

## Конструктивный метод интегрирования и качественного исследования динамических систем на плоскости.

Назиев Э.Х.  
Украина, 03056, Киев , пр. Победы 37,  
Национальный технический университет Украины «КПИ»,  
кафедра высшей математики  
e-mail: gik8@yandex.ru

### Содержание.

Введение.....	137
§ 1. Интегрирующая функция и некоторые ее свойства.....	137
§ 2. Простейшие примеры нахождения интегрирующих функций и качественного исследования динамических систем на плоскости.....	139
§ 3. Связь интегрирующей функции с допускаемыми системой бесконечно малыми преобразованиями.....	144
§4. Локальное представление интегрирующей функции в окрестности состояния равновесия.....	149
§5. Построение классов динамических на плоскости, интегрируемых в замкнутой форме.....	157
§6. Линейные однородные системы с постоянной матрицей.....	176
§ 7. Качественное исследование однородных систем.....	192
§ 8. Квазиоднородные системы.....	208
§ 9. Применение интегрирующей функции к исследованию поведения траекторий заданной динамической системы.....	210
§10. Фазовые портреты некоторых частных случаев дифференциальных систем, найденных в §5.....	225
Литература.....	234

## Введение.

В настоящей работе рассматриваются динамические системы второго порядка, для которых решаются две задачи: задача интегрирования в замкнутой форме и задача их качественного исследования.

Достаточно эффективных методов решения первой задачи для указанных систем (как и, вообще, для систем  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка) не существует. Даже такой мощный аппарат нахождения общих решений дифференциальных уравнений, каким является основанный на исследованиях С.Ли и его учеников *групповой анализ дифференциальных уравнений*, в случае указанных систем оказывается бесполезным (см. по этому поводу [1]).

Последнее обстоятельство естественно привело к возникновению качественных методов исследования указанных систем. Созданная трудами А. Пуанкаре и А.М.Ляпунова в конце 19 столетия качественная теория дифференциальных уравнений интенсивно развивалась на протяжении всего 20 столетия и столь же интенсивно развивается до сих пор. Однако и здесь имеются свои проблемы. Одной из них является проблема построения функций А.М.Ляпунова при исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений, регулярных методов решения которой не существует.

Между тем ситуация не является столь безнадежной ни в первом, ни во втором случаях, как это может показаться после сказанного выше: достаточно посмотреть на уже известные факты с несколько иной точки зрения, чтобы увидеть новые возможности их применения. Именно, если вместо интегрирующего множителя  $\mu(x, y)$  сопряженного уравнения, соответствующего заданной динамической системе, рассматривать функцию  $M(x, y) = 1/\mu(x, y)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению, легко выводимому из дифференциального уравнения для интегрирующего множителя, то появляется возможность достаточно эффективно решать обе указанные выше задачи.

В основу настоящей работы положены результаты, полученные автором в работах [2,3]. Автору неизвестны более ранние работы других авторов, в которых задачи теории динамических систем на плоскости решались бы предложенным в указанных работах методом.

Предполагается, что все основные понятия и факты классической теории динамических систем на плоскости, используемые в этой работе, читателю известны. При необходимости их можно найти, например, в работе Андропова А.А. и др. [4], или в работе Баутина Н.Н., Леонтович Е.А. [5], где они изложены в более компактной форме. Из работ, опубликованных после 2000 г., отметим работы Андреева А.Ф. [6], Басова В.В. [7], Ушхо Д.С. [8], Богданова Р.И. [9,10].

## § 1. Интегрирующая функция и некоторые ее свойства.

Будем рассматривать динамические системы второго порядка

$$\dot{x} = \xi^1(x, y), \quad \dot{y} = \xi^2(x, y) \tag{1.1}$$

определенные в некоторой области  $D$  (ограниченной или неограниченной) плоскости  $Oxy$ , предполагая, что они в этой области принадлежат, по меньшей мере, классу  $C_1$ . Последнее условие, как известно, обеспечивает существование и единственность решений рассматриваемых систем во всей области определения  $D$ .

С системой (1.1) будем связывать линейный дифференциальный оператор

$$Xf = \xi^1(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \xi^2(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}, \tag{1.2}$$

с помощью которого изменение произвольной дифференцируемой функции  $f(x, y)$  при бесконечно малом сдвиге вдоль траекторий системы характеризуется равенством

$$df(x, y) = Xf dt. \quad (1.3)$$

Отсюда следует, что функция  $f(x, y)$  является в некоторой области  $D' \subseteq D$  интегралом системы (1.1) тогда и только тогда, когда  $Xf \equiv 0$  в  $D'$ , т.е. когда функция  $f(x, y)$  является в  $D'$  решением уравнения  $Xf = 0$ .

Заметим, что с точки зрения теории непрерывных групп преобразований система уравнений (1.1) определяет однопараметрическую (с параметром  $t$ ) непрерывную группу  $G_1$  преобразований плоскости  $(x, y)$  [11]. Символом (инфинитезимальным оператором) этой группы является оператор  $Xf$ .

Единственный независимый интеграл системы (1.1) (единственное независимое решение уравнения  $Xf = 0$ ) находится интегрированием сопряженного уравнения

$$\xi^2(x, y)dx - \xi^1(x, y)dy = 0. \quad (1.4)$$

В общем случае интегрирование этого уравнения сводится к нахождению какого-либо нетривиального решения  $\mu(x, y)$  (интегрирующего множителя) уравнения

$$\frac{\partial \mu \xi^1}{\partial x} + \frac{\partial \mu \xi^2}{\partial y} = 0,$$

которое нам удобнее записать в виде

$$X\mu + \mu \operatorname{div} \bar{\xi} = 0, \quad (1.5)$$

где  $\bar{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$  и  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  – расходимость векторного поля  $\bar{\xi}$ , определяемая общеизвестным равенством

$$\operatorname{div} \bar{\xi} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \frac{\partial \xi^2}{\partial y},$$

после чего общий интеграл системы (1.1) находится интегрированием полного дифференциала

$$\mu(x, y)\xi^2(x, y)dx - \mu(x, y)\xi^1(x, y)dy = 0. \quad (1.6)$$

Если функции  $\xi^1(x, y)$  и  $\xi^2(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в некоторой односвязной области, где  $[\xi^1(x, y)]^2 + [\xi^2(x, y)]^2 \neq 0$ , то решения  $\mu(x, y) \neq 0$  уравнения (1.5) всегда существуют [11]. Следовательно, метод интегрирующего множителя можно рассматривать как общий метод интегрирования уравнений вида (1.4), однако ввиду трудности нахождения интегрирующего множителя этот метод чаще всего применяется лишь в тех случаях, когда интегрирующий множитель очевиден [12].

Для решения указанных во введении задач будем в дальнейшем рассматривать уравнение

$$XM \equiv \xi^1(x, y) \frac{\partial M}{\partial x} + \xi^2(x, y) \frac{\partial M}{\partial y} = M(x, y) \operatorname{div} \bar{\xi}, \quad (1.7)$$

и его непрерывно дифференцируемые решения  $M(x, y) \neq 0$ , которые можно назвать *интегрирующими функциями* уравнения (1.4), что оправдывается легко устанавливаемой связью  $M(x, y) = \mu(x, y)^{-1}$  между решениями уравнений (1.5) и (1.7).

Интегрирующие функции обладают следующими свойствами:

**Свойство 1.** Число интегрирующих функций данного уравнения (1.4) бесконечно и все они содержатся в формуле

$$M_0(x, y) = M(x, y)\varphi(U),$$

где  $M(x, y)$  – какая-нибудь интегрирующая функция уравнения (1.4),  $U(x, y)$  – любой интеграл этого уравнения и  $\varphi$  – произвольная не равная тождественно нулю дифференцируемая функция.

Из этого свойства вытекает

**Свойство 2.** Если  $M_1(x, y)$  и  $M_2(x, y)$  – интегрирующие функции уравнения (1.4), отношение которых не сводится к тождественной постоянной, то равенство

$$\frac{M_1(x, y)}{M_2(x, y)} = C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная, является общим интегралом уравнения (1.4).

**Свойство 3.** Если  $M(x, y)$  – интегрирующая функция уравнения (1.4), то  $CM(x, y)$ , где  $C$  – произвольная отличная от нуля постоянная, также является интегрирующей функцией уравнения (1.4).

**Доказательство.** Если  $M(x, y)$  – интегрирующая функция уравнения (1.4), то  $XM = M \operatorname{div} \bar{\xi}$ . Тогда  $X(CM) = CXM = (CM) \operatorname{div} \bar{\xi}$ , откуда следует высказанное утверждение.

**Свойство 4.** Если  $M_1(x, y)$  и  $M_2(x, y)$  – интегрирующие функции уравнения (1.4), то  $M(x, y) = M_1(x, y) \pm M_2(x, y) \neq 0$  – интегрирующая функция этого уравнения.

**Доказательство.** Согласно условию  $XM_1 = M_1 \operatorname{div} \bar{\xi}$  и  $XM_2 = M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}$ . Тогда  $X(M) = X(M_1 \pm M_2) = XM_1 \pm XM_2 = M_1 \operatorname{div} \bar{\xi} \pm M_2 \operatorname{div} \bar{\xi} = (M_1 \pm M_2) \operatorname{div} \bar{\xi} = M \operatorname{div} \bar{\xi}$ , откуда следует высказанное утверждение.

Из свойств 3 и 4 вытекает

**Свойство 5.** Произвольная линейная комбинация  $M(x, y) = C_1 M_1 + \dots + C_n M_n \neq 0$  с постоянными коэффициентами  $C_1, \dots, C_n$  конечного числа  $n$  интегрирующих функций уравнения (1.4) является интегрирующей функцией уравнения (1.4).

Действительно, если  $M_1, \dots, M_n$  – интегрирующие функции уравнения (1.4), то

$$X(M) = X(C_1 M_1 + \dots + C_n M_n) = C_1 X M_1 + \dots + C_n X M_n = C_1 M_1 \operatorname{div} \bar{\xi} + \dots + C_n M_n \operatorname{div} \bar{\xi} = (C_1 M_1 + \dots + C_n M_n) \operatorname{div} \bar{\xi} = M \operatorname{div} \bar{\xi},$$

откуда следует высказанное утверждение.

**Свойство 6.** Кривые, на которых в  $D$  интегрирующая функция обращается в нуль, являются интегральными кривыми системы (1.1).

Это свойство вытекает из свойства 2: при  $C = 0$  получаем интегральные кривые системы (1.1), на которых обращается в нуль функция  $M_1(x, y)$ , а при  $C = \infty$  – интегральные кривые, на которых обращается в нуль функция  $M_2(x, y)$ .

Свойство 6 оправдывает введение в рассмотрение функции  $M(x, y)$ . Знание этой функции часто позволяет полностью решить задачу качественного исследования системы (1.1), в частности, задачу исследования устойчивости ее состояний равновесия, в связи с чем задача нахождения функции  $M(x, y)$  (решений уравнения (1.7)) приобретает первостепенное значение.

## § 2. Простейшие примеры нахождения интегрирующих функций и качественного исследования динамических систем на плоскости.

Для нахождения решений уравнения (1.7) можно воспользоваться соответствующей ему системой уравнений

$$\frac{dx}{\xi^1(x, y)} = \frac{dy}{\xi^2(x, y)} = \frac{dM}{M \operatorname{div} \bar{\xi}} \quad (2.1)$$

Иногда для такой системы удается обнаружить *интегрируемую комбинацию* [12], позволяющую найти одно из решений уравнения (1.7).

**Пример 2.1.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \equiv \xi^1(x, y), \\ \dot{y} = x + y^3 \equiv \xi^2(x, y). \end{cases}$$

Состояниями равновесия этой системы являются точки  $O(0,0)$ ,  $A(1,-1)$  и  $B(-1,1)$ . Дивергенция векторного поля  $\bar{\xi} = (\xi^1, \xi^2)$  в произвольной точке  $Oxy$  определяется равенством

$$\operatorname{div} \bar{\xi} = 3(x^2 + y^2).$$

Система уравнений (2.1) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{dx}{y+x^3} = \frac{dy}{x+y^3} = \frac{dM}{3(x^2+y^2)M}.$$

Пользуясь свойством равных отношений, получаем равенства

$$\frac{xdx-ydy}{x^4-y^4} = \frac{ydx+xdy}{(x^2+y^2)(1+xy)} = \frac{dM}{3(x^2+y^2)M},$$

откуда при  $x^2 + y^2 \neq 0$  приходим к равенствам

$$\frac{1}{2} \frac{d(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = \frac{d(1+xy)}{1+xy} = \frac{dM}{3M},$$

которые дают две интегрирующие функции (с точностью до произвольных постоянных множителей)

$$M_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{3/2}, \quad M_2(x, y) = (1 + xy)^3$$

и общий интеграл заданной системы уравнений в виде

$$F(x, y) \equiv \frac{x^2 - y^2}{(1 + xy)^2} = C,$$

определенный всюду на плоскости  $Oxy$ , кроме точек, принадлежащих ветвям гиперболы  $1 + xy = 0$ , на которых функция  $M(x, y)$  обращается в нуль и которые, следовательно, являются интегральными кривыми заданной системы

Исследовать поведение траекторий системы удобнее в новых переменных  $u$  и  $v$ , связанных с переменными  $x$  и  $y$  равенствами

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

В этих переменных дифференциальные уравнения системы принимают вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u + \frac{u}{4}(u^2 + 3v^2) \equiv \xi^1(u, v), \\ \dot{v} = -v + \frac{v}{4}(3u^2 + v^2) \equiv \xi^2(u, v), \end{cases} \quad (2.2)$$

ее состояниями равновесия являются точки  $O(0,0)$ ,  $A(0,2)$ ,  $B(0,-2)$ . Из равенств  $\xi^1(u, -v) = -\xi^1(u, v)$ ,  $\xi^2(u, -v) = \xi^2(u, v)$  и  $\xi^1(-u, v) = \xi^1(u, v)$ ,  $\xi^2(-u, v) = -\xi^2(u, v)$  следует, что поле направлений системы симметрично относительно обеих координатных осей  $Ou$  и  $Ov$ .

Найденные выше интегрирующие функции  $M_1(x, y)$  и  $M_2(x, y)$  в новых переменных имеют вид

$$\tilde{M}_1(u, v) = (uv)^{3/2}, \quad \tilde{M}_2(u, v) = 4 + u^2 - v^2.$$

Функция  $\tilde{M}_1(u, v)$  обращается в нуль на прямых

$$u = 0, \quad v = 0,$$

а функция  $\tilde{M}_2(u, v)$  – на гиперболе

$$\frac{v^2}{4} - \frac{u^2}{4} = 1.$$

Прямая  $u = 0$  состоит из траекторий, определяемых соотношениями

$$u = 0, -\infty < v < 0; \quad u = 0, v = 0; \quad u = 0, 0 < v < +\infty.$$

Прямая  $v = 0$  состоит из траекторий

$$v = 0, -\infty < u < 0; \quad u = 0, v = 0; \quad v = 0, 0 < u < +\infty.$$

Нижняя ветвь указанной гиперболы составлена из траекторий

$$\frac{v^2}{4} - \frac{u^2}{4} = 1, -\infty < u < 0, -\infty < v < -2;$$

$$u = 0, \quad v = -2;$$

$$\frac{v^2}{4} - \frac{u^2}{4} = 1, 0 < u < +\infty, -\infty < v < -2,$$

верхняя – из траекторий

$$\frac{v^2}{4} - \frac{u^2}{4} = 1, -\infty < u < 0, 2 < v < +\infty;$$

$$u = 0, \quad v = 2;$$

$$\frac{v^2}{4} - \frac{u^2}{4} = 1, 0 < u < +\infty, 2 < v < +\infty.$$

Указанные на траекториях направления движения изображающей точки легко находятся обычным способом при помощи дифференциальных уравнений системы.

Дополняя имеющуюся информацию указанием направлений векторного поля  $\bar{\xi}$  в некоторых фиксированных точках, например, прямой  $u = 1$ , что можно сделать также при помощи дифференциальных уравнений системы, с учетом указанной выше симметрии поля направлений, определяемого системой, приходим к заключению, что часть фазового портрета системы, расположенная в первом квадранте, имеет вид, изображенный на рис.2.1. Состояния равновесия  $A$  и  $B$  – неустойчивые узлы, состояние равновесия  $O(0,0)$  также неустойчиво и является седлом.

Легко понять, что фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{u} = -u - \frac{u}{4}(u^2 + 3v^2), \\ \dot{v} = v - \frac{v}{4}(3u^2 + v^2) \end{cases}$$

можно получить, если на рис. 2.1 на всех изображенных траекториях изменить направления стрелок на противоположные. При этом состояния равновесия  $A$  и  $B$  становятся асимптотически устойчивыми, однако состояние равновесия  $O(0,0)$  остается неустойчивым (седлом, как и в предыдущей системе).

