ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 3, 2018
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

групповой анализ дифференциальных уравнений

Об инвариантности уравнений морской электродинамики в случае постоянного внешнего магнитного поля

С.Ю. Маламанов

БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Устинова,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В работе рассмотрена фактор-система уравнений магнитной гидродинамики – система дифференциальных уравнений, связывающая только инварианты (конечный функциональный базис инвариантов) подгруппы основной группы, допускаемой рассматриваемой системы. Разбираются инвариантные решения относительно оператора растяжения, при этом исходная система уравнений существенно упрощается. Такого рода решения наиболее характерны для задач, возникающих при моделировании физических процессов. Указаны возможные способы более простой постановки задач. К факторизованной системе уравнений морской электродинамики в случае постоянного внешнего магнитного поля применён классический групповой анализ. Знание допускаемой группы позволяет находить новые решения. Получена подалгебра Ли операторов и соответствующая группа преобразований. Показана возможность декомпозиции системы уравнений морской электродинамики.

Ключевые слова: морская электродинамика, магнитное поле, группы преобразований, понижение порядка, дифференциальные уравнения.

Abstract

In this paper, we consider the factor system of the equations of magnetohydrodynamics, a system of differential equations that relates only invariants (finite functional basis of invariants) to the subgroup of the basic group admissible in the system under consideration. We consider invariant solutions with respect to the extension operator, and the initial system of equations is essentially simplified. Such solutions are most typical for problems arising in the modeling of physical processes. Possible ways of simplifying the formulation of problems are indicated. Classical group analysis is applied to the factorized system of equations of marine electrodynamics in the case of a constant external magnetic field. Knowledge of the allowable group results in finding new solutions. The Lie subalgebra of operators and the corresponding transformation group are found. The possibility of decomposition of the system of equations of marine electrodynamics is shown.

Keywords: marine electrodynamics, magnetic field, transformation groups, reduction of order, differential equations.

В работе [1] построена фактор-система для уравнений нестационарной магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой изотермической проводящей жидкости. Дифференциальные уравнения связывают только инварианты допускаемой группы неоднородных растяжений:

$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}),\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}),\ P(\boldsymbol{\xi}),$

где $\boldsymbol{\xi}(\xi, \eta, \varsigma)$ автомодельная переменная ($\boldsymbol{\xi} = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{t}}$, $\boldsymbol{x}(x, y, z)$).

Главным упрощением является тот факт, это преобразованная система не эволюционного типа, в отличие от первоначальной:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{U} = 0 \\ \frac{\rho}{2}(-\boldsymbol{U} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\boldsymbol{U} + 2(\boldsymbol{U} \cdot \nabla)\boldsymbol{U}) + \nabla \boldsymbol{P} = \mu \Delta \boldsymbol{U} + \sigma(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{H} \\ \frac{1}{2}(-\boldsymbol{H} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\boldsymbol{H}) = \frac{1}{\mu_m \sigma}\Delta \boldsymbol{H} + \nabla \times (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{H}) \\ \frac{1}{2}(-\boldsymbol{G} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{H})\ ) = \frac{1}{\mu_m \sigma}\Delta \boldsymbol{G} + \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{H}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь ρ- плотность, μ, σ и μ_m – коэффициенты вязкости, электропроводности и магнитной вязкости соответственно.

Уменьшение числа независимых переменных – результат безусловно существенный, но это только первый этап. На следующем этапе возможны два пути. Первый путь заключается в том, что численно или с помощью других приближенных методов ищется решение полученной системы. После его нахождения и соответствующей формы представления осуществляется переход от инвариантов к исходным переменным, и тем самым решение уже будет зависеть и от времени. Второй путь состоит в поиске группы, допускаемой фактор–системой для дальнейшей редукции и поиска классов частных решений – инвариантных и частично-инвариантных. Именно этот путь будет рассмотрен в работе.

Как известно [2], одна из основных возможностей группового анализа для интегрирования уравнений (системы уравнений) состоит в том, что знание допускаемой группы позволяет находить новые решения по уже имеющимся. Это особенно эффективно, если допускаемая группа многопараметрическая. Для уравнений с частными производными существует алгоритм поиска допускаемых групп и классов частных решений. Предварительно сделаем некоторые замечания. Поиск указанной группы является задачей технически довольно сложной и громоздкой, с трудоёмкими выкладками. Поэтому он будет продемонстрирован только частично, а не в полном объёме. Кроме того, наличие большого числа индексов, обозначающих как составляющие векторов, так и производные по соответствующим переменным, приводит к необходимости ввести упрощающие и более привычные обозначения. Так, составляющие векторов $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{H}$ (см. уравнения (1)) обозначим как (U, V, W) и (B, C, D), а вектора $\boldsymbol{\xi}$ – как привычные (x, y, z)**.** Помимо этого, не нарушая общности рассмотрения будем считать, что величина внешнего магнитного поля, плотность жидкости, коэффициенты вязкости и электропроводности равны единице. Также заметим что, постановка задач морской электродинамики допускает её существенное упрощение. Во-первых, одновременно уравнения для $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$, как правило, не решают, а электрическое поле находят из выражения [3]:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\mu_m \sigma} \nabla \times \boldsymbol{B} - (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}_0),$$

