух частей. В первой части рассматриваются непрерывные линейные системы управления, а во второй – дискретные системы. В первой части рассматриваются два подхода для решения проблемы Брокетта. Первый подход позволяет получить низкочастотную стабилизацию, а второй – высокочастотную. Оба подхода позволяют получить необходимые и достаточные условия стабилизируемости двумерных (а первый подход – также и трехмерных) линейных систем со скалярными входами и выходами. Во второй части рассматривается аналог проблемы Брокетта для дискретных линейных систем управления. Даны достаточные условия низкочастотной стабилизации линейных дискретных систем с помощью кусочно-постоянной периодической с достаточно большим периодом обратной связи. Приведены необходимые и достаточные условия стабилизируемости двумерных дискретных систем. Во второй части рассматривается также проблема управления спектром матрицы монодромии для дискретных систем с периодической обратной связью.

Ключевые слова: Проблема Брокетта, стабилизация, линейная управляемая система, обратная связь, управление спектром матрицы.

Введение

Стабилизация верхнего положения равновесия маятника вертикальными высокочастотными вибрациями точки подвеса с малой амплитудой [1,2] явилась одним из значительных открытий двадцатого века.

Этот эффект в настоящее время широко известен, демонстрируется студентам многих специальностей и вошел во многие книги и учебники [3–10].

Дальнейшее развитие идей высокочастотной стабилизации привело к появлению нового научного направления в теории управления — вибрационного управления (vibration control) [11–17].

Эти исследования естественным образом привели Р.Брокетта к формулировке следующей проблемы [18].

1) Пусть заданы три постоянные матрицы (A, b, c). При каких условиях существует зависящая от времени матрица $s(t)$, такая что система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bs(t)c^*x, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{0.1}$$

асимптотически устойчива?

Здесь $*$ — операция транспонирования и (в комплексном случае) комплексного сопряжения.

Сформулируем аналог этой проблемы для дискретных систем

2) Пусть заданы три постоянные матрицы (A, b, c). При каких условиях существует зависящая от времени матрица s_k, такая что система

$$x_{k+1} = Ax_k + bs_kc^*x_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^n \tag{0.2}$$

асимптотически устойчива?

Сразу после публикации этой проблемы были предложены два различных подхода к ее решению.

Первый был основан на развитии методов высокочастотной стабилизации и вибрационного управления [11–17, 19–21].

Второй – на развитии методов низкочастотной стабилизации [22–27].

Дальнейшее развитие второй подход получил в [28].

Разработанные вначале в рамках качественной теории дифференциальных уравнений методы низкочастотной стабилизации оказались актуальными для стабилизации кранов [29].

В настоящем обзоре описаны методы высокочастотной и низкочастотной стабилизации, развитые для решения проблемы Брокетта. Здесь мы сформулируем еще один аналог проблемы Брокетта, который актуален для новой теории — теории управления хаосом [30–34].

3) Пусть заданы три постоянные матрицы (A, b, c). При каких условиях существует зависящая от времени функция $s(t) \geqslant 0$, такая что система

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bc^* x(t - s(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

асимптотически устойчива?

В отличие от обычной стационарной стабилизации ($s(t) \equiv \mathrm{const}$) в проблеме Брокетта требуется найти переменную стабилизирующую матрицу $s(t)$. Поэтому проблему Брокетта можно переформулировать следующим образом.

Насколько введение зависимых от времени t матриц $s(t)$ расширяет возможности обычной стационарной стабилизации?

Отметим, что стабилизационная проблема 3) является нетривиальной и для постоянной величины s (см. [35, 36]).

В задачах стабилизации механических систем часто оказывается необходимым рассматривать более узкий класс стабилизирующих матриц $s(t)$, а именно, периодические матрицы $s(t)$, имеющие нулевое среднее на периоде $[0, T] : \int\limits_0^T s(t)dt = 0.$

НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ

Здесь мы рассмотрим управляемые линейные системы с непрерывным временем. Для таких систем изучается проблема Брокетта. В разделе I рассматривается низкочастотная, а в разделе II – высокочастотная нестационарная стабилизация линейных систем.

I. НЕСТАЦИОНАРНАЯ НИЗКОЧАСТОТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В настоящем разделе построены алгоритмы нестационарной низкочастотной стабилизации линейных управляемых стационарных систем в классе кусочно-постоянных периодических функций, решающих в ряде случаев проблему Брокетта. Полученные результаты применяются к двумерным и трехмерным системам. Для последних даны необходимые и достаточные условия стабилизируемости.

§ 1. Низкочастотная стабилизация верхнего положения равновесия маятника

Прежде чем перейти к проблеме Брокетта и к алгоритмам построения соответствующих стабилизирующих функций $s(t)$ для системы (0.1), мы рассмотрим сначала классическую задачу о стабилизации верхнего положения равновесия маятника с вибрирующей точкой подвеса.

Рассмотрим колебания маятника, который может свободно вращаться в определенной вертикальной плоскости вокруг своей точки подвеса. Предположим, что точка подвеса совершает в вертикальном направлении колебания с некоторой амплитудой и частотой.

Спрашивается, *может ли верхнее, обычно неустойчивое, положение равновесия маятника стать устойчивым ?*

Как показано в работах [1-10] неустойчивое верхнее положение равновесия маятника может сделаться устойчивым при достаточно быстрых колебаниях точки подвеса, когда точка подвеса совершает в вертикальном направлении гармонические колебания $y = a\sin\omega t$ или $y = a\cos\omega t$ с малой амплитудой a и высокой частотой ω. Этот хорошо известный эффект *высокочастотной* стабилизации верхнего положения равновесия мы рассмотрим позже в следующем разделе.

Здесь же мы рассмотрим возможность стабилизации верхнего положения равновесия маятника при *низкочастотных* колебаниях точки подвеса. Для рассмотрения этого интересного явления составим уравнение колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса.

Как хорошо известно, уравнение колебаний маятника с покоящейся точкой подвеса в предположении, что трение пропорционально скорости, имеет вид

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \nu_0^2 \sin\theta = 0 \quad (\nu_0^2 = g/\ell). \tag{1.1}$$

Здесь θ – угол отклонения, отсчитываемый от нижнего положения равновесия, $\alpha > 0$ – коэффициент трения, $\nu_0 = \sqrt{g/\ell}$ – собственная частота малых колебаний, ℓ – длина маятника, g – ускорение свободного падения.

Пусть точка подвеса совершает колебания в вертикальном направлении по закону $y = y(t)$, где $y(t)$ – некоторая периодическая функция. Чтобы составить уравнение колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса воспользуемся *принципом относительности*, согласно которому движение маятника с вертикально вибрирующей точкой подвеса эквивалентно движению маятника с покоящейся точкой подвеса, находящемуся в поле "силы тяжести" с ускорением $g + y''(t)$. Поэтому, заменяя в (1.1) g на $g + y''(t)$, получим искомое уравнение

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \frac{g + y''(t)}{\ell}\sin\theta = 0. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) допускает стационарное решение $\theta(t) \equiv \pi$, соответствующее верхнему положению равновесия маятника, стационарное решение $\theta(t) \equiv 0$ соответствует нижнему положению равновесия маятника.

Линеаризуя дифференциальное уравнение (1.2) вблизи положения равновесия $\theta = \pi$, получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} - (\nu_0^2 + s(t))\varphi = 0, \tag{1.3}$$

где $\varphi = \theta - \pi$, а $s(t) = y''(t)/\ell$ - с точностью до константы ускорение точки подвеса.

Исследуем уравнение (1.3). Задача состоит в нахождении функции $s(t)$ такой, чтобы положение равновесия ($\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$) уравнения (1.3) стало асимптотически устойчивым.

Перейдем от уравнения (1.3) к эквивалентной ему системе ($x_1 = \varphi$)

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + (\nu_0^2 + s(t))x_1, \tag{1.4}$$

где функция $s(t)$ подлежит определению.

Будем искать стабилизирующую функцию $s(t)$ в классе кусочно-постоянных периодических с периодом T функций вида

$$s(t) = \begin{cases} -\beta & \text{при } t \in [0, T/4), \\ \beta & \text{при } t \in [T/4, 3T/4), \\ -\beta & \text{при } t \in [3T/4, T), \end{cases} \tag{1.5}$$

$s(t + T) = s(t)$, имеющих нулевое среднее на периоде. Здесь β - некоторое положительное число, а T - варьируемый параметр.

Имеет место следующая

Теорема 1.1. *Пусть в системе (1.4), (1.5)*

$$\alpha^2 < 4(\beta - \nu_0^2). \tag{1.6}$$

Тогда для любого числа $K > 0$ существует число $T > K$ такое, что система (1.4) с функцией $s(t)$ вида (1.5) асимптотически устойчива.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что, не умаляя общности, можно считать $\beta - \nu_0^2 - \alpha^2/4 = 1$. Этого можно добиться всегда, сделав в уравнении (1.3) замену времени $\tau = \nu t$. Рассмотрим нужные нам свойства системы (1.4), когда $s(t) = \beta$ и $s(t) = -\beta$.

При $s(t) = \beta$ система (1.4) имеет седловую особую точку $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ с неустойчивым многообразием $M = \{x_2 = \ell_1 x_1\}$ и устойчивым многообразием $L = \{x_2 = \ell_2 x_1\}$, где

$$\ell_1 = \ -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + (\beta + \nu_0^2)},$$

$$\ell_2 = \ -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + (\beta + \nu_0^2)}.$$

В силу неравенства (1.6) характеристический многочлен системы (1.4) при $s(t) = -\beta$ имеет комплексно-сопряженные корни $-\alpha/2 \pm i$ и, следовательно, положение равновесия (0,0) есть устойчивый фокус.

Обозначим фазовые потоки системы (1.4) при $s(t) = \beta$ и $s(t) = -\beta$ через $\{f^t\}$ и $\{g^t\}$ соответственно. Поток $\{f^t\}$ состоит из сжатий в $e^{-\ell_2 t}$ раз в направлении прямой L и одновременного растяжения в $e^{\ell_1 t}$ раз в направлении прямой M, а поток $\{g^t\}$ аффинно эквивалентен семейству сжатий в $e^{\alpha t/2}$ раз с одновременным вращением на угол t.

Ясно, что существует число $T_1 > 0$ такое, что линейный оператор g^{T_1} преобразует прямую M в прямую L. Далее, прямую M в прямую L переводят также операторы $g^{T_1 + 2\pi j}, \quad j \in \mathbb{Z}$.

Покажем теперь, что в качестве периода T функции $s(t)$ можно выбрать значение $2(T_1 + 2\pi j)$ с достаточно большим j. Для этого рассмотрим единичный круг $E_1 = \{x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$.

Покажем, что оператор монодромии $H = h_0^T = f_{3T/4}^T g_{T/4}^{3T/4} f_0^{T/4}$ системы (1.4) переводит круг E_1 в эллипс, лежащий в круге $E_{1/2} = \{x_1^2 + x_2^2 \leqslant \frac{1}{4}\}$ радиуса 1/2.

Так как на промежутке $[0, T/4)$ мы имеем фазовый поток $\{f^t\}$ системы (1.6), то преобразование $f_0^{T/4}$ за время от $t = 0$ до $t = T/4$ переведет круг E_1 в эллипс, лежащий в ε-окрестности U_ε прямой M, где $\varepsilon = \mu_1 e^{\ell_2 T/4}$.

При этом также будем иметь

$$x_1(T/4)^2 + x_2(T/4)^2 \leqslant \mu_2^2 e^{\ell_1 T/2}. \tag{1.7}$$

Здесь $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$ - некоторые числа. Таким образом, образ круга E_1 при преобразовании $f_0^{T/4}$ будет лежать в пересечении ε-окрестности U_ε и круга K_1 радиуса $\mu_2 e^{\ell_1 T/4}$ с центром в начале координат.

На промежутке времени $[T/4, 3T/4)$ действует фазовый поток $\{g^t\}$. Поэтому в результате действия линейного оператора $g_{T/4}^{3T/4} = g_0^{T/2}$ область U_ε перейдет в $\mu_3\varepsilon$-окрестность $U_{\mu_3\varepsilon}$ прямой L. Здесь $\mu_3 > 0$ - некоторое число. Так как $g_0^{T/2}$ есть сжатие с одновременным вращением, то из соотношения (1.7) следует, что

$$x_1(3T/4)^2 + x_2(3T/4)^2 \leqslant \mu_2^2 e^{\ell_1 T/2}. \tag{1.8}$$

Следовательно, в результате преобразования $g_{T/4}^{3T/4} f_0^{T/4}$ образ круга E_1 будет лежать в пересечении области $U_{\mu_3\varepsilon}$ с кругом K_1.

На промежутке $[3T/4, T)$ снова действует фазовый поток $\{f^t\}$. Поэтому в результате действия оператора $f_{3T/4}^{T} = f_0^{T/4}$ область $U_{\mu_3\varepsilon}$ перейдет в ε_1-окрестность U_{ε_1} прямой L, где

$$\varepsilon_1 = \mu_3\varepsilon \cdot \mu_4 e^{\ell_1 T/4} = \mu_4\mu_3\mu_1 e^{(\ell_1+\ell_2)T/4}.$$

Здесь μ_4 - некоторое положительное число. При этом с учетом (1.8)

$$x_1(T)^2 + x_2(T)^2 \leqslant \mu_5^2\mu_2^2 e^{(\ell_1+\ell_2)T/2},$$

где $\mu_5 > 0$ - некоторое число.

Следовательно, образ Hx любой точки $x = (x_1, x_2) \in E_1$ при отображении H за время от $t = 0$ до $t = T$ лежит в пересечении окрестности U_{ε_1} и круга K_2 радиуса $\mu_5\mu_2 e^{(\ell_1+\ell_2)T/4}$ с центром в начале координат.

Так как $\ell_1 + \ell_2 = -\alpha < 0$, то выбирая число T достаточно большим, можно добиться выполнения неравенства

$$\mu_5\mu_2 e^{(\ell_1+\ell_2)T/4} < 1/2.$$

Итак, оператор монодромии H переводит круг E_1 в эллипс, лежащий в круге $E_{1/2}$ радиуса $1/2 : HE_1 \subset E_{1/2.}$ Из последнего соотношения и линейности оператора H следует, что H есть сжимающий оператор в $\mathbb{R}^2$:

$$|Hx| < |x|/2 \quad \text{для любого} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Поэтому при любом $x \in \mathbb{R}^2$ имеем: $H^k x \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда вытекает асимптотическая устойчивость системы (1.4), (1.5). Теорема 1.1 доказана.

Замечание. Описанный в доказательстве теоремы алгоритм стабилизации системы (1.4) весьма прост и состоит в следующем.

Во-первых, с помощью фазового потока $\{f^t\}$ системы (1.4), $s(t) = \beta$, совершается сжатие фазового пространства $\mathbb{R}^2$ в направлении устойчивого многообразия L системы и растяжение в направлении её неустойчивого многообразия M, при этом сжатие происходит быстрее, чем растяжение. *Во-вторых,* после переключения с траекторий системы (1.4), $s(t) = \beta$, на траектории системы (1.4), $s(t) = -\beta$, неустойчивое многообразие M под действием фазового потока $\{g^t\}$ системы поворачивается так, чтобы достичь к следующему переключению с потока $\{g^t\}$ на поток $\{f^t\}$ его совпадения с устойчивым многообразием L. *В-третьих,* действуя снова фазовым потоком $\{f^t\}$ осуществляется превалирование сжатия над растяжением и в целом к моменту времени $t = T$ полностью ликвидируется растяжение, погружая траектории в шар сколь угодно малого радиуса.

§ 2. Проблема Брокетта в классе кусочно-постоянных периодических матриц

Рассмотрим теперь проблему Брокетта, сформулированную во введении. При ее решении мы будем использовать идеи предыдущего параграфа.

1. Основные предположения. Предположим, что существуют вещественные постоянные матрицы s_1 и s_2 такие, что линейные системы

$$\dot{x} = (A + b(cs_j)^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n \qquad (j = 1, 2), \tag{2.1}$$

где $A,\ b$ и c - вещественные постоянные матрицы, обладают устойчивыми инвариантными линейными многообразиями L_j и инвариантными линейными многообразиями M_j (вообще говоря, неустойчиыми). Пусть

$$M_j \cap L_j = \{O\}, \quad \dim L_j + \dim M_j = n \tag{2.2}$$

и для положительных чисел $\lambda_j, \kappa_j, \alpha_j, \beta_j$ выполнены неравенства

$$|x_j(t; x_0)| \leqslant \alpha_j |x_0| e^{-\lambda_j t} \quad \forall x_0 \in L_j, \tag{2.3}$$

$$|x_j(t; x_0)| \leqslant \beta_j |x_0| e^{\kappa_j t} \quad \forall x_0 \in M_j. \tag{2.4}$$

Здесь $x_j(t;x_0)$ есть решение системы (2.1) с начальным условием $x_j(0;x_0) = x_0$. Знак dim в (2.2) означает размерность соответствующего пространства.

Предположим, далее, существование непрерывной матрицы $\sigma(t)$ и числа $\tau > 0$ таких, что преобразование θ_0^τ, осуществляемое траекториями системы

$$\dot{x} = (A + b(c\sigma(t))^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

за время от $t = 0$ до $t = \tau$, переводит многообразие M_1 в многообразие, лежащее в L_2:

$$\theta_0^\tau M_1 \subset L_2. \tag{2.6}$$

Будем называть условие (2.6) ниже *"условием вложения многообразий"*.

2. Основная теорема

При сделанных выше предположениях (2.2)–(2.6) имеет место следующая

Теорема 2.1. (Основная теорема.) *Пусть выполнено неравенство*

$$\lambda_1\lambda_2 > \kappa_1\kappa_2. \tag{2.7}$$

Тогда существует периодическая матрица $s(t)$ такая, что система

$$\dot{x} = (A + b(cs(t))^*)x \tag{2.8}$$

будет асимптотически устойчивой.

Доказательство. Из условия (2.7) следует, что для любого $\widetilde{T} > 0$ существуют положительные числа t_1 и t_2, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{cases} -\lambda_1 t_1 + \kappa_2 t_2 \le -\widetilde{T}, \\ -\lambda_2 t_2 + \kappa_1 t_1 \le -\widetilde{T}, \end{cases}$$

причем t_1 и t_2 можно взять сколь угодно большими за счет выбора $\widetilde{T}$.

Определим теперь периодическую матрицу $s(t)$ следующим образом:

$$s(t) = \begin{cases} s_1 & \text{при } t \in [0, t_1), \\ \sigma(t - t_1) & \text{при } t \in [t_1, t_1 + \tau), \\ s_2 & \text{при } t \in [t_1 + \tau, t_1 + t_2 + \tau), \end{cases} \tag{2.9}$$

$s(t + T) = s(t)$, где $T = t_1 + t_2 + \tau$.

Покажем, что при достаточно больших значениях T система (2.8) с матрицей $s(t)$, определенной согласно (2.9), будет асимптотически устойчивой.

Рассмотрим отображение $H = h_0^T$ (оператор монодромии) за время одного периода, осуществляемого траекториями системы (2.8), (2.9). Возьмем единичный шар $E_1 = \{\|x\| \leqslant 1\}$ в $\mathbb{R}^n$ и докажем, что оператор H переводит E_1 в эллипсоид, лежащий в шаре $E_{1/2} = \{\|x\| \leqslant 1/2\} : HE_1 \subset E_{1/2}$.

Обозначим через $\{f^t\}$ и $\{g^t\}$ фазовые потоки системы (2.1) с $j = 1$ и $j = 2$ соответственно. Тогда отображение h_0^T, осуществляемое фазовым потоком системы (2.8), можно представить в виде

$$h_0^T = g_{t_1+\tau}^T \vartheta_{t_1}^{t_1+\tau} f_0^{t_1}. \tag{2.10}$$

где $\vartheta_{t_1^{t_1+\tau}}$ - преобразование за время от t_1 до $t_1 + \tau$, осуществляемое фазовым потоком системы

$$\dot{x} = [A + b(c\sigma(t - t_1))^*]x. \tag{2.11}$$

Очевидно, что

$$\vartheta_{t_1}^{t_1+\tau} = \theta_0^\tau, \;\; g_{t_1+\tau}^T = g_0^{t_2}. \tag{2.12}$$

Поскольку

$$x = e^{[A+b(cs_j)^*]t}x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \; (j = 1, 2)$$

– решение системы (2.1), а решение системы (2.5) есть

$$x = \Psi(t)x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R}^n, \tag{2.13}$$

где $\Psi(t)$ - нормированная фундаментальная матрица решений системы (2.5), то

$$f_0^{t_1} = e^{[A+b(cs_1)^*]t_1}, \; g_0^{t_2} = e^{[A+b(cs_2)^*]t_2}, \; \theta_0^\tau = \Psi(\tau).$$

Пусть $x_0 \in E_1$ - произвольная точка из шара E_1. Тогда точка x_0 под действием потока $\{f^t\}$, двигаясь вдоль траектории системы (2.1) с $j = 1$, перейдет за время от $t = 0$ до $t = t_1$ в точку $x_1 = f_0^{t_1}x_0$. Затем точка x_1 под действием преобразования $\{\vartheta_{t_0}^t\}$ перейдет в точку $x_2 = \vartheta_{t_1}^{t_1+\tau}x_1$. И, наконец, точка x_2 под действием потока $\{g^t\}$ перейдет за время от $t = t_1 + \tau$ до $t = t_1 + t_2 + \tau$ в точку $x_3 = g_{t_1+\tau}^{t_1+t_2+\tau}x_2$.

Таким образом, в силу (2.10) и (2.12), будем иметь

$$x_3 = h_0^T x_0 = g_0^{t_2}\theta_0^\tau f_0^{t_1}x_0. \tag{2.14}$$

Приведем систему (2.1) $(j = 1, 2)$ с помощью невырожденного линейного преобразования переменных

$$\mathbf{x} = B_j^{-1}\begin{pmatrix} \xi_j \\ \eta_j \end{pmatrix}, \;\; \xi_j \in \mathbb{R}^{n_j'}, \; \eta_j \in \mathbb{R}^{n_j''} \quad (j = 1, 2), \tag{2.15}$$

к следующему виду

$$\dot{\xi}_j = P_j\xi_j, \quad \dot{\eta}_j = Q_j\eta_j.$$

Здесь B_j – неособая $(n\times n)$-матрица, $P_j,\ \ Q_j$ – матрицы размеров $n_j^{'}\times n_j^{'}$ и $n_j^{''}\times n_j^{''}$ соответственно, $n_j^{'} = dimL_j,\ \ n_j^{''} = dimM_j$.

Не умаляя общности, можно считать, что

$$\begin{array}{c}\|\xi_j(t)\| \leqslant \alpha_j\|\xi_j(0)\|e^{-\lambda_j t},\\ \|\eta_j(t)\| \leqslant \beta_j\|\eta_j(0)\|e^{\kappa_j t}\end{array} \qquad (j=1,2). \tag{2.16}$$

Так как в силу (2.13) $x(t_1+\tau) = \Psi(\tau)x_1$, где $x_1 = x(t_1)$, то с учетом (2.15) последнее соотношение перепишется так

$$\begin{pmatrix}\xi_2(t_1+\tau)\\ \eta_2(t_1+\tau)\end{pmatrix} = B_2\Psi(\tau)B_1^{-1}\begin{pmatrix}\xi_1(t_1)\\ \eta_1(t_1)\end{pmatrix}.$$

В силу "условия вложения многообразий" (2.6) для любого $x'\in M_1$ имеем $\Psi(\tau)x' = x'',\ \ x''\in L_2$. Отсюда

$$\begin{pmatrix}\xi_2\\ 0\end{pmatrix} = B_2\Psi(\tau)B_1^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \eta_1\end{pmatrix},$$

где

$$B_1x' = \begin{pmatrix}0\\ \eta_1\end{pmatrix}, \quad B_2x'' = \begin{pmatrix}\xi_2\\ 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица $B_2\Psi(\tau)B_1^{-1}$ имеет следующую структуру:

$$B_2\Psi(\tau)B_1^{-1} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau)\\ b_{21}(\tau) & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l}\}n_2'\\ \}n_2''\end{array} \\ \begin{array}{cc}\underbrace{\qquad\quad}_{n_1'} & \underbrace{\qquad\quad}_{n_1''}\end{array}\end{array}.$$

где $b_{11}(\tau), b_{12}(\tau), b_{21}(\tau)$ - некоторые матрицы размеров $n_2'\times n_1'$, $n_2'\times n_1''$ и $n_2''\times n_1'$ соответственно.

Очевидно, что матрицами преобразований $f_0^{t_1}$ и $g_0^{t_2}$ в новых переменных (ξ_1,η_1) и (ξ_2,η_2) будут

$$B_1f_0^{t_1}B_1^{-1} = \begin{pmatrix}e^{P_1t_1} & 0\\ 0 & e^{Q_1t_1}\end{pmatrix}, \ \ B_2g_0^{t_2}B_2^{-1} = \begin{pmatrix}e^{P_2t_2} & 0\\ 0 & e^{Q_2t_2}\end{pmatrix}.$$

Поэтому соотношение (2.14) в новых переменных перепишется так:

$$\begin{pmatrix} \xi_2(T) \\ \eta_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{P_2 t_2} & 0 \\ 0 & e^{Q_2 t_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{P_1 t_1} & 0 \\ 0 & e^{Q_1 t_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(0) \\ \eta_1(0) \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\xi_2(T) = e^{P_2 t_2} b_{11} e^{P_1 t_1} \xi_1(0) + e^{P_2 t_2} b_{12} e^{Q_1 t_1} \eta_1(0), \ \ \eta_2(T) = e^{Q_2 t_2} b_{21} e^{P_1 t_1} \eta_1(0).$$

Используя оценки (2.16), получим

$$\|\xi_2(T)\| \leqslant \alpha_1\alpha_2 \|b_{11}\| \cdot \|\xi_1(0)\| e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2} + \alpha_2\beta_1 \|b_{12}\| \cdot \|\eta_1(0)\| e^{-\lambda_2 t_2 + \kappa_1 t_1}, \quad (2.17)$$

$$\|\eta_2(T)\| \leqslant \alpha_1\beta_2 \|b_{21}\| \cdot \|\eta_1(0)\| e^{-\lambda_1 t_1 + \kappa_2 t_2}. \quad (2.18)$$

В силу выбора чисел $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$ (см. начало доказательства) из (2.17) и (2.18) имеем

$$\|\xi_2(T)\| \leqslant C_1 e^{-\widetilde{T}}, \ \ \|\eta_2(T)\| \leqslant C_2 e^{-\widetilde{T}},$$

где C_1 и C_2 - некоторые положительные константы.

Из последних оценок следует, что при достаточно большом $\widetilde{T} > 0$

$$\left\| \begin{pmatrix} \xi_2(T) \\ \eta_2(T) \end{pmatrix} \right\| < \frac{1}{2} \|B_2^{-1}\|^{-1}.$$

Поэтому

$$\|x(T)\| = \|x_3\| = \left\| B_2^{-1} \begin{pmatrix} \xi_2(T) \\ \eta_2(T) \end{pmatrix} \right\| < \frac{1}{2}.$$

Итак, $\|Hx_0\| < 1/2 \quad \forall x_0 \in E_1$, т. е. $HE_1 \subset E_{1/2}$.

Отсюда следует, что система (2.8) с функцией $s(t)$ вида (2.9), где T – достаточно большое число, асимптотически устойчива. Теорема 2.1 доказана полностью.

Замечание 2.1. Идея доказательства теоремы 2.1 (как и теоремы 1.1) состоит в том, что сначала с помощью траекторий системы (2.1) ($j = 1$) производится сжатие и растяжение единичного шара E_1 соответственно вдоль многообразий L_1 и M_1 (преобразование $f_0^{t_1}$), причем сжатие происходит быстрее, чем растяжение; затем переключаясь на траектории системы (2.11), производится вращение пространства так, чтобы образ M_1 оказался в устойчивом многообразии L_2 (преобразование θ_0^{τ}). Наконец, с помощью траекторий системы (2.1) ($j = 2$) производится сжатие и растяжение вдоль многообразий

L_2 и M_2 соответственно с превалированием сжатия над растяжением (преобразование $g_0^{t_2}$). В результате таких преобразований образ шара E_1 к моменту времени $t = T$ будет лежать в шаре сколь угодно малого радиуса (при соответствующем выборе T).

3. Случай скалярной функции $s(t)$. Рассмотрим случай, когда матрица $s(t)$ в уравнении (2.8) является скалярной функцией. Пусть $s(t)$ имеет вид (2.9), где

$$\sigma(t) \equiv \sigma_0, \quad s_1 = s_2 = s_0 \quad (\sigma_0 \in \mathbb{R},\ s_0 \in \mathbb{R}).$$

Предположим, что $s_0\sigma_0 < 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, функция $\|\theta^t\|$ ограничена на промежутке $[0, +\infty)$ и существует последовательность чисел $\{\tau_j\} \to +\infty$, для которой

$$\theta^{\tau_j} M_1 \subset L_2. \tag{2.19}$$

Здесь $\{\theta^t\}$ - фазовый поток системы (2.5) $(\sigma(t) \equiv \sigma_0)$. Поэтому $\theta^t = e^{[A+b(c\sigma_0)^*]t}$.