Заметим, что в (достаточно малой) окрестности каждого из состояний равновесия интегрирующая функция является знакопеременной. Кривыми, на которых интегрирующая функция обращается в нуль, каждая из окрестностей разбивается на четыре однотипных (в случае данной системы) сектора, в каждом из которых интегрирующая функция сохраняет знак. Секторы, на которые разбиваются окрестности точек  $A$  и  $B$ , по существующей терминологии [4] называются *параболическими*, секторы, на которые разбивается окрестность точки  $O(0,0)$ , называются *гиперболическими*. Позже мы встретимся еще с одним типом секторов – *эллиптическим*.

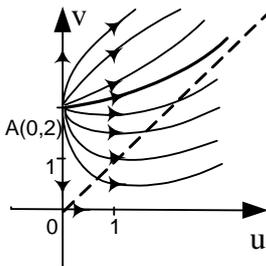


Рис.2.1

Связь между фазовыми портретами исходной системы и системы (2.2) общеизвестна. Полученный результат легко подтвердить непосредственными вычислениями при помощи указанного выше общего интеграла.

Пример 2.2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2) \equiv \xi^1(x, y), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2) \equiv \xi^2(x, y), \end{cases}$$

имеющую единственное состояние равновесия в начале координат  $O(0,0)$ . Для этой системы

$$\operatorname{div} \bar{\xi} = -4(x^2 + y^2),$$

– отрицательно определенная на всей плоскости  $Oxy$  функция.

Система уравнений (2.1), имеющая для данной системы вид

$$\frac{dx}{-y - x(x^2 + y^2)} = \frac{dy}{x - y(x^2 + y^2)} = \frac{dM}{-4(x^2 + y^2)M}.$$

допускает интегрируемую комбинацию

$$\frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{dM}{4(x^2 + y^2)M},$$

откуда при  $x^2 + y^2 \neq 0$  получаем равенство

$$\frac{dM}{M} = \frac{2d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2},$$

интегрирование которого с точностью до произвольного постоянного множителя дает

$$M(x, y) = (x^2 + y^2)^2.$$

Интегрируя уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{x-y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} dx - \frac{-y-x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} dy = 0,$$

находим общий интеграл системы в виде

$$F(x, y) \equiv -\frac{1}{2(x^2+y^2)} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C, \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

Вводя полярную систему координат  $(\varphi, \rho)$  с полюсом в точке  $O(0,0)$  и полярной осью, совпадающей с положительным направлением оси  $Ox$ , имеем

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Найденный общий интеграл в координатах  $(\varphi, \rho)$  принимает вид

$$\frac{1}{\rho^2} - 2\varphi = C,$$

откуда получаем равенство

$$\rho = \frac{1}{(C+2\varphi)^{1/2}},$$

определяющее семейство спиралей, изображенное на рис. 2.2 (каждому лучу, исходящему из начала координат, соответствует своя спираль).

Для нахождения указанного на рис. 2.2 направления движения изображающей точки по спиральям достаточно вычислить вектор поля  $\bar{\xi}$  в любой отличной от начала координат точке плоскости, например, в точке  $(1,0)$ . Можно также воспользоваться равенством (1.7), переписав его в виде

$$\bar{\xi} \cdot \operatorname{grad} M = M \operatorname{div} \bar{\xi}.$$

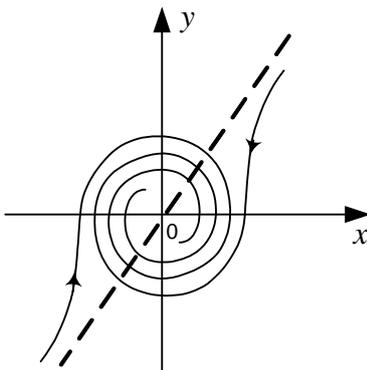


Рис.2.2

Применительно к нашему случаю имеем

$$\bar{\xi} \cdot \operatorname{grad} M = (x^2 + y^2)^2 \cdot [-4(x^2 + y^2)].$$

Положив в этом равенстве  $x^2 + y^2 = r^2$ , получаем равенство

$$\bar{\xi} \cdot \operatorname{grad} M = -4r^6,$$

согласно которому в каждой точке любой из окружностей  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $0 < r < +\infty$ ) векторы  $\bar{\xi}$  и  $\operatorname{grad} M$  образуют тупой угол. Так как в каждой точке любой из указанных окружностей вектор  $\operatorname{grad} M$  направлен в сторону ее внешней нормали, то траектории системы пересекают все указанные окружности снаружи внутрь, неограниченно

приближаясь к началу координат. Это означает, что состояние равновесия заданной системы является *устойчивым фокусом*.

Пример 2.3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

Ее состояния равновесия находятся в точках  $O(0,0)$ ,  $A(-1, -1)$  и  $B(1,1)$ ,  $\operatorname{div} \bar{\xi} = 3(x^2 - y^2)$ .

Система уравнений (2.1) в данном случае имеет вид

$$\frac{dx}{-y+x^3} = \frac{dy}{x-y^3} = \frac{dM}{3(x^2-y^2)M}.$$

Пользуясь свойством равных отношений получаем равенства

$$\frac{xdx+udy}{x^4-y^4} = \frac{ydx+xdy}{(x^2-y^2)(1+xy)} = \frac{dM}{3(x^2-y^2)M},$$

откуда при  $x^2 - y^2 \neq 0$  приходим к равенствам

$$\frac{3}{2} \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{d(1+xy)}{1+xy} = \frac{dM}{M},$$

которые дают две интегрирующие функции (с точностью до произвольных постоянных множителей)

$$M_1(x, y) = (1 + xy)^3, \quad M_2(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$$

и общий интеграл заданной системы уравнений в виде

$$F(x, y) \equiv \frac{x^2 + y^2}{(1 + xy)^2} = C,$$

определенный всюду на плоскости  $Oxy$ , кроме точек, принадлежащих ветвям гиперболы  $1 + xy = 0$ , на которых функция  $M_1(x, y)$  обращается в нуль и которые, следовательно, являются интегральными кривыми заданной системы. Так как этот интеграл является голоморфным и знакоопределенным в некоторой окрестности точки  $O(0,0)$ , то, согласно известной теореме А.М.Ляпунова [5], состояние равновесия  $O(0,0)$  системы является центром.

Для построения фазового портрета системы перейдем к переменным  $u$  и  $v$ , определенным равенствами, приведенными в примере 1. В новых переменных имеем систему

$$\begin{cases} \dot{u} = v + \frac{v}{4}(3u^2 + v^2) \equiv \xi^1(u, v), \\ \dot{v} = -u + \frac{u}{4}(u^2 + 3v^2) \equiv \xi^2(u, v), \end{cases}$$

состояния равновесия которой находятся в точках  $O(0,0)$ ,  $A(-2,0)$  и  $B(2,0)$ ,  $\text{div} \bar{\xi} = 3uv$ . Поле направлений системы симметрично относительно осей  $Ou$  и  $Ov$ , что следует из равенств соответственно  $\xi^1(u, -v) = -\xi^1(u, v)$ ,  $\xi^2(u, -v) = \xi^2(u, v)$  и  $\xi^1(-u, v) = \xi^1(u, v)$ ,  $\xi^2(-u, v) = -\xi^2(u, v)$ .

С точностью до произвольных постоянных множителей в новых переменных получаем

$$\tilde{M}_1(u, v) = (4 + u^2 - v^2)^3, \quad \tilde{M}_2(u, v) = (u^2 + v^2)^{3/2},$$

общий интеграл полученной системы имеет вид

$$\tilde{F}(u, v) \equiv \frac{u^2+v^2}{4+u^2-v^2} = C, \quad 4 + u^2 - v^2 \neq 0.$$

Интегрирующая функция  $\tilde{M}_2(u, v)$  обращается в нуль на интегральной кривой системы, определяемой равенством  $u^2 + v^2 = 0$ , т.е. в точке  $O(0,0)$ , интегрирующая функция  $\tilde{M}_1(u, v)$  – на интегральной кривой, определяемой равенством  $4 + u^2 - v^2 = 0$ , т.е. на ветвях равнобочной гиперболы

$$\frac{v^2}{2^2} - \frac{u^2}{2^2} = 1.$$

Эти траектории можно получить из указанного выражения для общего интеграла системы соответственно при  $C = \infty$  и  $C = 0$ .

Найдем интегральные кривые системы, проходящие через состояния равновесия  $A$  и  $B$ . Положив в выражении для общего интеграла  $u = \pm 2$ ,  $v = 0$ , находим  $C = \frac{1}{16}$ , так что указанные интегральные кривые определяются равенством

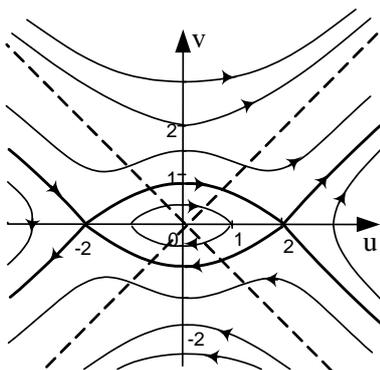


Рис.2.3

$$16(u^2 + v^2) = (4 + u^2 - v^2)^2,$$

легко разрешаемым относительно любой из переменных, что позволяет построить эти кривые с любой степенью точности.

Все указанные интегральные кривые изображены на рис. 2.3 утолщенными линиями. Указанные на рисунке направления движения изображающей точки по составляющим эти кривые траекториям системы найдены обычным способом при помощи дифференциальных уравнений системы.

Из вида общего интеграла следует, что любая кривая определяемого им семейства кривых легко просчитывается. Достаточно точное представление об этом семействе дает рис. 2.3.

### **§ 3. Связь интегрирующей функции с допускаемыми системой бесконечно малыми преобразованиями.**

Пусть уравнения

$$x' = x'(x, y, \tau), \quad y' = y'(x, y, \tau)$$

определяют в плоскости  $Oxy$  однопараметрическую непрерывную группу  $G_1$  преобразований с параметром  $\tau$  и пусть

$$Af = \eta^1(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta^2(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \quad (3.1)$$

– символ бесконечно малого преобразования этой группы

$$\delta x = \eta^1(x, y) \delta \tau, \quad \delta y = \eta^2(x, y) \delta \tau. \quad (3.2)$$

Говорят [13], что система (1.1) допускает группу преобразований  $G_1$ , если преобразования этой группы переводят все точки любой интегральной кривой  $\gamma$  системы (1.1) в точки, расположенные снова на некоторой интегральной кривой  $\gamma'$  этой системы. В этом случае  $Af(x, y)$  является интегралом системы (1.1), если  $f(x, y)$  – интеграл этой системы [11].

Аналогично говорят [13], что система (1.1) допускает бесконечно малое преобразование (3.2), если это преобразование переводит все точки любой интегральной кривой  $\gamma$  системы (1.1) в точки, расположенные с точностью до бесконечно малых второго порядка снова на некоторой интегральной кривой  $\gamma'$  этой системы.

Система (1.1) допускает группу  $G_1$  с оператором  $Af$  тогда и только тогда, когда

$$(A, X) \equiv AXf - XAf = \rho Xf, \quad (3.3)$$

где  $\rho$  – некоторая функция переменных  $x$  и  $y$  [14]. Это уравнение эквивалентно двум уравнениям

$$\eta^1 \frac{\partial \xi^i}{\partial x} + \eta^2 \frac{\partial \xi^i}{\partial y} - \xi^1 \frac{\partial \eta^i}{\partial x} - \xi^2 \frac{\partial \eta^i}{\partial y} = \rho \xi^i, \quad i = 1, 2,$$

используя которые можно показать [14], что функция

$$M(x, y) = \xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1 \quad (3.4)$$

является решением уравнения (1.7), т.е. является интегрирующей функцией для уравнения (1.4). Согласно свойству 6, кривые, на которых эта функция обращается в нуль (если они существуют) являются интегральными кривыми системы (1.1).

Кроме того, используя указанные выше уравнения, вытекающие из равенства (3.3) можно показать, что функция (3.4) является решением уравнения

$$AM = M(\operatorname{div} \bar{\xi} + \rho).$$

При помощи этого уравнения, аналогично тому, как это было сделано при доказательстве свойства 6, можно доказать, что кривые, на которых функция (3.4) обращается в нуль (если они существуют), являются (относительными) инвариантами допускаемой группы. Отсюда и из сказанного выше вытекает следующая теорема.

**Теорема 3.1** *Если система (1.1) допускает группу  $G_1$  с оператором (3.1), то функция (3.4) является интегрирующей для уравнения (1.4) и кривые, на которых эта функция обращается в нуль (если они существуют), являются интегральными кривыми системы (1.1), инвариантными относительно преобразований допускаемой группы.*

Формула (3.4) показывает, что если интегрирующая функция  $M(x, y)$  известна, то можно непосредственно найти бесконечное число допускаемых системой (1.1) бесконечно малых преобразований, инвариантами которых являются интегральные кривые системы (1.1),

обращающие в нуль эту функцию. На этом основании интегральные кривые системы (1.1), на которых обращается в нуль интегрирующая функция, мы будем в дальнейшем называть *инвариантными кривыми*, а траектории, из которых они составлены – *инвариантными траекториями*.

В связи с изложенным актуальной становится задача нахождения допускаемых заданной динамической системой бесконечно малых преобразований. Эта задача, состоящая в нахождении операторов (3.2), удовлетворяющих условию (3.3), является чрезвычайно трудной, однако, иногда она решается очень легко.

Например, если правые части уравнений системы не содержат какой-либо координаты, то такая система допускает группу преобразований с оператором, представляющим собой частную производную по этой координате (группа параллельных переносов вдоль соответствующей координатой оси); если правые части уравнений системы представляют собой однородные функции относительно  $x$  и  $y$  одной и той же степени, то такая система допускает группу преобразований подобия с оператором

$$Af = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y};$$

если правые части  $\xi^1(x, y)$  и  $\xi^2(x, y)$  уравнений системы являются квазиоднородными функциями степеней  $m = \alpha + d$  и  $n = \beta + d$  с весами  $\alpha$  и  $\beta$  переменных  $x$  и  $y$  соответственно ( $\alpha, \beta, d$  – действительные числа), то такая система допускает группу квазиоднородных растяжений с оператором

$$Af = \alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + \beta y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Все эти утверждения легко проверяются при помощи равенства (3.3).

Фазовые портреты линейных однородных, однородных и квазиоднородных динамических систем подробно изучаются ниже.

Если оператор  $Xf$  можно представить в виде

$$Xf = X_1f + \varphi(x, y)X_2f,$$

где  $X_1f$  и  $X_2f$  – перестановочные операторы и  $\varphi(x, y)$  – любое решение уравнения  $X_1f = 0$  (в частности, постоянная), то он перестановочен с оператором  $X_1f$ , т.е. система (1.1) (уравнение  $Xf = 0$ ) допускает группу преобразований порождаемую этим оператором. Например, линейный дифференциальный оператор, соответствующий системе

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x\varphi(x^2 + y^2) \equiv \xi^1(x, y), \\ \dot{y} = x + y\varphi(x^2 + y^2) \equiv \xi^2(x, y), \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $\varphi(x^2 + y^2)$  – непрерывно дифференцируемая функция, можно представить в виде

$$Xf = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi(x^2 + y^2) \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Операторы

$$X_1f = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

перестановочны и  $X_1\varphi(x^2 + y^2) \equiv 0$ , поэтому указанная система допускает оператор  $X_1f$ , так что интегрирующая функция для системы (3.5) имеет вид

$$M(x, y) = \xi^1(x, y)x - \xi^2(x, y)y = (x^2 + y^2)\varphi(x^2 + y^2).$$

Качественное исследование системы (3.5) для случая, когда  $\varphi(x^2 + y^2)$  – действительный многочлен от  $x^2 + y^2$ , приведено в [15]. При  $\varphi(x^2 + y^2) = x^2 + y^2$  получаем систему, рассмотренную в примере 2.2. Найденная там функция  $M(x, y)$  немедленно находится по последней формуле.

Следующие формулировки заимствованы нами из [4].

[Изолированная замкнутая траектория, т.е. такая замкнутая траектория, в некоторой окрестности которой кроме нее самой нет больше других замкнутых траекторий, называется *предельным циклом*.

Имеет место следующая теорема, описывающая поведение траекторий в окрестности предельного цикла  $L_0$ .

**Теорема.** Все траектории, проходящие через достаточно близкие к предельному циклу  $L_0$  точки, лежащие вне ( $L_0$  внутри  $L_0$ ), стремятся к  $L_0$  либо при  $t \rightarrow +\infty$  (и тогда они при убывании  $t$  выходят из окрестности  $L_0$ ), либо при  $t \rightarrow -\infty$  (и тогда они при возрастании  $t$  выходят из окрестности  $L_0$ ).

Если все траектории, проходящие через точки некоторой окрестности предельного цикла  $L_0$  вне и внутри  $L_0$  и отличные от  $L_0$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ), стремятся к предельному циклу, то  $L_0$  называется *устойчивым* (соответственно *неустойчивым*) *предельным циклом*.