где $\boldsymbol{B}_0$ геомагнитное поле Земли. Во-вторых, возникают определенные упрощения в уравнении переноса вектора напряженности индуцированного магнитного поля. При этих соглашениях исследуемая система такова:

$$-\frac{1}{2}\left[U + x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z} - 2\left(U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + W\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - U,$$

$$-\frac{1}{2}\left[V + x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} - 2\left(U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + W\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial p}{\partial y} =$$

$$=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-V,$$

$$-\frac{1}{2}\left[W+x\frac{\partial W}{\partial x}+y\frac{\partial W}{\partial y}+z\frac{\partial W}{\partial z}-2\left(U\frac{\partial W}{\partial x}+V\frac{\partial W}{\partial y}+W\frac{\partial W}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial p}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2},$$

$$-\frac{1}{2}\left[B+x\frac{\partial B}{\partial x}+y\frac{\partial B}{\partial y}+z\frac{\partial B}{\partial z}\right]=\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}+\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{2}$$

$$-\frac{1}{2}\left[C+x\frac{\partial C}{\partial x}+y\frac{\partial C}{\partial y}+z\frac{\partial C}{\partial z}\right]=\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}+\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$-\frac{1}{2}\left[D+x\frac{\partial D}{\partial x}+y\frac{\partial D}{\partial y}+z\frac{\partial D}{\partial z}\right]=\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 D}{\partial z^2}-\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0.$$

Анализ системы (2) позволяет сделать важное заключение. При задании внешнего постоянного магнитного поля (например, геомагнитное поле Земли) уравнения «расщепляются». Первые три уравнения – проекции уравнения движения – не зависят от индуцированного магнитного поля. В то же время, уравнение переноса вектора индуцированного магнитного поля зависит скорости среды, а значит от решения первых трёх уравнений.

Используя общепринятое обозначение $\partial_q=\frac{\partial}{\partial q}$, будем искать оператор симметрии, допускаемый системой (2) в виде:

$$X=\xi^x(x,y,z)\partial_x+\xi^y(x,y,z)\partial_y+\xi^z(x,y,z)\partial_z+\eta^U(x,y,z,U)\partial_U+$$

$$+\eta^V(x,y,z,V)\partial_V+\eta^W(x,y,z,W)\partial_W+\eta^p(x,y,z,p)\partial_p+\eta^B(x,y,z,B)\partial_B+$$

$$+\eta^C(x,y,z,C)\partial_C+\eta^D(x,y,z,D)\partial_D. \tag{3}$$

Наличие в системе (2) вторых производных требует вычисления соответственно первого и второго продолжений оператора (3). Первое продолжение имеет вид:

$$X_1=X+\zeta^{U_x}\partial_{U_x}+\zeta^{U_y}\partial_{U_y}+\zeta^{U_z}\partial_{U_z}+\zeta^{V_x}\partial_{V_x}+\zeta^{V_y}\partial_{V_y}+\zeta^{V_z}\partial_{V_z}+\zeta^{W_x}\partial_{W_x}+$$

$$+\zeta^{W_y}\partial_{W_y}+\zeta^{W_z}\partial_{W_z}+\zeta^{B_x}\partial_{B_x}+\zeta^{B_y}\partial_{B_y}+\zeta^{B_z}\partial_{B_z}+\zeta^{C_x}\partial_{C_x}+\zeta^{C_y}\partial_{C_y}+\zeta^{C_z}\partial_{C_z}+$$

$$+\zeta^{D_x}\partial_{D_x}+\zeta^{D_y}\partial_{D_y}+\zeta^{D_z}\partial_{D_z}+\zeta^{p_x}\partial_{p_x}+\zeta^{p_y}\partial_{p_y}+\zeta^{p_z}\partial_{p_z}. \qquad (4)$$