Справедлива

Теорема 2.2. *Если выполнено неравенство*

$$\lambda > \kappa$$

то существует T-периодическая функция $s(t)$ с нулевым средним на периоде такая, что система (2.8) является асимптотически устойчивой.

Для *доказательства* теоремы 2.2 достаточно определить функцию $s(t)$ следующим образом:

$$s(t) = \begin{cases} s_0 \ \text{при} & t \in [0, |\sigma_0\tau_j/2s_0|), \\ \sigma_0 \ \text{при} & t \in [|\sigma_o\tau_j/2s_0|, \tau_j + |\sigma_0\tau_j/2s_0|), \\ s_0 \ \text{при} & t \in [\tau_j + |\sigma_0\tau_j/2s_0|, \tau_j + |\sigma_0\tau_j/s_0|), \end{cases} \tag{2.20}$$

$s(t+T) = s(t)$, где $T = \tau_j(1 - \sigma_0/s_0)$ – период функции $s(t)$. Здесь τ_j – достаточно большое число, удовлетворяющее условию (2.19). Легко проверить, что функция $s(t)$ имеет нулевое среднее на периоде. Далее, доказательство теоремы 2.2 полностью повторяет рассуждения доказательства теоремы 2.1. При этом

$$t_1 = t_2 := -\sigma_0\tau_j/2s_0,\ \tau := \tau_j.$$

Замечание 2.2. Условие ограниченности функции $\|\theta^t\|$ на $[0, +\infty)$ можно заменить следующим условием: все собственные значения λ_j матрицы

$A + b(c\sigma_0)^*$ обладают неположительными вещественными частями:

$$Re\,\lambda_k(A + b(c\sigma_0)^*) \leqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

причем собственные числа, имеющие нулевые вещественные части, допускают лишь простые элементарные делители.

Замечание 2.3. Теорема 1.1 является следствием теоремы 2.2. Действительно, применим теорему 2.2 к системе (1.4) с функцией $s(t)$ вида (1.5) в предположении, что выполнено условие $\alpha^2 < 4(\beta - \nu_0^2)$. Тогда характеристический многочлен системы (1.4) с $s(t) = \sigma_0 := \beta$ имеет комплексно-сопряженные корни и, следовательно, выполнено условие (2.19) с некоторым $\tau_1 > 0$. Поэтому $\tau_j := \tau_1 + 2\pi j,\ j \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что функция $\|\theta^t\|$ ограничена на $[0, +\infty)$, так как преобразование θ^t аффинно эквивалентно повороту на угол t с последующим сжатием.

Далее, при $s(t) = s_0$, где $s_0 := -\beta$, характеристический многочлен системы (1.4) имеет вещественные корни $-\lambda < 0$ и $\kappa > 0$, причем $\lambda > \kappa$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.2 и, следовательно, система (1.4) с функцией $s(t)$ вида (2.20) асимптотически устойчива.

§ 3. Некоторые вспомогательные предложения, обеспечивающие эффективную проверку "условия вложения многообразий"

Рассмотрим систему

$$\dot{z} = Qz, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

где Q – постоянная неособая $(n \times n)$-матрица.

Лемма 3.1. *Пусть $h \in \mathbb{R}^n$ – произвольный ненулевой вектор. Предположим, что решение $z(t)$ системы (3.1) имеет вид*

$$z(t) = v(t) + w(t), \quad t \in [0, +\infty),$$

где $v(t)$ – T-периодическая вектор-функция такая, что $h^* v(t) \not\equiv 0$, а $w(t)$ - вектор-функция, для которой

$$\int_0^{+\infty} \|w(\tau)\| d\tau < +\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} w(t) = 0. \tag{3.2}$$

Тогда существуют числа τ_1 и τ_2 такие, что выполнены неравенства

$$h^* z(\tau_1) > 0, \quad h^* z(\tau_2) < 0.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. что функция $h^*z(t)$ знакоопределена. Пусть, для определенности, $h^*z(t) \geqslant 0\ \forall t \geqslant 0$. Тогда и $h^*v(t) \geqslant 0\ \forall t \geqslant 0$. Действительно, в противном случае существовал бы момент t_0 такой, что $h^*v(t_0) < 0$ и в силу периодичности $h^*v(t)$ и $w(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ имели бы

$$h^*z(t_0 + nT) = h^*v(t_0) + h^*w(t_0 + nT) < 0$$

для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Значит, функция $h^*v(t)$ неотрицательна на $[0, +\infty)$. Отсюда в силу ее периодичности с учетом (3.2) получаем

$$\int_0^{+\infty} h^*z(\tau)d\tau = +\infty. \tag{3.3}$$

С другой стороны, имеем

$$\int_0^t h^*z(\tau)d\tau = \int_0^t h^*Q^{-1}\dot{z}(\tau)d\tau = h^*Q^{-1}(z(t) - z(0)).$$

Так как $z(t)$ ограничена на $[0, +\infty)$, то из последнего соотношения следует ограниченность функции $\int_0^t h^*z(\tau)d\tau$, что противоречит соотношению (3.3). Полученное противоречие доказывает лемму 3.1.

Следствие. *Пусть решение $z(t)$ системы $\dot{z} = Pz$ с постоянной $(n \times n)$-матрицей P имеет вид*

$$z(t) = e^{\lambda t}[v(t) + w(t)],$$

где число λ не является собственным значением матрицы P, а $v(t)$ и $w(t)$ удовлетворяют условиям леммы 3.1. Тогда справедливо утверждение леммы 3.1.

Для *доказательства* следствия достаточно заметить, что функция $\zeta(t) = e^{-\lambda t}z(t)$ является решением уравнения

$$\dot{\zeta} = (P - \lambda I)\zeta,$$

где I – единичная матрица. Теперь остается применить лемму 3.1 к последнему уравнению, полагая $Q := P - \lambda I$.

Лемма 3.2. *Пусть $n = 2$. Предположим, что матрица Q в системе (3.1) имеет комплексно-сопряженные собственные значения $\alpha \pm i\beta$.*

Тогда для любой пары ненулевых векторов $h \in \mathbb{R}^2$ и $d \in \mathbb{R}^2$ существуют числа τ_1 и τ_2 такие, что

$$h^*e^{Q\tau_1}d > 0, \quad h^*e^{Q\tau_2}d < 0.$$

Доказательство. В рассматриваемом случае фазовый поток $\{g^t\}$ системы (3.1) аффинно эквивалентен семейству растяжений в $e^{\alpha t}$ раз с одновременным вращением на угол βt. Поэтому для любого вектора $d \in \mathbb{R}^2$ существуют такие числа τ_1 и τ_2, что

$$h^* g^{\tau_1} d > 0, \quad h^* g^{\tau_2} d < 0. \tag{3.4}$$

Так как $z(t; d) = e^{Qt} d, \quad d \in \mathbb{R}^2$, – решение системы (3.1) с начальным условием $z(0; d) = d$, то $g^t = e^{Qt}$. Отсюда, в силу (3.4), следует утверждение леммы 3.2. Лемма 3.2 доказана.

Следующая лемма является обобщением леммы 3.2.

Лемма 3.3. *Пусть матрица Q имеет пару комплексно-сопряженных собственных чисел $\alpha \pm i\beta$, а остальные ее собственные числа $\lambda_j(Q)$ удовлетворяют условию $Re\,\lambda_j(Q) < \alpha$ $(j = 1, \cdots, n-2)$.*

Пусть, далее, для ненулевого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\det(h, Q^* h, \ldots, (Q^*)^{n-1} h) \neq 0. \tag{3.5}$$

Тогда существуют числа τ_1 и τ_2 такие, что

$$h^* e^{Q\tau_1} d > 0, \quad h^* e^{Q\tau_2} d < 0.$$

Доказательство. В силу условий леммы 3.3 решение $z(t) = e^{Qt} d$ системы (3.1) с начальным условием $z(0) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде

$$z(t) = e^{\alpha t} v(t) + \sum_j e^{\lambda_j t} p_j(t), \tag{3.6}$$

где каждая компонента вектор-функции $v(t)$ имеет вид $c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t$ (c_1, c_2 – константы), а $p_j(t)$ – вектор-функция, каждая компонента которой есть некоторый многочлен от t (в частности, константа). Перепишем (3.6) в форме

$$z(t) = e^{\alpha t}(v(t) + w(t)), \;\; w(t) = \sum_j e^{(\lambda_j - \alpha)t} p_j(t).$$

Функции $v(t)$ и $w(t)$ удовлетворяют условиям леммы 3.1. Далее, из условия (3.5) следует соотношение $h^* v(t) \not\equiv 0$. Действительно, допустим противное: $h^* v(t) \equiv 0$. Дифференцируя это тождество последовательно $n-1$ раз и учитывая, что $v(t)$ является решением уравнения $\dot v = (Q - \alpha I)v$, будем иметь следующие тождества:

$$h^* v(t) \equiv 0, \;\; h^* \dot v(t) \equiv h^* Q v(t), \;\; h^* \ddot v(t) \equiv h^* Q^2 v(t), \ldots, h^* v^{(n-1)}(t) \equiv h^* Q^{n-1} v(t).$$

Отсюда, в силу условия (3.5), получаем $v(t) \equiv 0$, что противоречит свойству функции $v(t) \not\equiv 0$. Теперь, применяя следствие леммы 3.1, получим утверждение леммы 3.3. Лемма 3.3 доказана.

§ 4. Низкочастотная стабилизация двумерной линейной системы

Рассмотрим двумерную линейную систему

$$\dot{x} = Ax + bu, \;\; y = c^* x \;\; (x \in \mathbb{R}^2, \; u \in \mathbb{R}^2, \; y \in \mathbb{R}^2), \tag{4.1}$$

где $A, \; b$ и c - вещественные постоянные матрицы соответствующих размеров.

Из основной теоремы 2.1 и леммы 3.2 вытекает следующая

Теорема 4.1. *Пусть существуют матрицы s_0 и σ_0 размеров 2×2, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $\det(bs_0^* c^*) \neq 0, \; Tr\,(bs_0^* c^*) \neq 0$*; если* $\det(bs_0^* c^*) = 0$*, то пусть выполняется хотя бы одно из неравенств*

$$\det A \neq 0 \;\; \text{или} \;\; \det(a_1, r_2) + \det(r_1, a_2) \neq 0,$$

где $a_1, \; a_2$ и $r_1, \, r_2$ – первый и второй столбцы матриц A и $bs_0^* c^*$ соответственно:

$$A = (a_1, a_2), \quad bs_0^* c^* = (r_1, r_2).$$

2) *матрица $A + b\sigma_0 c$ имеет комплексно-сопряженные собственные числа.*

Тогда существует периодическая матрица $s(t)$ вида (2.9) такая, что замкнутая система (4.1), (2.9) асимптотически устойчива.

Доказательство. Положим в формуле (2.9)

$$s_1 = s_2 := \mu s_0, \quad \sigma(t) \equiv \sigma_0,$$

где $|\mu|$ – достаточно большое число и $Tr \mu bs_0^* c^*) < 0$. Из последнего неравенства следует, что при достаточно большом $|\mu|$

$$Tr\,(A + \mu bs_0^* c^*)\kappa < 0. \tag{4.2}$$

Пусть λ и κ – собственные числа матрицы $A + \mu bs_0^* c^*$. Тогда в силу (4.2) $\lambda + \kappa < 0$. Следовательно, одно из чисел λ или κ отрицательно, скажем λ. Если $\det(bs_0^* c^*) \neq 0$, то при достаточно большом $|\mu|$ будем иметь $\det(A + \mu bs_0^* c^*) \neq 0$.

Действительно, в этом случае квадратичная функция $\varphi(\varepsilon) = \det(bs_0^* c^* + \varepsilon A)$ отлична от нуля для всех достаточно малых ε и, значит, при достаточно большом $|\mu| \quad \varphi(1/\mu) \neq 0$.

Последнее соотношение имеет место и тогда, когда $\det(bs_0^* c^*) = 0$. Следовательно, $\kappa \neq 0$. В зависимости от знака κ особая точка $x = 0$ системы (4.1), (2.9), где $s(t) \equiv s_0$, или седло (если $\kappa > 0$), или устойчивый узел (если $\kappa < 0$).

В любом случае система (4.1), (2.9), где $s(t) \equiv s_0$, имеет одномерные инвариантные устойчивое многообразие L_1 (соответствующее собственному числу $\lambda < 0$) и (устойчивое или неустойчивое) многообразие M_1 (соответствующее собственному числу κ).

В силу леммы 3.2 и условия 2) теоремы 4.1 для системы (4.1), (2.9), где $s(t) \equiv s_0$, выполнено "условие вложения многообразий"(2.6).

Таким образом, выполнены все условия основной теоремы 2.1 с $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa \quad (L_1 \equiv L_2, \quad M_1 \equiv M_2)$. Отсюда следует утверждение теоремы 4.1.

§ 5. Стабилизация линейной системы в скалярном случае

Рассмотрим теперь важный для теории управления случай, когда в системе

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^* x, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

вход u и выход y являются скалярными функциями.

Будем предполагать, что пара (A, b) полностью управляема, а пара (A, c) полностью наблюдаема.

5.1. Вспомогательные предложения

Сначала докажем две леммы. Пусть дана система

$$\dot{x} = (A + \mu bc^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.2}$$

где $\mu \neq 0$ – параметр.

Лемма 5.1. *Пусть $h \in \mathbb{R}^n$ – произвольный ненулевой вектор. Тогда если гиперплоскость $\{x \,:\, h^* x = 0\}$ является интегральным многообразием для системы (5.2), то пара (A, h) полностью наблюдаема.*

Доказательство. Предположим противное: пара (A, h) не полностью наблюдаема. Тогда в силу теоремы двойственности Калмана пара (A^*, h) не полностью управляема и, следовательно, существуют ненулевой вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ и число $\lambda \in \mathbb{C}$ такие, что

$$h^*\xi = 0, \quad A\xi = \lambda\xi. \tag{5.3}$$

Поскольку пара (A, c) полностью наблюдаема по предположению, то справедливо неравенство $c^*\xi \neq 0$, ибо в противном случае в силу второго равенства из (5.3) мы имели бы не полностью наблюдаемую пару (A, c).

Поскольку $\{h^*x = 0\}$ является интегральным многообразием для системы (5.2), то векторное поле, определяемое системой (5.2), ортогонально вектору h:

$$h^*(A + \mu bc^*)x = 0 \quad \forall x \in \{h^*x = 0\}.$$

Отсюда следует, что

$$h^*(A + \mu bc^*)^k x = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

для всех $x \in \{h^*x = 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Ясно, что последние равенства имеют место также для комплексных x.

При $k = 1$ и $x = \xi$, в силу (5.3) получим

$$0 = h^*A\xi + \mu h^*bc^*\xi = \mu h^*bc^*\xi.$$

Отсюда $h^*b = 0$, так как $c^*\xi \neq 0$.

При $k = 2$ и $x = \xi$, используя (5.3) и предыдущее равенство, будем иметь

$$0 = h^*(A + \mu bc^*)^2\xi = \lambda h^*(A + \mu bc^*)\xi + \mu h^*(A + \mu bc^*)bc^*\xi =$$

$$= \mu(h^*Ab + \mu h^*bc^*b)c^*\xi = \mu(h^*Ab)c^*\xi.$$

Отсюда $h^*Ab = 0$, так как $\mu \neq 0$, $c^*\xi \neq 0$.

Продолжая этот процесс далее, получим равенства $h^*A^kb = 0$ $(k = 0, \ldots, n-1)$. Из последних соотношений следует линейная зависимость векторов $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$, так как h – ненулевой вектор.

С другой стороны эти векторы должны быть линейно независимы в силу полной управляемости пары (A, b). Полученное противоречие доказывает лемму 5.1.

Лемма 5.2. *Пусть $d \in \mathbb{R}^n$ – произвольный ненулевой вектор. Тогда если прямая $\{\alpha d,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ есть интегральное многообразие для системы (5.2), то пара (A, d) полностью управляема.*

Доказательство. Из условия леммы 5.2 следует, что если $x = \alpha d$, то

$$(A + \mu bc^*)x = \alpha_1 d, \ \ \alpha_1 \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем

$$(A + \mu bc^*)^k d = \alpha_1^k d, \tag{5.4}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Так как пара (A, c) полностью наблюдаема, то $c^*d \neq 0$. Действительно, в противном случае в силу (5.4) ($k = 1$) мы имели бы $(A + \mu bc^*)d = \alpha_1 d$, т. е. $Ad = \alpha_1 d$ и $c^*d = 0$, что противоречит полной наблюдаемости пары (A, c). Поэтому для любого вектора $z \in \mathbb{R}^n$ такого, что

$$z^*d = 0, \ \ z^*Ad = 0, \cdots, z^*A^{n-1}d = 0, \tag{5.5}$$

из (5.4) будем иметь

$$0 = \alpha_1 z^*d = z^*(A + \mu bc^*)d = \mu z^*bc^*d.$$

Отсюда $z^*b = 0$, так как $\mu \neq 0$ и $c^*d \neq 0$. Далее, используя последнее равенство, получаем

$$0 = \alpha_1^2 z^*d = z^*(A+\mu bc^*)^2 d = z^*A^2 d+\mu z^*bc^*Ad++\mu z^*Abc^*d+\mu^2 z^*bc^*bc^*d = \mu z^*Abc^*d.$$

Отсюда $z^*Ab = 0$, так как $\mu \neq 0$ и $c^*d \neq 0$.

Продолжая этот процесс далее, получим равенства

$$z^*b = 0, \ z^*Ab = 0, \ldots, z^*A^{n-1}b = 0.$$

Из последних равенств в силу полной управляемости пары (A, b) следует, что $z = 0$. Тогда соотношения (5.5) эквивалентны полной управляемости пары (A, d). Лемма 5.2 доказана.

5.2. Стабилизация. Докажем теперь теорему, устанавливающую стабилизируемость системы (5.1) с помощью обратной связи

$$u = s(t)y, \tag{5.6}$$

где $s(t)$ – кусочно-постоянная периодическая функция с достаточно большим периодом T.

Теорема 5.1. *Пусть система (5.1) обладает одномерным инвариантным многообразием M_1 и устойчивым инвариантным многообразием L_2, удовлетворяющими условиям (2.1)–(2.4).*

Пусть, далее, s_1, s_2 и σ_0 – числа такие, что $\sigma_0 \neq s_j$ $(j = 1, 2)$. Предположим, что матрица $Q = A + \sigma_0 bc^*$, имеет комплексно-сопряженные *собственные значения $\alpha \pm i\beta$, а остальные ее собственные значения λ_k удовлетворяют условию $Re\,\lambda_k < \alpha \quad (k = 1, \dots, n-2)$.*

Тогда существует периодическая функция $s(t)$ вида (2.9), где $\sigma(t) \equiv \sigma_0$, такая, что система (5.1), (5.6) асимптотически устойчива.

Доказательство. Пусть h – вектор, нормальный к подпространству L_2 : $h \perp L_2$.

Тогда из полной управляемости пары (A, b) и полной наблюдаемости пары (A, c) с учетом неравенства $\sigma_0 \neq s_2$, в силу леммы 5.1, примененной к системе

$$\dot{x} = (Q + \mu b c^*) x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.7}$$

где $\mu = s_2 - \sigma_0$, $Q = A + \sigma_0 b c^*$, следует полная наблюдаемость пары (Q, h).

Пусть d – произвольный ненулевой вектор из подпространства M_1. Тогда по лемме 5.2, примененной к системе (5.7), где $\mu = s_1 - \sigma_0$, пара (Q, d) полностью управляема. Таким образом, для матрицы Q и векторов d и h выполнены все условия леммы 3.3. Поэтому, в силу леммы 3.3 существует число τ такое, что $h^* e^{Q\tau} d = 0$.

Из линейности преобразования $e^{Q\tau}$ следует, что $e^{Q\tau}$ переводит одномерное подпространство M_1 в некоторое подпространство M_1', лежащее в L_2:

$$e^{Q\tau} M_1 = M_1' \subset L_2.$$

Тем самым выполнено "условие вложения многообразий". Здесь $\theta_0^\tau = e^{Q\tau}$, $\{e^{Qt}\}$ – фазовый поток системы $\dot{x} = Qx$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Итак, выполнены все условия основной теоремы 2.1. Отсюда следует утверждение теоремы 5.1.

§ 6. Проверка "условия вложения многообразий", основанная на импульсном воздействии на неустойчивое интегральное многообразие

Выше в § 3 были доказаны три леммы, дающие эффективные условия для проверки выполнения условия (2.6), когда вращение подпространства было обусловлено наличием комплексных собственных значений. Ниже мы изложим другой подход, который состоит в импульсном воздействии $\sigma(t) = \mu$ на неустойчивое многообразие M_1 с большим значением $|\mu|$ на малом промежутке времени.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A + \mu bc^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6.1}$$

где b и c – одностолбцовые n-мерные векторы, а $\mu \neq 0$ – большой параметр.

Ниже будем различать два случая: $c^*b = 0$ и $c^*b \neq 0$.

Лемма 6.1. *Пусть $c^*b = 0$. Предположим, что для векторов $h \in \mathbb{R}^n$ и $d \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$h^*b \neq 0, \quad c^*d \neq 0.$$

Тогда существуют числа μ и $\tau(\mu) > 0$ такие, что

$$h^*x(\tau(\mu); d) = 0, \quad \lim_{|\mu| \to \infty} \tau(\mu) = 0.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение числа

$$t_0 = -\frac{h^*d}{\mu h^*bc^*d}, \;\; K = \frac{(1 + 2|\mu| \cdot \|b\| \cdot \|c\| t_0)\|d\|}{1 - (2\|A\| t_0 + 4|\mu| \cdot \|A\| \cdot \|b\| \cdot \|c\| t_0^2)}.$$

Выберем число μ таким, что $t_0 > 0$ и

$$2\|A\| t_0 + 4|\mu| \|A\| \cdot \|b\| \cdot \|c\| t_0^2 < 1.$$

Умножая обе части уравнения (6.1) на c^* и оценивая $|c^*\dot{x}|$, будем иметь при $t \in [0, 2t_0]$:

$$|c^*\dot{x}(t; d)| = |c^*Ax(t; d)| \leqslant \|A\| \cdot \|c\| \cdot \max_{t \in [0, 2t_0]} \|x(t; d)\|.$$

Здесь $x(t; d)$ – решение уравнения (6.1) с начальным условием $x(0; d) = d$. Поэтому при любом $t \in [0, 2t_0]$ будем иметь $(0 < \eta < t)$

$$|c^*x(t; d) - c^*d| = |c^*\dot{x}(\eta; d)t| \leqslant 2\|A\| \cdot \|c\| t_0 \max_{t \in [0, 2t_0]} \|x(t; d).$$

Отсюда и из уравнения (6.1) следует, что

$$\begin{gathered} \|\|x(t; d) - d - \mu bc^*d \cdot t\| = |\int_0^t Ax(\tau; d)d\tau + \mu \int_0^t b[c^*x(\tau; d)d\tau - c^*d]d\tau \leq \\ \leq \bar{X}(2\|A\| t_0 + 4|\mu| \cdot \|b\| \cdot \|A\| \cdot \|c\| t_0^2) = (2\|A\| t_0 + 4|\mu| \cdot \|A\| \cdot \|b\| \cdot \|c\| t_0^2). \end{gathered} \tag{6.2}$$

Здесь $\bar{X} = \max_{t \in [0, 2t_0]} \|x(t; b)\|$. Используя оценку (6.2), получаем

$$\begin{gathered} \|\|x(t; d)\| \leqslant \|x(t, d) - d - \mu bc^*dt\| + \|d + \mu bc^*d \cdot t\| \leqslant \\ \leq \bar{X}(2\|A\| t_0 + 4|\mu| \cdot \|b\| \cdot \|c\| t_0^2) + \|d\|(1 + 2|\mu| \cdot \|b\| \cdot \|c\| t_0). \end{gathered}$$

Отсюда имеем: $\bar{X} \leqslant \mathcal{K}$. С учетом последнего неравенства, из (6.2) получим

$$|h^*x(t;d) - h^*d - \mu h^*bc^*d\cdot t| \leqslant (2\|A\|t_0 + 4|\mu|\cdot\|A\|\cdot\|b\|\cdot\|c\|\cdot t_0^2)\cdot\|h\|K \quad (6.3)$$

для всех $t \in [0, 2t_0]$.

Так как

$$(2\|A\|t_0 + 4|\mu|\cdot\|A\|\cdot\|b\|\cdot\|c\|t_0^2)\|h\|\mathcal{K} = O(1/\mu),$$

то из (6.3) имеем

$$|h^*x(t;d) - h^*d - \mu h^*bc^*d\cdot t| \leqslant O(1/\mu). \quad (6.4)$$

Поскольку $h^*x(0;d) = h^*d$, то при $t = 2t_0$ из (6.4) получаем

$$|h^*x(2t_0;d) + h^*d| \leqslant O(1/\mu).$$

Отсюда выводим, что $h^*x(2t_0(\mu);d) \to -h^*d$ при $|\mu| \to \infty$.

Так как $x(0;d) = d$, то из последнего предельного соотношения следует, что $h^*x(t;d)$ меняет свой знак на отрезке $[0, 2t_0]$ при достаточно больших $|\mu|$. Следовательно, существует число $\tau(\mu) \in [0, 2t_0]$ такое, что $h^*x(\tau(\mu);d) = 0$, причем $\tau(\mu) \to 0$ при $|\mu| \to \infty$. Лемма 6.1 доказана.

Лемма 6.2. *Пусть $c^*b \neq 0$. Предположим, что для векторов $h \in \mathbb{R}^n$ и $d \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$h^*b \neq 0, \qquad c^*d \neq 0, \qquad \frac{h^*dc^*b}{h^*bc^*d} < 1.$$

Тогда существуют числа μ и $\tau(\mu) > 0$ такие, что

$$h^*x(\tau(\mu), d) = 0, \quad \lim_{|\mu|\to\infty} \tau(\mu) = 0.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение числа

$$t_0 = \frac{1}{\mu c^*b} \ln\left(1 - \frac{h^*dc^*b}{h^*bc^*d}\right),$$

$$K = \frac{[1 + \|b\|\cdot\|c\|\cdot|c^*b|^{-1}(1 - e^{2\mu c^*bt_0})]\|d\|}{1 - [2\|A\|t_0 + 2\|A\|\cdot\|b\|\cdot\|c\|\cdot|c^*b|^{-1}t_0(1 - e^{2\mu c^*bt_0})]}.$$

Выберем число μ таким, что $t_0 > 0$ и

$$2\|A\|\cdot t_0 + 2\|A\|\cdot\|b\|\cdot\|c\|\cdot|c^*b|^{-1}t_0(1 - e^{2\mu c^*bt_0}) < 1.$$

Как и в доказательстве леммы 6.1, для решения $x(t;d)$ $(x(0;d)=d)$ уравнения (6.1) будем иметь при $t\in[0,2t_0]$:

$$|c^*\dot{x}(t;d)-\mu c^*b(c^*x(t;d))|=|c^*Ax(t;d)|\leqslant\|A\|\cdot\|c\|\cdot\bar{X}.$$

Здесь $\bar{X}=\max_{t\in[0,2t_0]}x(t;d)$. Таким образом, функция $c^*x(t,d)$ удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству

$$|\dot{y}-ky|\leqslant M, \tag{6.5}$$

где $k=\mu c^*b$, $M=\|c\|\cdot\|A\|\bar{X}$. Решая неравенство (6.5) и полагая $y(t)=c^*x(t;d)$, получим при $t\in[0,2t_0]$:

$$|c^*x(t;d)-c^*de^{\mu c^*bt}|\leqslant\frac{1-e^{2\mu c^*bt_0}}{-\mu c^*b}\|A\|\cdot\|c\|\cdot\bar{X}. \tag{6.6}$$

Из уравнения (6.1) имеем

$$\begin{gathered}x(t;d)-d-\mu b\int_0^t c^*de^{\mu c^*b\tau}\,d\tau=\\=\int_0^t Ax(\tau;d)\,d\tau+\mu b\int_0^t[c^*x(\tau;d)-c^*de^{\mu c^*b\tau}]\,d\tau.\end{gathered} \tag{6.7}$$

Используя неравенство (6.6) и учитывая, что

$$\int_0^t(c^*d)e^{\mu c^*b\tau}\,d\tau=\frac{c^*d}{\mu c^*b}(e^{\mu c^*bt}-1),$$

получим из (6.7):

$$\begin{gathered}\|x(t;d)-d-\frac{bc^*d}{c^*b}(e^{\mu c^*bt}-1)\|\leqslant[2\|A\|t_0+\\+2\|A\|\cdot\|b\|\cdot\|c\|\cdot|c^*b|^{-1}t_0(1-e^{2\mu c^*bt_0}]\,\bar{X}.\end{gathered} \tag{6.8}$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\|x(t;d)\|\leqslant\|x(t;d)-d-\frac{bc^*d}{c^*b}(e^{\mu c^*bt}-1)\|+\|d+\frac{bc^*d}{c^*b}(e^{\mu c^*bt}-1)\|.$$

Применяя оценку (6.8) к первому слагаемому в правой части последнего неравенства и беря от обеих частей полученного неравенства $\max_{t\in[0,2t_0]}$, получаем оценку: $\bar{X}\leqslant K$. Отсюда и из (6.8) следует, что

$$\|h^*x(t;d)-h^*d-\frac{h^*bc^*d}{c^*b}(e^{\mu c^*bt}-1)|\leqslant$$

$$\leq \left[2\|A\|t_0 + 2\|A\| \cdot \|b\| \cdot \|c\| \cdot |c^*b|^{-1}t_0(1 - e^{2\mu c^* b t_0})\right] \cdot \|h\|K \qquad (6.9)$$

для всех $t \in [0, 2t_0]$. Правая часть последнего неравенства есть $O(1/\mu)$, так как $t_0 = O(1/\mu)$.