Если все траектории, проходящие через достаточно близкие к предельному циклу  $L_0$  точки, лежащие вне (внутри)  $L_0$ , стремятся к  $L_0$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ), а все траектории, проходящие через достаточно близкие к предельному циклу  $L_0$  точки, лежащие внутри (вне)  $L_0$ , стремятся к  $L_0$  при  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ), то  $L_0$  называется *полуустойчивым предельным циклом*.]

**Пример 3.1.** При  $\varphi(x^2 + y^2) = 1 - x^2 - y^2$  система (3.5) имеет вид [4]

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2), \end{cases}$$

для которой точка  $O(0,0)$  – единственное состояние равновесия,

$$\operatorname{div} \bar{\xi} = 2[1 - 2(x^2 + y^2)], \quad M(x, y) = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)$$

Пользуясь, как и в примере 2.2 равенством (1.7) приходим к равенству

$$\bar{\xi} \cdot \operatorname{grad} M = 2\rho^2(1 - \rho^2)(1 - 2\rho^2), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

из которого следует, что

$$\bar{\xi} \cdot \operatorname{grad} M > 0 \text{ при } 0 < \rho < \sqrt{2}/2 \text{ и } 1 < \rho < +\infty,$$

$$\bar{\xi} \cdot \operatorname{grad} M < 0 \text{ при } \sqrt{2}/2 < \rho < 1.$$

Вычислив

$$\operatorname{grad} M = 2(1 - 2\rho^2)\bar{r}, \quad \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}, \quad |\bar{r}| = \rho,$$

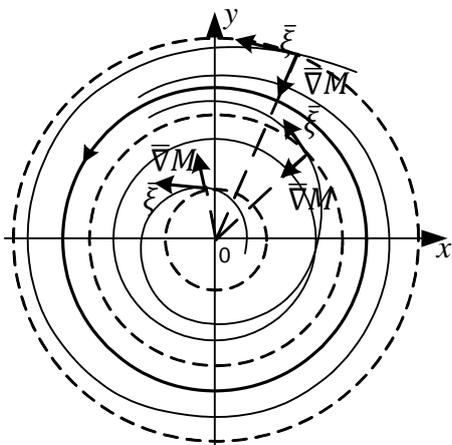


Рис.3.1

мы видим, что  $\operatorname{grad} M \uparrow \bar{r}$  при  $\rho < \sqrt{2}/2$  и  $\operatorname{grad} M \downarrow \bar{r}$  при  $\sqrt{2}/2 < \rho < +\infty$ . Отсюда и из предыдущих неравенств следует указанное на рис. 3.4 взаимное расположение векторов  $\bar{\xi}$  и  $\operatorname{grad} M$  вдоль окружностей с центром в начале координат (линий уровня функции  $M(x, y)$ ) в каждой из трех указанных выше областей.

Интегрируя соответствующее рассматриваемой системе уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{x + y(1 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)} dx = \frac{-y + x(1 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)} dy = 0,$$

находим ее общий интеграл в виде

$$\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2} e^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = C, \quad x^2 + y^2 \neq 0,$$

откуда, переходя, как и в примере 2.2, к полярным координатам, получаем полярное уравнение траекторий системы в виде

$$\rho = \frac{1}{(1+Ce^{-2\varphi})^{1/2}}.$$

Это уравнение и приведенные выше рассуждения показывают, что и в области  $0 < \rho < 1$ , и в области  $1 < \rho < +\infty$  траектории системы являются спиралями, сматывающимися с центра  $O(0,0)$  и наматывающимися изнутри на окружность  $\rho = 1$  в первой области и приходящими из бесконечности и наматывающимися на окружность  $\rho = 1$  снаружи во второй области. Окружность  $\rho = 1$ , согласно приведенным выше формулировкам, является *устойчивым предельным циклом*, а центр  $O(0,0)$  – *неустойчивым фокусом* [4].

**Пример 3.2.** При  $\varphi(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  система (3.5) имеет вид [4]

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \equiv \xi^1(x, y), \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \equiv \xi^2(x, y), \end{cases}$$

В предположении, что  $\varphi(0,0) = 0$ , данная система является системой класса  $C_1$  и имеет единственное состояние равновесия  $O(0,0)$ .

Функция (3.4) для этой системы имеет вид

$$M(x, y) = (x^2 + y^2)^2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

и обращается в нуль на траекториях системы

$$x^2 + y^2 = 0 \text{ и } x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

представляющих собой соответственно ее состояние равновесия  $O(0,0)$  и концентрические окружности радиусов  $\rho = \frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) с центром в точке  $O(0,0)$ . Последние разбивают фазовую плоскость системы на счетное число кольцевых областей (которым мы присвоим номера  $0, 1, 2, 3, \dots$ ), определяемых неравенствами

$$x^2 + y^2 > 1, \quad \frac{1}{(n+1)^2} < x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Каждая из этих областей сплошь заполнена окружностями

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\alpha^2}, \quad n < \alpha < n + 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- траекториями векторного поля  $\bar{\eta} = (-y, x, 0)$ , определяемого допускаемым рассматриваемой системой бесконечно малым преобразованием. Вдоль каждой из этих окружностей имеем

$$M(x, y)|_{x^2+y^2=\frac{1}{\alpha^2}} = (\xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1) \bar{k} \cdot \bar{k}|_{x^2+y^2=\frac{1}{\alpha^2}} = (\bar{\xi} \times \bar{\eta}) \cdot \bar{k}|_{x^2+y^2=\frac{1}{\alpha^2}} = \tilde{M}(\alpha) = \frac{1}{\alpha^4} \sin \alpha \pi.$$

Последнее равенство показывает, что вдоль окружностей, принадлежащих кольцевым областям с четными номерами, смешанное произведение векторов  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{k}$  положительно, а вдоль окружностей, принадлежащих кольцевым областям с нечетными номерами, смешанное произведение векторов  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{k}$  отрицательно. Следовательно, в первом случае траектории системы пересекают все указанные окружности изнутри наружу, а во втором – снаружи внутрь.

Заметим теперь, что в произвольной точке фазовой плоскости рассматриваемой системы

$$\cos(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2 \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}}},$$

причем внутри каждой из указанных выше кольцевых областей

$$\cos(\bar{\xi}, \bar{\eta})|_{x^2+y^2=\frac{1}{\alpha^2}} = \cos\theta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^4+\sin^2\alpha\pi}} > 0, \quad n < \alpha < n+1, \quad n = 0,1,2,3, \dots$$

и

$$\lim_{\alpha \rightarrow n \pm 0} \cos\theta(\alpha) = 1.$$

Отсюда следует, что внутри каждой кольцевой области все траектории системы пересекают любую принадлежащую рассматриваемой кольцевой области окружность  $x^2 + y^2 = \frac{1}{\alpha^2}$  под одним и тем же острым углом  $\theta(\alpha)$ , сколь угодно близким к нулю вдоль окружностей, сколь угодно близких к окружностям, ограничивающим рассматриваемую кольцевую область.

Из всего сказанного выше следует, что окружности  $\rho = \frac{1}{n}$  ( $n = 1,2,3, \dots$ ) и только они являются изолированными замкнутыми траекториями рассматриваемой системы, т.е. являются ее предельными циклами. Траектории системы, расположенные в ограниченных этими окружностями областях (а также и в области  $\rho > 1$ ), асимптотически приближаются при  $t \rightarrow -\infty$  к одной из них, а при  $t \rightarrow +\infty$  – к другой (уходят в бесконечность при  $t \rightarrow +\infty$  в случае области  $\rho > 1$ ). При этом окружности, при переходе через которые функция  $M(x, y)$  меняет знак с «плюса» на «минус» (т.е. окружности радиусов  $\rho = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ ), являются неустойчивыми предельными циклами, а окружности, при переходе через которые функция  $M(x, y)$  меняет знак с «минуса» на «плюс» (т.е. окружности радиусов  $\rho = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$ ) – устойчивыми предельными циклами.

Интегрирующая функция

$$M(x, y) = (x^2 + y^2)^2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

при выполнении условия  $M(0,0) = 0$  является непрерывно дифференцируемым решением уравнения (1.7) на всей плоскости  $Oxy$ . Следовательно, уравнение

$$\frac{\xi^2 dx - \xi^1 dy}{M(x, y)} \equiv \frac{x + y(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{(x^2 + y^2)^2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}} dx - \frac{-y + x(x^2 + y^2) \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{(x^2 + y^2)^2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}} dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах. После перехода к полярным координатам  $\rho, \varphi$  получаем полярное уравнение траекторий системы в виде

$$\int \frac{d\rho}{\rho^3 \sin \frac{\pi}{\rho}} = \varphi + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Интеграл в левой части написанного равенства через элементарные функции не выражается. К написанному равенству следует присоединить равенства

$$\rho = 0, \quad \rho = \frac{1}{n}, \quad n = 1,2,3, \dots$$

Особенность состояния равновесия  $O(0,0)$  рассматриваемой системы состоит в неопределенности его характера: в любой сколь угодно малой окрестности точки  $O(0,0)$  содержатся как замкнутые, так и целые незамкнутые траектории системы (спирали), внутри которых это состояние равновесия находится. Такое состояние равновесия в [16] названо *центро-фокусом*. Центро-фокус устойчив (не асимптотически) по Ляпунову (в силу самого определения устойчивости по Ляпунову [5]).

**§4. Локальное представление интегрирующей функции в окрестности состояния равновесия.**

Известно [11,12], что задача нахождения решений уравнения (1.7) ничуть не проще задачи интегрирования системы (1.1). Если, однако, не ставить перед собой задачу нахождения функции  $M(x, y)$  в конечном виде, то можно попытаться найти ее представление в виде ряда, сходящегося к ней в некоторой окрестности произвольно выбранной точки  $P(x_0, y_0)$  плоскости  $Oxy$ . Такое представление функции  $M(x, y)$ , если оно существует, можно с успехом использовать, например, для исследования поведения траекторий системы (1.1) в окрестностях ее состояний равновесия [2]. Кроме того, оказывается, что иногда при таком подходе к решению задачи нахождения функции  $M(x, y)$  удается найти ее в конечном виде.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что точка  $O(0,0)$  является состоянием равновесия системы (1.1) и все необходимые разложения в ряды выполнять в некоторой (возможно сколь угодно малой) окрестности  $D_0$  этой точки. Предположим, что в  $D_0$  система (1.1) может быть представлена в виде

$$\dot{x} = \sum_{k=m}^{\infty} \xi_k^1(x, y) \equiv \xi^1(x, y), \quad \dot{y} = \sum_{k=m}^{\infty} \xi_k^2(x, y) \equiv \xi^2(x, y), \tag{4.1}$$

где  $\xi_k^1(x, y)$  и  $\xi_k^2(x, y)$  – однородные многочлены степени  $k$  относительно  $x$  и  $y$  и  $m \geq 1$  ( $m$  не может быть равным нулю в силу условия  $\xi^1(0, 0) = \xi^2(0, 0) = 0$ ). Линейный дифференциальный оператор, соответствующий системе (4.1), записывается в виде

$$Xf = \sum_{k=m}^{\infty} \left[ \xi_k^1(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_k^2(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \right] \equiv \sum_{k=m}^{\infty} X_k f. \tag{4.2}$$

Предположим также, что функция  $M(x, y)$  в  $D_0$  может быть представлена в виде

$$M(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(x, y), \tag{4.3}$$

где  $M_k(x, y)$  – однородные многочлены степени  $k$  относительно  $x$  и  $y$ . Следует иметь в виду, что наше предположение ничем не оправдано, и может случиться, как мы увидим ниже, что представить функцию  $M(x, y)$  в  $D_0$  в виде (4.3) невозможно.

Для нахождения представления (4.3), если оно существует, воспользуемся уравнением (1.7)

$$XM = M \operatorname{div} \bar{\xi},$$

которое показывает, что представление (4.3) можно разыскивать при помощи метода неопределенных коэффициентов.

Именно, с использованием (4.2) и (4.3), а также разложения

$$\operatorname{div} \bar{\xi} = \sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{div} \bar{\xi}_k,$$

уравнение (1.7) записывается в виде

$$\begin{aligned} & X_m M_1 + (X_m M_2 + X_{m+1} M_1) + (X_m M_3 + X_{m+1} M_2 + X_{m+2} M_1) + \dots + \\ & + (X_m M_s + X_{m+1} M_{s-1} + \dots + X_{m+s-1} M_1) + \dots = M_1 \operatorname{div} \bar{\xi}_m + (M_1 \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+1} + M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_m) + \\ & + (M_1 \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+2} + M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+1} + M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_m) + \dots + \\ & + (M_s \operatorname{div} \bar{\xi}_m + M_{s-1} \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+1} + \dots + M_1 \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+s-1} + \dots \end{aligned}$$

из которого следует, что функции  $M_1(x, y)$ ,  $M_2(x, y)$ , ... можно находить последовательно из равенств

$$\begin{aligned}
 X_m M_1 &= M_1 \operatorname{div} \bar{\xi}_m, \\
 X_m M_2 + X_{m+1} M_1 &= M_1 \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+1} + M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_m, \\
 X_m M_3 + X_{m+1} M_2 + X_{m+2} M_1 &= M_1 \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+2} + M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+1} + M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_m, \\
 &\dots\dots\dots \\
 X_m M_s + X_{m+1} M_{s-1} + \dots + X_{m+s-1} M_1 &= M_1 \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+s-1} + M_{s-1} \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+1} + \dots + M_s \operatorname{div} \bar{\xi}_m, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

в левой и правой частях каждого из которых находятся однородные многочлены одной и той же степени относительно  $x$  и  $y$ , что и позволяет использовать метод неопределенных коэффициентов.

Обратим внимание на одну особенность указанного вычислительного процесса. Первое из равенств (4.4) можно удовлетворить функцией  $M_1(x, y) \equiv 0$ . Если принять, что это тождество имеет место, то для нахождения функций  $M_2(x, y), M_3(x, y), \dots$  мы получим совокупность равенств, которая с точностью до начала нумерации будет совпадать с системой (4.4). Если мы опять примем  $M_2(x, y) \equiv 0$ , то для нахождения функций  $M_3(x, y), M_4(x, y), \dots$  мы снова получим совокупность равенств, полностью аналогичную системе равенств (4.4) и т.д. Следовательно, мы всегда можем считать, что разложение функции  $M(x, y)$  в ряд по однородным полиномам начинается с полинома любой наперед заданной степени  $m \geq 1$ .

В §3 мы отмечали, что всякая однородная система допускает группу подобия с оператором

$$Af = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Следовательно, если мы рассмотрим соответствующую системе (4.1) укороченную систему

$$\dot{x} = \xi_m^1(x, y), \quad \dot{y} = \xi_m^2(x, y), \tag{4.1*}$$

то интегрирующей функцией такой системы будет функция

$$M_{m+1}(x, y) = \alpha(\xi_m^1 \cdot y - \xi_m^2 \cdot x) \tag{4.5}$$

( $\alpha$  – произвольная действительная постоянная), удовлетворяющая уравнению

$$X_m M_{m+1} = M_{m+1} \operatorname{div} \bar{\xi}_m.$$

Согласно отмеченной только что особенности системы (4.4), мы можем положить  $M_1(x, y) = \dots = M_m(x, y) \equiv 0$ . Тогда вместо системы (4.4) получим систему

$$\begin{aligned}
 X_m M_{m+1} &= M_{m+1} \operatorname{div} \bar{\xi}_m, \\
 X_m M_{m+2} + X_{m+1} M_{m+1} &= M_{m+1} \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+1} + M_{m+2} \operatorname{div} \bar{\xi}_m, \\
 X_m M_{m+3} + X_{m+1} M_{m+2} + X_{m+2} M_{m+1} &= M_{m+1} \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+2} + M_{m+2} \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+1} + M_{m+3} \operatorname{div} \bar{\xi}_m, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Искомое представление функции  $M(x, y)$  при этом запишется в виде

$$M(x, y) = \sum_{k=m}^{\infty} M_{k+1}(x, y), \tag{4.7}$$

причем первый член этого разложения, являющийся решением первого уравнения (4.6), заранее известен и определяется равенством (4.5). Ясно, что вычислительный процесс, определяемый равенствами (4.6), позволяет найти представление (4.7) функции  $M(x, y)$  только тогда, когда бесконечная система уравнений (4.6) непротиворечива, т.е. когда все системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов искомых функций  $M_{m+1}(x, y), M_{m+2}(x, y), \dots$ , полученные из уравнений (4.6) при помощи метода неопределенных коэффициентов, совместны.

Проиллюстрируем сказанное на примере системы

$$\dot{x} = ax + by + \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k^1(x, y), \quad \dot{y} = cx + dy + \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k^2(x, y), \quad (4.8)$$

где хотя бы одно из чисел  $a, b, c, d$  отлично от нуля. В этом случае  $m=1$ , и систему (4.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} X_1 M_2 &= M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_1, \\ X_1 M_3 - M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_1 &= M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_2, \\ X_1 M_4 - M_4 \operatorname{div} \bar{\xi}_1 &= M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_2 + M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_3, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$X_1 f = (ax + by) \frac{\partial f}{\partial x} + (cx + dy) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \operatorname{div} \bar{\xi}_1 = a + d = \sigma.$$

Обозначим также  $\Delta = ad - bc$ .