Аналогично выписывается второе продолжение:

$$X_2=X_1+\zeta^{U_{xx}}\partial_{U_{xx}}+\zeta^{U_{yy}}\partial_{U_{yy}}+\zeta^{U_{zz}}\partial_{U_{zz}}+\zeta^{V_{xx}}\partial_{V_{xx}}+\zeta^{V_{yy}}\partial_{V_{yy}}+\zeta^{V_{zz}}\partial_{V_{zz}}+$$

$$+\zeta^{W_{xx}}\partial_{W_{xx}}+\zeta^{W_{yy}}\partial_{W_{yy}}+\zeta^{W_{zz}}\partial_{W_{zz}}+\zeta^{B_{xx}}\partial_{B_{xx}}+\zeta^{B_{yy}}\partial_{B_{yy}}+\zeta^{B_{zz}}\partial_{B_{zz}}+$$

$$+\zeta^{C_{xx}}\partial_{C_{xx}}+\zeta^{C_{yy}}\partial_{C_{yy}}+\zeta^{C_{zz}}\partial_{C_{zz}}+\zeta^{D_{xx}}\partial_{D_{xx}}+\zeta^{D_{yy}}\partial_{D_{yy}}+\zeta^{D_{zz}}\partial_{D_{zz}}. \qquad (5)$$

В исследуемой системе (2) семь уравнений, поэтому будет семь условий того, что система уравнений допускает преобразование симметрии:

$$X\,F_i\big(x,y,z,U,V,W,p,U_x,U_y,U_z,\dots,U_{xx},U_{yy},U_{zz},\dots\big)\big|_{F=0}=0, \qquad (6)$$

$$(i=1,2,3,4,5,6,7).$$

В результате анализа, подробности которого ввиду их громоздкости опущены, оператор (3) принимает следующий вид:

$$X=a_2\partial_x+a_3\partial_y+a_4\partial_z+\frac{a_2}{2}\partial_U+\frac{a_3}{2}\partial_V+\frac{a_4}{2}\partial_W-\frac{1}{4}(a_2x+a_3y-a_4z)\partial_p, \qquad (7)$$

Полагая в этом общем операторе $a_2=1, a_3=a_4=0$, затем $a_3=1, a_2=a_4=0$, и $a_4=1$, $a_2=a_3=0$, строим следующие операторы симметрии:

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial U}-\frac{1}{4}x\frac{\partial}{\partial P},$$

$$X_2=\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial V}-\frac{1}{4}y\frac{\partial}{\partial P},$$

$$X_3=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial W}+\frac{1}{4}z\frac{\partial}{\partial P}.$$

Найденные операторы позволяют построить подалгебру Ли, которая может быть наглядно представлена в виде таблицы Кэли. Эта подалгебра, «отвечающая» за гидродинамическую часть задачи, абелева, значит L_3 разрешима.

Таблица Кэли для операторов $X_1, X_2,$ и X_3 :

	X_1	X_2	X_3

X_1	0	0	0
X_2	0	0	0
X_3	0	0	0

По операторам X_1, X_2 и X_3 могут быть легко найдены соответствующие им преобразования локальных групп Ли. Так, в частности, оператору X_1 соответствуют преобразования:

$$\begin{cases} x' = x + a_2\,, y' = y, z' = z, \\ U' = U + \dfrac{1}{2}a_2, \quad V' = V, \qquad W' = W \\ P' = P - \dfrac{1}{4}x'a_2, \end{cases}$$

где a_2 групповая константа. В полученных решениях необходимо вернуться к исходным переменным. Напомним, что переменные x, y и z были введены как более привычные вместо автомодельных переменных ξ, η, ς. Тогда окончательно можно записать:

$$\begin{cases} \xi' = \xi + a_2\,, \eta' = \eta, \varsigma' = \varsigma, \\ U' = U + \dfrac{1}{2}a_2, \quad V' = V, \qquad W' = W \\ P' = P - \dfrac{1}{4}\xi'a_2. \end{cases}$$

Полученные преобразования действуют на уравнение движения и уравнение неразрывности, при этом уравнение переноса вектора индуцированного магнитного поля, остается неизменным. Отчасти это позволяет обосновать декомпозицию задачи на гидродинамическую и электродинамическую части. Возможность такого разделения, при постоянном внешнем магнитном поле, уже «заложена» в исследуемой системе уравнений, а групповой анализ позволил её найти. Следует особо подчеркнуть, что в гео- и гидрофизических расчётах индуцируемое морским волнением магнитное поле находят по известному (из тех или иных соображений) полю вектора скорости, то есть изначально разделяют задачу на две указанные части. Также заметим, что для нахождения основной группы (алгебры) Ли исходную систему необходимо привести в инволюцию, чтобы найти все операторы симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маламанов С.Ю.* Факторизация уравнений морской электродинамики // Дифференциальные уравнения и процессы управления. № 3, 2017. – С. 37–45.

2. *Овсянников Л.В*. Групповой анализ дифференциальных уравнений. -М.: Наука, 1978. – 400 с.

3. *Савченко В.Н., Смагин В.П., Фонарев Г.А*. Вопросы морской электродинамики: Монография. – Владивосток: Изд-во ВГУЭ и С, 1999. – 208 с.