Как и в конце доказательства леммы 6.1, с учетом того, что

$$e^{\mu c^* b t_0} = 1 - \frac{h^*dc^*b}{h^*bc^*d}, \quad 1 - e^{2\mu c^* b t_0} = \frac{h^*dc^*b}{h^*bc^*d}\left(2 - \frac{h^*dc^*b}{h^*bc^*d}\right),$$

из (6.9) при $t = 2t_0$ получаем

$$\left| h^*x(2t_0; d) + h^*d\left(3 - \frac{h^*dc^*b}{h^*bc^*d}\right)\right| \leqslant O(1/\mu).$$

Отсюда имеем при $|\mu| \to \infty$:

$$h^*x(2t_0(\mu); d) \to -h^*d\left(3 - \frac{h^*dc^*b}{h^*bc^*d}\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{h^*dc^*b}{h^*bc^*d} < 1,$$

получаем

$$(h^*x(0; d))(h^*x(2t_0; d)) < 0.$$

Следовательно, существует число $\tau(\mu) \in [0, 2t_0]$ такое, что $h^*x(\tau(\mu), d) = 0$, причем $\tau(\mu) \to 0$ при $|\mu| \to \infty$. Лемма 6.2 доказана.

§ 7. Стабилизация линейной системы, основанная на импульсном подходе

Будем рассматривать два случая: случай коразмерности 1 и случай коразмерности 2 устойчивого многообразия L_2 (см. (2.6)).

7.1. Случай коразмерности 1 устойчивого многообразия.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^*x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (7.1)$$

со скалярным входом u и скалярным выходом y. Здесь A – постоянная $(n \times n)$-матрица, b и c – одностолбцовые n-мерные векторы. Предположим, что пара

(A, b) полностью управляема, а пара (A, c) полностью наблюдаема. Имеет место

Теорема 7.1. *Пусть система (7.1) обладает устойчивым инвариантным многообразием L_2 размерности $n-1$ и одномерным многообразием M_1, удовлетворяющими условиям (2.1)–(2.4). Пусть, далее, $c^*b = 0$. Тогда существует такая обратная связь*

$$u = s(t)y, \tag{7.2}$$

где $s(t)$ – кусочно-постоянная периодическая функция вида (2.9), что система (7.1), (7.2), т. е. система

$$\dot{x} = (A + s(t)bc^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.3}$$

асимптотически устойчива.

Доказательство. Как и в начале доказательства теоремы 5.1, в силу лемм 5.1, 5.2 из полной управляемости пары (A, b) и полной наблюдаемости пары (A, c) следует полная наблюдаемость пары $(A+sbc^*, h)$ и полная управляемость пары $(A + sbc^*, d)$ для любого числа $s \neq s_1$ и $s \neq s_2$. Здесь s_1 и s_2 числа, удовлетворяющие (2.1)–(2.4); h – вектор, нормальный к устойчивому инвариантному многообразию (гиперплоскости) L_2 системы $\dot{x} = (A+s_2bc^*)x$, а d – ненулевой вектор, принадлежащий инвариантному многообразию (прямой) M_1 системы $\dot{x} = (A + s_1bc^*)x$. Имеют место следующие неравенства: $h^*b \neq 0$ и $c^*d \neq 0$.

Действительно, предположим противное. Пусть $h^*b = 0$. Тогда $b \in L_2$, так как $h \perp L_2$. Поскольку в силу условия теоремы подпространство L_2 инвариантно относительно оператора $A + s_2bc^*$, будем иметь

$$h^*(A + s_2bc^*)^k b = 0 \tag{7.4}$$

при $k = 1, 2, 3, \ldots$.

При $k = 1$ из (7.4), с учетом равенства $h^*b = 0$, имеем

$$0 = h^*(A + s_2bc^*)b = h^*Ab.$$

При $k = 2$ из (7.4), с учетом последнего равенства получаем:

$$0 = h^*(A + s_2bc^*)^2 b = h^*A(A + s_2bc^*)b = h^*A^2b.$$

Продолжая этот процесс далее, из (7.4) получим при $k = n - 1$

$$0 = h^*(A + s_2bc^*)^{n-1} b = h^*A^{n-1}b.$$

Из полученных равенств следует, что векторы $b,\ \ Ab,\ \ A^2b, \ldots, A^{n-1}b$ линейно зависимы, что противоречит свойству полной управляемости пары (A, b). Следовательно, $h^*b \neq 0$.

Для установления справедливости следующего неравенства $c^*d \neq 0$ допустим также противное: $c^*d = 0$. Тогда в силу инвариантности подпространства M_1 относительно оператора $A + s_1bc^*$ будем иметь

$$\gamma d = (A + s_1bc^*)d = Ad,$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$. Равенства $Ad = \gamma d,\ d^*c = 0$ противоречат свойству полной управляемости пары (A^*, c), или, в силу теоремы Калмана, свойству полной наблюдаемости пары (A, c). Полученное противоречие доказывает, что $c^*d \neq 0$.

Таким образом, выполняются все условия леммы 6.1 и, поэтому, существуют числа τ и $\tau(\mu)$ такие, что для системы (6.1) имеют место соотношения: $h^*x(\tau(\mu); d) = 0,\ \lim_{|\mu|\to\infty} \tau(\mu) = 0$. Отсюда следует, что преобразование $\theta_0^{\tau(\mu)}$ за время от 0 до $\tau(\mu)$ переводит вектор $d \in M_1$ в вектор $\theta_0^{\tau(\mu)}d \in L_2 = \{h^*x = 0\}$.

Следовательно, преобразование $\theta_0^{\tau(\mu)}$ переводит подпространство M_1 в $\theta_0^{\tau(\mu)}M_1 \subset L_2$. Поэтому выполнено "условие вложения многообразий"(2.6). Отсюда, в силу основной теоремы 2.1 вытекает утверждение теоремы 7.1. Теорема 7.1 доказана.

Теперь, используя лемму 6.2, докажем следующую теорему.

Теорема 7.2. *Пусть в системе (7.1) $c^*b \neq 0$. Предположим, что матрица A имеет собственное значение $\kappa > 0$ и $n - 1$ собственное значение с вещественными частями меньшими, чем $-\lambda$, где $\lambda > \kappa$. Пусть, далее, выполнено неравенство*

$$\frac{c^*b}{\lim_{p\to\kappa}(\kappa - p)W(p)} < 1, \qquad (7.5)$$

где $W(p)$ – передаточная функция системы (7.1).

Тогда существует периодическая функция $s(t)$ вида (2.9) такая, что система (7.3) асимптотически устойчива.

Доказательство. В силу условий теоремы, система $\dot{x} = Ax$ имеет одномерное неустойчивое многообразие M, соответствующее собственному значению $\kappa > 0$, и устойчивое $n - 1$-мерное многообразие L, соответствующее собственным значениям λ_j с $Re\,\lambda_j < -\lambda < 0$, $j = 1, \cdots, n - 1$.

Не умаляя общности, можно считать, что матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

где A_2 – гурвицева матрица размера $(n-1)\times(n-1)$. В основных предположениях (2.1)–(2.4) в качестве $s_1,\ s_2$ и $L_1,\ L_2,\ M_1,\ M_2$ возьмем: $s_1 = s_2 = 0$ и $L_1 = L_2 = L, \quad M_1 = M_2 = M$. Вектор h, нормальный к подпространству L имеет вид: $h = (1, 0\dots 0)^*$. За ненулевой вектор $d \in M$ можно взять вектор h $(d := h)$, так как мы выбрали базис пространства так, чтобы матрица A имела вид (7.6) и $M \perp L$. Представим векторы b и c в виде $b = col(b_1, b_2), \quad c = col(c_1, c_2)$, где $b_1, c_1 \in \mathbb{R},\ b_2, c_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тогда имеем $h^*b = b_1, \quad c^*d = c_1$. Легко видеть, что из полной управляемости пары (A, b) и полной наблюдаемости пары (A, c) следует $b_1 \neq 0,\ c_1 \neq 0$. Значит, $h^*b \neq 0,\ c^*d \neq 0$. Далее, в силу условия (7.5) теоремы 7.2 справедливо неравенство

$$\frac{h^*dc^*b}{h^*bc^*d} = \frac{c^*b}{b_1c_1} < 1.$$

Действительно, для этого достаточно заметить, что передаточная функция $W(p) = c^*(A - pI_n)^{-1}b$ имеет вид:

$$W(p) = (c_1, c_2^*) \begin{pmatrix} (\kappa - p)^{-1} & 0 \\ 0 & D(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{b_1c_1}{\kappa - p} + c_2^*D(p)b_2,$$

где $D(p) = (A_2 - pI_{n-1})^{-1}$. Поэтому,

$$\lim_{p\to\kappa} (\kappa - p)W(p) = b_1c_1.$$

Следовательно, по лемме 6.2 существуют числа $\mu > 0$ и $\tau(\mu) > 0$ такие, что для системы (6.1) будет выполнено соотношение: $h^*x(\tau(\mu); d) = 0$. Отсюда следует, что выполнено "условие вложения многообразий"(2.6): $\theta_0^{\tau(\mu)} M \subset L$.

Так как $\lambda > \kappa$, то выполнены все условия теоремы 2.2 и, следовательно, система (7.3) асимптотически устойчива. Теорема 7.2 доказана.

Докажем еще одну теорему для случая $c^*b \neq 0$.

Теорема 7.3. *Пусть* $c^*b \neq 0$. *Предположим, что существуют числа* $s_1 \neq s_2$ *такие, что:*

1) матрица $A + s_1bc^*$ *имеет положительное собственное значение* κ_1*;*

2) матрица $A + s_2bc^*$ *имеет одно положительное собственное значение* κ_2 *и* $n-1$ *собственное значение с отрицательными вещественными частями;*

3) выполнено условие (2.7) основной теоремы 2.1;

4) имеет место неравенство

$$(c^*b)\,\frac{s_2-s_1}{\kappa_2-\kappa_1}<1.$$

Тогда существует периодическая функция $s(t)$ вида (2.9) такая, что система (7.3) асимптотически устойчива.

Доказательство. Пусть L_2 и M_1 - инвариантные многообразия, фигурирующие в основных предположениях (2.1)–(2.4). Как и в доказательстве теоремы 7.2, не умаляя общности, можно считать, что матрица $A+s_2bc^*$ и векторы b и c имеют вид

$$A+s_2bc^*=\begin{pmatrix}\kappa_2 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix},$$

где A_2 – гурвицева $(n-1)\times(n-1)$-матрица; $b_1,c_1\in\mathbb{R};\ b_2,c_2\in\mathbb{R}^{n-1}$. При этом $b_1\neq 0,\ c_1\neq 0$. Тогда вектор h, нормальный к подпространству L_2, имеет вид: $h=(1,0\cdots 0)^*$.

Рассмотрим ненулевой вектор $d\in M_1$. Для этого вектора выполнено соотношение $(A+s_1bc^*)d=\kappa_1 d$, так как M_1 – инвариантное подпространство (прямая), определяемое собственным значением $\kappa_1>0$ матрицы $A+s_1bc^*$.

Из последнего соотношения получаем

$$(A+s_2bc^*-\kappa_1 I)d=(c^*d)(s_2-s_1)b$$

или

$$d=(c^*d)(s_2-s_1)(A+s_2bc^*-\kappa_1 I)^{-1}b. \tag{7.7}$$

Здесь обратная матрица $(A+s_2bc^*-\kappa_1 I)^{-1}$ существует и имеет вид

$$(A+s_2bc^*-\kappa_1 I_n)^{-1}=\begin{pmatrix}(\kappa_2-\kappa_1)^{-1} & 0\\ 0 & (A_2-\kappa_1 I_{n-1})^{-1}\end{pmatrix}.$$

Из равенства (7.7) следует, что

$$h^*d=(c^*d)(s_2-s_1)h^*(A+s_2bc^*-\kappa_1 I)^{-1}b.$$

Поэтому, условие

$$\frac{h^*dc^*b}{h^*bc^*d}<1$$

леммы 6.2 принимает следующий вид:

$$(c^*b)\,\frac{(s_2-s_1)h^*(A+s_2bc^*-\kappa_1 I)^{-1}b}{h^*b}<1.$$

С учетом того, что $h^*b=b_1$ последнее неравенство перепишется так:

$$(c^*b)\,\frac{s_2-s_1}{\kappa_2-\kappa_1}<1,$$

которое выполнено в силу условия 4) теоремы 7.3.

Таким образом, выполнены все условия леммы 6.2 и, поэтому, справедливо "условие вложения многообразий" (2.6).

Следовательно, по основной теореме 2.2 система (7.3) асимптотически устойчива. Теорема 7.3 доказана.

7.2. Случай коразмерности 2 устойчивого многообразия.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 7.1. *Пусть* $(n-2)$*-мерное линейное подпространство* L*, расположенное в гиперплоскости* $\{h^*x=0\}$ $(h\in\mathbb{R}^n,\ h\neq 0)$*, является интегральным многообразием для системы (6.1). Если выполнено равенство* $h^*b=0$*, то пара* (A,h) *полностью наблюдаема.*

Доказательство. Сначала покажем, что из полной управляемости пары (A,b) и инвариантности подпространства L относительно $A+\mu bc^*$ следует $b\notin L$.

Действительно, предположим противное: $b\in L$. Возьмем ненулевой вектор $h_1\perp L$. Тогда $h_1^*b=0$. Из инвариантности L относительно $A+\mu bc^*$ вытекает, как и в доказательстве леммы 5.1, что

$$h^*(A+\mu bc^*)^k x=0,\quad k=1,2\ldots \tag{7.8}$$

для всех $x\in L$.

Полагая в (7.8) $x:=b$ и $k:=1$ получим

$$0=h_1^*(A+\mu bc^*)b=h_1^*Ab,$$

так как $h_1^*b=0$.

Отсюда и из (7.8) при $k=2,\ x=b$ имеем

$$0=h_1^*(A+\mu bc^*)^2b=h_1^*A(A+\mu bc^*)b=h_1^*A^2b.$$

Продолжая этот процесс далее получим, что $h_1^* A^k b = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Отсюда следует, что векторы $b, Ab, \cdots, A^{n-1}b$ линейно зависимы, что противоречит полной управляемости пары (A, b). Следовательно, $b \notin L$.

Предположим, что пара (A, h) не полностью наблюдаема. Тогда существует ненулевой вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ и число $\lambda \in \mathbb{C}$ такие, что

$$h^*\xi = 0, \quad A\xi = \lambda\xi. \tag{7.9}$$

В силу полной наблюдаемости пары (A, c) будем иметь неравенство $c^*\xi \neq 0$.

Обозначим через $\mathbb{CR}^n$ и $\mathbb{C}L$ комплексифицированные пространство $\mathbb{R}^n$ и подпространство L соответственно.

Так как $b \notin L$, то и $b \notin \mathbb{C}L$. Поэтому линейная оболочка, натянутая на вектор b и подпространство $\mathbb{C}L$ совпадает с гиперплоскостью $\{h^*z = 0\} \subset \mathbb{CR}^n$.

Представим вектор ξ в виде

$$\xi = \eta + \nu b, \tag{7.10}$$

где $\eta \in \mathbb{C}L,\ \nu \in \mathbb{C}$.

Если в (7.10) $\nu = 0$, то, повторяя рассуждения доказательства леммы 5.1, получим, что пара (A, h) наблюдаема.

Пусть $\nu \neq 0$. Так как по условию $h^*b = 0$, с учетом (7.9), имеем

$$h^*(A + \mu bc^*)\xi = \lambda h^*\xi + \mu h^* bc^*\xi = 0.$$

Используя (7.10), из последнего равенства получаем

$$0 = h^*(A + \mu bc^*)\xi = h^*(A + \mu bc^*)\eta + \nu h^*(A + \mu bc^*)b = \nu h^* Ab,$$

так как $h^*(A + \mu bc^*)\eta = 0$ в силу (7.8) $(k := 1)$. Следовательно, $h^*Ab = 0$. С учетом последнего равенства имеем

$$h^*(A + \mu bc^*)^2\xi = h^*A(A + \mu bc^*)\xi = h^*A^2\xi + \mu h^*Abc^*\xi = \lambda^2 h^*\xi = 0.$$

Отсюда, как и выше, получим

$$0 = h^*(A+\mu bc^*)^2\xi = h^*(A+\mu bc^*)^2\eta+\nu h^*(A+\mu bc^*)^2 b = \nu h^*A(Ab+\mu bc^*b) = \nu h^*A^2b,$$

так как $h^*(A + \mu bc^*)^2\eta = 0$ в силу (7.8) $(k := 2)$.

Продолжая этот процесс далее, последовательно приходим к равенствам

$$h^*b = 0,\ \ h^*Ab = 0, \ldots, h^*A^{n-1}b = 0,$$

которые противоречат предположению полной управляемости пары (A, b). Полученное противоречие доказывает утверждение леммы 7.1.

Применяя лемму 7.1, установим справедливость следующего утверждения.

Теорема 7.4. *Пусть система (7.1) имеет $(n-2)$-мерное устойчивое инвариантное многообразие L_2 и одномерное инвариантное многообразие M_1, удовлетворяющие условиям (2.1)–(2.4).*

Пусть, далее, для некоторого числа $\sigma_0 \neq s_j$ $(j = 1, 2)$ матрица $A+\sigma_0 bc^*$ имеет два комплексно сопряженных собственных значения $\alpha \pm i\beta$ кратности 1, а остальные ее собственные значения λ_j удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\lambda_j < \alpha$.

Тогда существует периодическая функция $s(t)$ вида (2.9), где $\sigma(t) \equiv \sigma_0$, $s_1, s_2, \sigma_0 \in \mathbb{R}$, такая, что система (7.3) асимптотически устойчива.

Доказательство. Рассмотрим интегральное многообразие $\Omega(\mu)$, состоящее из траекторий $x = \varphi(t; x_0, \mu)$ системы (6.1) с начальными данными $x_0 \in L_2$:

$$\Omega(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, x = \varphi(t; x_0, \mu), \ x_0 \in L_2, \ t \in (t_1, t_2)\},$$

где t_1, t_2 – некоторые числа $(t_1 < 0 < t_2)$, $\varphi(0; x_0, \mu) = x_0$.

Пусть h – вектор, нормальный к линейной оболочке $\mathcal{L}(b, L_2)$, натянутой на вектор b и подпространство L_2. Тогда гиперплоскость $\mathcal{L}(b, L_2) = \{h^* x = 0\}$ является интегральным многообразием системы

$$\dot{x} = (bc^*)x, \tag{7.11}$$

так как $h^*(bc^*) = 0$.

Поскольку система (6.1) имеет те же самые траектории, что и система

$$\dot{x} = \left(\frac{1}{\mu} A + bc^*\right) x,$$

а последняя сколь угодно близка к системе (7.11) при достаточно больших $|\mu|$, то

$$\Omega(\mu) \to \{h^* x = 0\} \quad \text{при} \qquad (\mu \to \infty). \tag{7.12}$$

Как и в начале доказательства теоремы 5.1, из полной управляемости пары (A, b) и полной наблюдаемости пары (A, c) по лемме 7.1, примененной к системе

$$\dot{x} = (Q + \mu bc^*)x, \ \ x \in \mathbb{R}^n \ \ (\mu \neq 0),$$

где $\mu = s_2 - \sigma_0$, $Q = A + \sigma_0 bc^*$, следует полная наблюдаемость пары $(A + \sigma_0 bc^*, h)$. Аналогично, из леммы 5.2 следует, что пара $(A + \sigma_0 bc^*, d)$, где $d \in M_1$, $d \neq 0$ полностью управляема. Отсюда, используя лемму 3.3, выводим, что решение $x(t; d) = e^{Qt}d$ системы $\dot{x} = Qx$ достигает гиперплоскости $h^*x = 0$ в некоторый момент времени t. В силу соотношения (7.12) при достаточно большом μ^0 существует число $\tau_0(\mu^0; d) > 0$ такое, что $x(\tau_0(\mu^0; d); d) \in \Omega(\mu^0)$. При этом $\tau_0(\mu^0; d) \to 0$ при $\mu^0 \to \infty$.

Далее, двигаясь по многообразию $\Omega(\mu^0)$ вдоль траектории $\varphi(t; x_0, \mu^0)$, $x_0 \in L_2$, системы (6.1) с $\mu = \mu^0$, если $\varphi(t; x_0, \mu_0)$ приближается к L_2 при возрастании t или системы (6.1) с $\mu = -\mu_0$, если $\varphi(t; x_0, \mu^0)$ удаляется от L_2 при возрастании t, достигнем многообразия L_2 в некоторый момент

$$t = \tau > \max\{\tau_0(\mu^0; d),\, \tau_0(-\mu^0, d)\}.$$

Заметим, что в силу автономности рассматриваемых систем за счет выбора движений вдоль траекторий, образующих многообразия $\Omega(\mu^0)$ и $\Omega(-\mu^0)$, можно добиться того, чтобы время τ достижения множества L_2 было одним и тем же для всех точек $d \in M_1$.

Отметим также, что многообразия $\Omega(\mu^0)$ и $\Omega(-\mu^0)$ достаточно близки друг к другу, но направления движений на траекториях, составляющих эти многообразия, различные. Это следует из того, что решения систем $\dot{x} = (A/\mu_0 + bc^*)x$ и $\dot{x} = (-A/\mu_0 + bc^*)x$ при достаточно большом μ_0 сколько угодно близки к решениям системы (7.11) по теореме о непрерывной зависимости решения от параметра.

Таким образом,

$$g_{\tau_0}^{\tau}\, f_0^{\tau_0}\, M_1 \subset L_2,$$

где $f_0^{\tau_0}$ – преобразование за время от 0 до τ_0, осуществляемое фазовым потоком $\{f^t\}$ системы $\dot{x} = Qx$, а $g_{\tau_0}^{\tau}$ – преобразование за время от τ_0 до τ, осуществляемое фазовым потоком $\{g^t\}$ системы (6.1) с $\mu = \mu^0$ или $\mu = -\mu^0$. Следовательно, выполняется "условие вложения многообразий" (2.6).

Итак, выполнены все условия основной теоремы 2.1 и, поэтому, система (7.3) асимптотически устойчива. Теорема 7.4 доказана.

§ 8. Необходимые условия стабилизации

В предыдущих параграфах были даны достаточные условия стабилизируемости рассматриваемых систем. Здесь мы приведем необходимые условия стабилизируемости.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^*x \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{8.1}$$

со скалярным входом $u \in \mathbb{R}$ и скалярным выходом $y \in \mathbb{R}$. Здесь A, b и c - постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times 1$, $n \times 1$ соответственно.

Предположим, что передаточная функция

$$W(p) = c^*(A - pI)^{-1}b$$

системы (8.1) невырождена. Тогда ее можно представить в виде отношения $W(p) = \nu(p)/\Delta(p)$ двух многочленов

$$\nu(p) = c_n p^{n-1} + c_{n-1}p^{n-2} + \cdots + c_1, \quad c_k \in \mathbb{R},$$
$$\Delta(p) = p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_1, \quad a_k \in \mathbb{R} \ \ (k = 1, \ldots, n),$$

не имеющих общих нулей. Здесь $\Delta(p)$ – характеристический многочлен матрицы A.

В дальнейшем будем предполагать, что $c_n \neq 0$. В этом случае, не умаляя общности, можно считать $c_n = 1$.

Имеет место следующая теорема, дающая достаточные условия невозможности стабилизации системы (8.1).

Теорема 8.1. *Предположим, что для системы (8.1) выполнены следующие условия:*

1) при $n > 2$ $c_1 \leqslant 0, \ldots, c_{n-1} \leqslant 0$ *(при* $n = 2$ $c_1 \leqslant 0$*),*

2) $c_1(a_n - c_{n-1}) > a_1,$

$c_1 + c_2(a_n - c_{n-1}) > a_2,$

$\ldots \ \ldots \ \ldots$

$c_{n-2} + c_{n-1}(a_n - c_{n-1}) > a_{n-1}.$

Тогда не существует функции $s(t)$*, для которой система*

$$\dot{x} = (A + s(t)bc^*)x \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{8.2}$$

была бы асимптотически устойчивой.

Доказательство. Хорошо известно, что систему (8.2) можно привести к каноническому виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -(a_n x_n + \cdots + a_1 x_1) - s(t)(x_n + c_{n-1}x_{n-1} + \cdots + c_1 x_1). \end{cases} \tag{8.3}$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 \geqslant 0, \ldots, x_{n-1} \geqslant 0,\, x_n + c_{n-1}x_{n-1} + \cdots + c_1x_1 \geqslant 0\}.$$

Докажем, что Ω положительно инвариантно относительно решений системы (8.3).

Пусть решение $x(t)$ системы (8.3) пересекает границу

$$\partial\Omega_j = \{x_j = 0, x_i > 0 \;\forall\, i \neq j,\; x_n + c_{n-1}x_{n-1} + \cdots + c_1x_1 > 0\}(i, j = 1, \cdots, n-1)$$

множества Ω в момент $t = \tau : x(\tau) \in \partial\Omega_j$. Тогда $\dot{x}_j(\tau) > 0$.

Действительно, при $j = 1, 2, \ldots, n-2$ имеем: $\dot{x}_j(\tau) = x_{j+1}(\tau) > 0$.

При $j = n-1$ (и $n > 2$)

$$\dot{x}_{n-1}(\tau) = x_n(\tau) > -c_{n-1}x_{n-1}(\tau) - \cdots - c_1x_1(\tau) \geqslant 0,$$

так как $c_k \leqslant 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ в силу условия 1) теоремы.

При $n = 2$ имеем: $\dot{x}_1(\tau) = x_2(\tau) > -c_1x_1(\tau) \geqslant 0$, так как $c_1 \leqslant 0$. Пусть теперь $x(\tau) \in \partial\Omega_0$, где

$$\partial\Omega_0 = \{x_j > 0,\; x_n + c_{n-1}x_{n-1} + \cdots + c_1x_1 = 0\} \;\; (j = 1, \ldots, n-1)$$

– оставшаяся $(n-1)$-мерная граница множества Ω. Обозначим

$$V(x) = x_n + c_{n-1}x_{n-1} + \cdots + c_1x_1.$$

Тогда в силу системы (8.3) имеем

$$\left.\frac{dV(x(t))}{dt}\right|_{t=\tau} = -a_nx_n(\tau) - \cdots - a_1x_1(\tau) + c_{n-1}x_n(\tau) + \cdots + c_1x_2(\tau) =$$
$$= (c_{n-1} - a_n)x_n(\tau) + \cdots + (c_1 - a_2)x_2(\tau) - a_1x_1(\tau) =$$
$$= (c_{n-1} - a_n)(-c_{n-1}x_{n-1}(\tau) - \cdots - c_1x_1(\tau)) + \cdots +$$
$$+(c_1 - a_2)x_2(\tau) - a_1x_1(\tau) = [-a_{n-1} + c_{n-2} + c_{n-1}(a_n - c_{n-1}]x_{n-1}(\tau) +$$
$$+ \cdots + [-a_2 + c_1 + c_2(a_n - c_{n-1}]x_2(\tau) + [-a_1 + c_1(a_n - c_{n-1})]x_1(\tau).$$

Из последнего равенства и условия 2) теоремы получаем неравенство $\left.\frac{dV(x(t))}{dt}\right|_{t=\tau} > 0$. Отсюда и из неравенства $\dot{x}_j > 0$ следует, что граница $\partial\Omega$ множества Ω, за исключением ее частей, имеющих размерность не больше, чем $n-2$, является бесконтактной по отношению к векторному полю, определяемому системой (8.3), и, поэтому решения системы (8.3) "прошивают"эту границу снаружи вовнутрь множества Ω. Отсюда и из непрерывной зависимости решений системы (8.3) от начальных данных следует положительная инвариантность множества Ω.

Так как $\dot{x}_1 > 0$ внутри множества Ω, то из положительной инвариантности Ω вытекает, что нулевое решение $x(t) \equiv 0$ и, следовательно, сама система (8.3) не является асимптотически устойчивой ни при каком выборе функции $s(t)$. Теорема 8.1 доказана.

Таким образом, *необходимым условием стабилизации системы (8.1) является нарушение хотя бы одного из условий 1) или 2) теоремы 8.1.*

Приведем теперь другое хорошо известное достаточное условие неустойчивости системы вида (8.2).

Теорема 8.2. *Если для линейной системы*

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \ \ x \in \mathbb{R}^n \tag{8.4}$$

с кусочно-непрерывной матрицей $P(t)$ выполнено неравенство

$$Tr\, P(t) \geqslant \alpha > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{8.5}$$

для некоторого положительного числа α, то система (8.4) неустойчива.