Функция  $M_2(x, y)$ , определяемая равенством (4.5), в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} M_2(x, y) &= h[(ax + by)y - (cx + dy)x] = h[-cx^2 + (a - d)xy + by^2] = \\ &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \end{aligned}$$

так что  $a_{20} = -hc$ ,  $a_{11} = h(a - d)$ ,  $a_{02} = hb$ .

Положив

$$M_3(x, y) = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \quad (4.10)$$

и, вычисляя разности в левой и в правой частях второго из равенств (4.9), получаем равенство

$$\begin{aligned} [(2a - d)a_{30} + ca_{21}]x^3 + (3ba_{30} + aa_{21} + 2ca_{12})x^2y + (2ba_{21} + da_{12} - 3ca_{03})xy^3 + \\ + [ba_{12} + (-a + 2d)a_{03}]y^3 = d_{30}x^3 + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + d_{03}y^3 \quad (\equiv M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_2), \end{aligned}$$

которое выполняется тождественно относительно  $x$  и  $y$  тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\begin{cases} (2a - d)a_{30} + ca_{21} & = d_{30}, \\ 3ba_{30} + aa_{21} + 2ca_{12} & = d_{21}, \\ 2ba_{21} + da_{12} + 3ca_{03} & = d_{12}, \\ ba_{12} + (-a + 2d)a_{03} & = d_{03}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Используя векторно-матричную символику, эту систему равенств можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 2a - d & c & 0 & 0 \\ 3b & a + 0 \cdot d & 2c & 0 \\ 0 & 2b & 0 \cdot a + d & 3c \\ 0 & 0 & b & -a + 2d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{30} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{30} \\ d_{21} \\ d_{12} \\ d_{03} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Не приводя вычислений, которые довольно громоздки, укажем, что определитель матрицы, на которую умножается вектор-столбец коэффициентов функции, равен  $\Delta_3 = \Delta(9\Delta - 2\sigma^2)$ . Как видим, совместность системы (4.11) определяется значениями  $\Delta$  и  $\sigma$ .

Произведя аналогичные вычисления, легко увидеть, что векторно-матричное уравнение, при помощи которого находятся коэффициенты функции  $M_m(x, y)$ , имеет вид

$$A_m \bar{a}^m \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} (m-1)a-d & c & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ mb & (m-2)a+0 \cdot d & 2c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m-1)b & (m-3)a+d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+(m-3)d & (m-1)c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2b & 0 \cdot a+(m-3)d & mc \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & -a+(m-1)d \end{pmatrix} \bullet$$

$$\bullet \begin{pmatrix} a_{m,0} \\ a_{m-1,1} \\ a_{m-2,2} \\ \dots \\ a_{2,m-2} \\ a_{1,m-1} \\ a_{0,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{m,0} \\ d_{m-1,1} \\ d_{m-2,2} \\ \dots \\ d_{2,m-2} \\ d_{1,m-1} \\ d_{0,m} \end{pmatrix} \equiv \bar{d}^m, \quad (4.13)$$

и можно утверждать, что в рассматриваемом случае системы (4.8) представление (4.7) функции  $M(x, y)$  может быть найдено только тогда, когда все системы вида (4.13) совместны.

Можно указать все случаи, когда для системы (4.8) указанная ситуация имеет место. Для этого достаточно вспомнить, что имеет место следующая теорема [4].

**Теорема 4.1.** Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – характеристические корни состояния равновесия  $O(0,0)$ . Тогда: 1) если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительны и различны, то существует неособое действительное линейное преобразование, приводящее систему (4.8) к виду

$$\dot{\tilde{x}} = \lambda_1 \tilde{x} + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\xi}_k^1(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \dot{\tilde{y}} = \lambda_2 \tilde{y} + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\xi}_k^2(\tilde{x}, \tilde{y});$$

2) если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то существует неособое действительное линейное преобразование, приводящее систему (4.8) к виду

$$\dot{\tilde{x}} = \lambda \tilde{x} + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\xi}_k^1(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \dot{\tilde{y}} = \mu \tilde{x} + \lambda \tilde{y} + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\xi}_k^2(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

где в зависимости от равенства или не равенства нулю коэффициентов  $b$  и  $c$  число  $\mu$  или равно нулю, или не равно нулю (и в последнем случае может быть задано произвольно);

3) если  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \beta \neq 0$ , а  $\alpha$  может быть как равным, так и не равным нулю, то существует неособое действительное линейное преобразование, приводящее систему (4.8) к виду

$$\dot{\tilde{x}} = \alpha \tilde{x} - \beta \tilde{y} + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\xi}_k^1(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad \dot{\tilde{y}} = \beta \tilde{x} + \alpha \tilde{y} + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{\xi}_k^2(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

В случае 1) имеем  $a = \lambda_1, b = c = 0, d = \lambda_2$  и матрица

$$A_m = \begin{pmatrix} (m-1)\lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (m-2)\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & (m-3)\lambda_1 + \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 + (m-1)\lambda_2 \end{pmatrix}$$

при любом целом значении  $m \geq 3$  невырожденная, так что в этом случае все системы вида (4.13) совместны.

В случае 2) имеем  $a = d = \lambda, b = 0, c = \mu$  и матрица

$$A_m = \begin{pmatrix} (m-2)\lambda & \mu & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (m-2)\lambda & 2\mu & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (m-2)\lambda & m\mu \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (m-2)\lambda \end{pmatrix}$$

невырожденная при любых  $\lambda \neq 0, \mu$  и целых значениях  $m \geq 3$ . В этом случае все системы вида (4.13) также совместны.

В случае 3) следует различать два подслучая:  $\alpha \neq 0$  и  $\alpha = 0$ .

Если  $\alpha \neq 0$ , то  $a = d = \alpha, b = -c = -\beta$ , так что

$$A_m = \begin{pmatrix} (m-2)\alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -m\beta & (m-2)\alpha & 2\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2\beta & (m-2)\alpha & m\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta & (m-2)\alpha \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что при любом целом  $m \geq 3$  определитель матрицы  $A_m$  при помощи элементарных преобразований может быть преобразован либо к верхнетреугольному, либо к нижнетреугольному виду, не имеющему на главной диагонали ни одного нулевого элемента. Следовательно, в этом случае при любом целом  $m \geq 3$  матрица  $A_m$  невырожденная, и, как и в предыдущих случаях, все системы вида (4.13) совместны.

Если  $\alpha = 0$ , то  $a = d = 0, b = -c = -\beta$ , так что

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -m\beta & 0 & 2\beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-m+1)\beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2\beta & 0 & m\beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае можно показать (чего мы в целях экономии места делать не будем), что все матрицы с нечетными индексами невырожденные, а все матрицы с четными индексами – вырожденные. Например, матрица

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 \\ -3\beta & 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & -2\beta & 0 & 3\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

как легко убедиться, невырожденная. Напротив, матрица

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ -4\beta & 0 & 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -3\beta & 0 & 3\beta & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta & 0 & 4\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

– вырожденная, так как после прибавления к ее третьей строке утроенных первой и последней строк мы получаем нулевую строку. Расширенная матрица соответствующей линейной системы

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & d_{40} \\ -4\beta & 0 & 2\beta & 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & -3\beta & 0 & 3\beta & 0 & d_{22} \\ 0 & 0 & -2\beta & 0 & 4\beta & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & d_{04} \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & d_{40} \\ -4\beta & 0 & 2\beta & 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{22} + 3(d_{40} + d_{04}) \\ 0 & 0 & -2\beta & 0 & 4\beta & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & d_{04} \end{array} \right),$$

откуда следует, что совместность системы будет иметь место при выполнении условия

$$d_{22} + 3(d_{40} + d_{04}) = 0,$$

которое, как мы увидим ниже, связывает между собой коэффициенты квадратичных и кубических нелинейностей, содержащихся в правых частях дифференциальных уравнений

(4.8). Смысл этого условия (а также всех аналогичных условий, возникающих при рассмотрении систем вида (4.13), соответствующих четным индексам  $m$ ) мы выясним, перейдя в равенствах (4.6) к полярным координатам.

Выразим, прежде всего, через полярные координаты основные выражения и соотношения, которыми мы пользуемся. Пользуясь формулами  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , вместо системы (4.1) получаем систему

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{k=m}^{\infty} \xi_k^{\rho}(\rho, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\rho} \xi_k^{\varphi}(\rho, \varphi),$$

где

$$\xi_k^{\rho}(\rho, \varphi) = \rho^k [\xi_k^1(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi + \xi_k^2(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi] \equiv \rho^k Q_{k+1}(\varphi), \quad (4.14)$$

$$\xi_k^{\varphi}(\rho, \varphi) = \rho^k [\xi_k^2(\cos \varphi, \sin \varphi) \cos \varphi - \xi_k^1(\cos \varphi, \sin \varphi) \sin \varphi] \equiv \rho^k R_{k+1}(\varphi), \quad (4.15)$$

с оператором

$$\tilde{X}f = \sum_{k=m}^{\infty} \left[ \rho^k Q_{k+1}(\varphi) \frac{\partial f}{\partial \rho} + \rho^{k-1} R_{k+1}(\varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right] \equiv \sum_{k=m}^{\infty} \tilde{X}_k f.$$

Вместо функции (4.7) будем разыскивать функцию

$$\tilde{M}(\rho, \varphi) = \sum_{k=m}^{\infty} \tilde{M}_{k+1}(\rho, \varphi) = \sum_{k=m}^{\infty} \rho^{k+1} M_{k+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) \equiv \sum_{k=m}^{\infty} \rho^{k+1} f_{k+1}(\varphi),$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d\tilde{M}(\rho, \varphi)}{dt} = \tilde{X}\tilde{M}(\rho, \varphi) = \tilde{M}(\rho, \varphi) \operatorname{div} \bar{\xi}(\rho, \varphi),$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{\xi}(\rho, \varphi) &= \sum_{k=m}^{\infty} \operatorname{div} \bar{\xi}_k(\rho, \varphi) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \xi_k^{\rho}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \xi_k^{\varphi} \right] \equiv \\ &\equiv \sum_{k=m}^{\infty} \rho^{k-1} [(k+1)Q_{k+1}(\varphi) + R'_{k+1}(\varphi)], \end{aligned}$$

согласно (4.14) и (4.15).

Перепишем теперь систему (4.6) в виде

$$\begin{aligned} X_m M_{m+1} - M_{m+1} \operatorname{div} \bar{\xi}_m &= 0, \\ X_m M_{m+2} - M_{m+2} \operatorname{div} \bar{\xi}_m + X_{m+1} M_{m+1} - M_{m+1} \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+1} &= 0, \\ X_m M_{m+3} - M_{m+3} \operatorname{div} \bar{\xi}_m + X_{m+1} M_{m+2} - M_{m+2} \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+1} + X_{m+2} M_{m+1} - M_{m+1} \operatorname{div} \bar{\xi}_{m+2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

и перейдем к полярным координатам. Тогда вместо системы (4.16) получим бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $f_k(\varphi)$  ( $k = m+1, m+2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} (m+1)Q_{m+1}f_{m+1} + R_{m+1}f'_{m+1} - f_{m+1}[(m+1)Q_{m+1} + R'_{m+1}] &= 0, \\ (m+2)Q_{m+1}f_{m+2} + R_{m+1}f'_{m+2} - f_{m+2}[(m+1)Q_{m+1} + R'_{m+1}] + \\ + \{(m+1)Q_{m+2}f_{m+1} + R_{m+2}f'_{m+1} - f_{m+1}[(m+2)Q_{m+2} + R'_{m+2}]\} &= 0, \\ (m+3)Q_{m+1}f_{m+3} + R_{m+1}f'_{m+3} - f_{m+3}[(m+1)Q_{m+1} + R'_{m+1}] + \\ + \{(m+2)Q_{m+2}f_{m+2} + R_{m+2}f'_{m+2} - f_{m+2}[(m+2)Q_{m+2} + R'_{m+2}]\} + \\ + \{(m+1)Q_{m+3}f_{m+1} + R_{m+3}f'_{m+1} - f_{m+1}[(m+3)Q_{m+3} + R'_{m+3}]\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где мы намеренно не привели подобные члены.

Условие сходимости определяемого системой (4.17) вычислительного процесса выражается в том, что решения всех ее уравнений должны быть  $2\pi$ -периодическими (мы пытаемся

удовлетворить уравнениям (4.17) однородными полиномами по  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ , являющимися, очевидно,  $2\pi$ -периодическими функциями), что будет иметь место тогда и только тогда, когда выражения, заключенные в фигурные скобки в левых частях уравнений системы (4.17) не будут иметь постоянных слагаемых. Коэффициентные критерии, получаемые на каждом этапе вычислений при помощи описанного выше вычислительного процесса в декартовых координатах, как раз и дают условия, при которых постоянные слагаемые в указанных выражениях отсутствуют.

Проиллюстрируем сказанное на примере системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 \equiv \xi_1^1(x, y) + \xi_2^1(x, y), \\ \dot{y} = x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 \equiv \xi_1^2(x, y) + \xi_2^2(x, y), \end{cases}$$

являющейся частным случаем системы (4.8) ( $a = d = \alpha = 0, b = -c = -\beta = -1, \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = \dots \equiv 0$ ), где хотя бы одна из форм  $\xi_1^1(x, y), \xi_2^2(x, y)$  не равна тождественно нулю. В данном случае

$$\operatorname{div} \bar{\xi}_1(x, y) \equiv 0, \quad \operatorname{div} \bar{\xi}_2(x, y) = (2b_{20} + c_{11})x + (b_{11} + 2c_{02})y,$$

$$\operatorname{div} \bar{\xi}_3(x, y) = \operatorname{div} \bar{\xi}_4(x, y) = \dots \equiv 0,$$

$$X_1 f = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_2 f = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) \frac{\partial f}{\partial x} + (c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_3 f = X_4 f = \dots \equiv 0.$$

В декартовых координатах по формуле (4.5) сразу получим

$$M_2 = \alpha(x^2 + y^2)$$

Для нахождения формы  $M_3(x, y)$ , определяемой равенством (4.10) служит равенство

$$X_1 M_4 = M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_2.$$

Вычисляя его правую часть, получаем

$$\begin{aligned} M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_2 &= c_{11}x^3 + (-b_{11} - 2c_{20} + 2c_{02})x^2y + (2b_{20} - 2b_{02} - c_{11})xy^2 + b_{11}y^3 = \\ &= d_{30}x^3 + d_{21}x^2y + d_{12}xy^2 + d_{03}y^3 \end{aligned}$$

Так как в нашем случае  $a = 0, b = -1, c = 1, d = 0$ , система (4.11) дает

$$a_{30} = \frac{1}{3}(-b_{11} - 2c_{20} + 2c_{02}), \quad a_{21} = c_{11}, \quad a_{12} = -b_{11}, \quad a_{03} = \frac{1}{3}(2b_{20} - 2b_{02} - c_{11}).$$

Форма  $M_4(x, y) = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4$  находится при помощи равенства

$$X_1 M_4 = M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_3,$$

приводящего к системе линейных алгебраических уравнений с расширенной матрицей

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & d_{40} \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & d_{22} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & d_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & d_{04} \end{array} \right),$$

в которой столбец свободных членов определяется равенством

$$M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_3 = d_{40}x^4 + d_{31}x^3y + d_{22}x^2y^2 + d_{13}xy^3 + d_{04}y^4.$$

Вычисляя левую часть этого равенства, находим

$$d_{40} = (-b_{20} + c_{11})a_{30} - c_{20}a_{21},$$

$$d_{31} = (-2b_{11} + 2c_{02})a_{30} - 2c_{20}a_{12},$$

$$d_{22} = -3b_{02}a_{30} + (-b_{11} + c_{02})a_{21} + (b_{20} - c_{11})a_{12} - 3c_{20}a_{03},$$

$$\begin{aligned} d_{13} &= -2b_{02}a_{21} + (2b_{20} - 2c_{11})a_{03}, \\ d_{04} &= -2b_{02}a_{12} + (b_{11} - c_{02})a_{03}, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}$  указаны выше.

Из вида записанной матрицы следует, что соответствующая ей линейная система относительно коэффициентов  $a_{40}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{04}$  совместна при выполнении условия

$$d_{22} + 3(d_{40} + d_{04}) = 0.$$

С учетом выражений для  $d_{40}, d_{22}, d_{04}$  и указанных выше выражений для  $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}$ , получаем равенство

$$(b_{20} + b_{02})b_{11} + 2(b_{02}c_{02} - b_{20}c_{20}) - (c_{20} + c_{02})c_{11} = 0,$$

связывающее между собой только коэффициенты квадратичных форм, содержащихся в правых частях дифференциальных уравнений рассматриваемой системы.