Если вместо условия (8.5) выполнено неравенство $Tr\, P(t) \geqslant 0$, то система (8.4) не является асимптотически устойчивой.

Доказательство. Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – произвольная система линейно независимых векторов фазового пространства $\mathbb{R}^n$ и

$$\psi_1(t) = \psi_1(t; \eta_1, t_0), \ \ldots, \ \psi_n(t) = \psi_n(t; \eta_n, t_0)$$

– фундаментальная система решений уравнения (8.4), выходящих в момент $t = t_0$ из векторов $\{\eta_k\}_{k=1}^n$:

$$\psi_1(t_0) = \eta_1, \ \ \ldots, \ \ \psi_n(t_0) = \eta_n.$$

Пусть $W(t)$ – определитель Вронского фундаментальной матрицы $\Psi(t)$ решений $\{\psi_k(t)\}_{k=1}^n$. Тогда по формуле Лиувилля и Остроградского в силу условия (8.5) получаем оценку

$$|W(t)| \geqslant |W(t_0)| e^{\alpha(t-t_0)}. \tag{8.6}$$

Если система (8.4) была бы устойчивой, то для любого наперед заданного шара S_ε с центром в начале координат и радиуса ε существовал бы шар S_δ радиуса δ такой, что преобразование $g_{t_0}^t$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$, осуществляемое траекториями уравнения (8.4) за время от t_0 до t, переводило бы шар S_δ в множество $g_{t_0}^t S_\delta$, лежащее при любом $t \geqslant t_0$ в шаре S_ε: $g_{t_0}^t S_\delta \subset S_\varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$. Отсюда получаем

$$\mu(g_{t_0}^t S_\delta) \leqslant \mu(S_\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^n, \tag{8.7}$$

где C_n – некоторая константа, μ – мера соответствующего множества.

Возьмем теперь длины векторов $\eta_1, \ldots \eta_n$ настолько малыми, чтобы параллелепипед Σ_0, натянутый на векторы $\eta_1, \ldots, \eta_n$, лежал в шаре $S_\delta : \Sigma_0 \subset S_\delta$. Так как $g_{t_0}^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ линейное преобразование, то образ $g_{t_0}^t \Sigma_0$ параллелепипеда Σ_0 тоже есть параллелепипед Σ_t, объем $\mu(\Sigma_t)$ которого равен

$$\mu(\Sigma_t) = |\det(g_{t_0}^t \eta_1, \ldots, g_{t_0}^t \eta_n)| = |W(t)|, \tag{8.8}$$

Поскольку $\Sigma_0 \subset S_\delta$ и $g_{t_0}^t S_\delta \subset S_\varepsilon$ для всех $t \geq t_0$, то $\Sigma_t \subset S_\varepsilon\, (\forall t \geqslant t_0,)$ где $\Sigma_t = g_{t_0}^t \Sigma_0$.

Поэтому, используя (8.7), (8.8), получаем

$$|W(t)| = \mu(\Sigma_t) \leqslant C\varepsilon^n \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Отсюда следует, что функция $|W(t)|$ ограничена на промежутке $[t_0, +\infty)$. С другой стороны, из соотношения (8.6) следует, что $|W(t)| \to +\infty$ при $t \to \infty$. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы 8.2.

Вторая часть теоремы 8.2 доказывается аналогично. Следует заметить, что если бы система (8.4) была бы асимптотически устойчивой, то имели бы $|W(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$, вопреки неравенству $|W(t)| \geq |W(t_0)|$.

Теорема 8.2 доказана.

Следствие. *Система (8.2) неустойчива, если*

$$Tr\,(A + s(t)bc^*) \geqslant \alpha > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

и не является асимптотически устойчивой, если

$$Tr\,(A + s(t)bc^*) \geqslant 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

§ 9. Низкочастотная стабилизация двумерных и трехмерных систем

Применим полученные в предыдущих параграфах результаты к двумерным и трехмерным системам.

9.1. Двумерные системы. Рассмотрим систему с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{c_2 p + c_1}{p^2 + a_2 p + a_1}, \tag{9.1}$$

где $a_1, a_2; c_1, c_2$ – некоторые вещественные числа.

Будем предполагать, что $c_2 \neq 0$. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что $c_2 = 1$. Предположим также, что функция $W(p)$ невырождена, т.е.

$$c_1^2 - a_2 c_1 + a_1 \neq 0. \tag{9.2}$$

Систему с передаточной функцией (9.1) можно реализовать в фазовом пространстве $\mathbb{R}^2$ как систему вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - u, \quad y = c_1 x_1 + x_2. \tag{9.3}$$

Из условий Рауса-Гурвица вытекает, что стационарная стабилизация системы (9.3) с помощью обратной связи $u = s_0 y$, $s_0 = \text{const} \neq 0$ возможна тогда и только тогда, когда $c_1 > 0$ или $c_1 \leqslant 0$, $a_2 c_1 < a_2$.

Рассмотрим случай, когда стационарная стабилизация невозможна:

$$c_1 \leqslant 0, \quad a_2 c_1 \geqslant a_1. \tag{9.4}$$

Применим теорему 4.1 к системе (9.3). Непосредственно проверяется, что условие 1) этой теоремы выполнено для любого $s_0 \neq 0$. Условие 2) теоремы будет выполнено, если при некотором $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ характеристический многочлен

$$p^2 + (a_2 + \sigma_0)p + (a_1 + c_1 \sigma_0)$$

системы (9.3), где $u = \sigma_0 y$, имеет комплексно-сопряженные корни. Для существования такого числа σ_0 необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$c_1^2 - a_2 c_1 + a_1 > 0. \tag{9.5}$$

Таким образом, если выполнено неравенство (9.5), то в силу теоремы 4.1 существует такая обратная связь $u = s(t)y$, где $s(t)$ – кусочно-постоянная периодическая функция, что система (9.3), где $u = s(t)y$, асимптотически устойчива.

Этот же результат можно получить и с помощью теоремы 7.2. Не умаляя общности, можно предположить, что $a_2 > 0$. Этого всегда можно достичь выбором s_0 в выражении

$$-(a_2 + s_0)x_2 - (a_1 + c_1 s_0)x_1 - (s(t) - s_0)(c_1 x_1 + x_2)$$

правой части второго уравнения системы (9.3), где $u = s(t)y$, и переобозначениями

$$a_2 + s_0 \to a_2,\ a_1 + c_1 s_0 \to a_1,\ \ s(t) - s_0 \to s(t).$$

Тогда из условия (9.2) и неравенств (9.4) вытекает, что $a_1 > 0$.

Из неравенства $a_2 > 0$ и соотношений (9.4) следует, что матрица A системы (9.3) имеет вещественные собственные значения $-\lambda$ и κ разных знаков: $-\lambda < 0$, $\kappa > 0$, причем $\lambda > \kappa$. Далее, условие (7.5) в теореме принимает здесь вид $\kappa + \lambda/\kappa + c_1 < 1$ (в силу (9.2) $\kappa \neq -c_1$.)

Отсюда получаем условие стабилизируемости (9.5).

Если не выполнено неравенство (9.5), то в силу теоремы 8.1 система (9.3) не может быть стабилизируема ни при какой обратной связи $u = s(t)y$.

Итак, нами получен следующий результат.

Теорема 9.1. *Пусть передаточная функция $W(p)$ системы (9.3) невырождена, т. е. выполнено неравенство (9.2).*

Тогда необходимым и достаточным условием стабилизируемости системы (9.3) является выполнение хотя бы одного из условий:

$$1)\ c_1 > 0 \quad \textit{или} \quad 2)\ c_1 \leqslant 0,\ c_1^2 - a_2 c_1 + a_1 > 0. \tag{9.6}$$

При этом в стабилизирующем управлении $u = s(t)y$, функцию $s(t)$ можно выбрать кусочно-постоянной периодической с достаточно большим периодом (низкочастотная стабилизация).

Замечание. Теорема 9.1 хорошо иллюстрирует как введение функции $s(t) \not\equiv s_0$, $s_0 = \text{const}$, в обратной связи $u = s(t)y$ расширяет возможности стационарной стабилизации ($s(t) \equiv s_0$): в пространстве параметров $\{(a_1, a_2; c_1)\}$ системы (9.3) условия (9.6) выделяют более широкую область, чем область, определяемая условиями Рауса-Гурвица при стационарной стабилизации.

9.2. Трехмерные системы.

1) Рассмотрим систему с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^3 + \alpha p^2 + \beta p + \gamma},$$

где α, β, γ – некоторые вещественные числа. Такую систему можно реализовать в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ как систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = & x_2, \\ \dot{x}_2 = & x_3, \\ \dot{x}_3 = & -(\alpha x_3 + \beta x_2 + \gamma x_1) - u, \ \ y = x_1. \end{cases} \tag{9.7}$$

Стационарная стабилизация $u = s_0 y$ системы (9.7) возможна тогда и только тогда, когда $\alpha > 0 \quad$ и $\quad \beta > 0$.

Пусть теперь $\alpha > 0, \ \beta \leqslant 0$. Применим здесь теорему 7.4. Выберем $\sigma_0 > 0$ так, чтобы характеристический многочлен системы (9.7), где $u = \sigma_0 y$, имел вид:

$$p^3 + \alpha p^2 + \beta p + (\gamma + \sigma_0) = (p - \kappa_0)(p^2 + \alpha_0 p + \beta_0),$$

где $\alpha_0 = \alpha + \kappa_0, \ \beta_0 = \beta + \kappa_0(\alpha + \kappa_0), \ \kappa_0 < 0$. При этом

$$\sigma_0 = -\kappa_0^2(\alpha + \kappa_0) - \beta\kappa_0 - \gamma.$$

При достаточно большом σ_0, характеристический многочлен имеет один отрицательный корень κ_0 и два комплексных корня $\lambda_0 \pm i\omega_0$ с $\lambda_0 > 0$.

Аналогично, возьмем $s_1 < 0$ так, чтобы характеристический многочлен системы, где $u = s_1 y$, принял вид:

$$p^3 + \alpha p^2 + \beta p + (\gamma + s_1) = (p - \kappa_1)(p^2 + \alpha_1 p + \beta_1),$$

где $\alpha_1 = \alpha + \kappa_1, \ \beta_1 = \beta + \kappa_1(\alpha + \kappa_1), \ \kappa_1 > 0$. При этом

$$s_1 = -\kappa_1^2(\alpha + \kappa_1) - \beta\kappa_1 - \gamma.$$

При достаточно большом $|s_1|$ характеристический многочлен имеет один положительный корень κ_1 и два комплексных корня $-\lambda_1 \pm i\omega_1$, где $\lambda_1 = (\alpha + \kappa_1)/2 > 0$.

Наконец, возьмем s_2 настолько большим, чтобы для характеристического многочлена системы, где $u = s_2 y$, выполнялось равенство

$$p^3 + \alpha p^2 + \beta p + (\gamma + s_2) = (p + \lambda_2)(p^2 + \alpha_2 p + \beta_2),$$

где $\alpha_2 = \alpha - \lambda_2, \ \beta_2 = \beta - \lambda_2(\alpha - \lambda_2)$. Этот многочлен при достаточно большом λ_2 будет иметь один отрицательный корень $-\lambda_2$ и два комплексных корня $\kappa_2 \pm i\omega_2$, причем $\kappa_2 = (\lambda_2 - \alpha)/2 > 0$.

Таким образом, здесь

$$\dim M_1 = \dim L_2 = 1, \ \dim M_2 = \dim L_1 = 2, \ \ \lambda_1 = (\alpha + \kappa_1)/2,$$

$$\kappa_2 = (\lambda_2 - \alpha)/2, \ \ \lambda_1\lambda_2 - \kappa_1\kappa_2 = \alpha(\lambda_2 + \kappa_1)/2 > 0.$$

Следовательно, выполнены все условия теоремы 7.4. Поэтому при $\alpha > 0, \ \beta \leqslant 0$ существует кусочно-постоянная периодическая функция $s(t)$ с достаточно большим периодом такая, что система (9.7), где $u = s(t)y$, асимптотически устойчива.

Поскольку

$$Tr\,(A + bs(t)^* c^*) = -\alpha \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

то в силу следствия теоремы 8.2 система (9.7), где $u = s(t)y$, не является асимптотически устойчивой при $\alpha \leqslant 0$ ни при какой функции $s(t)$.

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 9.2. *Система (9.7) стабилизируема тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$. При этом функцию $s(t)$ в стабилизирующем управлении $u = s(t)y$ можно выбрать кусочно-постоянной периодической с достаточно большим периодом (низкочастотная стабилизация).*

Замечание. Как и теорема 9.1, теорема 9.2 хорошо иллюстрирует преимущества нестационарной стабилизации по сравнению со стационарной.

2) Рассмотрим систему с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{p}{p^3 + \alpha p^2 + \beta p + \gamma},$$

где α, β и γ - некоторые вещественные числа. Будем считать, что $\gamma \neq 0$ (условие невырожденности функции $W(p)$). Тогда эту систему можно реализовать в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ как систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = x_3, \ \ \dot{x}_3 = -(\alpha x_3 + \beta x_2 + \gamma x_1) - u, \quad y = x_2. \qquad (9.8)$$

Из условий Рауса-Гурвица выводим, что стационарная стабилизация $u = s_0 y$ системы (9.8) возможна в том и только том случае, когда $\alpha > 0, \ \gamma > 0$. Рассмотрим случай $\alpha > 0, \ \gamma < 0$. Применим здесь теорему 7.1, где

$$s_1 = s_2, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa.$$

Выберем s_1 так, чтобы характеристический многочлен системы (9.8), где $u = s_1 x_2$, имел вид

$$p^3 + \alpha p^2 + (s_1 + \beta)p + \gamma = (p - \kappa)(p^2 + \alpha_1 p + \beta_1),$$

где $\alpha_1 = \alpha + \kappa, \ \beta_1 = -\gamma/\kappa, \ \kappa > 0$ и

$$s_1 = -\beta - \kappa(\alpha + \kappa) - \gamma/\kappa.$$

Ясно, что при достаточно малых κ многочлен $p^2 + \alpha_1 p + \beta_1$ имеет комплексные корни $-\lambda \pm i\omega$, где $\lambda = (\alpha + \kappa)/2$. При достаточно малых κ выполнено неравенство $\lambda > \kappa$. Значит, все условия теоремы 7.1 выполнены.

Поскольку для системы

$$Tr\,(A + bs(t)^* c^*) = -\alpha \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

то в силу следствия теоремы 8.2 при $\alpha < 0$ невозможна асимптотическая устойчивость системы (9.8), где $u = s(t)y$, ни при какой функции $s(t)$. Таким образом, нами получен следующий результат.

Теорема 9.3. *Пусть $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Тогда для стабилизируемости системы (9.8) необходимо и достаточно, чтобы $\alpha > 0$.*

3) Пусть передаточная функция системы имеет вид

$$W(p) = \frac{p^2}{p^3 + \alpha p^2 + \beta p + \gamma},$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \gamma \neq 0$. Эту систему можно реализовать в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$ как систему вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -(\alpha x_3 + \beta x_2 + \gamma x_1) - u, \quad y = x_3. \tag{9.9}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\gamma & -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Стационарная стабилизация $u = s_0 y$ системы 9.9 возможна тогда и только тогда, когда $\beta > 0$, $\gamma > 0$. В случае $\beta < 0$, $\gamma < 0$ стабилизация (как стационарная, так и нестационарная) невозможна в силу теоремы 8.1. Здесь $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = 1; a_1 = \gamma < 0$, $a_2 = \beta < 0$.

Рассмотрим случай $\beta > 0, \gamma < 0$, когда стационарная стабилизация невозможна. Применим теорему 2.1. Как и выше, примем

$$s_1 = s_2; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa.$$

Выберем s_1 так, чтобы характеристический многочлен системы (9.9), где $u = s_1 y$, принял вид

$$p^3 + (\alpha + s_1)p^2 + \beta p + \gamma = (p - \kappa)(p^2 + \alpha_1 p + \beta_1),$$

где $\kappa > 0$ и

$$\alpha_1 = -(\gamma + \beta\kappa)/\kappa^2,\ \beta_1 = -\gamma/\kappa,\ s_1 = -(\gamma + \beta\kappa)/\kappa^2 - \kappa - \alpha.$$

При достаточно малом $\kappa > 0$ многочлен $p^2 + \alpha_1 p + \beta_1$ имеет два отрицательных корня, больший из которых ν равен

$$\nu = \frac{\gamma + \beta\kappa}{2\kappa^2} + \sqrt{\frac{(\gamma + \beta\kappa)^2}{4\kappa^4} + \frac{\gamma}{\kappa}}.$$

За число λ примем $-\nu:\ \lambda = -\nu$.

Непосредственно проверяется, что неравенство $\lambda > \kappa$ сводится к неравенству $\beta + \kappa^2 > 0$. Таким образом, здесь

$$\dim M_1 = \dim M_2 = 1,\ \dim L_1 = \dim L_2 = 2.$$

Возьмем σ_0 так, чтобы характеристический многочлен системы (9.9), где $u = \sigma_0 y$, имел вид:

$$p^3 + (\alpha + \sigma_0)p^2 + \beta p + \gamma = (p - \kappa_0)(p^2 + \alpha_0 p + \beta_0),$$

где $\kappa_0 > 0$ и

$$\alpha_0 = -(\gamma + \beta\kappa_0)/\kappa_0^2,\ \beta_0 = -\gamma/\kappa_0,\ \sigma_0 = -(\gamma + \beta\kappa_0)/\kappa_0^2 - \kappa_0 - \alpha.$$

При достаточно большом κ_0 многочлен $p^2 + \alpha_0 p + \beta_0$ имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_0 \pm i\omega_0$, причем $\lambda_0 = (\gamma + \beta\kappa_0)/2\kappa_0^2 > 0$.

Поэтому, не умаляя общности, можно принять, что

$$A + \sigma_0 bc^* = \begin{pmatrix} \kappa_0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix},\ \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},\ \ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

где Q – (2×2)-матрица, имеющая собственные значения $\lambda_0 \pm i\omega_0$, $b_1, c_1 \in \mathbb{R}$, $b_2, c_2 \in \mathbb{R}^2$. Также, без умаления общности, можно считать, что

$$W(p) = \frac{p^2}{p^3 + (\alpha + \sigma_0)p^2 + \beta p + \gamma}.$$

Этого можно добиться всегда за счет изменения функции $s(t)$ в обратной связи $u = s(t)y$ для системы (9.9).

Поскольку $W(p) = c^*(A - pI)^{-1}b$, то

$$1 = \lim_{p\to\infty} pW(p) = pc^*(A - pI)^{-1}b = -\lim_{p\to\infty} c^*(I - \frac{A}{p})^{-1}b = -c^*b.$$

Как и в доказательстве теоремы 7.2 устанавливаем, что $\lim_{p\to\infty}(\kappa - p)W(p) = b_1c_1$. Используя последние два соотношения и вид функции $W(p)$, при достаточно большом κ_0 будем иметь:

$$\frac{c^*b}{b_1c_1} = \frac{-1}{\lim_{p\to\infty}(\kappa_0 - p)W(p)} = 1 + \frac{\alpha_2\kappa_0 + \beta_2}{\kappa_0^2} = 1 - \frac{2\gamma}{\kappa_0^3} - \frac{\beta}{\kappa_0^2} < 1. \qquad (9.10)$$

Так как матрица Q имеет комплексные собственные значения, то для ненулевого вектора $d \in M_1$ существует число $\tau_1 > 0$ такое, что векторы b, $col(1,0,0)$, $[\exp(A+\sigma_0 bc^*)\tau_1]d$ принадлежат одной плоскости. С учетом неравенства (9.10) из леммы 6.2 следует существование чисел μ и $\tau(\mu)$ таких, что

$$(1,0,0)\cdot[\exp(A+(\sigma_0+\mu)bc^*)\tau(\mu)]d_1 = 0, \qquad (9.11)$$

где $d_1 = [\exp(A+\sigma_0 bc^*)\tau_1]d$.

Так как плоскости $\{x_1 = 0\}$ и L_2 пересекаются, матрица Q имеет комплексные собственные значения и фазовый поток на плоскости $x_1 = 0$ есть $\{exp(Qt)\}$, то существует число τ_2 такое, что

$$[\exp(A+\sigma_0 bc^*)\tau_2]d_2 \in L_2, \qquad (9.12)$$

где $d_2 = [\exp(A+(\sigma_0+\mu)bc^*)\tau(\mu)]d_1$.

Таким образом, сначала на промежутке $[0,\tau_1]$ фазовый поток $\{f^t\}$ системы $\dot{x} = (A+\sigma_0 bc^*)x$ переводит произвольный ненулевой вектор $d \in M_1$ в вектор d_1, принадлежащий плоскости π, натянутой на вектор b и единичный вектор $(1,0,0)^*$ оси x_1. Затем, переключаясь на траектории системы $\dot{x} = [A+(\sigma_0+\mu)bc^*]x$, на промежутке $(\tau_1, \tau_1+\tau(\mu)]$ фазовый поток $\{g^t\}$ этой системы "переносит"вектор d_1 с плоскости π в вектор d_2 на плоскости $x_1 = 0$. И, наконец, под действием опять фазового потока $\{f^t\}$ ($f^t|_{x_1=0} = e^{Qt}$) на промежутке $(\tau_1+\tau(\mu), \tau_1+\tau(\mu)+\tau_2]$ вектор d_2 переводится в вектор, лежащий на пересечении $\{x_1 = 0\} \cup L_2$.

Так как все преобразования $f^{\tau_1}, g^{\tau(\mu)}, f^{\tau_2}$ линейны, то из включения (9.12) следует включение $f^{\tau_2}g^{\tau(\mu)}f^{\tau_1}M_1 \subset L_2$. Отсюда следует, что выполняется “условие вложения многообразий” (2.6) с

$$\theta_0^\tau = f^{\tau_2}g^{\tau(\mu)}f^{\tau_1},\ \tau = \tau_1+\tau(\mu)+\tau_2.$$

Здесь $\{\theta^t\}$ – фазовый поток системы

$$\dot{x} = (A+\sigma(t)bc^*)x \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

где

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } t \in [0, \tau_1), \\ \sigma_0 + \mu & \text{при } t \in [\tau_1, \tau_1 + \tau(\mu)), \\ \sigma_0 & \text{при } t \in [\tau_1 + \tau(\mu), \tau_1 + \tau(\mu) + \tau_2). \end{cases}$$

Итак, в силу основной теоремы 2.1 мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 9.4. *Пусть $\beta \neq 0$, $\gamma < 0$. Тогда для стабилизируемости системы (9.9) необходимо и достаточно, чтобы $\beta > 0$.*

II. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В этом разделе для решения проблемы Брокетта излагается другой, отличный от предыдущего I, подход [19–21]. Он использует метод усреднения, некоторые идеи из теории вибрационного управления, а также технику исследования хорошо известного явления стабилизации верхнего положения равновесия маятника. Этот подход дает решение проблемы Брокетта для систем со скалярным входом и скалярным выходом в классе непрерывных периодических функций, а именно, синусоидальных, с достаточно малым периодом. Здесь построены алгоритмы высокочастотной стабилизации. Изложение ведем следуя в основном работам [19–21].

§ 1. Лемма об экспоненциальной устойчивости

Сформулируем одно вспомогательное предложение об экспоненциальной устойчивости, которое понадобится нам в дальнейшем.

Пусть задана линейная дифференциальная система

$$\dot{x} = \varepsilon A(t)x, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ \ t \in [0, +\infty), \tag{1.1}$$

где матрица-функция $A(t)$ ограничена и непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$, а $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим усредненную систему

$$\dot{x} = \varepsilon A_0 x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

где A_0 – постоянная матрица, определяемая из условия

$$\int\limits_0^t A(s)ds = tA_0 + Q(t). \tag{1.3}$$

Здесь $Q(t)$ – ограниченная матрица-функция.

Имеет место следующая теорема, принадлежащая В.А.Якубовичу (см. [18]).

Теорема 1.1 (В.А.Якубович). *Предположим, что матрица $A(t)$ удовлетворяет условию (1.3). Пусть в системе (1.2) матрица A_0 гурвицева.*

Тогда система (1.1) экспоненциально устойчива при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где ε_0 – достаточно малое число.

Из теоремы Якубовича следует утверждение об экспоненциальной устойчивости линейной системы с большим параметром.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(\omega t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [0, +\infty), \tag{1.4}$$

с непрерывной и периодической с периодом $T > 0$ матричнозначной функцией $A : \tau \to A(\tau)$, где $\omega > 0$ – большой параметр.

Лемма 1.1 (об экспоненциальной устойчивости системы с большим параметром). *Если усредненная система*

$$\dot{x} = A_0 x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.5}$$

где $A_0 = (1/T)\int_0^T A(\tau)d\tau$, асимптотически устойчива, то система (1.1) экспоненциально устойчива равномерно по ω на промежутке $[\omega_0, +\infty)$, где ω_0 – достаточно большое положительное число.

§ 2. Высокочастотная стабилизация верхнего положения равновесия маятника

В § 1 раздела I была показана возможность низкочастотной стабилизации верхнего положения равновесия маятника в классе кусочно-постоянных периодических функций с достаточно большим периодом.

Теперь покажем возможность высокочастотной стабилизации верхнего положения равновесия маятника в другом классе функций, а именно в классе непрерывных периодических функций с достаточно малым периодом.

Система уравнений первого приближения в окрестности верхнего положения равновесия имеет вид (1.4) из раздела I:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + (\nu_0^2 + s(t))x_1. \tag{2.1}$$

Будем искать стабилизирующую функцию $s(t)$ в классе периодических функций вида

$$s(t) = -s_0 + \beta\omega\cos\omega t, \tag{2.2}$$

где $s_0 > 0, \beta > 0$ и $\omega \gg 1$ – варьируемые параметры.

С помощью линейного преобразования переменных

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 + (\beta\sin\omega t)y_1 \tag{2.3}$$

приведем систему (2.1), (2.2) к виду (1.4)

$$\begin{cases} \dot y_1 = (\beta\sin\omega t)y_1 + y_2, \\ \dot y_2 = (\nu_0^2 - s_0 - \alpha\beta\sin\omega t - \beta^2\sin^2\omega t)y_1 - (\alpha + \beta\sin\omega t)y_2. \end{cases} \tag{2.4}$$

Заметим, что преобразование (2.3) сохраняет свойство экспоненциальной устойчивости, так как его матрица коэффициентов ограничена на промежутке $[0, +\infty)$.

Применяя лемму 1.1 к системе (2.4), получаем, что система (2.4) экспоненциально устойчива равномерно относительно ω для всех $\omega > \omega_0$, где ω_0 – достаточно большое число, если гурвицевой является матрица

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \nu_0^2 - s_0 - \beta^2/2 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 2.1. *Система (2.1), (2.2) экспоненциально устойчива равномерно относительно ω для всех $\omega > \omega_0$, где ω_0 – достаточно большое число, если выполнено неравенство*

$$\nu_0^2 < s_0 + \beta^2/2. \tag{2.5}$$

Итак, верхнее положение равновесия маятника становится устойчивым, если выполняется неравенство (2.5).

§ 3. Высокочастотная стабилизация линейных систем

Рассмотрим линейную систему

$$\dot x = Ax + bu, \quad y \in c^* x, \tag{3.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u \in \mathbb{R}$ – вход (управление), $y \in \mathbb{R}$ – выход, A – вещественная постоянная $(n \times n)$-матрица, а b и c – одностолбцовые n-мерные векторы.

Требуется найти обратную связь $u = s(t)y$ такую, чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A + s(t)bc^*)x, \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{3.2}$$

оказалась экспоненциально (и, следовательно, асимптотически) устойчивой.

Будем искать стабилизирующую функцию $s(t)$ в классе функций вида $s(t) = \alpha + s_1(t)$, где α – постоянная, а $s_1(t)$ – непрерывная периодическая функция с нулевым средним на периоде $[0, T]$.

3.1. Приведение замкнутой системы к специальному виду.

Приведем систему (3.2) с помощью нестационарной линейной замены переменных к специальному виду.

Лемма 3.1. *Линейное преобразование*

$$x = \Phi(t)z \quad (z \in \mathbb{R}^n) \tag{3.3}$$

где $\Phi(t) = \exp\{\ell(t)bc^*\}$, $\ell(t)$ *– непрерывно дифференцируемая функция на* $[0, +\infty)$, *удовлетворяющая условию* $\dot{\ell}(t) = s_1(t)$, *приводит систему (3.2) к виду*

$$\dot{z} = (\Phi^{-1}(t)A\Phi(t) + \alpha bc^*)x. \tag{3.4}$$

При этом систему (3.2) экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда экспоненциально устойчива система (3.4).

Доказательство. Первая часть леммы 3.1 доказывается непосредственной подстановкой (3.3) в (3.2) с использованием равенства

$$\dot{\Phi}(t) = s_1(t)bc^*\Phi(t),$$

имеющего место в силу того, что матрица bc^* коммутирует с матрицей $\Phi(t)$.

Вторая часть утверждения леммы следует из ограниченности матричной функции $\Phi(t)$ и ее детерминанта $\det \Phi(t)$: $0 < m \leqslant \det \Phi(t) \leqslant M$ для всех $t \geqslant 0$, где m и M – некоторые положительные числа. Эти свойства функции $\Phi(t)$ следуют из вида $\Phi(t)$, периодичности $\ell(t)$ и равенства $\det[\exp\{\ell(t)bc^*\}] = \exp(\ell(t)c^*b)$, поскольку $\mathrm{Tr}(bc^*) = c^*b$. Так как обратная матрица $\Phi^{-1}(t)$ обладает теми же свойствами, что и $\Phi(t)$, то лемма 3.1 доказана.

Далее будем различать два случая:

1) $c^*b \neq 0$ и 2) $c^*b = c^*Ab = 0$.

3.2. Стабилизация в случае $c^*b \neq 0$.

Справедлива следующая

Теорема 3.1. *Пусть $c^*b \neq 0$. Предположим, что существуют вещественные числа α и $\kappa \geqslant 0$ такие, что матрица*

$$A + \kappa(c^*b)bc^*A + (\alpha - \kappa c^*Ab)bc^*$$

гурвицева.

Тогда существует стабилизирующая функция $s(t)$ вида

$$s(t) = \alpha + \beta\omega\cos\omega t$$

такая, что замкнутая система (3.2) равномерно экспоненциально устойчива для всех достаточно больших значений ω. При этом число β можно взять удовлетворяющим равенству

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\exp(\beta c^*b\sin t)dt\right)^2 - 1 = \kappa(c^*b)^2. \tag{3.5}$$

Доказательство. Так как $c^*b \neq 0$, то используя равенство

$$(bc^*)^k = (c^*b)^{k-1}bc^*,$$

матрицу $\Phi(t)$ из леммы 3.1 можно привести к виду

$$\Phi(t) = I + \frac{\ell(t)\exp(c^*b) - 1}{c^*b}bc^*. \tag{3.6}$$

Аналогично

$$\Phi^{-1}(t) = I + \frac{\ell(t)\exp(-c^*b)}{c^*b}bc^*. \tag{3.7}$$

Здесь I – единичная $(n \times n)$-матрица.

В качестве функции $s_1(t)$ в лемме 3.1 возьмем синусоидальную функцию: $\beta\omega\cos\omega t$, где β, ω – параметры. Тогда

$$\ell(t) = \ell_0 + \beta\sin\omega t, \tag{3.8}$$

где значение постоянной ℓ_0 выберем ниже.

Используя (3.6), (3.7), а также очевидное равенство

$$(bc^*A)bc^* = (c^*Ab)bc^*,$$

приведем систему (3.4) к виду

$$\dot{z} = B(\omega t)z, \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} B(\omega t) = A + \frac{\exp(c^* b\ell(t)) - 1}{c^* b} Abc^* + \frac{\exp(-c^* b\ell(t))}{c^* b} bc^* A + \\ + \frac{2 - \exp(c^* b\ell(t)) - \exp(-c^* b\ell(t))}{(c^* b)^2}(c^* Ab)bc^* + \alpha bc^*. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Введем в рассмотрение функцию $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\mu(\beta) = \frac{\left[(1/2\pi)\int_0^{2\pi} \exp(\beta c^* b \sin t)dt\right]^2 - 1}{(c^* b)^2}.$$

Легко проверить, что функция μ является четной и область ее значений есть промежуток $[0, +\infty)$. Поэтому существует значение β, удовлетворяющее условию (3.5): $\mu(\beta) = \kappa$.

Применим к системе (3.9), (3.10) лемму 1.1. При вычислении матрицы $B_0 = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} B(\tau)d\tau$ выберем значение константы ℓ_0 в (3.8) так:

$$\ell_0 = \frac{1}{c^* b}(\ln 2\pi - \ln \int_0^{2\pi} \exp(\beta c^* b \sin \tau)d\tau.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp[c^* b(\ell_0 + \beta \sin \tau)]d\tau - 1 = 0,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp[-c^* b(\ell_0 + \beta \sin \tau)]d\tau - 1 = (c^* b)^2 \kappa.$$

С учетом последних равенств получаем, что

$$B_0 = A + \kappa(c^* b)bc^* A + (\alpha - \kappa c^* Ab)bc^*.$$

Матрица B_0 по условию теоремы гурвицева. Поэтому в силу леммы 1.1 система (3.11), а следовательно, в силу леммы 3.1 и система (3.2) равномерно экспоненциально устойчива для всех достаточно больших ω. Теорема 3.1 доказана.

3.3. Стабилизация в случае $c^*b = c^*Ab = 0$.

Так как $c^*b = 0$, то матрицы (3.6) и (3.7) принимают соответственно вид:

$$\Phi(t) = I + \ell(t)bc^*, \quad \Phi^{-1}(t) = I - \ell(t)bc^*.$$

Поэтому в силу равенства $c^*Ab = 0$ система (3.4) примет вид

$$\dot{z} = (A + \alpha bc^* + \ell(t)[A, bc^*])z, \tag{3.11}$$

где

$$[A, bc^*] = A(bc^*) - (bc^*)A$$

есть коммутатор матриц A и bc^*.

Система (3.11) имеет такую же структуру, что и система (3.2). (Здесь роль $s(t)$ играет $\ell(t)$.) Будем искать $\ell(t)$ в виде: $\ell(t) = \ell_0+\ell_1(t)$, где ℓ_0 – постоянная, а $\ell_1(t)$ – непрерывная периодическая функция с нулевым средним на периоде, причем $\dot{\ell}(t) = s_1(t)$.

Следующая лемма аналогична лемме 3.1.

Лемма 3.2. *Пусть $c^*b = c^*Ab = 0$. Тогда линейное преобразование*

$$z = \psi(t)v, \quad v \in \mathbb{R}^n, \tag{3.12}$$

где $\psi(t) = \exp\{m(t)[A, bc^*]\}$, $m(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая условию $\dot{m}(t) = \ell(t)$, приводит систему (3.11) к виду

$$\dot{v} = (\psi^{-1}(t)A\psi(t) + \alpha bc^* + \ell_0[A, bc^*])v. \tag{3.13}$$

При этом преобразование (3.12) сохраняет свойство экспоненциальной устойчивости системы.

Доказательство. Сделав замену переменных (3.12) в системе (3.11), получим систему

$$\dot{v} = \psi^{-1}(t)(A + \alpha bc^* + \ell_1[A, bc^*])\psi(t)v. \tag{3.14}$$

Так как $c^*b = c^*Ab = 0$, то

$$(bc^*)[A, bc^*] = 0, \quad [A, bc^*](bc^*) = 0,$$

и поэтому

$$(bc^*)\psi(t) = \psi^{-1}(t)(bc^*) = bc^*. \tag{3.15}$$

Так как матрица $[A, bc^*]$ коммутирует с $\psi(t)$, то, с учетом равенств (3.15), из (3.14) получаем (3.13).

Вторая часть леммы 3.2 доказывается аналогично второй части леммы 3.1. Лемма 3.2 доказана.

Теперь докажем теорему о стабилизируемости в рассматриваемом случае.

Теорема 3.2. *Пусть* $c^*b = c^*Ab = 0$. *Предположим, что существуют вещественные числа* α *и* $\kappa \geqslant 0$ *такие, что матрица*

$$A - 3\kappa(c^*A^2b)bc^*A + (\alpha + \kappa c^*A^3b)bc^*$$

гурвицева.

Тогда существует стабилизирующая функция $s(t)$ *вида*

$$s(t) = \alpha + \gamma\omega^2 \cos \omega t$$

такая, что замкнутая система (3.2) равномерно экспоненциально устойчива для всех достаточно больших значений ω. *При этом число* $\gamma = \sqrt{2\kappa}$.

Доказательство. Поскольку $c^*b = c^*Ab = 0$, то непосредственно можно проверить, что

$$[A, bc^*]^2 = -(c^*A^2b)bc^*, \quad [A, bc^*]^3 = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $[A, bc^*]^k = 0$ для натуральных $k \geqslant 4$. Следовательно, матрицы $\psi(t)$ и $\psi^{-1}(t)$ принимают вид

$$\psi(t) = I + m(t)[A, bc^*] - \frac{m(t)^2}{2}(c^*A^2b)(bc^*),$$
$$\psi^{-1}(t) = I - m(t)[A, bc^*] - \frac{m(t)^2}{2}(c^*Ab)(bc^*).$$

С учетом последних равенств имеем

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(t)A\psi(t) = A &+ m(t)[A, [A, bc^*]] - m(t)^2[A, bc^*]A[A, bc^*]- \\ &- (1/2)(c^*A^2b)m(t)^2(Abc^* + bc^*A)+ \\ &+ (1/2)(c^*A^2b)m(t)^3\{[A, bc^*]Abc^* - bc^*A[A, bc^*]\}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Непосредственным вычислением можно установить, что

$$[A, bc^*]A[A, bc^*] = (c^*A^2b)(Abc^* + bc^*A) - (c^*A^3b)bc^*,$$
$$[A, bc^*]Abc^* = -(c^*A^2b)bc^*, \quad bc^*A[A, bc^*] = (c^*A^2b)bc^*.$$

Используя последние равенства, выражение (3.16) можно переписать так

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(t)A\psi(t) = A + m(t)[A, [A, bc^*]] - (3/2)(c^*A^2b)m(t)^2(Abc^* + bc^*A)+ \\ + (c^*A^3b)m(t)^2bc^* - (c^*A^2b)^2m(t)^3bc^*.\end{aligned}$$

С учетом последнего равенства система (3.13) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{v} = \{A + m(t)[A,[A,bc^*]] - (3/2)(c^*A^2b)m(t)^2(Abc^* + bc^*A) + \\ + (c^*A^3b)m(t)^2bc^* - (c^*A^2b)^2m(t)^3bc^* + \alpha bc^* + \ell_0[A,bc^*]\}v.\end{aligned} \qquad (3.17)$$

Выберем теперь стабилизирующую функцию $s(t) = \alpha + s_1(t)$. В качестве $s_1(t)$ возьмем функцию

$$s_1(t) = \gamma\omega^2\cos\omega t,$$

где γ и ω – параметры. Тогда имеем

$$m(t) = m_0 - \gamma\cos\omega t, \qquad (3.18)$$

поскольку должно быть $\dot{\ell}(t) = s_1(t), \dot{m}(t) = \ell(t)$.

Система (3.17), (3.18) имеет вид

$$\dot{v} = D(\omega t)v, \qquad (3.19)$$

где $D(\omega t)$ – матрица, стоящая в фигурной скобке в (3.17). Положив

$$\gamma^2 = 2\kappa, \quad \ell_0 = (3\kappa/2)c^*A^2b, \quad m_0 = 0,$$

вычислим матрицу $D_0 = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} D(\tau)d\tau$. Получаем

$$D_0 = A - 3\kappa(c^*A^2b)bc^*A + (\alpha + \kappa c^*A^3b)bc^*,$$

которая по условию теоремы гурвицева. Остается сослаться на леммы 1.1 и 3.2. Теорема 3.2 доказана.

Замечание. В работе [21] рассмотрен также и случай, когда $c^*b = c^*Ab = \dots = c^*A^{2k-1}b = 0$, $k > 1$. Для этого случая стабилизационная теорема формируется аналогично теореме 3.2: если матрица

$$A + (-1)^k(2k+1)\kappa(c^*A^{2k}b)bc^*A + [\alpha + (-1)^{k+1}(2k+1)\kappa(c^*A^{2k+1}b)]bc^*$$

гурвицева, то обратная связь $u = s(t)y$, где $s(t) = \alpha + \beta\omega^{k+1}\cos\omega t$, стабилизирует систему (3.1), а именно, замкнутая система (3.2) экспоненциально устойчива равномерно относительно ω для всех достаточно больших значений ω.

§ 4. Высокочастотная стабилизация двумерных и трехмерных систем

Здесь мы рассмотрим двумерные и трехмерные линейные системы.

4.1. Двумерные системы.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_1x_1 - a_2x_2 - u, \quad y = c_1x_1 + c_2x_2, \end{cases} \tag{4.1}$$

где a_1, a_2, c_1, c_2 – вещественные числа.

Будем предполагать, что $c_2 \neq 0$. Тогда без умаления общности можно считать $c_2 = 1$. Предположим, что

$$c_1^2 - a_2c_1 + a_1 \neq 0. \tag{4.2}$$

Для системы (4.1) имеем $c^*b = -1$. Применяя теорему 3.1 получаем следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие (4.2). Тогда если выполнено хотя бы одно из условий*

$$a) \quad c_1 > 0 \quad \text{или} \quad b) \quad c_1 \leqslant 0, \quad c_1^2 - a_2c_1 + a_1 > 0,$$

то существует обратная связь вида

$$u = s(t)y, \quad s(t) = \alpha + \beta\omega\cos\omega t \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}) \tag{4.3}$$

такая, что замкнутая система (4.1), (4.3) равномерно экспоненциально устойчива для всех достаточно больших значений ω. При этом константу β можно взять такой, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \exp(-\beta\sin t)dt = 2\pi\sqrt{1+\kappa},$$

где $\kappa \geqslant 0$ – некоторая постоянная.

Замечание 1. Из теоремы 2.1 раздела I следует, что если $c_1 \leqslant 0$ и $c_1^2 - a_2c_1 + a_1 < 0$, то система (4.1) не может быть стабилизируема ни при какой обратной связи вида $u = s(t)y$. Таким образом, условия a) и b) теоремы 4.1 являются также и необходимыми.

Замечание 2. Сравнивая условия a) и b) теоремы 4.1 с условиями стационарной стабилизации $u = \alpha y$ $(\alpha = \text{const})$: $c_1 > 0$ или $c_1 \leqslant 0$, $c_1c_2 < a_1$, мы видим как обратная связь вида (4.3) позволяет расширить возможности стационарной стабилизации.

4.2. Трехмерные системы.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - u, \quad y = x_1, \end{cases} \tag{4.4}$$

где a_1, a_2, a_3 – постоянные числа.

Для системы (4.4) выполняются равенства $c^*b = c^*Ab = 0$. Применяя теорему 3.2 к системе (4.4) получаем следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Если $a_3 > 0$, то существует обратная связь вида*

$$u = s(t)y, \quad s(t) = \alpha + \gamma\omega^2 \cos\omega t \quad (\alpha, \gamma \in \mathbb{R}) \tag{4.5}$$

такая, что замкнутая система (4.4), (4.5) равномерно экспоненциально устойчива для всех достаточно больших значений ω. При этом за константу γ можно взять $\gamma = \sqrt{2\kappa}$, где $\kappa \geqslant 0$ – некоторое число.

Замечание 1. Поскольку для системы (4.4) $\mathrm{Tr}(A + s(t)bc^*) = \mathrm{Tr}A = -a_3$ для любой функции $s(t)$, то в силу следствия теоремы 9.2 из раздела I система (4.4), (4.5) при $a_3 \leqslant 0$ не является асимптотически устойчивой ни при какой функции $s(t)$. Таким образом, условие $a_3 > 0$ в теореме 4.2 является также и необходимым.

Замечание 2. Сравнивая условие $a_3 > 0$ с условиями стационарной стабилизации $u = \alpha y$ ($\alpha = \mathrm{const}$): $a_2 > 0,\ a_3 > 0$, мы снова видим преимущества нестационарной стабилизации (4.5) перед стационарной.

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Выше мы рассматривали управляемые линейные системы с непрерывным временем. Математической моделью для описания таких систем служила система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, правые части которых содержат аддитивное управление. Управление формировалось таким образом, чтобы стабилизировать рассматриваемую систему. Ниже мы рассматриваем линейные системы управления с дискретным временем. Здесь излагается дискретный аналог линейной теории построенной выше для непрерывных систем. В разделе I мы рассмотрим проблему Брокетта для дискретных систем, а в разделе II — проблему управления спектром матрицы монодромии линейной периодической системы.

I. СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Здесь рассматривается аналог проблемы Брокетта для линейных дискретных систем. Следует отметить, что дискретная и непрерывная версии проблемы Брокетта существенно различны. Это видно из того факта, что некоторые трудности и препятствия, которые имеются при решении проблемы Брокетта в непрерывном случае, отсутствуют в дискретном случае. В настоящем разделе мы переносим на дискретный случай методику синтеза стабилизирующих матриц, разработанную для непрерывных линейных систем. Будет показано, что для двумерных систем со скалярным входом и скалярным выходом и невырожденной передаточной функцией при весьма слабых ограничениях на параметры системы проблема Брокетта всегда имеет положительное решение.

§ 1. Проблема Брокетта для линейных дискретных систем

Рассмотрим линейную дискретных систему

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k, \quad y_k = c^* x_k \quad (k = 1, 2 \ldots), \tag{1.1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u_k \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления (вход), $y_k \in \mathbb{R}^\ell$ – вектор выхода, A, b и c – вещественные постоянные $(n \times n)$, $(n \times m)$ и $(n \times \ell)$-матрицы соответственно.

Как было отмечено во введении проблема Брокетта для дискретной системы (1.1) состоит в следующем.

Требуется найти последовательность матриц $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ такую, чтобы система (1.1), замкнутая обратной связью $u_k = s_k^* y_k$, т.е. система

$$x_{k+1} = (A + bs_k c^*) x_k \quad (k = 0, 1, 2 \ldots) \tag{1.2}$$

оказалась асимптотически устойчивой.

1.1. Основные предположения. Пусть существуют вещественные постоянные матрицы $s_{(j)} (j = 1, 2)$ такие, что системы

$$x_{k+1} = (A + bs_k c^*) x_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^n \, (j = 1, 2) \tag{1.3}$$

обладают устойчивыми инвариантными линейными многообразиями L_j и инвариантными линейными многообразиями M_j, причем

$$\dim M_j + \dim L_j = n, \quad M_j \cap L_j = \{0\}.$$

Пусть, далее, для некоторых положительных чисел $\lambda_j, \kappa_j, \alpha_j$ и β_j выполнены неравенства

$$\|x_k^{(j)}\| \leqslant \alpha_j \|x_0\| e^{-\lambda_j k} \quad \forall\, x_0 \in L_j, \tag{1.4}$$

$$\|x_k^{(j)}\| \leqslant \beta_j \|x_0\| e^{\kappa_j k} \quad \forall\, x_0 \in M_j, \tag{1.5}$$

где $x_k^{(j)}$ – решение системы (1.3) с начальным условием x_0.

Предположим, что существует последовательность матриц $\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ и целое число $r \geqslant 1$ такие, что для системы

$$x_{k+1} = (A + b\sigma_k c^*) x_k \tag{1.6}$$

имеет место включение

$$\theta_0^r M_1 \subset L_2, \quad \theta_0^r = \prod_{j=0}^{r-1} (A + b\sigma_k c^*). \tag{1.7}$$

Будем называть включение (1.7), как и в непрерывном случае, "условием вложения многообразий". (Здесь П обозначает произведение.)

Заметим, что решение x_k системы (1.6) с начальным условием $x_k = x_0$ дается формулой

$$x_k = \theta_{k_0}^k x_0, \quad \theta_{k_0}^k = \prod_{j=k_0}^{k-1} (A + b\sigma_k c^*), \;\; k \geqslant k_0 + 1, (\theta_{k_0}^{k_0} = I). \tag{1.8}$$

1.2. Основная теорема. При сделанных выше предположениях имеет место следующая

Теорема 1.1. (Основная теорема.) *Пусть выполнено неравенство*

$$\lambda_1 \lambda_2 > \kappa_1 \kappa_2. \tag{1.9}$$

Тогда существует K*-периодическая матрица* s_k ($s_{k+K} = s_k \;\forall\, k = 0, 1, 2, \cdots ;\; K \in \mathbb{N}$) *такая, что система (1.2) является асимптотически устойчивой.*

Доказательство. Идея доказательства, в основном, такая же, как и в непрерывном случае.

1) Из условия (1.9) следует, что для любого числа $\widetilde{T} > 0$ и $k_1 \in \mathbb{N}$ при достаточно больших натуральных k_2 выполнены неравенства

$$\frac{\widetilde{T}}{\lambda_1} + \frac{\kappa_2}{\lambda_1} k_2 < k_1 < -\frac{\widetilde{T}}{\kappa_1} + \frac{\lambda_2}{\kappa_1} k_2.$$

Отсюда следует, что имеют место следующие неравенства

$$\left.\begin{array}{ll} -\lambda_1 k_1 + \kappa_2 k_2 & < -\widetilde{T} \\ -\lambda_2 k_2 + \kappa_1 k_1 & < -\widetilde{T} \end{array}\right\}. \tag{1.10}$$

2) Определим периодическую матрицу s_k следующим образом:

$$s_k = \begin{cases} s_1 & \text{при } k \in [0, k_1), \\ \sigma_{k-k_1} & \text{при } k \in [k_1, k_1 + r), \\ s_2 & \text{при } k \in [k_1 + r, k_1 + k_2 + r), \quad s_{k+K} = s_k, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $K := k_1 + k_2 + r$. Здесь обозначение $k \in [\alpha, \beta)$ означает, что k принимает лишь целочисленные значения, принадлежащие промежутку $[\alpha, \beta)$.

Покажем, что при достаточно больших значениях K система (1.2) с матрицей вида (1.11) будет асимптотически устойчивой.

3) Введем в рассмотрение отображение за период K: $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенное следующим образом:

$$Jx_0 = x_K \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

где x_K — значение при $k = K$ решения x_k уравнения (1.2) с начальным условием x_0. Возьмем единичный шар $E_1 = \{x : \|x\| \leqslant 1\}$ в $\mathbb{R}^n$ и докажем, что $JE_1 \subset E_{1/2}$, где $E_{1/2} = \{x : \|x\| \leqslant \dfrac{1}{2}\}$.

Так как

$$x_k = (A + bs_j^* c^*)^k x_0 \quad (j = 1, 2)$$

— решение уравнения (1.3) с начальным условием x_0, а

$$x_k = \prod_{j=k_1}^{k-1} (A + b\sigma_{j-k_1}^* c^*) x_{k_1}$$

— решение системы

$$x_{k+1} = (A + b\sigma_{k-k_1}^* c^*) x_k \quad (k \geqslant k_1 + 1)$$

с начальным условием x_{k_1}, то отображение J представляет собой композицию трех отображений (обозначим их через $f_0^{k_1}, \vartheta_{k_1}^{k_1+r}, g_{k_1+r}^K$):

$$\begin{array}{ll} f_0^{k_1} & = (A + bs_{(1)}^* c^*)^{k_1}, \quad \vartheta_{k_1}^{k_1+r} = \prod_{j=k_1}^{k_1+r-1} (A + b\sigma_{j-k_1}^* c^*), \\ g_{k_1+r}^K & = (A + bs_{(2)}^* c^*)^{k_2}, \end{array}$$

так что

$$J = g_{k_1+r}^K \cdot \vartheta_{k_1}^{k_1+r} \cdot f_0^{k_1};$$
$$J\,:\,x_0 \xrightarrow{f_0^{k_1}} x_{k_1} \xrightarrow{\vartheta_{k_1}^{k_1+r}} x_{k_1+r} \xrightarrow{g_{k_1+r}^K} x_K \quad (x_0 \in \mathbb{R}^n).$$

Принимая во внимание (1.8), получаем равенство $\vartheta_{k_1}^{k_1+r} = \theta_0^r$. Очевидно, что $g_{k_1+r}^K = g_0^{k_2}$. С учетом последних двух соотношений имеем

$$x_K = Jx_0 = g_0^{k_2} \cdot \theta_0^r \cdot f_0^{k_1} x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1.12}$$

4) С помощью невырожденного линейного преобразования переменных

$$\begin{pmatrix} \xi^{(j)} \\ \eta^{(j)} \end{pmatrix} = B_j x \quad (j = 1, 2), \tag{1.13}$$

где $\xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{n'_j},\ \eta^{(j)} \in \mathbb{R}^{n''_j},\ n'_j = \dim L_j,\ n''_j = \dim M_j,\ B_j$ — неособая матрица, приведем систему (1.2) к следующему виду

$$\begin{cases} \xi_{k+1}^{(j)} = & P_j \xi_k^{(j)}, \\ \eta_{k+1}^{(j)} = & Q_j \eta_k^{(j)} \quad (j = 1, 2). \end{cases} \tag{1.14}$$

Не умаляя общности, будем считать, что

$$\left.\begin{array}{ll} \|\xi_k^{(j)}\| \leqslant & \alpha_j \|\xi_0^{(j)}\| e^{-\lambda_j k}, \\ \|\eta_k^{(j)}\| \leqslant & \beta_j \|\eta_0^{(j)}\| e^{\kappa_j k}. \end{array}\right\} \tag{1.15}$$

Действительно, оценив норму решений уравнений (1.14), получим:

$$\begin{array}{ll} \|\xi_k^{(j)}\| = & \|P_j^k \xi_0^{(j)}\| \leqslant ||P_j^k|| \cdot \|\xi_0^{(j)}\| \leqslant \alpha_j^k \rho_j^k \|\xi_0^{(j)}\|, \\ \|\eta_k^{(j)}\| = & \|Q_j^k \eta_0^{(j)}\| \leqslant ||Q_j^k|| \cdot \|\eta_0^{(j)}\| \leqslant \beta_j \mu_j^k \|\eta_0^{(j)}\|. \end{array}$$

При этом $\rho_j < 1$, так как L_j — устойчивое инвариантное многообразие, а $\mu_j \geqslant 1$, так как M_j — инвариантное, вообще говоря, неустойчивое многообразие. Положив $-\lambda_j = \ln\,\rho_j,\ \ \kappa_j = \ln\,\mu_j$, получим соотношения (1.15).

Учитывая (1.13), из соотношения $x_{k_1+r} = \theta_0^r x_{k_1}$, будем иметь

$$\begin{pmatrix} \xi_{k_1+r}^{(2)} \\ \eta_{k_1+r}^{(2)} \end{pmatrix} = B_2 \theta_0^r B_1^{-1} \begin{pmatrix} \xi_{k_1}^{(1)} \\ \eta_{k_1}^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

В силу условия (1.7) для любого $x' \in M_1$

$$\theta_0^r x' = x'', \quad x'' \in L_2. \tag{1.17}$$

С учетом (1.13) имеем:

$$B_1x' = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \end{pmatrix},\ B_2x'' = \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя последние соотношения, из (1.17) получаем

$$\begin{pmatrix} \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} = B_2\theta_0^r B_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим, что матрица $B_2\theta_0^r B_1^{-1}$ имеет следующую структуру

$$B_2\theta_0^r B_1^{-1} = \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} b_{11}(r) & b_{12}(r) \\ b_{21}(r) & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \}n_2' \\ \}n_2'' \end{array} \\ \ \ \underbrace{\qquad\quad}_{n_1'} \ \ \underbrace{\qquad\quad}_{n_1''} \end{array} . \tag{1.18}$$

Далее, из системы (1.14) будем иметь:

$$\begin{pmatrix} \xi_{k_1}^{(1)} \\ \eta_{k_1}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^{k_1} & 0 \\ 0 & Q_1^{k_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0^{(1)} \\ \eta_0^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \xi_K^{(2)} \\ \eta_K^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2^{k_2} & 0 \\ 0 & Q_2^{k_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{k_1+r}^{(2)} \\ \eta_{k_1+r}^{(2)} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} \xi_{k_1}^{(1)} \\ \eta_{k_1}^{(1)} \end{pmatrix} = B_1x_{k_1}, \quad \begin{pmatrix} \xi_K^{(2)} \\ \eta_K^{(2)} \end{pmatrix} = B_2x_K.$$

Отсюда, учитывая (1.16) и (1.18), перепишем соотношение (1.12) в новых координатах так:

$$\begin{pmatrix} \xi_K^{(2)} \\ \eta_K^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2^{k_2} & 0 \\ 0 & Q_2^{k_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}(r) & b_{12}(r) \\ b_{21}(r) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{k_1} & 0 \\ 0 & Q_1^{k_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0^{(1)} \\ \eta_0^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Из последнего равенства, используя оценки (1.15), получаем:

$$\begin{aligned} \|\xi_K^{(2)}\| \quad &\leqslant \alpha_1\alpha_2\|\xi_0^{(1)}\| \cdot ||b_{11}(r)|| \cdot e^{-\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_2} + \\ &+\alpha_2\beta_1\|\eta_0^{(1)}\| \cdot ||b_{12}(r)|| \cdot e^{-\lambda_2 k_2 + \kappa_1 k_1} \\ \|\eta_K^{(2)}\| \quad &\leqslant \alpha_1\beta_2\|\eta_0^{(1)}\| \cdot ||b_{21}(r)|| \cdot e^{-\lambda_1 k_1 + \kappa_2 k_2}. \end{aligned}$$

Из последних оценок, в силу неравенств (1.10), имеем

$$\|\xi_K^{(2)}\| \leqslant C_1e^{-T},\ \|\eta_K^{(2)}\| \leqslant C_2e^{-T},$$

где C_1 и C_2 — некоторые положительные константы. Отсюда при достаточно большом $T > 0$ будем иметь

$$\left\| \begin{pmatrix} \xi_K^{(2)} \\ \eta_K^{(2)} \end{pmatrix} \right\| < \frac{1}{2} \cdot \left\| B_2^{-1} \right\|^{-1}.$$

Следовательно,

$$\|x_K\| = \left\| B_2^{-1} \begin{pmatrix} \xi_K^{(2)} \\ \eta_K^{(2)} \end{pmatrix} \right\| < \frac{1}{2},$$

т.е. $\|Jx_0\| < 1/2 \ \forall\, x_0 \in E_1$.