Займемся теперь интегрированием системы (4.17). В нашем случае  $m = 1$  уравнения системы записываются в виде

$$\begin{aligned} 2Q_2 f_2 + R_2 f_2' - f_2(2Q_2 + R_2') &= 0, \\ 3Q_2 f_3 + R_2 f_3' - f_3(2Q_2 + R_2') + \{2Q_3 f_2 + R_3 f_2' - f_2(3Q_3 + R_3')\} &= 0, \\ 4Q_2 f_4 + R_2 f_4' - f_4(2Q_2 + R_2') + \{3Q_3 f_3 + R_3 f_3' - f_3(3Q_3 + R_3') + \\ &+ 2Q_4 f_2 + R_4 f_2' - f_2(4Q_4 + R_4')\} = 0, \end{aligned}$$

.....

Вычисляя входящие в эти уравнения величины  $Q_2, R_2, \dots$  по формулам (4.14), (4.15), получаем

$$\begin{aligned} Q_2 &\equiv 0, \quad R_2 = 1, \\ Q_3 &= b_{20} \cos^3 \varphi + (b_{11} + c_{20}) \cos^2 \varphi \sin \varphi + (b_{02} + c_{11}) \cos \varphi \sin^2 \varphi + c_{02} \sin^3 \varphi, \\ R_3 &= c_{20} \cos^3 \varphi + (c_{11} - b_{20}) \cos^2 \varphi \sin \varphi + (c_{02} - b_{11}) \cos \varphi \sin^2 \varphi - b_{02} \sin^3 \varphi, \\ Q_4 &= R_4 \equiv 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем  $f_2 = \text{const} (= 1)$ . Второе, третье, ... уравнения записываются в виде

$$f_3' = Q_3 + R_3', \quad f_4' = f_3 R_3' - R_3 f_3', \dots$$

Находить  $f_3$  нет необходимости, так как третье уравнение можно записать в виде

$$f_4' = (f_3 R_3)' - 2R_3 f_3',$$

откуда получаем

$$f_4 = f_3 R_3 \Big|_0^\varphi - 2 \int_0^\varphi R_3 f_3' d\varphi,$$

Так как  $f_3 R_3 \Big|_0^\varphi$  – периодическая функция, то непериодический член может возникнуть только во втором слагаемом. Вычисляя подинтегральное выражение, получаем

$$R_3 f_3' = (Q_3 + R_3') R_3 = 2[(b_{20} + b_{02})b_{11} + 2(b_{02}c_{02} - b_{20}c_{20}) - (c_{20} + c_{02})c_{11}] + h(\varphi),$$

где  $h(\varphi)$  – периодическая функция. Поэтому

$$f_4 = -4[(b_{20} + b_{02})b_{11} + 2(b_{02}c_{02} - b_{20}c_{20}) - (c_{20} + c_{02})c_{11}] + q(\varphi),$$

где  $q(\varphi)$  – периодическая функция. Мы видим, что функция  $f_4$  будет периодической, если выполняется условие

$$[(b_{20} + b_{02})b_{11} + 2(b_{02}c_{02} - b_{20}c_{20}) - (c_{20} + c_{02})c_{11}] = 0,$$

полученное выше методом неопределенных коэффициентов.

В заключение отметим, что если правые части всех уравнений (4.6) заменить нулями, а букву М заменить буквой F, мы получим бесконечную систему уравнений, пользуясь которой можно найти голоморфное в некоторой окрестности начала координат представление общего интеграла системы (4.1)

$$F(x, y) \equiv \sum_{k=m}^{\infty} F_{k+1}(x, y) = C,$$

если такое представление существует.

### §5. Построение классов динамических на плоскости, интегрируемых в замкнутой форме.

Займемся построением интегрируемых в конечном виде систем в каждом из трех указанных в теореме 4.1 случаев. При этом мы будем предполагать, что соответствующее преобразование уже выполнено и значок «~» над буквой в связи с утерей его смысла писать не будем.

1. Рассмотрим сначала систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \\ \dot{y} = \lambda_2 y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2, \end{cases} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (5.1)$$

Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  мы будем считать известными. Задача, которую мы перед собой ставим, состоит в том, чтобы найти условия, которым должны удовлетворять коэффициенты  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ), при выполнении которых интегрирующая функция  $M(x, y)$  находится в конечном виде.

В рассматриваемом случае мы имеем:

$$\bar{\xi}_1(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y), \quad \bar{\xi}_2(x, y) = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2),$$

$$\bar{\xi}_3(x, y) = \bar{\xi}_4(x, y) = \dots \equiv 0,$$

$$\text{div} \bar{\xi}_1(x, y) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \text{div} \bar{\xi}_2(x, y) = (2b_{20} + c_{11})x + (b_{11} + 2c_{02})y,$$

$$\text{div} \bar{\xi}_3(x, y) = \text{div} \bar{\xi}_4(x, y) = \dots \equiv 0,$$

$$X_1 f = \lambda_1 x \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_2 f = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) \frac{\partial f}{\partial x} + (c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_3 f = X_4 f = \dots \equiv 0.$$

Равенства (4.9) при этом существенно упрощаются и имеют вид

$$X_1 M_2 - M_2 \text{div} \bar{\xi}_1 = 0,$$

$$X_1 M_3 - M_3 \text{div} \bar{\xi}_1 = M_2 \text{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_2, \quad (5.2)$$

$$X_1 M_4 - M_4 \text{div} \bar{\xi}_1 = M_3 \text{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_3,$$

.....

Вычисляя функцию  $M_2(x, y)$  по формуле (4.5), получаем

$$M_2(x, y) = \alpha_1 xy \quad (\alpha_1 = \alpha_0 (\lambda_1 - \lambda_2), \quad \alpha_0 - \text{произвольная постоянная}). \quad (5.3)$$

Для нахождения коэффициентов функции  $M_3(x, y)$  служит второе из равенств (5.2). Правая часть этого равенства представляет собой форму третьей степени относительно  $x$  и  $y$ , коэффициенты которой  $d_{ks}$  ( $k, s = 0, 1, 2, 3$ ) выражаются через коэффициенты  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ). Если потребовать, чтобы выполнялись равенства

$$d_{ks} = 0 \quad (k, s = 0, 1, 2, 3), \quad (5.4)$$

то для нахождения функций  $M_m(x, y)$  ( $m = 3, 4, \dots$ ) мы получим равенства  $X_1 M_m - M_m \operatorname{div} \bar{\xi}_1 = 0$ , которые при всех указанных значениях  $m$  удовлетворяются функциями  $M_m(x, y) \equiv 0$ . В этом случае будем иметь интегрирующую функцию

$$M(x, y) = M_2(x, y),$$

соответствующую системе (5.1), коэффициенты правых частей которой удовлетворяют условиям (5.4).

Запишем эти условия в явном виде.

Вычисляя правую часть второго из равенств (5.2), находим

$$M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_2 = \alpha_1 (-c_{20} x^3 + b_{20} x^2 y + c_{02} x y^2 + b_{02} y^3),$$

так что

$$d_{30} = -\alpha_1 c_{20}, \quad d_{21} = \alpha_1 b_{20}, \quad d_{12} = \alpha_1 c_{02}, \quad d_{03} = -\alpha_1 b_{02}.$$

При  $\alpha_1 \neq 0$  из (5.4) получаем условия

$$b_{20} = b_{02} = c_{20} = c_{02} = 0.$$

Коэффициенты  $b_{11}$  и  $c_{11}$  при этом остаются произвольными. Положив  $b_{11} = \alpha$ ,  $c_{11} = \beta$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \alpha x y, \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \beta x y \end{cases} \quad (5.5)$$

с интегрирующей функцией (5.3). Эта система легко интегрируется, и мы не будем задерживаться на ее рассмотрении.

Заметим теперь, что структура равенств (5.2) такова, что рассуждения, при помощи которых получен предыдущий результат, мы можем повторить на любом этапе построения функции  $M(x, y)$ . Поэтому, отказавшись от выполнения условий (5.4), попробуем сначала найти функцию  $M_3(x, y)$ , записав для нашего случая равенство (4.12):

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{30} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{03} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -c_{20} \\ b_{20} \\ c_{02} \\ -b_{02} \end{pmatrix}.$$

Соответствующая этому равенству система уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned} (2\lambda_1 - \lambda_2)a_{30} &= -c_{20}\alpha_1, & \lambda_1 a_{21} &= b_{20}\alpha_1, \\ \lambda_2 a_{12} &= c_{02}\alpha_1, & (2\lambda_2 - \lambda_1)a_{03} &= -b_{02}\alpha_1. \end{aligned}$$

Здесь следует различать следующие случаи: 1)  $2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , 2)  $2\lambda_2 - \lambda_1 = 0$ , 3)  $2\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$  и  $2\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ .

В первом случае мы должны положить  $c_{20} = 0$  и тогда  $a_{30} = \alpha_2$ , где  $\alpha_2$  может принимать произвольные значения. Для остальных коэффициентов получаем

$$a_{21} = \alpha_1 \frac{b_{20}}{\lambda_1}, \quad a_{12} = \alpha_1 \frac{c_{02}}{\lambda_2}, \quad a_{03} = -\alpha_1 \frac{b_{02}}{2\lambda_2 - \lambda_1}, \quad (5.6)$$

так что в этом случае

$$M_3(x, y) = \alpha_2 x^3 + \alpha_1 \frac{b_{20}}{\lambda_1} x^2 y + \alpha_1 \frac{c_{02}}{\lambda_2} x y^2 - \alpha_1 \frac{b_{02}}{2\lambda_2 - \lambda_1} y^3. \quad (5.7)$$

Во втором случае мы должны положить  $b_{02} = 0$ , и тогда  $a_{03} = \alpha_3$ , где  $\alpha_3$  может принимать произвольные действительные значения. Для остальных коэффициентов получаем

$$a_{30} = -\alpha_1 \frac{c_{20}}{2\lambda_1 - \lambda_2}, \quad a_{21} = \alpha_1 \frac{b_{20}}{\lambda_1}, \quad a_{12} = \alpha_1 \frac{c_{02}}{\lambda_2}, \quad (5.8)$$

так что в этом случае

$$M_3(x, y) = -\alpha_1 \frac{c_{20}}{2\lambda_1 - \lambda_2} x^3 + \alpha_1 \frac{b_{20}}{\lambda_1} x^2 y + \alpha_1 \frac{c_{02}}{\lambda_2} x y^2 - \alpha_3 y^3. \quad (5.9)$$

В третьем случае имеем, очевидно,

$$a_{30} = -\alpha_1 \frac{c_{20}}{2\lambda_1 - \lambda_2}, \quad a_{21} = \alpha_1 \frac{b_{20}}{\lambda_1}, \quad a_{12} = \alpha_1 \frac{c_{02}}{\lambda_2}, \quad a_{03} = -\alpha_1 \frac{b_{02}}{2\lambda_2 - \lambda_1}, \quad (5.10)$$

так что в этом случае

$$M_3(x, y) = -\alpha_1 \frac{c_{20}}{2\lambda_1 - \lambda_2} x^3 + \alpha_1 \frac{b_{20}}{\lambda_1} x^2 y + \alpha_1 \frac{c_{02}}{\lambda_2} x y^2 - \alpha_1 \frac{b_{02}}{2\lambda_2 - \lambda_1} y^3. \quad (5.11)$$

Функция  $M_4(x, y)$  находится при помощи третьего из равенств (5.2). Вычисляя правую часть этого равенства, получаем следующие выражения для  $d_{ks}$  ( $k, s = 0, 1, 2, 3, 4$ ):

$$\begin{aligned} d_{40} &= (-b_{20} + c_{11})a_{30} - c_{20}a_{21}, \\ d_{31} &= 2(-b_{11} + c_{02})a_{30} - 2c_{20}a_{12}, \\ d_{22} &= -3b_{02}a_{30} + (-b_{11} + c_{02})a_{21} + (b_{20} - c_{11})a_{12} - 3c_{20}a_{03}, \\ d_{13} &= -2b_{02}a_{21} + 2(b_{20} - c_{11})a_{03}, \\ d_{04} &= -b_{02}a_{12} + (b_{11} - c_{02})a_{03}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где коэффициенты  $a_{30}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{12}$  и  $a_{03}$  принимают значения, соответствующие одному из рассматриваемых трех случаев. Если мы теперь потребуем, чтобы коэффициенты  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ) обращали правые части всех равенств (5.12) в нуль, то, аналогично предыдущему случаю, мы сможем положить  $M_m(x, y) \equiv 0$  для всех  $m = 4, 5, \dots$ , и интегрирующая функция для соответствующей системы вида (5.1) будет иметь вид

$$M(x, y) = M_2(x, y) + M_3(x, y).$$

Рассмотрим первый случай. Для этого случая с учетом (5.6) и равенств  $c_{20} = 0$ ,  $a_{30} = \alpha_2$  приравнивание нулю правых частей равенств (5.12) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} (-b_{20} + c_{11})\alpha_2 &= 0, \\ (-b_{11} + c_{02})\alpha_2 &= 0, \\ -3b_{02}\alpha_2 + (-b_{11} + c_{02})\frac{b_{20}}{\lambda_1} + (b_{20} - c_{11})\frac{c_{02}}{2\lambda_1} &= 0, \\ -b_{02}\frac{b_{20}}{\lambda_1} + (b_{20} - c_{11})\left(-\frac{b_{02}}{3\lambda_1}\right) &= 0, \\ -b_{02}\frac{c_{02}}{2\lambda_1} + (b_{11} - c_{02})\left(-\frac{b_{02}}{3\lambda_1}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Эти равенства, например, удовлетворяются, если

$$b_{20} = c_{11} = \lambda, \quad b_{02} = 0, \quad b_{11} = c_{02} = \gamma,$$

где  $\lambda$  и  $\gamma$  – произвольные действительные числа.

Тогда, т.к.  $\lambda_2 = 2\lambda_1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda x^2 + \gamma xy, \\ \dot{y} = 2\lambda_1 y + \lambda xy + \gamma y^2, \end{cases} \quad (5.14)$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \alpha_1 xy + \alpha_2 x^3 + \alpha_1 \frac{\lambda}{\lambda_1} x^2 y + \alpha_1 \frac{\gamma}{2\lambda_1} xy^2.$$

Как видим, для найденной системы мы имеем семейство интегрирующих функций, зависящее от двух параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Отношение двух линейно независимых функций из этого семейства, как указывалось в §1, даст общий интеграл системы. Положив, например,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$  и  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ , получаем интегрирующие функции

$$M^1(x, y) = xy + \frac{\lambda}{\lambda_1} x^2 y + \frac{\gamma}{2\lambda_1} xy^2, \quad M^2(x, y) = x^3$$

и общий интеграл системы в виде

$$y + \frac{\lambda}{\lambda_1} xy + \frac{\gamma}{2\lambda_1} y^2 = Cx^2.$$

Если в равенствах (5.13) принять  $\alpha_2 = 0$  и  $b_{02} = \delta \neq 0$ , то получим равенства

$$3b_{02}c_{02} - 2b_{20}b_{11} - c_{02}c_{11} = 0, \quad -4b_{02} + c_{11} = 0, \quad 2b_{11} + c_{02} = 0,$$

которые удовлетворяются, если положить

$$\begin{cases} b_{20} = \lambda, & b_{11} = \gamma, & [b_{02} = \delta], \\ [c_{20} = 0], & c_{11} = 4\lambda, & c_{02} = -2\gamma. \end{cases}$$

Тогда получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda x^2 + \gamma xy + \delta y^2, \\ \dot{y} = 2\lambda_1 y + 4\lambda xy - 2\gamma y^2, \end{cases} \quad (5.15)$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \left( xy + \frac{\lambda}{\lambda_1} x^2 y - 2 \frac{\gamma}{\lambda_1} xy^2 - \frac{\delta}{3\lambda_1} y^3 \right) \alpha_1.$$

Интегрируя уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{2\lambda_1 y + 4\lambda xy - 2\gamma y^2}{xy + \frac{\lambda}{\lambda_1} x^2 y - 2 \frac{\gamma}{\lambda_1} xy^2 - \frac{\delta}{3\lambda_1} y^3} dx - \frac{\lambda_1 x + \lambda x^2 + \gamma xy + \delta y^2}{xy + \frac{\lambda}{\lambda_1} x^2 y - 2 \frac{\gamma}{\lambda_1} xy^2 - \frac{\delta}{3\lambda_1} y^3} dy = 0,$$