Таким образом, отображение J за период K переводит единичный шар E_1 в некоторое подмножество из шара $E_{1/2}$ радиуса $1/2$: $JE_1 \subset E_{1/2}$. Отсюда и из линейности отображения J следует, что J есть сжимающий оператор:

$$\|Jx\| < 1/2\|x\| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда следует асимптотическая устойчивость неподвижной точки $x = 0$ отображения J и, следоывательно, асимптотическая устойчивость нулевого решения $x \equiv 0$ системы (1.2), где матрица s_k определяется из (1.11).

Теорема 1.1 доказана.

В следующем параграфе мы отдельно рассмотрим случай: $m = \ell = 1$.

§ 2. Стабилизация систем со скалярным входом и скалярным выходом

Рассмотрим случай, когда в системе (1.1) b и c — одностолбцовые векторы: $b \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}^n$, u_k — скалярный вход, y_k — скалярный выход.

Докажем сначала теорему, устанавливающую достаточное условие выполнимости “условия вложения многообразий” (1.7).

Теорема 2.1. *Пусть в системе (1.1) $b \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}^n$, пара (A, b) полностью управляема, а пара (A, c) полностью наблюдаема. Пусть, далее,*

$$M_1 = M_2,\ L_1 = L_2,$$

$$\dim M_1 = 1,\ \dim L_1 = n - 1,$$

где $L_j, M_j\, (j = 1, 2)$ – многообразия, введенные для систем (1.3). Тогда существует число σ_0 такое, что при $\sigma_k \equiv \sigma_0$ выполнено включение (1.7) при $r = 1$.

Доказательство. Пусть h — ненулевой вектор, нормальный к подпространству L_1: $L_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ h^* x = 0\}$.

Из полной управляемости пары (A, b) следует полная управляемость пары $(A + s_{(1)} bc^*, b)$, а из полной наблюдаемости пары (A, c) — полная наблюдаемость пары $(A + s_{(1)} bc^*, c)$. Здесь $s_{(1)}$ — число, для которого система (1.3) (где $s_{(2)} = s_{(1)}$) имеет устойчивое инвариантное многообразие $L_1 = L_2$ и инвариантное (быть может, неустойчивое) многообразие $M_1 = M_2$.

Покажем, что $h^* b \neq 0$, т.е. $b \notin L_1$. Предположим противное, т.е. $b \in L_1$. Из инвариантности гиперплоскости L_1 относительно оператора $A + s_{(1)} bc^*$ следуют равенства

$$h^* b = 0, h^*(A + s_{(1)} bc^*) b = 0, \cdots, h^*(A + s_{(1)} bc^*)^{n-1} b = 0.$$

Последние равенства и полная управляемость пары $(A + s_{(1)} bc^*, b)$ влекут за собой равенство $h = 0$, что противоречит выбору вектора $h \neq 0$. Полученное противоречие доказывает неравенство $h^* b \neq 0$.

Теперь возьмем произвольный ненулевой вектор $d \in M_1$ и покажем, что $c^* d \neq 0$. Предполагая противное, из инвариантности одномерного пространства M_1 относительно оператора $A + s_{(1)} bc^*$ получим равенства

$$c^* d = 0, \quad c^*(A + s_{(1)} bc^*) d = 0, \cdots, c^*(A + s_{(1)} bc^*)^{n-1} d = 0.$$

Последние равенства можно переписать так:

$$d^* c = 0, \quad d^*(A + s_{(1)} bc^*)^* c = 0, \cdots, d^*(A + s_{(1)} bc^*)^{*^{n-1}} c = 0.$$

Из этих равенств и полной наблюдаемости пары $(A + s_{(1)} bc^*, c)$ следует, что $d = 0$. Последнее противоречит выбору вектора $d \neq 0$. Полученное противоречие доказывает неравенство $c^* d \neq 0$.

Рассмотрим теперь решение (1.8) системы (1.6), где $\sigma_k \equiv \sigma_0$, $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, с начальным условием $x_0 = d$. Пусть $x_1 = \theta_0^1 d = (A + \sigma_0 bc^*) d$. Так как $h^* b \neq 0, c^* d \neq 0$, то из равенства $h^* x_1 = 0$ определяется однозначно $\sigma_0 = -h^* Ad/(h^* bc^* d)$. Теорема 2.1 доказана.

Из теоремы 1.1 и теоремы 2.1 вытекает следующая

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Пусть, далее,*

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa, \ \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \kappa_1, \kappa_2$ – числа, фигурирующие в неравенствах (1.4) и (1.5). Тогда, если выполнено неравенство $\lambda > \kappa$, то существует K-периодическая числовая последовательность $\{s_k\}$ такая, что система (1.2) асимптотически устойчива.

Из теоремы 2.1 легко выводится

Теорема 2.3. *Пусть в системе (1.1)* $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, *пара* (A, b) *полностью управляема, а пара* (A, c) *полностью наблюдаема. Предположим, что существует число* s_0 *такое, что матрица* $A + s_0bc^*$ *имеет* $n-1$ *собственное значение* ρ_j, $j = 1, 2, \cdots, n-1$ *(среди которых могут быть равные), лежащие внутри единичного круга* $|p| < 1$, *а для собственного значения* ρ_n *выполнено неравенство*

$$\max_j |\rho_n \cdot \rho_j| < 1. \tag{2.1}$$

Тогда существует периодическая числовая последовательность s_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ *такая, что система (1.2) является асимптотически устойчивой.*

Доказательство. Обозначим через L_0 инвариантное $(n-1)$-мерное подпространство, соответствующее собственным значениям $\rho_j \, (j = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ матрицы $(A + s_0bc^*)$, лежащим внутри единичного круга, а через M_0 — инвариантное одномерное подпространство, соответствующее собственному числу ρ_n.

Заметим, что на L_0 оператор $A + s_0bc^*$ действует как сжатие не менее, чем в $1/\rho_*$ раз, где $\rho_* = \max\limits_j |\rho_j|$), а на M_0 он действует, вообще говоря, как растяжение в $|\rho_n|$ раз, причем в силу условия (2.1) сжатие в L_0 "сильнее", чем растяжение в M_0.

Положим

$$s_1 = s_2 = s_0; \; L_1 = L_2 = L_0, \; M_1 = M_2 = M_0.$$

Из условия (2.1) имеем $|\rho_n| < 1/\rho_*$ где $\rho_* = \max_j \, |\rho_j| < 1$.

Отсюда, полагая

$$\kappa = \ln |\rho_n|, \; \lambda = -\ln \rho_*, \, \kappa_2 = \kappa_1 = \kappa, \; \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda,$$

получаем, что выполнены все условия теоремы 2.2. Отсюда следует утверждение теоремы 2.3.

§ 3. Стабилизация дискретных систем второго порядка

Рассмотрим систему со скалярным входом и скалярным выходом и с передаточной функцией

$$W(p) = c^*(A - pI)^{-1}b = \frac{\delta p + \gamma}{p^2 + \alpha p + \beta}, \tag{3.1}$$

где A — (2×2)-матрица, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}^2$, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — некоторые вещественные числа.

Предположим, что функция $W(p)$ невырождена, т.е.

$$\gamma^2 - \alpha\gamma\delta + \beta\delta^2 \neq 0. \tag{3.2}$$

Заметим, что условие (3.2) является необходимым и достаточным условием полной управляемости и полной наблюдаемости пар (A, b) и (A, c) соответственно.

Систему с передаточной функцией (3.1) можно реализовать в фазовом пространстве $\mathbb{R}^2$ как систему вида (1.1)

$$\begin{cases} x_{k+1}^{(1)} = & x_k^{(2)}, \\ x_{k+1}^{(2)} = & -\beta x_k^{(1)} - \alpha x_k^{(2)} - u_k, \end{cases} \quad y_k = \gamma x_k^{(1)} + \delta x_k^{(2)}. \tag{3.3}$$

Применим теорему 2.3 к системе (3.3). Собственные числа ρ_1 и ρ_2 матрицы $A + s_0 bc^*$ являются корнями многочлена

$$z^2 + (\alpha + s_0\delta)z + \beta + s_0\gamma.$$

(Здесь A – матрица системы (3.3)). Условие (2.1) сводится к неравенству $|\beta + s_0\gamma| < 1$. При $\gamma \neq 0$ последнее неравенство выполнено при некотором значении s_0. При $\gamma = 0$ имеем условие $|\beta| < 1$. Поэтому $|\rho_1\rho_2| < 1$ и одно из собственных чисел лежит внутри единичного круга. Следовательно, учитывая эквивалентность неравенств $\gamma \neq 0$ и $W(0) \neq 0$, в силу теоремы 2.3 получим, что каждое из условий $W(0) \neq 0$ или $|\det A| < 1$ в отдельности достаточно для стабилизируемости системы (3.3).

Покажем, что эти условия также и необходимы для стабилизируемости системы (3.3). Предположим противное: пусть $W(0) = 0$ и $|\det A| \geq 1$. Тогда по хорошо известной формуле Шура [38, с.59] будем иметь $(i = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\begin{aligned} &\det(A + s_i bc^*) = (\det A) \cdot \det(I + s_i A^{-1} bc^*) = \\ &= (\det A) \cdot (1 + s_i c^* A^{-1} b) = (\det A)(1 + s_i W(0)) = \det A, \end{aligned}$$

т.е. $\det(A + s_1 bg^*) \geqslant 1$ для всех $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Из последнего неравенства и вида общего решения системы (1.2) следует, что тривиальное решение системы (1.2) не может быть асимптотически устойчивым ни при какой обратной связи $u_k = s_k y_k$. Таким образом, нами получен следующий результат

Теорема 3.1. *Пусть выполнено неравенство (3.2). Тогда для стабилизируемости системы (3.3) с передаточной функций (3.1) необходимо и достаточно, чтобы было выполнено по крайней мере одно из условий*

$$\beta \neq 0 \text{ или } \gamma \neq 0. \tag{3.4}$$

Замечание 3.1. Теорема 3.1 хорошо иллюстрирует для дискретных систем преимущества нестационарной стабилизации ($s_k \not\equiv s_0$) по сравнению со стационарной ($s_k \equiv s_0$). Действительно, сравнив, например, при $\delta = 0$ условие (3.4) с необходимыми и достаточными условиями $\gamma \neq 0$ и $|\alpha| - 1 < \beta + s_0\gamma < 1$ стационарной стабилизации, убеждаемся, что в последнем случае требуется еще дополнительное условие: $|\alpha| < 2$.

Замечание 3.2. В статье [37] дано прямое доказательство теоремы 3.1 в классе стабилизирующих периодических функций s_k с периодом 3.

§ 4. Проблема управления спектром матрицы линейной периодической дискретной системы. Двумерный случай

В предыдущих параграфах мы рассматривали задачу стабилизации линейных систем с помощью периодической обратной связи. Рассмотрим теперь более общую задачу – проблему управления спектром матрицы линейной системы с помощью периодической обратной связи.

4.1. Общая постановка проблемы управления спектром матрицы

Проблема управления спектром матрицы (Pole Assignment) для трех заданных матриц ставится следующим образом.

Дана тройка вещественных матриц A, b и c размеров $n \times n$, $n \times m$ и $n \times \ell$ соответственно, и дан произвольный набор $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ комплексных чисел μ_j, замкнутый относительно операции комплексного сопряжения. Требуется найти вещественную $(m \times \ell)$-матрицу s такую, чтобы спектр σ матрицы $A + bsc^*$ совпал с набором $\{\mu_j\}_{j=1}^n$:

$$\sigma(A + bsc^*) = \{\mu_j\}_{j=1}^n.$$

Эта проблема ставится аналогично также и для произвольной тройки комплексных матриц и произвольного набора комплексных чисел μ_j.

Решению проблемы управления спектром матрицы и различных ее модификаций посвящено большое число работ, обзоры которых имеются, например, в [39, 40] (см. также статьи [41, 42]). Отметим, что в случае, когда c – единичная матрица, сформулированная выше проблема была впервые поставлена и решена В.И.Зубовым [43] и У.М.Уонэмом [44].

Матрицу $A+bsc^*$ можно рассматривать как матрицу замкнутой системы, получаемой замыканием линейной системы (1.1) стационарной обратной связью $u_k = sy_k$ ($s = \text{const}$. По аналогии формулируется и проблема управления спектром матрицы для линейных управляемых систем с периодической обратной связью $u_k = s_k y_k$, где s_k – периодическая последовательность чисел или матриц. Мы ниже рассмотрим случай, когда s_k – периодическая числовая последовательность.

4.2. Постановка задачи об управлении спектром линейной периодической дискретной системы

Рассмотрим линейную дискретную систему со скалярным входом и скалярным выходом

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k, \quad y_k = c^* x_k, \tag{4.1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}$,$y_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, A – вещественная $(n \times n)$-матрица, а b и c – одностолбцовые вещественные n-мерные векторы.

Будем рассматривать обратную связь вида

$$u_k = s_k y_k, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \tag{4.2}$$

где s_k – периодическая функция от k с периодом p : $s_{k+p} = s_k \,\forall\, k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Тогда система (4.1), замкнутая обратной связью (4.2), будет периодической с периодом p.

Пусть $r \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Найдем связь между состояниями x_{rp} и $x_{(r+1)p}$ системы. Введя обозначения $s_i := s_{rp+i}\,(i = 0, 1, 2, \ldots, p-1), \xi_r := x_{rp}$ и принимая во внимание равенства

$$u_{rp} = s_0 y_{rp}, u_{rp+1} = s_1 y_{rp+1}, \ldots, u_{rp+p-1} = s_{p-1} y_{rp+p-1},$$

имеющие место в силу (4.2), получаем из (4.1)

$$\xi_{r+1} = \Phi_s \xi_r, \quad r \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \tag{4.3}$$

$$\Phi_s = (A + s_{p-1}bc^*)(A + s_{p-2}bc^*) \cdots (A + s_0 bc^*),\; s := (s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}). \tag{4.4}$$

Заметим, что динамика периодической системы (4.1), (4.2) определяется динамикой системы (4.3) с постоянной матрицей (4.4) – матрицей монодромии $\Phi_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi_s x_0 = x_p \,\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Теперь проблема управления спектром периодической дискретной системы (4.1), (4.2) может быть сформулирована следующим образом.

Даны тройка вещественных матриц A, b и c и произвольный набор $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ чисел на комплексной плоскости, замкнутый относительно операции комплексного сопряжения. Требуется найти вещественные числа $s_0, s_1, \dots, s_{p-1}$ такие, чтобы спектр σ матрицы Φ_s из (4.4) совпал с набором $\{\mu_j\}_{j=1}^n : \sigma(\Phi_s) = \{\mu_j\}_{j=1}^n$.

Эквивалентная формулировка:

Даны вещественные матрицы A, b и c и произвольный многочлен n-й степени

$$f(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_0 \tag{4.5}$$

с вещественными коэффициентами $\alpha_i\,(i = 0, 1, \dots, n-1)$.

Требуется найти вещественные числа $s_i\,(i = 0, 1, \dots, p-1)$ такие, чтобы характеристический многочлен матрицы Φ_s совпал с $f(z)$:

$$\det(zI - \Phi_s) = f(z), \tag{4.6}$$

где I – единичная $(n \times n)$-матрица.

Замечание 4.1. Аналогично формулируется проблема управления спектром периодической системы (4.1), (4.2) и в случае, когда вход и выход системы (4.1) являются векторами: $u_k \in \mathbb{R}^m$, $y_k \in \mathbb{R}^\ell\,(m > 1, \ell > 1)$. В этом случае в (4.4) $s_i\,(i = 0, 1, \dots, p-1)$ – искомые $(m \times \ell)$-матрицы.

Замечание 4.2. Следует сказать, что проблема Брокетта для дискретных систем в более общей, вышеприведенной, постановке была предвосхищена в работах [45, 46]. Для систем со скалярным входом и скалярным выходом эта проблема решена в [45] для двумерных систем, а в [46] – для многомерных систем.

Сначала мы рассмотрим двумерные дискретные системы вида (1.1). Многомерный случай будет рассмотрен в следующем параграфе. При изложении будем следовать в основном работам [45, 46].

4.3. Двумерные дискретные системы $(n = 2)$

Будем считать функцию s_k в обратной связи (4.2) периодической с периодом $p = 3$. Задача состоит в определении чисел s_0, s_1 и s_2 таких, чтобы собственные значения матрицы Φ_{s_0,s_1,s_2} из (4.4), где $p = 3$, оказались корнями заданного многочлена (4.5), где $n = 2$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что пара (A, b) полностью управляема, а пара (A, c) полностью наблюдаема. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что матрица A неособая. Действительно, из полной управляемости и полной наблюдаемости пар (A, b) и (A, c) следует невырожденность передаточной функции $W(z)$, т.е. отсутствие общих корней многочленов $\nu(z)$ и $\Delta(z) = \det(zI - A)$ в представлении $W(z) = \nu(z)/\Delta(z)$. Отсюда и из хорошо известной формулы (вытекающей из формулы Шура [38, с.59])

$$\det[zI - (A + sbc^*) = \Delta(z) + s\nu(z)$$

следует, что матрица $A + sbc^*$ неособая при любом $s \neq 0$, когда A – особая. Следовательно, введением предварительной обратной связи всегда можно сделать матрицу A исходной системы неособой.

4.3.1. Переформулировка проблемы

Перепишем систему (4.3), (4.4) (где $p = 3$) как систему

$$\xi_{r+1} = P_{s_1,s_2}\xi_r + q_{s_1,s_2}v_r, \quad \eta_r = c^*\xi_r \tag{4.7}$$

с обратной связью $v_r = s_0\eta_r$, где

$$\left.\begin{array}{l} P_{s_1,s_2} = \Pi_{s_1,s_2}A, \quad \Pi_{s_1,s_2} = (A + s_2bc^*)(A + s_1bc^*), \\ q_{s_1,s_2} = \Pi_{s_1,s_2}b \quad (\xi_r = x_{3r}). \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

В дальнейшем существенно будет использована следующая лемма, являющаяся непосредственным следствием при $(n = 2)$ теоремы Ван дер Воуда [47].

Лемма 4.1. *Пусть пара $(P_{s_1,s_2}, q_{s_1,s_2})$ полностью управляема и $f(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$ $(\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R})$ – заданный вещественный многочлен. Тогда для существования числа s_0 такого, что*

$$\det(zI - \Phi_{s_0,s_1,s_2}) = f(z)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f(P_{s_1,s_2})\mathrm{Ker}(c^*) \subset \mathrm{Lin}\, q_{s_1,s_2}, \tag{4.9}$$

где $\mathrm{Ker}(c^*) = \{x \in \mathbb{R}^2 : c^*x = 0\}$, $\mathrm{Lin}\, q_{s_1,s_2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \mu q_{s_1,s_2}, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Из этой леммы следует, что исходная задача (4.6) сводится к решению следующих двух подзадач:

1) Найти вещественные числа s_1 и s_2 такие, чтобы

a) пара $(P_{s_1,s_2}, q_{s_1,s_2})$ была полностью управляемой;

b) соотношение (4.9) было выполнено.

2) Найти вещественное число s_0 такое, что

$$\det[zI - (P_{s_1,s_2} + s_0 q_{s_1,s_2} c^*)] = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0$$

Если будут решены задачи 1a) и 1b), то существование решения задачи 2) гарантируется леммой 4.1. Для определения числа s_0 можно воспользоваться, например, формулой Аккерманна [48]. Получим

$$s_0 = -\frac{1}{|c|^2}(0,1)^*(q, Pq)^{-1}(P^2 + \alpha_1 P + \alpha_0 I)c, \tag{4.10}$$

где

$$P := P_{s_1,s_2}, \quad d := q_{s_1,s_2}.$$

Будем искать числа s_1 и s_2, отличными от $-1/c^* A^{-1} b$. Тогда матрица Π_{s_1,s_2} будет неособой, поскольку $\det A \neq 0$. Действительно,

$$\det(A + sbc^*) = \det A \cdot \det(I + sA^{-1}bc^*) = (1 + sc^* A^{-1} b) \cdot \det A \neq 0.$$

Сначала преобразуем условия a) и b) в алгебраические неравенство и равенство соответственно.

4.3.2. Преобразование условий a) и b) задачи 1) в алгебраические соотношения

Условие a). Условие a) эквивалентно линейной независимости векторов $\Pi_{s_1,s_2} b$ и $\Pi_{s_1,s_2} A \Pi_{s_1,s_2} b$ или линейной независимости векторов b и $A\Pi_{s_1,s_2} b$, так как Π_{s_1,s_2} есть неособая матрица при $s_i \neq 1/c^* A^{-1} b$ $(i = 1, 2)$.

Пусть $\tilde{b}$ — произвольный ненулевой вектор, ортогональный вектору b: $\tilde{b}^* b = 0$. Тогда в силу линейной независимости векторов b и $A\Pi_{s_1,s_2} b$ будем иметь: $\tilde{b}^* A \Pi_{s_1,s_2} b \neq 0$, т.е.

$$\tilde{b}^* A(A + s_2 bc^*)(A + s_1 bc^*) b \neq 0. \tag{4.11}$$

Из равенств $\tilde{b}^* b = 0$ и $A^2 = \sigma A - \delta I$, где $\sigma = \operatorname{Tr} A$ и $\delta = \det A$, будем иметь

$$\tilde{b}^* A^2 b = \tilde{b}^*(\sigma A - \delta I) b = \sigma \cdot (\tilde{b}^* A b), \tag{4.12}$$

$$\tilde{b}^* A^3 b = \tilde{b}^*(\sigma A - \delta I) b = (\tilde{b}^* A b)(\sigma^2 - \delta). \tag{4.13}$$

Так как по предположению пара (A, b) полностью управляема, то векторы b и Ab линейно независимы, и поэтому $\tilde{b}^* A b \neq 0$.

Используя равенства (4.12), (4.13) и равенство $A = \sigma I - \delta A^{-1}$, преобразуем левую часть (4.11). Имеем

$$\begin{aligned}
&\tilde{b}^* A(A + s_2 bc^*)(A + s_1 bc^*)b = \\
&= (\tilde{b}^* Ab)[\sigma^2 - \delta + s_2 c^* Ab + s_1\sigma(c^*b) + s_1 s_2 (c^*b)^2] = \\
&= (\tilde{b}^* Ab)[\sigma^2 - \delta + s_2 c^*(\sigma I - \delta A^{-1})b + s_1\sigma(c^*b) + s_1 s_2 (c^*b)^2] = \\
&= (\tilde{b}^* Ab)[(\sigma + s_1 c^*b)(\sigma + s_2 c^*b) - \delta(1 + s_2 c^* A^{-1} b)].
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Поскольку $\tilde{b}^* Ab \neq 0$, то из (4.14) следует, что условие (4.11), а значит, и условие 1a) эквивалентно неравенству

$$(\sigma + s_1 c^*b)(\sigma + s_2 c^*b) - \delta(1 + s_2 c^* A^{-1} b) \neq 0. \tag{4.15}$$

Условие b). Пусть $\tilde{c}$ — произвольный ненулевой вектор, ортогональный вектору c: $c^*\tilde{c} = 0$, т.е. $\tilde{c} \in \operatorname{Ker}(\mathrm{c}^*)$. Тогда соотношение (4.9) эквивалентно условию

$$f(P_{s_1,s_2})\tilde{c} = \mu \Pi_{s_1,s_2} b \quad (\mu \in \mathbb{R}) \tag{4.16}$$

для любого вектора $\tilde{c} \neq 0$, ортогонального вектору c: $c^*\tilde{c} = 0$. Так как матрица Π_{s_1,s_2} неособая и $\tilde{b}^* b = 0$ в силу выбора вектора $\tilde{b}$, то (4.16) эквивалентно равенству

$$\tilde{b}^* \Pi^{-1}_{s_1,s_2} f(P_{s_1,s_2}))\tilde{c} = 0. \tag{4.17}$$

Поскольку $P_{s_1,s_2} = \Pi_{s_1,s_2} A$, то

$$\Pi^{-1}_{s_1,s_2} f(P_{s_1,s_2}) = A\Pi_{s_1,s_2} A + \alpha_1 A + \alpha_0 \Pi^{-1}_{s_1,s_2}.$$

Следовательно, равенство (4.17) можно переписать так:

$$\tilde{b}^*(AP_{s_1,s_2} + \alpha_1 A)\tilde{c} + \alpha_0 \tilde{b}^*(A + s_1 bc^*)^{-1}(A + s_2 bc^*)^{-1}\tilde{c} = 0. \tag{4.18}$$

Таким образом, с учетом (4.10), исходная задача (4.6) сводится к нахождению вещественных чисел s_1 и s_2, удовлетворяющих условиям (4.15), (4.18).

4.3.3. Основная теорема об управлении спектром матрицы монодромии двумерной системы.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия разрешимости проблемы управления спектром матрицы Φ_s монодромии.

Теорема 4.1 (**об управлении спектром матрицы монодромии**: $n = 2$). *Пусть* $n = 2$. *Пусть, далее, пара* (A, b) *полностью управляема, а пара* (A, c) *полностью наблюдаема. Тогда для разрешимости проблемы управления спектром матрицы монодромии двумерной системы* (4.1), (4.2), *с* *помощью периодической обратной связи* (4.2) *с периодической функцией* s_k *периода* $p = 3$*, необходимо и достаточно, чтобы:*

$$1)\ \ c^*A^{-1}b \neq 0,$$
$$2)\ |c^*b| + |\mathrm{Tr}\, A| \neq 0.$$

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что в теореме 2 не выполнено условие 1): $c^*A^{-1}b = 0$. Тогда, используя лемму Шура, из (4.4), где $p = 3$, будем иметь $\det \Phi_{s_0,s_1,s_2} = (\det A)^3$ для любых $s_0, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Поэтому в силу того, что $\det \Phi_{s_0,s_1,s_2} = \alpha_0$, собственные значения матрицы Φ_{s_0,s_1,s_2} не могут быть, вообще говоря, корнями произвольно заданного многочлена (4.5), где $n = 2$.

Пусть теперь не выполняется условие 2): $c^*b = 0$ и $\mathrm{Tr}\, A = 0$ (но $c^*A^{-1}b \neq 0$). Тогда принимая во внимание равенство $A^2 = -\delta I,\ \ \delta = \det A$, следующее из формулы Гамильтона—Кэли, будем иметь из (4.4):

$$\Phi_{s_0,s_1,s_2} = -\delta A + s_1 A(bc^*)A - \delta(s_0 + s_2)(bc^*) + s_0 s_2 (bc^*)A(bc^*).$$

Отсюда, воспользовавшись равенствами

$$\mathrm{Tr}\,(kM) = k \cdot \mathrm{Tr}\, M, \quad \mathrm{Tr}\,(MN) = \mathrm{Tr}\,(NM), \quad \mathrm{Tr}\,(bc^*) = c^*b,$$

получим

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr}\, \Phi_{s_0,s_1,s_2} = -\delta \cdot \mathrm{Tr}\, A + s_1 \mathrm{Tr}\,[(bc^*)A^2] + s_0 s_2 \mathrm{Tr}\,[Ab(c^*b)c^*] = \\ = -s_1\delta \mathrm{Tr}\,(bc^*) = -s_1\delta(c^*b) = 0.\end{gathered}$$

Следовательно, в силу того, что $\mathrm{Tr}\, \Phi_{s_0,s_1,s_2} = -\alpha_1$, собственные числа матрицы Φ_{s_0,s_1,s_2} не могут быть, вообще говоря, корнями многочлена (4.5) при произвольных $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Достаточность. Пусть $f(z)$ — произвольный вещественный многочлен (4.5) ($n = 2$) с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим два случая: A) $\alpha_0 \neq 0$ и B) $\alpha_0 = 0$.

Случай A): $\alpha_0 \neq 0$. Используя известную формулу Шура-Вудбари

$$(M + qr^*)^{-1} = M^{-1} - \frac{(M^{-1}q)(r^*M^{-1})}{1 + r^*M^{-1}q}$$

(M^{-1} и $M+qr^*$ – неособые матрицы, $q, r \in \mathbb{R}^n$), устанавливаем, что уравнение

(4.18) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned}&(1+s_1c^*A^{-1}b)(1+s_2c^*A^{-1}b)[\tilde{b}^*A(A+s_2bc^*)(A+s_1bc^*)A\tilde{c}+\\&+\alpha_1\tilde{b}^*A\tilde{c}]+\alpha_0\tilde{b}^*[A^{-1}(1+s_1c^*A^{-1}b)-\\&-s_1A^{-1}bc^*A^{-1}][A^{-1}(1+s_2c^*A^{-1}b)-\\&-s_2A^{-1}bc^*A^{-1}]\tilde{c}=0.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Заметим, что (4.19) есть, вообще говоря, уравнение 4-й степени относительно s_1 и s_2. Будем различать два подслучая:

$$A_1)\ \alpha_0\neq 0,\ c^*b=0 \quad \text{и} \quad A_2)\ \alpha_0\neq 0,\ c^*b\neq 0.$$

Подслучай A_1): $\alpha_0\neq 0$, $c^*b=0$. Тогда в силу того, что $\tilde{b}^*b=0$ и $c^*\tilde{c}=0$, справедливо равенство

$$\tilde{b}^*A(A+s_2bc^*)(A+s_1bc^*)A\tilde{c}=\tilde{b}^*A^4\tilde{c}+\sigma(s_1+s_2)\tilde{b}^*Abc^*A\tilde{c}.$$

Учитывая последнее равенство, перепишем (4.19) так:

$$\begin{aligned}&(1+s_1c^*A^{-1}b)(1+s_2c^*A^{-1}b)[\tilde{b}^*A^4\tilde{c}+\sigma(s_1+s_2)(\tilde{b}^*Ab)(c^*A\tilde{c})+\\&+\alpha_1\tilde{b}^*A\tilde{c}]+\alpha_0\tilde{b}^*[A^{-1}(1+s_1c^*A^{-1}b)-\\&-s_1A^{-1}bc^*A^{-1}][A^{-1}(1+s_2c^*A^{-1}b)-\\&-s_2A^{-1}bc^*A^{-1}]\tilde{c}=0.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Так как по предположению пара (A,b) полностью управляема, а пара (A,c) полностью наблюдаема, то $\tilde{b}^*Ab\neq 0$ и $c^*A\tilde{c}\neq 0$. Поэтому, в силу условия 1) теоремы 4.1 соотношение (4.20) есть уравнение 3-й степени относительно s_1 и s_2. Положим $s_2:=ks_1$. Тогда при любом $k\notin\{0,-1\}$ уравнение (4.20) имеет по крайней мере один вещественный корень $\tilde{s}_1(k)$. При этом за счет выбора k всегда можно сделать так, чтобы число $\tilde{s}_1(k)$ удовлетворяло линейному неравенству (4.15) относительно s_1 и, кроме того, чтобы

$$\tilde{s}_1(k)\neq-\frac{1}{c^*A^{-1}b}\,,\quad \tilde{s}_2(k)=k\tilde{s}_1(k)\neq-\frac{1}{c^*A^{-1}b}\,.\tag{4.21}$$

Таким образом, в рассматриваемом подслучае A_1) условия (4.15) и (4.18) выполняются при $s_1=\tilde{s}_1(k)$, $s_2=\tilde{s}_2(k)$, причем $\tilde{s}_1$ и $\tilde{s}_2$ удовлетворяют неравенствам (4.21).

Подслучай A$_2$): $\alpha_0 \neq 0, \ \ c^*b \neq 0$. Тогда (4.19) эквивалентно уравнению:

$$
\begin{gathered}
(1+s_1c^*A^{-1}b)(1+s_2c^*A^{-1}b)[\tilde{b}^*A^4\tilde{c}+\sigma(s_1+s_2)(\tilde{b}^*Ab)(c^*A\tilde{c})+ \\
+s_1s_2(\tilde{b}^*Ab)(c^*b)(c^*A\tilde{c})+\alpha_1\tilde{b}^*A\tilde{c}]+ \\
+\alpha_0\tilde{b}^*[A^{-1}(1+s_1c^*A^{-1}b)-s_1A^{-1}bc^*A^{-1}]\times \\
\times[A^{-1}(1+s_2c^*A^{-1}b)-s_2A^{-1}bc^*A^{-1}]\tilde{c}=0.
\end{gathered} \tag{4.22}
$$

При $s_1 := -1/c^*A^{-1}b$ уравнение (4.22) принимает вид

$$
\frac{\tilde{b}^*A^{-1}b}{c^*A^{-1}b}\left[(1+s_2c^*A^{-1}b)(c^*A^{-2}\tilde{c})-s_2(c^*A^{-2}b)(c^*A^{-1}\tilde{c})\right]=0. \tag{4.23}
$$

Заметим, что $c^*A^{-1}b \neq 0$ в силу условия 1) теоремы 4.1, а $\tilde{b}^*A^{-1}b \neq 0$, поскольку пара (A,b) полностью управляема и, следовательно, $\tilde{b}^*Ab \neq 0$. Используя равенство $\delta A^{-2} = \sigma A^{-1} - I$, следующее из формулы Гамильтона—Кэли, убеждаемся, что уравнение (4.23) удовлетворяется при $s_2 = -\sigma/c^*b$.

Таким образом, уравнение (4.22) удовлетворяется при $s_1 = s_1^0, \ \ s_2 = s_2^0$, где

$$
s_1^0 = -\frac{1}{c^*A^{-1}b}, \quad s_2^0 = -\frac{\sigma}{c^*b} \quad (\sigma = \operatorname{Tr} A). \tag{4.24}
$$

Теперь покажем, что уравнение (4.22) имеет решение, отличное от (4.24). Для этого положим $s_1 = s_1^0 + \varepsilon$, где $\varepsilon \neq 0$ — достаточно мало. Тогда (4.22) есть квадратное уравнение относительно s_2 с положительным дискриминантом при достаточно малых ε. Поэтому это уравнение имеет два корня $\tilde{s}_2(\varepsilon)$ и $\tilde{\tilde{s}}_2(\varepsilon)$, один из которых $\tilde{s}_2(\varepsilon) \to s_2^0$, а другой $|\tilde{\tilde{s}}_2(\varepsilon)| \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Эти корни отличны от s_1^0 при достаточно малом ε_0. Следовательно, $s_1 = s_1^0 + \varepsilon_0$, $s_2 = \tilde{s}_2(\varepsilon_0)$ (или $s_2 = \tilde{\tilde{s}}_2(\varepsilon_0)$) есть требуемое решение уравнения (4.22).

Далее, при $s_1 = s_1^0 + \varepsilon_0$ (4.15) есть линейное неравенство относительно s_2 и, поэтому, удовлетворяется или при $s_2 = \tilde{s}_2(\varepsilon_0)$, или при $s_2 = \tilde{\tilde{s}}_2(\varepsilon_0)$ в силу возможности выбора ε_0 достаточно малым. Таким образом, значения $s_1 = s_1^0 + \varepsilon_0, \ \ s_2 = \tilde{s}_2^0(\varepsilon_0)$ (или $s_2 = \tilde{\tilde{s}}_2(\varepsilon_0)$), где s_1^0 и s_2^0 — числа из (4.24), удовлетворяют (4.15), (4.18), причем эти значения отличны от $-1/c^*A^{-1}b$.

Случай B): $\alpha_0 = 0$. В этом случае по крайней мере одно из собственных значений матрицы Φ_{s_1,s_2} равно нулю. Как было показано выше, уравнение

(4.18) эквивалентно уравнению (4.19), которое в рассматриваемом случае перепишется так:

$$(c^*b)s_1s_2 + \sigma(s_1 + s_2) + \kappa = 0, \tag{4.25}$$

где

$$\kappa = \frac{\tilde{b}^* A^4 \tilde{c} + \alpha_1 \tilde{b}^* A \tilde{c}}{(\tilde{b}^* A b)(c^* A \tilde{c})}, \tag{4.26}$$

при условии, что $1 + s_i(c^* A^{-1} b) \neq 0 \ \ (i = 1, 2)$.

Заметим, что в (4.26) $\tilde{b}^* A b \neq 0$ и $c^* A \tilde{c} \neq 0$ в силу полной управляемости и полной наблюдаемости системы (4.1).

Так как по условию 2) числа σ и c^*b не обращаются одновременно в нуль, то уравнение (4.25) имеет вещественные корни, удовлетворяющие неравенству (4.15).

Таким образом, во всех рассмотренных случаях существуют вещественные числа s_1 и s_2, удовлетворяющие условиям (4.15), (4.18). Теорема 2 полностью доказана.

Замечание 4.1. Из результата, установленного в [49], следует, что проблема управления спектром матрицы монодромии двумерной системы (4.1), (4.2), вообще говоря, не разрешима с помощью периодической обратной связи с периодом 2. Поэтому обратная связь вида (4.2) с периодом $p \geq 3$ необходима для разрешимости проблемы управления спектром.

Замечание 4.2. В теореме 4.1 предположения о полной управляемости и полной наблюдаемости тройки (A, b, c) являются необходимыми условиями для разрешимости проблемы управления спектром матрицы. Это следует из работы [50], где показано, что для не полностью управляемой и не полностью наблюдаемой системы проблема управления спектром матрицы не разрешима ни с помощью стационарной и ни с помощью нестационарной обратной связи.

§ 5. Управление спектром матрицы линейной периодической дискретной системы. Многомерный случай

В предыдущем параграфе доказана теорема, дающая при определенных условиях, решение проблемы управления спектром матрицы для двумерных дискретных систем. В настоящем параграфе рассматривается многомерный случай: $n \geq 3$.

Рассмотрим систему

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k, \quad y_k = c^* x_k, \tag{5.1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k, y_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, A — вещественная $(n \times n)$-матрица, $b, c \in \mathbb{R}^n$.

Всюду ниже предполагается, что пара (A, b) полностью управляема, а пара (A, c) полностью наблюдаема. Тогда, как было отмечено в §4, матрицу A можно, без умаления общности, считать неособой. Изложение результатов будем вести следуя в основном работе [46].

5.1. Переформулировка проблемы.

Перепишем систему (4.3), (4.4) из предыдущего параграфа следующим образом:

$$\begin{array}{c} \xi_{i+1} = A(A + s_{p-2}bc^*) \ldots (A + s_0bc^*)\xi_i + \\ +s_{p-1}bc^*(A + s_{p-2}bc^*) \ldots (A + s_0bc^*)\xi_i \end{array} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.2}$$

Положим период $p := n + 1$. Такой выбор периода обратной связи (4.2) мотивируется соответствующим выбором периода $p = 3$ обратной связи для двумерной системы, рассмотренной в § 4.

Введя обозначения

$$\begin{array}{l} \Pi_s := (A + s_{n-1}bc^*) \ldots (A + s_0bc^*), \\ P_s := A\Pi_s, \quad r_s^* := c^*\Pi_s, \quad s := (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}), \end{array}$$

перепишем систему (5.2) так:

$$\xi_{i+1} = P_s\xi_i + bv_i, \quad \eta_i = r_s^*\xi_i, \tag{5.3}$$

$$v_i = s_n\eta_i. \tag{5.4}$$

Заметим, что матрицей замкнутой системы (5.3), (3.4) является матрица

$$\Phi_{\bar{s}} = P_s + s_nbr_s, \qquad \bar{s} = (s; s_n). \tag{5.5}$$

Применим к системе (5.3) теорему Ван дер Воуда [47]. В силу этой теоремы, если пара (P_s, b) полностью управляема, то для существования числа s_n такого, что $\det(zI - \Phi_{\bar{s}} = f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f(P_s)\mathrm{Ker}(r_s^*) \subset \mathrm{Lin}\{b, P_sb, \ldots, P_s^{n-2}b\}, \tag{5.6}$$

где $f(z)$ – многочлен (4.5), $\mathrm{Ker}(r_s^*)$ — ядро $(1 \times n)$-матрицы r_s^*, а Lin обозначает линейную оболочку векторов.

Таким образом, как и в двумерном случае, исходная проблема управления спектром матрицы $\Phi_{\bar{s}}$ сводится к решению двух подзадач:

1) *Найти вещественные числа* $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ *такие, чтобы:*

   a) было выполнено включение (5.6),

   b) пара (P_s, b) *была полностью управляемой.*

2) *Найти вещественное число* s_n *такое, чтобы*

$$\det[zI_n - (P_s + s_n b r_s)] = f(z). \tag{5.7}$$

Как и в двумерном случае достаточно решить задачи 1*a*) и 1*b*), поскольку тогда решение задачи 2) гарантируется теоремой Ван дер Воуда. При этом вычисление числа s_n, удовлетворяющего уравнению (5.7), можно произвести, например, по формуле Аккерманна, аналогичной (4.10).

5.2. Преобразование включения (5.6) в систему алгебраических уравнений

Преобразуем включение (5.6) в систему алгебраических уравнений относительно переменных $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$.

Будем искать значения $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ такими, чтобы матрицы $(A + s_i bc^*)$ $(i = 0, \dots, n-1)$ были неособыми. Так как $\det A \neq 0$ и

$$\det(A + s_i bc^*) = \det(A) \cdot \det(I + s_i A^{-1} bc^*) = (1 + s_i c^* A^{-1} b) \cdot \det A,$$

то искомые значения s_i должны быть отличными от $-1/(c^* A^{-1} b)$ при условии, что $c^* A^{-1} b \neq 0$. Тогда

$$\mathrm{Ker}(r_s^*) = \mathrm{Ker}(c^* \Pi_s) = \Pi_s^{-1} \mathrm{Ker}(c^*).$$

Поэтому включение (5.6) эквивалентно

$$f(P_s) \Pi_s^{-1} \mathrm{Ker}(c^*) \subset \mathrm{Lin}\{b, A\Pi_s b, \dots, (A\Pi_s)^{n-2} b\}. \tag{5.8}$$

Так как значения $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ мы ищем такими, чтобы пара (P_s, b) была полностью управляемой, то векторы

$$b,\ A\Pi_s b, \dots,\ (A\Pi_s)^{n-2} b \tag{5.9}$$

должны быть линейно независимыми.

Пусть $w_s \in \mathbb{R}^n$ — вектор, ортогональный $n-1$ линейно независимым векторам (5.9). Пусть, далее, $d_1, \dots, d_{n-1}$ $(d_i \in \mathbb{R}^n)$ — базис пространства $\mathrm{Ker}(c^*)$: $c \perp d_i$ $(i = 1, \dots, n-1)$. Тогда (5.8) эквивалентно системе $n-1$ уравнений с n переменными $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$:

$$w_s^* f(P_s) \Pi_s^{-1} d_i = 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Последние уравнения можно переписать так:

$$
\begin{gathered}
w_s^*(P_s^{n-1}A + \ldots + \alpha_i P_s^{i-1}A + \ldots + \alpha_1 A)d_i + \\
+\alpha_0 w_s^*(A + s_0 bc^*)^{-1} \ldots (A + s_{n-1} bc^*)^{-1} d_i = 0.
\end{gathered} \tag{5.10}
$$

Применяя к выражению $(A + s_0 bc^*)^{-1}$ формулу Шура—Вудбари, как и в двумерном случае, получим, что соотношения (5.10) эквивалентны следующей системе $n-1$ уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(1 + s_0 c^* A^{-1} b) w_s^* (P_s^{n-1}A + \alpha_{n-1} P_s^{n-2} A + \ldots + \alpha_1 A)d_i + \\
&+\alpha_0 w_s^* [(1 + s_0 c^* A^{-1} b)A^{-1} - s_0 (A^{-1}b)(c^* A^{-1})](A + s_1 bc^*)^{-1} \ldots \\
&\ldots (A + s_{n-1} bc^*) d_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1).
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Таким образом, проблема управления спектром матрицы монодромии $\Phi_{\overline{s}}$ системы (5.1), (4.2) сводится к решению системы уравнений (5.11) относительно $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ при условии, что пара (P_s, b) полностью управляема.

5.3. Теорема об управлении спектром матрицы монодромии в многомерном случае.

Рассмотрим передаточную функцию $W(z)$ системы (5.1)

$$
W(z) = c^*(Iz - A)^{-1} b = \frac{q_{n-1} z^{n-1} + \ldots + q_1 z + q_0}{z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_1 z + p_0} \tag{5.12}
$$

$$
(p_i, q_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 0, \ldots, n-1).
$$

Теорема 5.1 (об управлении спектром матрицы монодромии). *Пусть пара (A, b) полностью управляема, а пара (A, c) полностью наблюдаема. Предположим, что коэффициенты $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$; $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ многочленов, стоящих в числителе и знаменателе дроби (5.12), отличны от нуля, и*

$$
p_i/q_i \neq p_j/q_j \quad \text{при} \quad i \neq j \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n-1).
$$

Тогда для разрешимости проблемы управления спектром матрицы монодромии системы (5.1), (4.2) с помощью периодической обратной связи (4.2) периода $n+1$ при условии, что $\alpha_0 \neq 0$, достаточно, чтобы

$$
\operatorname{rank}(b,\ A\Pi_{s^0} b,\ \ldots,\ (A\Pi_{s^0})^{n-1} b) = n,
$$

где

$$
s^0 := (s_0^0, s_1^0, \ldots, s_{n-1}^0) = \left(\frac{p_0}{q_0},\ \frac{p_1}{q_1}, \ldots,\ \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right).
$$

Доказательство. Как было сказано в начале настоящего параграфа, матрицу A в системе (5.1), без умаления общности, можно считать неособой. Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. Нахождение номинального решения уравнения (5.11). Сначала решим уравнение (5.11) при $s_0 = s_0^0 := -1/c^*A^{-1}b$, а затем на основе этого решения найдем решение этого уравнения при $s_0 \neq -1/c^*A^{-1}b$. Заметим, что $c^*A^{-1}b \neq 0$, поскольку справедливо равенство $-c^*A^{-1}b = q_0/p_0$, которое следует из (5.12) при $z = 0$. По условию $q_0/p_0 \neq 0$. Положим в (5.11) $s_0 = -1/c^*A^{-1}b$. Получим

$$\alpha_0(w_s^*A^{-1}b)c^*A^{-1}(A + s_1bc^*)^{-1} \dots (A + s_{n-1}bc^*)^{-1}d_i = 0 \tag{5.13}$$

$$(i = 1, \dots, n-1).$$

По условию теоремы $\alpha_0 \neq 0$. Соотношение (5.13) будет выполнено, если

$$c^*A^{-1}(A + s_1bc^*)^{-1} \dots (A + s_{n-1}bc^*)^{-1}d_i = 0.$$

Последнее эквивалентно соотношению

$$c^* = \lambda c^*(A + s_{n-1}bc^*) \dots (A + s_1bc^*)A, \tag{5.14}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}, \;\; \lambda \neq 0$. Используя формулу Гамильтона—Кэли

$$A^n = -p_{n-1}A^{n-1} - p_{n-2}A^{n-2} - \dots - p_1A - p_0I$$

и учитывая, что векторы $c, \;\; A^*c, \;\; (A^*)^2c, \dots, (A^*)^{n-1}c$ линейно независимы, в силу полной наблюдаемости пары (A, c) после элементарных выкладок из (5.14) получим, что

$$s_{n-1} = s_{n-1}^0 := \frac{p_{n-1}}{c^*b}\,, \quad s_{n-2} = s_{n-2}^0 := \frac{p_{n-2}}{c^*(A + s_{n-1}^0bc^*)b}\,, \dots,$$

$$s_1 = s_1^0 := \frac{p_1}{c^*(A + s_{n-1}^0bc^*) \dots (A + s_2^0bc^*)b}$$

или

$$\left.\begin{aligned} s_{n-1}^0 = \frac{p_{n-1}}{c^*b}\,, \quad s_{n-2}^0 = \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}c^*b + c^*Ab}\,, \dots, \\ s_1^0 = \frac{p_1}{p_2c^*b + p_3c^*Ab + \dots + c^*A^{n-2}b}\,. \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

В выражениях (5.15) знаменатели дробей отличны от нуля, поскольку они равны соответственно коэффициентам $q_{n-1}, q_{n-2}, \ldots, q_1$ многочлена в числителе дроби (5.12). Действительно, разлагая левую и правую части равенства (5.12) в ряды по степеням $1/z$ в окрестности точки $z = \infty$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $1/z$, получим

$$\begin{cases} q_{n-1} = c^*b, \\ q_{n-2} = p_{n-1}c^*b + c^*Ab, \\ q_{n-3} = p_{n-2}c^*b + p_{n-1}c^*Ab + c^*A^2b, \\ \vdots \\ q_{n-i} = p_{n-i+1}c^*b + p_{n-i+2}c^*Ab + \ldots + c^*A^{i-1}b, \\ \vdots \\ q_0 = p_1c^*b + p_2c^*Ab + \ldots + p_{n-1}c^*A^{n-2}b + c^*A^{n-1}b. \end{cases} \tag{5.16}$$

С учетом формул (5.16) выражения (5.15) принимают вид

$$s_i^0 = p_i/q_i\,, \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{5.17}$$

Заметим, что формула (5.17) при $i = 0$ представляет также значение $s_0^0 = -1/c^*A^{-1}b$, поскольку $-c^*A^{-1}b = q_0/p_0$. Таким образом, уравнение (5.11) имеет специальное *решение* $(s_0^0, s_1^0, \ldots, s_{n-1}^0)$, определяемое по формуле (5.17); назовем его *номинальным*.

Запишем формулы (5.15) в другом виде. Для этого используем равенства

$$\begin{gathered} p_{n-i+1}c^*b + p_{n-i+2}c^*Ab + \ldots + p_{n-1}c^*A^{i-2}b + c^*A^{i-1}b = \\ = -(p_{n-i}c^*A^{-1}b + p_{n-i-1}c^*A^{-2}b + \ldots + p_0c^*A^{-(n-i+1)}b \\ (i = 1, \ldots, n-1), \end{gathered} \tag{5.18}$$

которые получаются из формулы Гамильтона—Кэли умножением обеих частей последовательно на $A^{-n}, A^{-(n-1)}, \ldots, A^{-2}$. Заменяя знаменатели выражений (5.15) соответственно выражениями правых частей (5.18), получим другую форму *номинального решения*:

$$\begin{gathered} s_{n-i}^0 = \frac{-p_{n-i}}{p_{n-i}c^*A^{-1}b + p_{n-i-1}c^*A^{-2}b + \ldots + p_1c^*A^{-(n-i)}b + p_0c^*A^{-(n-i+1)}b} \\ (i = 1, \ldots, n-1). \end{gathered} \tag{5.19}$$

2. Нахождение допустимого решения уравнения (5.11). Номинальное решение (5.17) лишь вспомогательное, оно недопустимо, поскольку $s_0^0 =$

$-1/c^*A^{-1}b$ $(i := 0)$ и, поэтому, матрица $A + s_0^0bc^*$ особая. Мы ищем значения s_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ такие, что $s_i \neq -1/c^*A^{-1}b$, т.е. чтобы матрицы $(A+s_ibc^*)$ были неособыми. Из формул (5.17) следует, что матрицы $(A+s_i^0bc^*)$ при $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ неособые, так как $s_i^0 \neq -1/c^*A^{-1}b$ в силу условия теоремы.

Найдем теперь допустимое решение уравнения (5.11), опираясь на номинальное решение (5.17). Положим в (5.11) $s_0 = s_0^0 + \varepsilon$, где ε — достаточно мало. Применяя формулу Шура—Вудбари ко всем матрицам $(A + s_ibc^*)^{-1}$, уравнение (5.11) перепишем так:

$$\varphi_i(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) + \alpha_0\psi_i(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = 0, \tag{5.20}$$

где

$$\begin{gathered}\varphi_i(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = (1 + s_0c^*A^{-1}b)\ldots(1 + s_{n-1}c^*A^{-1}b)w_s^*\times\\ \times(P_s^{n-1}A + \alpha_{n-1}P_s^{n-2}A + \ldots + \alpha_1A)d_i,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\psi_i(s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = w_s^*[(1 + s_0c^*A^{-1}b)A^{-1} - s_0(A^{-1}b)(c^*A^{-1})] \times \ldots\\ \ldots \times [(1 + s_{n-1}c^*A^{-1}b)A^{-1} - s_{n-1}(A^{-1}b)(c^*A^{-1})]d_i = 0,\end{gathered} \tag{5.21}$$

$$s_0 = s_0^0 + \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Чтобы решить систему уравнений (5.20), (5.21) относительно $s_1, \ldots, s_{n-1}$ при $s_0 = s_0^0 + \varepsilon$, воспользуемся теоремой о неявной функции из анализа. Поскольку φ_i и ψ_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ — гладкие функции от $\varepsilon, s_1, \ldots, s_{n-1}$ и уравнение (5.20) имеет, как выше показано, номинальное решение (5.17), то остается только проверить, что матрица Якоби

$$J(s^0) = \left\|\frac{\partial(\varphi_i + \alpha_0\psi_i)}{\partial s_j}\,(s^0)\right\| \quad (i, j = 1, \ldots, n-1),$$

$$s^0 = (s_0^0; s_1^0, \ldots, s_{n-1}^0),$$

вычисленная на номинальном решении (5.17), неособая.

Так как

$$\varphi_i(s_0^0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1),$$

то

$$\frac{\partial(\varphi_i + \alpha_0\psi_i)}{\partial s_j}(s^0) = \alpha_0\,\frac{\partial\Psi_i}{\partial s_j}\,(s^0) \quad (i, j = 1, \ldots, n-1). \tag{5.22}$$

Функция ψ_i при $s_0 = s_0^0$ $(s_0^0 = -1/c^* A^{-1} b)$ имеет вид

$$\psi_i(s_0^0, s_1, \ldots, s_{n-1}) = \frac{w_s^* A^{-1} b}{c^* A^{-1} b}\, g_i(s_1, \ldots, s_{n-1}), \tag{5.23}$$

где

$$g_i(s_1, \ldots, s_{n-1}) = c^* A^{-1}[(1 + s_1 c^* A^{-1} b) A^{-1} - s_1 (A^{-1} b)(c^* A^{-1})] \times \ldots$$

$$\ldots \times [(1 + s_{n-1} c^* A^{-1} b) A^{-1} - s_{n-1} (A^{-1} b)(c^* A^{-1})] d_i \tag{5.24}$$

$$(i = 1, \ldots, n-1).$$

Поскольку $(s_1^0, \ldots, s_{n-1}^0)$ является и решением уравнения (5.14), то $g_i(s_1^0, \ldots, s_{n-1}^0) = 0$. Поэтому из (5.22), (5.23) следует, что

$$\frac{\partial(\varphi_i + \alpha_0 \psi_i)}{\partial s_j}\,(s^0) = \alpha_0\, \frac{w_{s^0}^* A^{-1} b}{c^* A^{-1} b} \cdot \frac{\partial g_i}{\partial s_j}\,(s^0). \tag{5.25}$$

Векторы d_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ были определены нами как *произвольный* базис пространства Ker (c*). Выберем теперь этот базис специальным образом, а именно, возьмем вектор d_i ортогональным векторам $(A^*)^{-j} c$:

$$c^* A^{-j} d_i = 0, \qquad j = 0, \ldots, n-i-1, n-i+1, \ldots, n-1.$$

В силу полной наблюдаемости пары (A, c) система векторов $(A^*)^{-j} c$ линейно независима. Поэтому векторы d_i определяются однозначно с точностью до постоянного множителя.

Далее нам необходимо вычислить производные $\partial g_i / \partial s_j$ в точке $(s_1^0, \ldots, s_{n-1}^0)$. Чтобы не загромождать вычисления техническими подробностями, мы проведем полностью вычисления лишь для $n = 3$. Для $n > 3$ они проводятся совершенно аналогично. Векторы d_1 и d_2 выбраны так, что

$$c^* d_1 = 0,\ c^* A^{-1} d_1 = 0,; \quad c^* d_2 = 0,\ c^* A^{-2} d_2 = 0. \tag{5.26}$$

Из (5.24) имеем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial g_1}{\partial s_1}\,(s_1^0, s_2^0) = c^* A^{-1}[(c^* A^{-1} b) A^{-1} - A^{-1} b c^* A^{-1}] \times \\
\times [(1 + s_2^0 c^* A^{-1} b) A^{-1} - s_2 A^{-1} b c^* A^{-1}] d_1 = \\
= [(c^* A^{-1} b) c^* A^{-2} - (c^* A^{-2} b) c^* A^{-1}] \times \\
\times [(1 + s_2^0 c^* A^{-1} b) A^{-1} d_1 - s_2 A^{-1} b (c^* A^{-1} d_1)].
\end{gathered}$$

Из последнего равенства в силу (5.26) получаем

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_1}(s_1^0, s_2^0) = (1 + s_2^0 c^* A^{-1} b)[(c^* A^{-1} b) c^* A^{-3} d_1 - (c^* A^{-2} b) c^* A^{-2} d_1]. \qquad (5.27)$$

Учитывая равенства (5.26), из формулы Гамильтона—Кэли найдем

$$c^* A^{-3} d_1 = -p_1/p_0\, c^* A^{-2} d_1. \qquad (5.28)$$

Подставляя (5.28) в (5.27), получаем

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_1}(s_1^0, s_2^0) = (1 + s_2^0 c^* A^{-1} b)(c^* A^{-2} d_1) \cdot \frac{-p_1(c^* A^{-1} b) - p_0(c^* A^{-2} b)}{p_0} =$$

$$= (c^* A^{-2} d_1)(1 + s_2^0 c^* A^{-1} b)\, \frac{q_1}{p_0}, \qquad (5.29)$$

поскольку

$$-p_1 A^{-1} - p_0 A^{-2} = A + p_2 I$$

в силу формулы Гамильтона—Кэли и

$$q_1 = p_2 c^* b + c^* A b$$

в силу (5.16) (при $n := 3$).