находим общий интеграл системы в виде

$$(3\lambda_1 x + 3\lambda x^2 - 3\gamma xy - \delta y^2)^2 = Cy.$$

Рассмотрим теперь второй из указанных выше случаев. Для этого случая с учетом равенств (5.8) и равенств  $b_{20} = 0$ ,  $a_{03} = \alpha_3$  приравнивание нулю правых частей равенств (5.12) дает равенства

$$\begin{aligned} (-b_{20} + c_{11}) \frac{c_{20}}{3\lambda_2} + c_{20} \frac{b_{20}}{2\lambda_2} &= 0, \\ (-b_{11} + c_{02}) \frac{c_{20}}{3\lambda_2} + c_{20} \frac{c_{02}}{2\lambda_2} &= 0, \\ (-b_{11} + c_{02}) \frac{b_{20}}{2\lambda_2} + (b_{20} - c_{11}) \frac{c_{02}}{\lambda_2} - 3c_{20}\alpha_3 &= 0, \\ (b_{20} - c_{11})\alpha_3 &= 0, \\ (-b_{11} + c_{02})\alpha_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Эти равенства удовлетворяются значениями

$$b_{20} = c_{11} = \lambda, \quad b_{02} = 0, \quad b_{11} = c_{02} = \gamma,$$

где  $\lambda$  и  $\gamma$  – произвольные действительные числа, поэтому, так как  $\lambda_1 = 2\lambda_2$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\lambda_2 x + \lambda x^2 + \gamma xy, \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \lambda xy + \gamma y^2, \end{cases} \quad (5.17)$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \alpha_1 xy + \alpha_1 \frac{\lambda}{2\lambda_2} x^2 y + \alpha_1 \frac{\gamma}{\lambda_2} xy^2 + \alpha_3 y^3.$$

Здесь, как и в предыдущем случае, мы имеем семейство интегрирующих функций, зависящих от двух параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$ . Положив, например,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_3 = 0$  и  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_3 = 1$ , получаем интегрирующие функции

$$M^1(x, y) = xy + \frac{\lambda}{2\lambda_2} x^2 y + \frac{\gamma}{\lambda_2} xy^2, \quad M^2(x, y) = y^3$$

и общий интеграл системы в виде

$$x + \frac{\lambda}{2\lambda_2} x^2 + \frac{\gamma}{\lambda_2} xy = Cy^2.$$

Если в равенствах (5.16) принять  $\alpha_3 = 0$  и  $c_{02} = \delta \neq 0$ , то получим равенства

$$2c_{11} + b_{20} = 0, \quad 4c_{02} - b_{11} = 0, \quad 3b_{20}c_{02} - 2c_{11}c_{02} - b_{20}b_{11} = 0,$$

которые удовлетворяются значениями

$$b_{20} = -2\lambda, \quad b_{11} = 4\gamma, \quad [b_{02} = 0], \\ [c_{20} = \delta], \quad c_{11} = \lambda, \quad c_{02} = \gamma.$$

Тогда получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\lambda_2 x - 2\lambda x^2 + 4\gamma xy, \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \delta x^2 + \lambda xy + \gamma y^2, \end{cases}$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \left( xy - \frac{\delta}{3\lambda_2} x^3 - \frac{\lambda}{\lambda_2} x^2 y + \frac{\gamma}{\lambda_2} xy^2 \right) \alpha_1.$$

Интегрируя уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{\lambda_2 y + \delta x^2 + \lambda xy + \gamma y^2}{xy - \frac{\delta}{3\lambda_2} x^3 - \frac{\lambda}{\lambda_2} x^2 y + \frac{\gamma}{\lambda_2} xy^2} dx - \frac{2\lambda_2 x - 2\lambda x^2 + 4\gamma xy}{xy - \frac{\delta}{3\lambda_2} x^3 - \frac{\lambda}{\lambda_2} x^2 y + \frac{\gamma}{\lambda_2} xy^2} dy = 0,$$

находим общий интеграл системы в виде

$$(3\lambda_2 y - \delta x^2 - 3\lambda xy + \gamma y^2)^2 = Cx.$$

Рассмотрим, наконец, третий случай.

Подставляя (5.10) в (5.12) и приравнявая полученные выражения нулю, получаем равенства

$$\begin{aligned} (-b_{20} + c_{11}) \frac{c_{20}}{2\lambda_1 - \lambda_2} + c_{20} \frac{b_{20}}{\lambda_1} &= 0, \\ (-b_{11} + c_{02}) \frac{c_{20}}{2\lambda_1 - \lambda_2} + c_{20} \frac{c_{02}}{\lambda_2} &= 0, \\ 3b_{02} \frac{c_{20}}{2\lambda_1 - \lambda_2} + (-b_{11} + c_{02}) \frac{b_{20}}{\lambda_1} + (b_{20} - c_{11}) \frac{c_{02}}{\lambda_2} + 3c_{20} \frac{b_{02}}{2\lambda_2 - \lambda_1} &= 0, \\ b_{02} \frac{b_{20}}{\lambda_1} + (b_{20} - c_{11}) \frac{b_{02}}{2\lambda_2 - \lambda_1} &= 0, \\ b_{02} \frac{c_{02}}{\lambda_2} + (b_{11} - c_{02}) \frac{b_{02}}{2\lambda_2 - \lambda_1} &= 0. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Эти равенства, например, удовлетворяются значениями

$$b_{20} = c_{11} = \lambda, \quad c_{20} = b_{02} = 0, \quad b_{11} = c_{02} = \gamma,$$

Тогда получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda x^2 + \gamma xy = x(\lambda_1 + \lambda x + \gamma y), \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \lambda xy + \gamma y^2 = y(\lambda_2 + \lambda x + \gamma y), \end{cases}$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \alpha_1 \left( xy + \frac{\lambda}{\lambda_1} x^2 y + \frac{\gamma}{\lambda_2} xy^2 \right).$$

Интегрируя уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{\lambda_2 y + \lambda xy + \gamma y^2}{xy + \frac{\lambda}{\lambda_1} x^2 y + \frac{\gamma}{\lambda_2} xy^2} dx - \frac{\lambda_1 x + \lambda x^2 + \gamma xy}{xy + \frac{\lambda}{\lambda_1} x^2 y + \frac{\gamma}{\lambda_2} xy^2} dy = 0,$$

получаем общий интеграл системы в виде

$$x^{\lambda_2} (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda x + \lambda_1 \gamma y)^{\lambda_1 - \lambda_2} = C y^{\lambda_1}.$$

При  $b_{02} = \delta \neq 0$ ,  $c_{20} = \nu \neq 0$  из равенств (5.18) получаем равенства

$$(\lambda_1 - \lambda_2) b_{20} + \lambda_1 c_{11} = 0, \quad -\lambda_2 b_{11} + 2\lambda_1 c_{02} = 0,$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(2\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_2 - \lambda_1)} b_{02}c_{20} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1\lambda_2} b_{20}c_{02} - \frac{1}{\lambda_1} b_{20}b_{11} - \frac{1}{\lambda_2} c_{02}c_{11} = 0,$$

$$\lambda_2 b_{20} - \lambda_1 c_{11} = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda_1)c_{02} + \lambda_2 b_{11} = 0,$$

которые при  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  удовлетворяются значениями

$$b_{20} = \lambda, \quad b_{11} = -2\gamma, \quad b_{02} = \delta, \\ c_{20} = \nu, \quad c_{11} = -2\lambda, \quad c_{02} = \gamma,$$

где  $\lambda, \gamma, \delta, \nu$  могут принимать произвольные действительные значения. Соответствующая система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda x^2 - 2\gamma xy + \delta y^2, & 2\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0 \\ \dot{y} = -\lambda_1 y + \nu x^2 - 2\lambda xy + \gamma y^2, & 2\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

имеет интегрирующую функцию

$$M(x, y) = \alpha_1 \left( xy - \frac{\nu}{3\lambda_1} x^3 + \frac{\lambda}{\lambda_1} x^2 y - \frac{\gamma}{\lambda_1} xy^2 + \frac{\delta}{3\lambda_1} y^3 \right).$$

В данном случае, как легко проверить,  $\text{div} \bar{\xi} \equiv 0$ , поэтому  $XM \equiv 0$ , то есть  $M(x, y) = C$  является общим интегралом системы.

Мы не будем продолжать дальше вычисления по указанной схеме, которые, несмотря на их громоздкость, вполне выполнимы и могут привести к новым классам систем рассматриваемого вида, интегрируемым в конечном виде. Заметим, что по аналогичной схеме можно искать интегрируемые в конечном виде системы, в правых частях которых помимо линейных членов содержатся однородные полиномы относительно  $x$  и  $y$  любой фиксированной степени  $m$ .

2. Займемся теперь решением нашей задачи для системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{02}y^3, \\ \dot{y} = \lambda_2 y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{02}y^3. \end{cases} \quad (5.20)$$

В этом случае мы имеем

$$\bar{\xi}_1(x, y) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y),$$

$$\bar{\xi}_2(x, y) = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2),$$

$$\bar{\xi}_3(x, y) = (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{02}y^3, c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{02}y^3),$$

$$\bar{\xi}_4(x, y) = \bar{\xi}_5(x, y) = \dots \equiv 0,$$

$$\text{div} \bar{\xi}_1(x, y) = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\text{div} \bar{\xi}_2(x, y) = (2b_{20} + c_{11})x + (b_{11} + 2c_{02})y,$$

$$\text{div} \bar{\xi}_3(x, y) = (3b_{20} + c_{21})x^2 + 2(b_{21} + c_{12})xy + (b_{12} + 3c_{02})y^2,$$

$$\text{div} \bar{\xi}_4(x, y) = \text{div} \bar{\xi}_5(x, y) = \dots \equiv 0,$$

$$X_1 f = \lambda_1 x \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_2 f = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) \frac{\partial f}{\partial x} + (c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_3 f = (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{02}y^3) \frac{\partial f}{\partial x} + (c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{02}y^3) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_4 f = X_5 f = \dots \equiv 0.$$

Равенства (4.9) с учетом, что  $M_1(x, y) \equiv 0$ , записываются в виде

$$X_1 M_2 - M_2 \text{div} \bar{\xi}_1 = 0,$$

$$X_1 M_3 - M_3 \text{div} \bar{\xi}_1 = M_2 \text{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_2,$$

$$X_1 M_4 - M_4 \text{div} \bar{\xi}_1 = M_3 \text{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_3 + M_2 \text{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_2,$$

$$\begin{aligned} X_1 M_5 - M_5 \operatorname{div} \bar{\xi}_1 &= M_4 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_4 + M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_3, \\ X_1 M_6 - M_6 \operatorname{div} \bar{\xi}_1 &= M_5 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_5 + M_4 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_4, \\ X_1 M_7 - M_7 \operatorname{div} \bar{\xi}_1 &= M_6 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_6 + M_5 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_5, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Схема вычислений теперь изменяется и, например, может выглядеть следующим образом: если потребовать, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_3 + M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_2 &= 0, \\ M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_3 &= 0, \end{aligned} \tag{5.21}$$

то третьему уравнению мы сможем удовлетворить функцией  $M_4(x, y) \equiv 0$ . Тогда четвертое уравнение примет вид  $X_1 M_5 - M_5 \operatorname{div} \bar{\xi}_1 = 0$ , которому мы сможем удовлетворить функцией  $M_5(x, y) \equiv 0$ , и т.д. В результате, для динамической системы с коэффициентами, найденными при помощи указанных условий, интегрирующая функция будет иметь вид

$$M(x, y) = M_2(x, y) + M_3(x, y).$$

Ясно, что эта схема вычислений может быть начата с любого следующего шага. Мы рассмотрим только указанный случай.

Функции  $M_2(x, y)$  и  $M_3(x, y)$ , очевидно, остаются прежними, т.к. члены третьей степени в правых частях уравнений (5.20) при их нахождении не использовались. Коэффициенты формы  $M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_3$  определяются формулами (5.12). Следовательно, нам остается вычислить выражения  $M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_2$  и  $M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_3$ .

Вычисляя первое из этих выражений, находим его коэффициенты

$$d'_{40} = -c_{30}, \quad d'_{31} = 2b_{30}, \quad d'_{22} = b_{21} + c_{12}, \quad d'_{13} = 2c_{03}, \quad d'_{04} = -b_{03},$$

так что первое условие (5.21) имеет вид

$$\begin{aligned} -c_{30} + (-b_{20} + c_{11})a_{30} - c_{20}a_{21} &= 0, \\ b_{30} + (-b_{11} + c_{02})a_{30} - c_{20}a_{12} &= 0, \\ b_{21} + c_{12} - 3b_{02}a_{30} + (-b_{11} + c_{02})a_{21} + (b_{20} - c_{11})a_{12} - 3c_{20}a_{03} &= 0, \\ c_{03} - b_{02}a_{21} + (b_{20} - c_{11})a_{03} &= 0, \\ -b_{03} - b_{02}a_{12} + (b_{11} - c_{02})a_{03} &= 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Коэффициенты второго из указанных выше выражений определяются равенствами

$$\begin{aligned} d_{50} &= c_{21}a_{30} - c_{30}a_{21}, \\ d_{41} &= (2c_{12} - b_{21})a_{30} + b_{30}a_{21} - 2c_{30}a_{12}, \\ d_{32} &= (3c_{03} - b_{12})a_{30} + c_{12}a_{21} + (2b_{30} - c_{21})a_{12} - 3c_{30}a_{03}, \\ d_{23} &= -3b_{03}a_{30} + (2c_{03} - b_{12})a_{21} + b_{21}a_{12} + (3b_{30} - 2c_{21})a_{03}, \\ d_{14} &= -2b_{03}a_{21} + c_{03}a_{12} + (2b_{21} - c_{12})a_{03}, \\ d_{05} &= -b_{03}a_{12} + b_{21}a_{03}, \end{aligned} \tag{5.23}$$

В этих и предыдущих равенствах  $a_{30}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{12}$  и  $a_{03}$  – коэффициенты одной из функций (5.7), (5.9), (5.11).

Для нахождения интегрируемой системы можно поступить следующим образом.

Рассмотрим, например, последний случай и потребуем, чтобы выполнялись равенства (5.8).

Выше мы видели, что для этого можно положить

$$b_{20} = c_{11} = \lambda, \quad c_{20} = b_{02} = 0, \quad b_{11} = c_{02} = \gamma, \tag{5.24}$$

Подставляя эти значения в равенства (5.22) и (5.23), соответственно получаем равенства

$$c_{30} = b_{30} = c_{03} = b_{03} = 0, \quad b_{21} = -c_{12} = \delta, \tag{5.25}$$

где  $\delta$  – любое действительное число, и

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda_1} + c_{21} \frac{\gamma}{\lambda_2} = 0, \quad \frac{\delta \lambda}{\lambda_2} - b_{12} \frac{\lambda}{\lambda_1} = 0,$$

откуда при  $\gamma$  и  $\lambda$  отличных от нуля получаем

$$c_{21} = -\frac{\lambda_2 \lambda \delta}{\lambda_1 \gamma}, \quad b_{12} = \frac{\lambda_1 \gamma \delta}{\lambda_2 \lambda}. \quad (5.26)$$

Таким образом, при выполнении равенств (5.24), (5.25) и (5.26) имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda x^2 + \gamma xy + \delta x^2 y + \frac{\lambda_1 \gamma \delta}{\lambda_2 \lambda} xy^2, \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \lambda xy + \gamma y^2 - \frac{\lambda_2 \lambda \delta}{\lambda_1 \gamma} x^2 y - \delta xy^2 \end{cases} \quad (5.27)$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \alpha_1 \left( xy + \frac{\lambda}{\lambda_1} x^2 y + \frac{\gamma}{\lambda_2} xy^2 \right).$$

Общий интеграл этой системы записываются в виде

$$x^{\lambda_2} (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda x + \lambda_1 \gamma y) \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) \gamma \lambda + \lambda_1 \lambda_2 \delta}{\gamma \lambda} = C y^{\lambda_1} e^{\frac{\delta (\lambda \lambda_2 x + \gamma \lambda_1 y)}{\gamma \lambda}}.$$

Разумеется, коэффициенты (5.12) и (5.23) можно обратить в нуль, если потребовать, чтобы обращались в нуль все коэффициенты функции  $M_3(x, y)$ . Тогда для соответствующей динамической системы интегрирующей функцией будет функция

$$M(x, y) = \alpha_1 xy.$$

Значения, которые при этом могут принимать коэффициенты  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ), согласно п. 1 этого параграфа, суть

$$b_{20} = b_{02} = c_{02} = c_{20} = 0, \quad b_{11} = \alpha, \quad c_{11} = \beta,$$

а коэффициенты  $b_{ks}$  и  $c_{ks}$  ( $k, s = 0, 1, 2, 3$ ), согласно равенствам (5.22), могут принимать значения

$$c_{30} = b_{30} = c_{03} = b_{03} = 0, \quad b_{21} = -c_{12} = \delta, \quad b_{12} = \lambda, \quad c_{21} = \gamma,$$

где  $\alpha, \beta, \delta, \lambda$  и  $\gamma$  могут принимать произвольные действительные значения.

Таким образом, функция (5.28) является интегрирующей функцией системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \alpha xy + \delta x^2 y + \lambda xy^2, \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \beta xy + \gamma x^2 y - \delta xy^2. \end{cases} \quad (5.28)$$

Общий интеграл этой системы имеет вид

$$x^{\lambda_2} e^{\beta x - \alpha y - \delta xy + \frac{1}{2}(\gamma x^2 - \lambda y^2)} = C y^{\lambda_1}.$$

На этом мы закончим рассмотрение случая действительных различных корней характеристического уравнения. Разумеется, мы далеко не исчерпали все возможные классы интегрируемых систем в этом случае. Читатель, усвоивший логику наших рассуждений, может, при желании, продолжить поиск дальше.

**3.** Будем рассматривать теперь динамические системы вида (5.1) в случае, когда  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + b_{20} x^2 + b_{11} xy + b_{02} y^2, \\ \dot{y} = \mu x + \lambda_1 y + c_{20} x^2 + c_{11} xy + c_{02} y^2. \end{cases}$$

$$\bar{\xi}_1(x, y) = (\lambda_1 x, \mu x + \lambda_1 y),$$

$$\operatorname{div} \bar{\xi}_1(x, y) = 2\lambda_1,$$

$$X_1 f = \lambda_1 x \frac{\partial f}{\partial x} + (\mu x + \lambda_1 y) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Все остальные величины и выражения, а также схема вычислений остаются такими же, как в п. 1).

Функция  $M_1(x, y) \equiv 0$ . Для нахождения коэффициентов функции  $M_2(x, y)$  имеем равенства

$$\mu a_{11} = 0, \quad 2\mu a_{02} = 0.$$

При  $\mu = 0$  этим равенствам удовлетворяют совершенно произвольные значения коэффициентов функции  $M_2(x, y)$ . Если же  $\mu \neq 0$ , получаем  $a_{11} = a_{02} = 0$ , а коэффициент  $a_{20}$  может принимать произвольные (действительные) значения, так что в этом случае, если положить  $a_{20} = \alpha_1$ ,

$$M_2(x, y) = \alpha_1 x^2.$$

Вычисляя выражение  $M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_2$ , находим

$$\begin{aligned} d_{30} &= c_{11} a_{20} - c_{20} a_{11}, \\ d_{21} &= (-b_{11} + 2c_{02}) a_{20} + b_{20} a_{11} - 2c_{20} a_{02}, \\ d_{12} &= -2b_{02} a_{20} + c_{02} a_{11} + (2b_{20} - c_{11}) a_{02}, \\ d_{03} &= -b_{02} a_{11} + b_{11} a_{02}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Тогда коэффициенты формы  $M_3(x, y)$  находятся из системы уравнений (в рассматриваемом случае  $a = d = \lambda_1$ ,  $b = 0$ ,  $c = \mu$ )

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{30} + \mu a_{21} &= d_{30}, \\ \lambda_1 a_{21} + 2\mu a_{12} &= d_{21}, \\ \lambda_1 a_{12} + 3\mu a_{03} &= d_{12}, \\ \lambda_1 a_{03} &= d_{03}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

определитель которой отличен от нуля, так что система имеет единственное решение при любых значениях коэффициентов (5.29).

Потребуем, чтобы все коэффициенты (5.29) обращались в нуль, т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} c_{11} a_{20} - c_{20} a_{11} &= 0, \\ (-b_{11} + 2c_{02}) a_{20} + b_{20} a_{11} - 2c_{20} a_{02} &= 0, \\ -2b_{02} a_{20} + c_{02} a_{11} + (2b_{20} - c_{11}) a_{02} &= 0, \\ -b_{02} a_{11} + b_{11} a_{02} &= 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Тогда будем иметь  $M_3(x, y) \equiv 0$ , и, следовательно, можно считать  $M_4(x, y) = M_5(x, y) = \dots \equiv 0$ .

Считая  $\mu = 0$ , обозначим для упрощения записей коэффициенты  $a_{20}$ ,  $a_{11}$  и  $a_{02}$  соответственно  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Первому и последнему из уравнений (5.31) можно удовлетворить значениями

$$c_{11} = \frac{\lambda}{\alpha}, \quad c_{20} = \frac{\lambda}{\beta}, \quad b_{11} = \frac{\delta}{\gamma}, \quad b_{02} = \frac{\delta}{\beta}, \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 0).$$

Тогда из второго и третьего уравнений при выполнении условия  $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$ , получаем

$$b_{20} = \frac{\delta\alpha}{\beta\gamma}, \quad c_{02} = \frac{\gamma\lambda}{\alpha\beta}.$$

Таким образом, мы имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \frac{\delta}{\beta\gamma} (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2), \\ \dot{y} = \lambda_1 y + \frac{\lambda}{\alpha\beta} (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2). \end{cases}$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2. \quad (5.32)$$

Легко убедиться, проверив выполнимость равенства (1.7), что функция (5.32) является интегрирующей для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \nu (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2), \\ \dot{y} = \lambda_1 y + \omega (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) \end{cases} \quad (5.33)$$

при любых действительных значениях  $\lambda_1 \neq 0, \nu, \omega, \alpha, \beta, \gamma$ . При интегрировании соответствующего этой системе уравнения в полных дифференциалах

$$\frac{\lambda_1 y + \omega(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)}{\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2} dx - \frac{\lambda_1 x + \nu(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2)}{\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2} dy = 0$$

следует различать случаи  $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ ,  $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$  и  $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ : в первом случае общий интеграл системы имеет вид

$$\omega x - \nu y - \frac{2\lambda_1}{\delta_1} \operatorname{arctg} \frac{\beta x + 2\gamma y}{\delta_1 x} = C,$$

где  $\delta_1^2 = -(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$ , во втором –

$$\omega x - \nu y - \frac{\lambda_1}{\delta_1} \ln \left| \frac{(\delta_1 - \beta)x - 2\gamma y}{(\delta_1 + \beta)x + 2\gamma y} \right| = C,$$

где  $\delta_1^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ , в третьем –

$$\omega x - \nu y + \frac{2\lambda_1 x}{2\gamma y + \beta x} = C.$$

Откажемся теперь от условия  $M_3(x, y) \equiv 0$ . Тогда из системы (5.30) последовательно находим

$$\begin{aligned} a_{03} &= \frac{d_{03}}{\lambda_1}, & a_{12} &= \frac{1}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right), & a_{21} &= \frac{1}{\lambda_1} \left[ d_{21} - \frac{2\mu}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) \right], \\ a_{30} &= \frac{1}{\lambda_1} \left\{ d_{30} - \frac{\mu}{\lambda_1} \left[ d_{21} - \frac{2\mu}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Коэффициенты формы  $M_4(x, y)$  находятся из системы

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 a_{40} + \mu a_{31} &= d_{40}, \\ 2\lambda_1 a_{31} + 2\mu a_{22} &= d_{31}, \\ 2\lambda_1 a_{22} + 3\mu a_{13} &= d_{22}, \\ 2\lambda_1 a_{13} + 4\mu a_{04} &= d_{13}, \\ 2\lambda_1 a_{04} &= d_{04}, \end{aligned}$$

где величины  $d_{ks}$  ( $k, s = 0, 1, 2, 3, 4$ ) определяются формулами (5.12), в которые вместо  $a_{ks}$  ( $k, s = 0, 1, 2, 3$ ) нужно подставить их выражения (5.34). Если потребовать, чтобы все  $d_{ks}$  ( $k, s = 0, 1, 2, 3, 4$ ) обращались в нуль, получим равенства

$$\begin{aligned} d_{40} &\equiv (-b_{20} + c_{11}) \frac{1}{\lambda_1} \left\{ d_{30} - \frac{\mu}{\lambda_1} \left[ d_{21} - \frac{2\mu}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) \right] \right\} - c_{20} \frac{1}{\lambda_1} \left[ d_{21} - \frac{2\mu}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) \right] \\ &= 0, \\ d_{31} &\equiv 2(-b_{11} + c_{02}) \frac{1}{\lambda_1} \left\{ d_{30} - \frac{\mu}{\lambda_1} \left[ d_{21} - \frac{2\mu}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) \right] \right\} - c_{20} \frac{1}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) = 0, \\ d_{22} &\equiv -3b_{02} \frac{1}{\lambda_1} \left\{ d_{30} - \frac{\mu}{\lambda_1} \left[ d_{21} - \frac{2\mu}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) \right] \right\} + (-b_{11} + 2c_{02}) \frac{1}{\lambda_1} \left[ d_{21} - \frac{2\mu}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) \right] \\ &\quad - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} + (b_{20} - c_{11}) \frac{1}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) - 3c_{20} \frac{1}{\lambda_1} d_{03} = 0, \\ d_{13} &\equiv -2b_{02} \frac{1}{\lambda_1} \left[ d_{21} - \frac{2\mu}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) \right] + 2(b_{20} - c_{11}) \frac{1}{\lambda_1} d_{03} = 0, \\ d_{04} &\equiv -b_{02} \frac{1}{\lambda_1} \left( d_{12} - \frac{3\mu}{\lambda_1} d_{03} \right) + (b_{11} - c_{02}) \frac{1}{\lambda_1} d_{03} = 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Пусть  $\mu = 0$ . Тогда в силу равенств (5.29) получаем равенства

$$\begin{aligned} (-b_{20} + c_{11})(c_{11}a_{20} - c_{20}a_{11}) - c_{20}[(-b_{11} + 2c_{02})a_{20} + b_{20}a_{11} - 2c_{20}a_{02}] &= 0, \\ 2(-b_{11} + c_{02})(c_{11}a_{20} - c_{20}a_{11}) - c_{20}[-2b_{02}a_{20} + c_{20}a_{11} + (2b_{20} - c_{11})a_{02}] &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -3b_{02}(c_{11}a_{20} - c_{20}a_{11}) + (-b_{11} + c_{02})[(-b_{11} + 2c_{02})a_{20} + b_{20}a_{11} - 2c_{20}a_{02}] + (b_{20} - \\
 & \quad c_{11})[-2b_{02}a_{20} + c_{20}a_{11} + (2b_{20} - c_{11})a_{02}] - 3c_{20}(-b_{02}a_{11} + b_{11}a_{02}) = 0, \\
 & -2b_{02}[(-b_{11} + 2c_{02})a_{20} + b_{20}a_{11} - 2c_{20}a_{02}] + 2(b_{20} - c_{11})(-b_{02}a_{11} + b_{11}a_{02}) = 0, \\
 & -b_{02}[-2b_{02}a_{20} + c_{20}a_{11} + (2b_{20} - c_{11})a_{02}] + (b_{11} - c_{02})(-b_{02}a_{11} + b_{11}a_{02}) = 0. \tag{5.36}
 \end{aligned}$$

Отметим, прежде всего, что эти равенства удовлетворяются уже известными нам значениями

$$b_{20} = c_{11} = \lambda, \quad c_{20} = b_{02} = 0, \quad b_{11} = c_{02} = \delta,$$

при которых имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda x^2 + \delta xy \equiv x(\lambda_1 + \lambda x + \delta y), \\ \dot{y} = \lambda_1 y + \lambda xy + \delta y^2 \equiv y(\lambda_1 + \lambda x + \delta y). \end{cases}$$

Подставляя указанные значения коэффициентов  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ) в (5.34), куда предварительно подставлены выражения (5.29), получаем

$$a_{03} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \alpha, \quad a_{12} = \frac{1}{\lambda_1} (\delta\beta + \lambda\gamma), \quad a_{21} = \frac{1}{\lambda_1} (\delta\alpha + \lambda\beta), \quad a_{30} = \frac{\delta}{\lambda_1} \gamma,$$

так что

$$M_3(x, y) = \frac{1}{\lambda_1} [\lambda\alpha x^3 + (\delta\alpha + \lambda\beta)x^2y + (\delta\beta + \lambda\gamma)xy^2 + \delta\gamma y^3],$$

и интегрирующая функция системы записывается в виде

$$M(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \frac{1}{\lambda_1} [\lambda\alpha x^3 + (\delta\alpha + \lambda\beta)x^2y + (\delta\beta + \lambda\gamma)xy^2 + \delta\gamma y^3] = (\lambda_1 + \lambda x + \delta y)(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2).$$

Полученная система элементарно интегрируется и без знания функции  $M(x, y)$ . Прямая  $\lambda_1 + \lambda x + \delta y = 0$ , очевидно, состоит из состояний равновесия этой системы.

Так как коэффициенты функции  $M_2(x, y)$  в рассматриваемом случае  $\mu = 0$  могут принимать совершенно произвольные значения, положим  $a_{20} = \alpha = 0$ . Тогда равенства (5.36) удовлетворяются значениями

$$b_{20} = b_{11} = c_{20} = c_{11} = 0, \quad b_{02} = \lambda, \quad c_{02} = \delta,$$

так что имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda y^2, \\ \dot{y} = \lambda_1 y + \delta y^2. \end{cases} \tag{5.37}$$

Вычисляя коэффициенты функции  $M_3(x, y)$  для этого случая (пользуясь формулами (5.29) и (5.34)), находим

$$a_{03} = a_{21} = 0, \quad a_{12} = \frac{\delta\beta}{\lambda_1}, \quad a_{30} = -\frac{\lambda\beta}{\lambda_1},$$

и интегрирующая функция системы записывается в виде

$$M(x, y) = \beta xy + \gamma y^2 + \frac{\delta\beta}{\lambda_1} xy^2 - \frac{\lambda\beta}{\lambda_1} y^3,$$

Ее общий интеграл имеет вид

$$\lambda_1 \beta x + \gamma y + \delta \beta xy - \lambda \beta y^2 = C y.$$

Если положить  $a_{02} = \gamma = 0$ , то равенства (5.36) удовлетворяются значениями

$$b_{02} = c_{02} = b_{11} = c_{11} = 0, \quad b_{20} = \lambda, \quad c_{20} = \delta,$$

так что имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda x^2, \\ \dot{y} = \lambda_1 y + \delta x^2. \end{cases}$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy - \frac{\delta\beta}{\lambda_1} x^3 + \frac{\lambda\beta}{\lambda_1} x^2 y,$$

и общим интегралом

$$\alpha x + \lambda_1 \beta y + \lambda \beta xy - \delta \beta x^2 = Cx.$$

При  $\mu \neq 0$  в силу равенств  $a_{20} = \alpha_1$ ,  $a_{11} = a_{02} = 0$  по формулам (5.29) находим

$$d_{30} = \alpha_1 c_{11}, \quad d_{21} = (-b_{11} + 2c_{02})\alpha_1, \quad d_{12} = -2b_{02}\alpha_1, \quad d_{03} = 0.$$

Тогда равенства (5.35) переходят в равенства

$$(-b_{20} + c_{11})\left[c_{11} - \frac{\mu}{\lambda_1}(-b_{11} + 2c_{02})\right] - c_{20}(-b_{11} + 2c_{02}) = 0,$$

$$(-b_{11} + c_{02})\left[c_{11} - \frac{\mu}{\lambda_1}(-b_{11} + 2c_{02})\right] = 0,$$

$$(-b_{11} + c_{02})(-b_{11} + 2c_{02}) = 0,$$

$$b_{02} = 0,$$

которые удовлетворяются следующими наборами значений входящих в них коэффициентов:

- 1)  $b_{20} = \lambda$ ,  $b_{11} = 2\gamma$ ,  $b_{02} = 0$ ,  $c_{20} = \delta$ ,  $c_{11} = 0$ ,  $c_{02} = \gamma$ ;
- 2)  $b_{20} = \lambda$ ,  $b_{11} = \gamma$ ,  $b_{02} = 0$ ,  $c_{20} = 0$ ,  $c_{11} = \lambda$ ,  $c_{02} = \gamma$ ;
- 3)  $b_{20} = \lambda$ ,  $b_{11} = \gamma$ ,  $b_{02} = 0$ ,  $c_{20} = 0$ ,  $c_{11} = \frac{\mu\gamma}{\lambda_1}$ ,  $c_{02} = \gamma$ .

Первому набору соответствует система

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda x^2 + 2\gamma xy, \\ \dot{y} = \mu x + \lambda_1 y + \delta x^2 + \gamma y^2, \end{cases} \quad (5.38)$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \alpha_1 x^2$$

и общим интегралом

$$\delta x^2 + \mu x \ln|x| - \lambda_1 y - \lambda xy - \gamma y^2 = Cx;$$

второму – система

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda x^2 + \gamma xy, \\ \dot{y} = \mu x + \lambda_1 y + \lambda xy + \gamma y^2, \end{cases} \quad (5.39)$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \alpha_1 \left[ x^2 + \frac{1}{\lambda_1} \left( \lambda - \frac{\mu\gamma}{\lambda_1} \right) x^3 + \frac{\gamma}{\lambda_1} x^2 y \right]$$

и общим интегралом

$$\left[ \lambda_1 + \left( \lambda - \frac{\mu\gamma}{\lambda_1} \right) x + \gamma y \right]^\mu e^{\lambda_1 \frac{y}{x}} = Cx^\mu;$$

третьему – система

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \lambda x^2 + \gamma xy, \\ \dot{y} = \mu x + \lambda_1 y + \frac{\mu\gamma}{\lambda_1} xy + \gamma y^2, \end{cases} \quad (5.40)$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = \alpha_1 \left( x^2 + \frac{\gamma}{\lambda_1} x^2 y \right)$$

и общим интегралом

$$\left[ \lambda_1 + \gamma y \right]^{\frac{\lambda_1 \lambda}{\gamma}} e^{\lambda_1 \frac{y}{x}} = Cx^\mu.$$

4. Пусть, например, мы хотим найти динамические системы вида

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^3 \xi_k^1(x, y), \quad \dot{y} = \sum_{k=1}^3 \xi_k^2(x, y), \quad (5.41)$$

где  $\xi_k^1(x, y)$  и  $\xi_k^2(x, y)$  – однородные многочлены степени  $k$  относительно  $x$  и  $y$ , для которых функция  $M(x, y)$  имеет вид

$$M(x, y) = M_2(x, y) + M_4(x, y). \quad (5.42)$$

Схема вычислений (4.6) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} X_1 M_2 - M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_1 &= 0, \\ X_2 M_2 - M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 &= 0, \\ X_1 M_4 - M_4 \operatorname{div} \bar{\xi}_1 &= M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_2, \\ X_2 M_4 - M_4 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 &= 0, \\ X_3 M_4 - M_4 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

и задача ставится следующим образом: требуется найти условия, которым должны удовлетворять коэффициенты системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3, \\ \dot{y} &= cx + dy + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3, \end{aligned} \quad (5.44)$$

при выполнении которых функция  $M(x, y)$  имеет вид (5.42), где

$$M_2(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \quad (5.45)$$

$$M_4(x, y) = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4. \quad (5.46)$$

Коэффициенты написанных форм определяются в процессе вычислений, но можно, разумеется, заранее подчинить функции (5.45) и (5.46) некоторым условиям или даже полностью их конкретизировать. Мы ограничимся пока требованием, чтобы функция  $M_2(x, y)$  была знакоопределенной, например, положительно определенной.