Аналогично, используя равенство $c^* A^{-2} d_2 = 0$, имеем

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2}(s_1^0, s_2^0) = c^* A^{-1}[(1 + s_1^0 c^* A^{-1} b) A^{-1} - s_1^0 A^{-1} b c^* A^{-1}] \times$$

$$\times [(c^* A^{-1} b) A^{-1} - A^{-1} b c^* A^{-1}] d_2 = (1 + s_1^0 c^* A^{-1} b)(c^* A^{-1} b)(c^* A^{-3} d_2) -$$

$$-(1 + s_1^0 c^* A^{-1} b)(c^* A^{-3} b)(c^* A^{-1} d_2) + s_1^0 (c^* A^{-2} b)^2 (c^* A^{-1} d_2). \qquad (5.30)$$

Используя (5.26), из формулы Гамильтона—Кэли выводим равенства:

$$c^* A^{-3} d_2 = (c^* A^{-1} d_2) \frac{p_2}{p_0},$$

$$c^* A^{-3} b = -\frac{1}{p_0}[c^* b + p_2(c^* A^{-1} b) + p_1(c^* A^{-2} b)].$$

Подставляя последние выражения в (5.30) и учитывая, что $c^* b = q_2$ в силу

(5.16), получаем

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2}(s_1^0, s_2^0) = \Big[- (1 + s_1^0 c^* A^{-1} b) \frac{p_2(c^* A^{-1} b)}{p_0} +$$

$$+(1 + s_1^0 c^* A^{-1} b)\, \frac{c^* b + p_2(c^* A^{-1} b) + p_1(c^* A^{-2} b)}{p_0} + s_1^0 (c^* A^{-2} b)^2 (c^* A^{-1} d_2) \Big] =$$

$$= (1 + s_1^0 c^* A^{-1} b) \frac{q_2}{p_0}\,(c^* A^{-1} d_2) +$$
$$+ \left[\frac{p_1(1 + s_1^0 c^* A^{-1} b)}{p_0} + s_1^0 (c^* A^{-2} b) \right] (c^* A^{-2} b)(c^* A^{-1} d_2). \tag{5.31}$$

Заменяя s_1^0 по формуле (5.19) ($n := 3, i := 2$) в двух слагаемых, находящихся в квадратной скобке, убеждаемся, что выражение, стоящее в квадратной скобке в (5.31), равно нулю. Поэтому

$$\frac{\partial g_2}{\partial s_2}(s_1^0, s_2^0) = (1 + s_1^0 c^* A^{-1} b)(c^* A^{-1} d_2) q_2 / p_0\,. \tag{5.32}$$

Далее, с учетом (5.26) из (5.24) имеем

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_2}(s_1^0, s_2^0) = c^* A^{-1} [(1 + s_1^0 c^* A^{-1} b) A^{-1} - s_1^0 A^{-1} b c^* A^{-1}] \times$$
$$\times [(c^* A^{-1} b) A^{-1} - A^{-1} b c^* A^{-1}] d_1 = \tag{5.33}$$
$$= (c^* A^{-1} b)[(1 + s_1^0 c^* A^{-1} b)(c^* A^{-3} d_1) - s_1^0 (c^* A^{-2} b)(c^* A^{-2} d_1)].$$

Подставляя в последнем выражении значение s_1^0 из (5.19) ($n := 3$, $i := 2$) и учитывая (5.28), получим, что выражение в квадратных скобках в (5.33) равно 0. Следовательно,

$$\frac{\partial g_1}{\partial s_2}(s_1^0, s_2^0) = 0. \tag{5.34}$$

Заметим, что в силу равенств (5.26) и полной наблюдаемости пары (A, c) в равенствах (5.28) и (5.31)

$$c^* A^{-2} d_1 \neq 0; \quad c^* A^{-1} d_2 \neq 0. \tag{5.35}$$

Так как по условию теоремы α_0, p_i, q_i отличны от нуля и $s_i^0 \neq -1/c^* A^{-1} b$ при $i \neq 0$, то из равенств (5.20), (5.29), (5.32), (5.35) следует, что в матрице Якоби $J(s^0)$ диагональные элементы отличны от нуля при условии, что

$$w_{s^0}^* A^{-1} b \neq 0. \tag{5.36}$$

Ниже будет доказано, что неравенство (5.36) гарантируется условием теоремы — полной управляемостью пары (P_{s^0}, b).

Поэтому, с учетом (5.34), имеем

$$\det J(s^0) = \left(\alpha_0 \, \frac{w^*_{s^0} A^{-1} b}{c^* A^{-1} b}\right)^4 \cdot \frac{\partial g_1}{\partial s_1}(s^0) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial s_2}(s^0) \neq 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $n = 3$ матрица Якоби $J(s^0)$ неособая.

В общем случае $n > 3$ после аналогичных, но длинных и громоздких выкладок, получим, что матрица Якоби имеет нижний треугольный вид, на главной диагонали которой стоят ненулевые элементы, а элементы, стоящие выше главной диагонали, равны нулю. Следовательно, и в общем случае матрица Якоби $J(s^0)$ будет неособой, если выполнено неравенство (5.36), которое устанавливается ниже. Поэтому на основании теоремы о неявной функции существует решение уравнения (5.11) $s_0 = s^0_0 + \varepsilon,\ s_1 = s_1(\varepsilon), \ldots, s_{n-1} = s_{n-1}(\varepsilon)$, гладко зависящее от ε и совпадающее при $\varepsilon = 0$ с номинальным решением (5.17).

3. Эквивалентность неравенства (5.36) *условию полной управляемости пары* (P_{s^0}, b). Обозначим

$$Q(s) := (b,\ A\Pi_s b, \ldots, (A\Pi_s)^{n-1} b).$$

По условию теоремы

$$\operatorname{rank} Q(s^0) = n, \quad s^0 = (s^0_0; s^0_1, \ldots, s^0_{n-1}), \tag{5.37}$$

где $s^0_i \ \ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ — числа (5.17).

Пусть $s(\varepsilon)$ — найденное выше решение уравнения (5.11). Тогда в силу непрерывной зависимости элементов матрицы $Q(s(\varepsilon))$ от ε будем иметь $\operatorname{rank} Q(s(\varepsilon)) = n \quad (s(0) = s^0)$ для всех $\varepsilon \neq 0$ и достаточно близких к s^0.

Заметим, что равенство (5.37) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank} (A\Pi_{s^0} b, \ldots, (A\Pi_{s^0})^{n-1} b) = n - 1. \tag{5.38}$$

Справедливость равенства (5.38) вытекает из того факта, что вектор $(A^*)^{-1} c$ не ортогонален вектору b (так как $c^* A^{-1} b \neq 0$), но он ортогонален всем остальным вектор-столбцам матрицы $Q(s^0)$. Действительно,

$$\begin{gathered}
c^*A^{-1}(A\Pi_{s^0}) = c^*\Pi_{s^0} = c^*(A + s^0_{n-1}bc^*)\dots(A + s^0_1 bc^*)(A + s^0_0 bc^*) = \\
= c^*(A + s^0_{n-1}bc^*)\dots(A + s^0_1 bc^*)A+ \\
+s^0_0 c^*(A + s^0_{n-1}bc^*)\dots(A + s^0_1 bc^*)bc^* = \\
= (1/\lambda)(1 + s^0_0 bc^*)c^* = 0,
\end{gathered}$$

поскольку $(s^0_1, \dots, s^0_{n-1})$ — решение уравнения (5.14) и $s^0_0 = -1/c^*A^{-1}b$.

Имеет место равенство

$$\mathrm{Ker}(A\Pi_{s^0}) = \mathrm{Lin}(A^{-1}b). \tag{5.39}$$

В самом деле, с одной стороны $A^{-1}b \in \mathrm{Ker}(A\Pi_{s^0})$, поскольку в силу невырожденности матриц A, $(A + s^0_i bc^*)$ $(i = 1, \dots, n-1)$

$$\mathrm{Ker}(A\Pi_{s^0}) = \mathrm{Ker}(A + s^0_0 bc^*) \tag{5.40}$$

и

$$(A + s^0_0 bc^*)A^{-1}b = (1 + s^0_0 c^*A^{-1}b)b = 0,$$

так как $s^0_0 = -1/c^*A^{-1}b$. С другой стороны, в силу (5.40), если $x \in \mathrm{Ker}(A + s^0_0 bc^*)$, то $x = s^0_0(c^*x)(A^{-1}b)$, т.е. $x \in \mathrm{Lin}(A^{-1}b)$.

Так как

$$(A\Pi_{s^0}b, \dots, (A\Pi_{s^0})^{n-1}b) = A\Pi_{s^0}(b,\ A\Pi_{s^0}b, \dots, (A\Pi_{s^0})^{n-2}b),$$

то в силу (5.39) равенство (5.38) справедливо тогда и только тогда, когда

$$A^{-1}b \notin \mathrm{Lin}(b,\ A\Pi_{s^0}b, \dots, (A\Pi_{s^0})^{n-2}b). \tag{5.41}$$

Поскольку по определению вектор $w^*_{s^0}$ ортогонален векторам b, $A\Pi_{s^0}b, \dots, (A\Pi_{s^0})^{n-2}b$, то (5.41) означает, что $w^*_{s^0}A^{-1}b \neq 0$. Следовательно, в силу эквивалентности условий (5.41) и (5.37), условие (5.37) эквивалентно неравенству (5.36), что и требовалось доказать.

Таким образом, нами найдены значения $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ такие, что выполнено включение (5.6) и пара (P_{s^0}, b) полностью управляема. Эти значения s_i $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ вместе со значением s_n, определяемым по формуле, аналогичной (4.10), решают полностью подзадачи 1) и 2). Тем самым, теорема об управлении спектром матрицы монодромии полностью доказана.

Замечания.

1. Условия полной управляемости и полной наблюдаемости тройки (A, b, c) в доказанной выше теореме являются, как и в теореме 4.1, необходимыми. Поэтому, без потери общности, матрицу A исходной системы мы считаем с самого начала доказательства теоремы неособой. Точно также, без умаления общности, можно считать коэффициенты p_i характеристического многочлена матрицы A отличными от нуля.

2. Условие $q_0 \neq 0$, или эквивалентное (так как $q_0 = -(c^* A^{-1} b) p_0$) ему условие $c^* A^{-1} b \neq 0$ является необходимым: в противном случае определитель $\det \Phi_{\bar{s}}$ матрицы $\Phi_{\bar{s}}$ замкнутой системы не зависел бы от чисел $s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}$ ни при каком значении периода p, поскольку

$$\det \Phi_{\bar{s}} = (\det A)^p \cdot (1 + s_0 c^* A^{-1} b) \ldots (1 + s_{p-1} c^* A^{-1} b).$$

С другой стороны, условие $q_{n-1} \neq 0$, или эквивалентное (так как $q_{n-1} = c^* b$) ему условие $c^* b \neq 0$ не является, вообще говоря, необходимым. Действительно, в двумерном случае (см. § 4) нами допускалось, что $c^* b = 0$, но при этом требовалось, чтобы $\operatorname{Tr} A \neq 0$.

3. Условие, что числа $p_i / q_i \ \ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ попарно отличны друг от друга, не является тоже, вообще говоря, необходимым. Фактически при доказательстве теоремы нами использовано более слабое условие: $p_i / q_i \neq p_0 / q_0$ и $c^* A^{-i} b \neq 0 \ \ (i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

4. Условие, что период p обратной связи (2) равен $n + 1$ является лишь достаточным. Как было отмечено в § 4, условие $p \geq 3$ является необходимым для двумерных систем.

5. Условие, что $\alpha_0 \neq 0$ эквивалентное условию отличности от нуля чисел $\mu_j \ \ (j = 1, \ldots, n)$ в предписываемом для матрицы замкнутой системы спектре $\{\mu_j\}_{j=1}^{n}$, тоже не является необходимым. В [46] приведен пример, где $\alpha_0 = 0$, но тем не менее проблема управления спектром матрицы имеет решение (см. ниже пример 2, § 6).

6. Доказанная выше теорема не только гарантирует существование периодической обратной связи, решающей проблему управления спектром матрицы, но и дает также конструктивный метод нахождения этой обратной связи.

§ 6. Управление спектром матрицы монодромии некоторых конкретных двумерных и трехмерных дискретных систем

В настоящем параграфе мы рассмотрим применение доказанных в предыдущих параграфах 4 и 5 теорем к конкретным системам 2-го и 3-го порядков.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k, \qquad y_k = (-1, 1)x_k, \tag{6.1}$$

$$(x_k \in \mathbb{R}^2,\ u_k, y_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Поскольку

$$\operatorname{rank}(b, Ab) = 2, \quad \operatorname{rank}(c, A^*c) = 2,\ c^*b = 1, \quad c^*A^{-1}b = -\frac{1}{2}\,.$$

то к системе (6.1) можно применить теорему 4.1. В силу этой теоремы проблема управления спектром системы (6.1) разрешима с помощью периодической обратной связи $u_k = s_k y_k$ периода 3.

Заметим, что разомкнутая система $x_{k+1} = Ax_k$ неустойчива и не может быть стабилизирована с помощью стационарной обратной связи $u_k = sy_k$. Действительно, собственные значения матрицы A равны -1 и 2, и для характеристического многочлена $z^2 - (s+1)z + (s-2)$ замкнутой системы $x_{k+1} = (A + sbc^*)x_k$ ни при каком $s \in \mathbb{R}$ не выполняется необходимое условие устойчивости $|s+1| - 1 < s - 2 < 1$.

Пусть требуемыми собственными значениями матрицы замкнутой системы будут числа $\mu_{1,2} = -1/2 \pm i\,1/2$. Тогда $\alpha_0 = 1/2,\ \ \alpha_1 = 1$.

Введем в систему (6.1) периодическую обратную связь $u_k = s_k y_k$ периода 3.

Так как $\alpha_0 \neq 0,\ \ c^*b \neq 0$, то нахождение чисел s_1 и s_2 сводится к решению уравнения (4.22). Так как в (4.22) $\tilde b$ и $\tilde c$ есть произвольные векторы, перпендикулярные векторам b и c соответственно, то возьмем $\tilde b = \mathrm{col}(1, 0)$, $\tilde c = \mathrm{col}(1, 1)$.

Тогда уравнение для определения s_1 и s_2 принимает вид

$$(s_1 - 2)(s_2 - 2)(2s_1 s_2 + 2s_1 + 2s_2 + 11 + \alpha_1) + \alpha_0(s_1 s_2 + 2) = 0. \tag{6.2}$$

В доказательстве теоремы 4.1 (случай $\alpha_0 \neq 0$, $c^*b \neq 0$) нами показано, что уравнение (6.2) имеет решение $s_1 \neq 2,\ \ s_2 \neq 2$, удовлетворяющее условию управляемости (4.15), которое для системы (6.1) принимает вид

$$(1 + s_1)(1 + s_2) + (2 - s_2) \neq 0. \tag{6.3}$$

Здесь $\mathrm{Tr}\,A = 1,\ \det A = -2,\ -1/c^*A^{-1}b = 2.$

Если найдено указанное выше решение (s_1, s_2), то s_0 можно найти по формуле (4.10), которая здесь имеет вид

$$s_0 = -\frac{(s_1 - 2)(s_2 - 2)(2s_2 + 6) - (s_2 - 1)/2}{(s_1 - 2)(s_2 - 2)(s_1 s_2 + s_1 + 3)}\,. \tag{6.4}$$

Выберем $s_1 := 1$. Тогда (6.2) — квадратное уравнение относительно s_2, один из корней которого есть $s_2 = 2,0915$. Для s_0 получаем по формуле (6.4) соответствующее значение $s_0 = -3,4665$. Условие управляемости (6.3) выполнено для найденных значений s_1 и s_2.

Вычисления показывают, что для найденных выше значений s_0, s_1, s_2 матрица Φ_{s_0,s_1,s_2} замкнутой системы равна

$$\Phi_{s_0,s_1,s_2} = \begin{pmatrix} 10,933 & -3,933 \\ 33,299 & -11,933 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы равен $z^2 + z + 1/2$.

Замечание. К системе (6.1) может быть применена также теорема 5.1, все условия которой выполняются для рассматриваемой системы.

Действительно, передаточная функция системы (6.1) есть

$$W(z) = \frac{z - 1}{z^2 - z - 2}\,,$$

так что

$$\begin{aligned} &p_0 = -2, \quad p_1 = -1; \quad q_0 = -1, \quad q_1 = 1; \\ &s_0^0 = p_0/q_0 = 2, \qquad s_1^0 = p_1/q_1 = -1, \end{aligned}$$

Далее,

$$\Pi_{(s_0^0, s_1^0)} = (A + s_1^0 bc^*)(A + s_0^0 bc^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rank}(b,\ A\Pi_{(s_0^0, s_1^0)}) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

Следовательно, теорема 5.1 также гарантирует существование периодической обратной связи периода 3, решающей проблему управления спектром матрицы при дополнительном условии, что $\alpha_0 \neq 0$.

Пример 2. Рассмотрим систему третьего порядка

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k, \quad y_k = c^* x_k \quad (x_k \in \mathbb{R}^3;\ u_k, y_k \in \mathbb{R}), \tag{6.5}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \qquad (6.6)$$

Передаточная функция системы (6.5), (6.6) есть

$$W(z) = \frac{q_2 z^2 + q_1 z + q_0}{z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0}.$$

Для значений параметров

$$p_0 = 1,875, \quad p_1 = 5,75, \quad p_2 = 4,5\,,$$
$$q_0 = 2, \quad q_1 = 3, \quad q_2 = 1$$

функция $W(z)$ имеет три полюса $z_1 = -0,5,\ \ z_2 = -1,5,\ \ z_3 = -2,5$ и два нуля $z_1^0 = -1,\ \ z_2^0 = -2$.

Пусть предписанный спектр $\{\mu_j\}_{j=1}^3$ есть $\{0,0,0\}$.

Введем в систему (6.5) периодическую обратную связь $u_k = s_k y_k\ \ (s_{k+4} = s_k)$ периода 4. Требуется найти числа $s_i\ \ (i = 0,1,2,3)$ такие, чтобы характеристический многочлен замкнутой системы был равен z^3.

Численный расчет показывает [46], что искомыми являются значения

$$s_0 = -\frac{1}{c^* A^{-1} b} = 0,9375, \qquad s_1 = 2,528322,$$
$$s_2 = -8,928145, \qquad s_3 = 10.$$

Заметим, что для системы (6.5), (6.6) не выполнено условие $\alpha_0 \neq 0$ теоремы 5.1. Но тем не менее проблема управления спектром матрицы системы (6.5), (6.6) разрешима для многочлена $f(z) = z^3$. Поэтому, как было отмечено в конце § 5, условие $\alpha_0 \neq 0$ теоремы 5.1 не является, вообще говоря, необходимым.

§ 7. Управление спектром матрицы линейной системы с обратной связью "с памятью"

Выше в § 4 обратная связь (4.2) формировалась таким образом, что значение входа u_k в момент времени $t = k$ зависело от значения выхода y_k в тот же самый момент времени k, т.е. использовалась обратная связь "без памяти". Однако, можно рассмотреть и другой закон формирования обратной связи "с памятью", когда значение входа в текущий момент времени $t = k$ зависит от значений выхода в предшествующие моменты времени, например, от значения выхода в начале периода.

Рассмотрим обратную связь вида [51]

$$u_{rp} = s_0 y_{rp}, \;\; u_{rp+1} = s_1 y_{rp}, \ldots, u_{rp+p-1} = s_{p-1} y_{rp}, \tag{7.1}$$

где p – период функции $s_k = s(k)$ в (4.2).

Полагая $p = n$, как и в п. 4.2, из (4.1) и (7.1) получим

$$x_{(r+1)n} = \Phi_s x_{rn}, \tag{7.2}$$

где

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_s = A^n + s_0 A^{n-1} bc^* + \cdots + s_{n-2} Abc^* + s_{n-1} bc^* = A^n B s^* c^*, \\ B = (b, Ab, \ldots, A^{n-1} b), \quad s = (s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, s_0) \end{array}\right\} \tag{7.3}$$

Систему (7.2), (7.3) можно рассматривать как замкнутую систему $\xi_{r+1} = \Phi_s \xi_r$ с постоянной матрицей Φ_s, соответствующую новой дискретной системе

$$\xi_{r+1} = A^n \xi_r + B v_r, \quad \eta_r = c^* \xi_r \tag{7.4}$$

с законом обратной связи

$$v_r = s^* \eta_r.$$

Проблема управления спектром системы (4.1), (7.1) состоит в решении задачи (4.6), где Φ_s – матрица (7.3). Последнее эквивалентно уравнению

$$\det\{zI_n - [(A^n)^* + cd^*]\} = f(z), \tag{7.5}$$

где $f(z)$ – многочлен (4.5), а $d = Bs^*$.

Для разрешимости уравнения (7.5) относительно вектора d необходимо и достаточно, чтобы пара $((A^n)^*, c)$ была полностью управляема (см. [43], [44]) или, по теореме двойственности Калмана, чтобы пара (A^n, c^*) была полностью наблюдаемой.

Если пара (A, b) полностью управляема, то матрица B неособая и, следовательно, найдя вектор d из (7.5), можно определить искомый вектор s из формулы

$$s^* = B^{-1} d. \tag{7.6}$$

Таким образом имеет место следующий результат.

Теорема 7.1 ([51]). *Пусть пара (A, b) полностью управляема. Тогда для разрешимости проблемы управления спектром системы (4.1), (7.1) необходимо и достаточно, чтобы пара (A^n, c^*) была полностью наблюдаемой.*

Приведем пример, иллюстрирующий применение теоремы 7.1.

Пример ([51]). Рассмотрим систему (6.5), (6.6), где $p_0 = 0, p_1 = 1, p_2 = 2;\ q_0 = 1, q_1 = 0, q_2 = 0$.

Пусть

$$f(z) = z^3 + z^2 - 3z + 1 \tag{7.7}$$

есть заданный многочлен, который должен быть характеристическим для системы (6.5), (6.6) после введения обратной связи вида (7.1), где $p = 3$.

Непосредственно проверяется, что пара (A, b) является полностью управляемой, а пара (A^3, c^*) полностью наблюдаемой. Применяем теорему 7.1. Из уравнения (7.5), где $f(z)$ – многочлен (7.7), находим вектор $d = \mathrm{col}(-3, 2, -2)$, а затем из (7.6) искомый вектор $s = \mathrm{col}(-1, -4, -3)$.

В результате получаем, что характеристический многочлен матрицы монодромии

$$\Phi_s \equiv A^3 + Bs^*c^* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

системы (6.5), (6.6), замкнутой периодической обратной связью

$$u_{3r} = -3y_{3r},\ u_{3r+1} = -4y_{3r},\ u_{3r+2} = -y_{3r},$$

равен многочлену (7.7).

Литература

1. *Stephenson A.* A new type of dynamical stability// Mem. Proc. Manchr. Cit. Philos.Soc. 1907–1908. Vol.52.

2. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса// Журн.экспер. и теор.физики. 1951. Т.21. Вып.5. С.588-598.

3. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 400 с.

4. *Боголюбов Н.Н.* Теория возмущений в нелинейной механике// Сб. Ин-та строит. мех. АН СССР. 1950. Т.14. С.9–34.

5. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

6. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: МГУ, 1971.

7. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.

8. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

9. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанас в линейных системах. М.: Наука, 1987.

10. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431с.

11. *Меерков С.М.* Вибрационное управление// Автоматика и Телемеханика. 1973, № 2. С.34–43.

12. *Меерков С.М., Циткин М.Ю.* Об эффективности метода вибрационного регулирования для динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями n-го порядка// Автоматика и Телемеханика. 1975. № 4. С.5–10.

13. *Meerkov S.M.* Vibrational Control Theory// J. Franklin Inst. 1977. P.117–128.

14. *Meerkov S.M.* Principle of Vibrational Control: Theory and Applications// IEEE Trans. Aut. Contr. 1980. Vol.AC-25, N 4. P.755–762.

15. *Bellman R., Bentsman J., Meerkov S.M.* Vibrational control of systems with Arrhenius dynamics//J. Math.Anal.Appl. 1983. V.91. P.152-191.

16. *Bellman R., Bentsman J., Meerkov S.M.* On Vibrational Stabilizability of Nonlinear Systems//J. Optim. Theory Appl. 1985. V.46. P.421-430.

17. *Bellman R., Bentsman J., Meerkov S.M.* Vibrational control of nonlinear systems: vibrational stabilizability//IEEE Trans. Automat. Control. 1986. AC-3. № 8. P.710-724.

18. *Brockett R.* A stabilization problem. In book:Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Springer, 1998. P. 75–78.

19. *Moreau L., Aeyels D.* Stabilization by means of periodic output feedback// Proc.of conference of decision and control (CDC). Phoenix, Arizona, December 7–10, USA. 1999. P.108-109.

20. *Moreau L., Aeyels D.* A note on stabilization by periodic output feedback for third-order systems// Proc. of the 14-th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS). Perpignan. June 19–23. France. 2000.

21. *Moreau L and Aeyels D.* Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree// Systems & Control Letters. 2004. Vol.51, № 5. P.395–406.

22. *Leonov G.A., Shumafov M.M.* Stabilization of controllable linear systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 2010. 10(3), pp.235–268.

23. *Leonov G.A.* Algorithms of non-stationary stabilization and the Brockett problem // Prikladnaya Matematika i Mekhanika. 2001. 65(5), pp.801–808.

24. *Leonov G.A.* The stabilization Brockett problem//Avtomatika i Telemekhanika. 2001. № 5, pp.190–193.

25. *Leonov G.A.* On the Brocket stabilization problem // Doklady Physics. 2001. 46(4), pp.801–808.

26. *Leonov G.A.* The Brocket problem for linear discrete control systems //Automation and Remote Control. 2002. 63(5), pp.777–781.

27. *Leonov G.A.* Linear non-stationary stabilization algorithms and Brockett's problem // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2001. 65(5), pp.777–783.

28. *Allwright J.C., Astolfi A. and Wong H.P.* A note on asymptotic stabilization of linear systems by periodic, piece-wise constant output feedback // Automatica. 2005. V.41, № 2, pp.339–344.

29. *Vazquez C.* Control of a ship-mounted crank. Ph D. Thesis (In Spanish) CINVESTAV, Mexico, 2010.

30. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. 1992. V.170, pp.421–428.

31. *Pyragas K.* Control of chaos via extended delay feedback // Phys. Lett. A. 1995. V.206, pp.323–330.

32. *Pyragas K.* Delayed feedback of chaos // Phil. Trans. Soc. A. 2006. V.364, pp.2309–2334.

33. *Pyragas V., Pyragas K.* Delayed feedback control of the Lorenz system: An analytical treatment at a subcritical Hopf bifurcation // Phys. Rev. E. V.73. 036215, pp.1–10.

34. *Tamaševičius A., Mykolaitis G., Pyragas V., Pyragas K.* Delayed feedback

control of periodic orbits without torsion in nonautonomous systems: Theory and experiment // Phys. Rev. E. 2007. V.76. 026203, pp.1–6.

35. *Шумафов М.М.* Стабилизация линейных стационарных управляемых систем второго порядка обратной связью с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2010. № 12. С.87–90.

36. *Шумафов М.М.* О стабилизации двумерных линейных управляемых систем обратной связью с запаздыванием // Вестник Адыгейского государственного университета. 2010. Вып. 2. С.40–52.

37. *Шумафов М.М.* К задаче стабилизации двумерной линейной дискретной системы // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. № 5. С.71–74.

38. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 571с.

39. *Syrmos V.L., Abd-Allah C.T., Dorato P., Grigoriadis K.* Static Output Feedback. - A Survey // Automatica. 1997. Vol.33. № 2. P.125-137.

40. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С.7–46.

41. *Зайцев В.А.* Управление спектром в линейных системах с неполной обратной связью // Дифф. уравнения. 2009. Т.45, № 9. С.1320–1328.

42. *Зайцев В.А.* Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром // Дифф. уравнения. 2010. Т.46, № 12. С.1789–1793.

43. *Зубов В.И.* Теория оптимального управления. Л.: Судостроение, 1966. 352с.

44. *Wonham W.M.* On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems// IEEE Trans. Aut. Contr. 1967. Vol.AC-12, № 6. P.660–665.

45. *Aeyels D., Willems J.L.* Pole Assignment for Linear Time-Invariant Second-Order Systems by Periodic Static Output Feedback// IMA J. of Math. Control & Information. 1991. Vol.8. P.267–274.

46. *Aeyels D., Willems J.L.* Pole Assignment for Linear Time-Invariant Systems by Periodic Memoryless Output Feedback// Automatica. 1992. Vol.28, № 6. P.1159–1168.

47. *Van der Woude J.W.* A Note on Pole Placement by Static Output Feedback for Single-Input Systems// Systems & Control Letters. 1988. Vol. 11. P.285–287.

48. *Ackermann J.* Der Entwurf Linearer Regelungssysteme im Zustands-

raum// Regulungestechnik und Prozessedaten verarbeitung. 1972. Vol. 7. P.297–300.

49. *Greschak J.P., Verghese G.C.* Periodically varying compensation of time-invariant systems// Syst. Control Lett. 1982. Vol.2. P.88–93.

50. *Willems J.L.* Time-varying feedback for the stabilization of fixed modes in decentralized control systems// Automatica. 1989. Vol.25. P.127–131.

51. *Kaczorek T.* Pole Placement for Linear Discrete-Time Systems by Periodic Output Feedback // Systems & Control Letters. 1985. V.6. P.267–269.