Функция  $M_2(x, y)$  нам уже известна:

$$M_2(x, y) = h[-cx^2 + (a-d)xy + by^2].$$

В силу условия положительной определенности этой функции, согласно критерию Сильвестра [17], должны выполняться неравенства  $c < 0$  и

$$\begin{vmatrix} -c & \frac{a-d}{2} \\ \frac{a-d}{2} & b \end{vmatrix} > 0, \quad \text{или} \quad \sigma^2 - 4\Delta < 0.$$

Из последнего неравенства следует, что состояние равновесия  $O(0, 0)$  системы является простым и корни характеристического уравнения системы первого приближения являются комплексно-сопряженными:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , где  $\beta \neq 0$ , а  $\alpha$  может быть как равным, так и не равным нулю. В этом случае, как известно [4], с помощью неособого линейного преобразования можно преобразовать систему к виду, при котором  $\bar{\xi}_1 = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$ . Будем считать, что система (5.44) и есть преобразованная система, так что

$$a = d = \alpha, \quad b = -c = -\beta. \quad (5.47)$$

Тогда функция  $M_2(x, y)$  принимает вид

$$M_2(x, y) = -h\beta(x^2 + y^2) = h_2(x^2 + y^2),$$

где  $h_2$  – произвольная неотрицательная постоянная.

Записывая второе из равенств (5.43), получаем

$$\begin{aligned} & (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2)2h_2x + (c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2)2h_2y - \\ & - h_2(x^2 + y^2)[(2b_{20} + c_{11})x + (b_{11} + 2c_{02})y] = \\ & = h_2[c_{11}x^3 + 2(c_{20} - c_{02})x^2y + 2(b_{02} - b_{20})xy^2 + b_{11}y^3] = 0. \end{aligned}$$

Тождественное относительно  $x$  и  $y$  выполнение этого равенства возможно тогда и только тогда, когда

$$b_{20} = b_{02} = \lambda, \quad b_{11} = c_{11} = 0, \quad c_{20} = c_{02} = \gamma,$$

так что

$$\bar{\xi}_2 = [\lambda(x^2 + y^2), \gamma(x^2 + y^2)].$$

Векторно-матричное уравнение, служащее для нахождения коэффициентов формы  $M_4(x, y)$  и полученное при помощи третьего из равенств (5.43) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} 3a-d & c & 0 & 0 & 0 \\ 4b & 2a & 2c & 0 & 0 \\ 0 & 3b & a+d & 3c & 0 \\ 0 & 0 & 2b & a+2d & 4c \\ 0 & 0 & 0 & b & a+3d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{40} \\ a_{31} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{04} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{40} \\ d_{31} \\ d_{22} \\ d_{13} \\ d_{04} \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

Вычисляя правую часть указанного уравнения, получим

$$\begin{aligned} M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_3 M_2 &= h_2[(b_{30} + c_{21})x^4 + 2(c_{12} - c_{30})x^3y + (3b_{30} - b_{12} - c_{21} + 3c_{03})x^2y^2 + \\ & + 2(-b_{03} + b_{21})xy^3 + (b_{12} + c_{03})y^4] \equiv d_{40}x^4 + d_{31}x^3y + d_{22}x^2y^2 + d_{13}xy^3 + d_{04}y^4. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (5.47) система уравнений, соответствующая равенству (5.48) записывается в виде

$$\begin{cases} 2\alpha a_{40} + \beta a_{31} & = (b_{30} + c_{21})h_2, \\ -4\beta a_{40} + 2\alpha a_{31} + 2\beta a_{22} & = 2(c_{12} - c_{30})h_2, \\ -3\beta a_{31} + 2\alpha a_{22} + 3\beta a_{13} & = (-b_{12} + 3c_{03} + 3b_{30} - c_{21})h_2, \\ -2\beta a_{22} + 2\alpha a_{13} + 4\beta a_{04} & = 2(-b_{03} + b_{21})h_2, \\ -\beta a_{13} + 2\alpha a_{04} & = (b_{12} + c_{03})h_2. \end{cases} \quad (5.49)$$

Последние два из равенств (5.43) приводят к равенствам

$$\begin{cases} -2\lambda a_{40} - \gamma a_{31} & = 0, \\ 2\gamma a_{40} - \lambda a_{31} - 2\gamma a_{22} & = 0, \\ -4\lambda a_{40} + \gamma a_{31} & - 3\gamma a_{13} = 0, \\ -3\lambda a_{31} & + \lambda a_{13} - 4\gamma a_{04} = 0, \\ -2\lambda a_{22} - \gamma a_{13} + 2\lambda a_{04} & = 0, \\ -\lambda a_{13} - 2\gamma a_{04} & = 0, \end{cases} \quad (5.50)$$

и равенствам

$$\left\{ \begin{array}{l} (-b_{30} + c_{21})a_{40} - c_{30}a_{31} = 0, \\ 2(-b_{21} + c_{12})a_{40} - 2c_{30}a_{13} = 0, \\ 3(-b_{12} + c_{03})a_{40} - (-b_{21} + c_{12})a_{31} + (b_{30} - c_{21})a_{22} - 3c_{30}a_{13} = 0, \\ -4b_{03}a_{40} + 2(-b_{12} + c_{03})a_{31} + 2(b_{30} - c_{21})a_{13} = 0, \\ -3b_{03}a_{31} + (-b_{12} + c_{03})a_{22} + (b_{21} - c_{12})a_{13} + 3(b_{30} - c_{21})a_{04} = 0, \\ -2b_{03}a_{22} + 2(b_{21} - c_{12})a_{04} = 0, \\ -b_{03}a_{13} + (b_{12} - c_{03})a_{04} = 0. \end{array} \right. \quad (5.51)$$

Если теперь подставить в (5.50) и (5.51) выражения для  $a_{ks}$  ( $k, s = (0, 1, 2, 3, 4)$ ), найденные из системы (5.49), то мы и получим условия, которым должны удовлетворять параметры  $\lambda, \gamma$  и коэффициенты  $b_{ij}, c_{ij}$  ( $i, j = (0, 1, 2, 3)$ ), при выполнении которых функция  $M(x, y)$  для системы (5.44) имеет вид (5.42). Мы эти условия не выписываем, поскольку пользоваться ими не будем. Укажем только интегрируемые системы, легко обнаруживаемые при рассмотрении равенств (5.49), (5.50), (5.51).

**А)** Равенства (5.50) и (5.51) удовлетворяются, если все  $a_{ks}$  ( $k, s = (0, 1, 2, 3, 4)$ ) равны нулю. Тогда  $M_4(x, y) \equiv 0$ , так что

$$M(x, y) = M_2(x, y) = h_2(x^2 + y^2). \quad (5.52)$$

Из (5.49) получаем равенства

$$b_{30} + c_{21} = 0, \quad c_{12} - c_{30} = 0, \quad -b_{12} + 3c_{03} + 3b_{30} - c_{21} = 0, \quad -b_{03} + b_{21} = 0, \quad b_{12} + c_{03} = 0,$$

которые удовлетворяются, если положить

$$b_{30} = \delta, \quad b_{21} = \nu, \quad b_{12} = \delta, \quad b_{03} = \nu, \quad c_{03} = \mu, \quad c_{21} = -\delta, \quad c_{12} = \mu, \quad c_{30} = -\delta,$$

где параметры  $\delta, \nu, \mu$  могут принимать произвольные действительные значения. Параметры  $\lambda$  и  $\gamma$  также произвольны. Таким образом, мы имеем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \alpha x - \beta y + \lambda(x^2 + y^2) + \delta x^3 + \nu x^2 y + \delta x y^2 + \nu y^3, \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y + \gamma(x^2 + y^2) + \mu x^3 - \delta x^2 y + \mu x y^2 - \delta y^3 \end{array} \right. \quad (5.53)$$

с интегрирующей функцией (5.52).

Интегрируя уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{\beta x + \alpha y + \gamma(x^2 + y^2) + \mu x^3 - \delta x^2 y + \mu x y^2 - \delta y^3}{x^2 + y^2} dx - \frac{\alpha x - \beta y + \lambda(x^2 + y^2) + \delta x^3 + \nu x^2 y + \delta x y^2 + \nu y^3}{x^2 + y^2} dy = 0,$$

находим общий интеграл системы (5.53) в виде

$$\beta \ln(x^2 + y^2) - 2\alpha \arctg \frac{y}{x} + (\mu x^2 - 2\delta x y - \nu y^2) + 2(\gamma x - \lambda y) = C,$$

(постоянную  $h_2$  мы положили равной 1).

**Б)** Равенства (5.50) и (5.51) удовлетворяются также, если все коэффициенты при  $a_{ks}$  ( $k, s = (0, 1, 2, 3, 4)$ ) в этих равенствах равны нулю. Тогда имеем

$$\lambda = \gamma = 0 \quad (5.54)$$

и

$$b_{30} = c_{21} = \delta, \quad b_{21} = c_{12} = \nu, \quad b_{12} = c_{03} = \mu, \quad b_{03} = c_{30} = 0. \quad (5.55)$$

Коэффициенты формы  $M_4(x, y)$  находятся из системы (5.49), которая с учетом (5.55) записывается в виде

$$\begin{cases} 2\alpha a_{40} + \beta a_{31} & = 2\delta h_2, \\ -4\beta a_{40} + 2\alpha a_{31} + 2\beta a_{22} & = 2\nu h_2, \\ -3\beta a_{31} + 2\alpha a_{22} + 3\beta a_{13} & = 2(\delta + \mu)h_2, \\ -2\beta a_{22} + 2\alpha a_{13} + 4\beta a_{04} & = 2\nu h_2, \\ -\beta a_{13} + 2\alpha a_{04} & = 2\mu h_2. \end{cases} \quad (5.56)$$

Здесь следует различать два случая:  $\alpha \neq 0$  и  $\alpha = 0$ .

Пусть  $\alpha \neq 0$ . Тогда определитель системы (5.56)

$$\Delta = 32\alpha(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + 4\beta^2) \neq 0,$$

так что эта система имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} a_{40} &= \frac{(2\alpha^2 + \beta^2)\delta - \alpha\beta\nu + \beta^2\mu}{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} h_2, & a_{31} = a_{13} &= \frac{\beta\delta + \alpha\nu - \beta\mu}{\alpha^2 + \beta^2} h_2, \\ a_{22} &= \frac{\delta + \mu}{\alpha} h_2, & a_{04} &= \frac{\beta^2\delta + \alpha\beta\nu + (2\alpha^2 + \beta^2)\mu}{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} h_2. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y + \delta x^3 + \nu x^2 y + \mu x y^2, \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y + \delta x^2 y + \nu x y^2 + \mu y^3 \end{cases} \quad (5.58)$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = h_2(x^2 + y^2) + M_4(x, y),$$

где коэффициенты функции  $M_4(x, y)$  определяются равенствами (5.57).

Интегрирование этой системы в общем случае очень громоздко, поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь частного случая, положив  $\alpha = \beta = h_2 = 1$ ,  $\delta = \mu = -1$ ,  $\nu = 0$ . Тогда получаем известную систему (см., например, [4])

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x^3 - xy^2 \equiv -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x + y - x^2 y - y^3 \equiv x - y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (5.59)$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2). \quad (5.60)$$

Интегрируя соответствующее уравнение в полных дифференциалах, находим общий интеграл системы в виде

$$(1 - x^2 - y^2) e^{2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} = C(x^2 + y^2).$$

Полезно отметить, что система (5.59) допускает группу вращений вокруг начала координат с оператором

$$Af = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Вычисление функции  $M(x, y)$  по формуле (3.4) приводит к тому же выражению (5.60).

Пусть теперь  $\alpha = 0$ . Тогда вместо системы (5.56) имеем систему

$$\begin{cases} + \beta a_{31} & = 2\delta h_2, \\ -4\beta a_{40} + 2\beta a_{22} & = 2\nu h_2, \\ -3\beta a_{31} + 3\beta a_{13} & = 2(\delta + \mu)h_2, \\ -2\beta a_{22} + 4\beta a_{04} & = 2\nu h_2, \\ -\beta a_{13} & = 2\mu h_2. \end{cases}$$

Определитель этой системы равен нулю, поэтому она, вообще говоря, несовместна. Прибавляя к обеим частям третьего уравнения соответствующие части первого и последнего уравнений, умноженные предварительно на 3, получаем условие совместности системы в виде

$$\delta + \mu = 0, \quad (5.61)$$

при выполнении которого находим

$$a_{40} = \frac{1}{2}(a_{22} - \frac{vh_2}{\beta}), \quad a_{31} = a_{13} = \frac{2\delta h_2}{\beta}, \quad a_{04} = \frac{1}{2}(a_{22} + \frac{vh_2}{\beta}), \quad (5.62)$$

где коэффициент  $a_{22}$  может принимать произвольные действительные значения.

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta y + \delta x^3 + \nu x^2 y - \delta x y^2, \\ \dot{y} = \beta x + \delta x^2 y + \nu x y^2 - \delta y^3, \end{cases} \quad (5.63)$$

и интегрирующую функцию

$$\begin{aligned} M(x, y) = h_2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(a_{22} - \frac{vh_2}{\beta})x^4 + \frac{2\delta h_2}{\beta}x^3 y + \\ + a_{22}x^2 y^2 + \frac{2\delta h_2}{\beta}x y^3 + \frac{1}{2}(a_{22} + \frac{vh_2}{\beta})y^4. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Вспомним теперь, что отношение двух линейно независимых нетривиальных интегрирующих функций системы дает ее общий интеграл. Положив в (5.64) сначала  $h_2 = 1, a_{22} = 0$ , а затем  $h_2 = 1, a_{22} = \frac{\nu}{\beta}$ , получаем линейно независимые нетривиальные интегрирующие функции одной и той же системы (5.63):

$$\begin{aligned} M^{(1)}(x, y) &= x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \frac{\nu}{\beta} x^4 + 2 \frac{\delta}{\beta} x^3 y + 2 \frac{\delta}{\beta} x y^3 + \frac{1}{2} \frac{\nu}{\beta} y^4, \\ M^{(2)}(x, y) &= x^2 + y^2 + 2 \frac{\delta}{\beta} x^3 y + \frac{\nu}{\beta} x^2 y^2 + 2 \frac{\delta}{\beta} x y^3 + \frac{\nu}{\beta} y^4. \end{aligned}$$

Приравняв произвольной постоянной отношение этих функций, после несложных преобразований получаем общий интеграл системы (5.63) в виде

$$x^2 + y^2 = C(\beta + 2\delta xy + \nu y^2).$$

Ничто не мешает нам разыскивать также значения величин  $b_{ij}, c_{ij}$  ( $i, j = (0, 1, 2, 3)$ ), при которых  $\text{div} \bar{\xi} \equiv 0$ . Тогда, т.к.  $\alpha = \lambda = \gamma = 0$ , имеем  $\text{div} \bar{\xi}_1 = \text{div} \bar{\xi}_2 \equiv 0$ , а тождество  $\text{div} \bar{\xi}_3 \equiv 0$  имеет место, если выполняются условия

$$3b_{30} + c_{21} = 0, \quad b_{12} + 3c_{03} = 0, \quad b_{21} + c_{12} = 0. \quad (5.65)$$

Условие (5.61) при этом выполняется. Кроме того, если учесть равенства (5.55) и положить  $a_{22} = 0$ , то равенства (5.54) также будут выполняться, чем можно убедиться, если учесть равенства (5.62). В силу равенств (5.55) и (5.65) получаем

$$b_{30} = \delta, \quad b_{21} = 0, \quad b_{12} = -3\mu, \quad b_{03} = 0, \quad c_{30} = 0, \quad c_{21} = -3\delta, \quad c_{12} = 0, \quad c_{03} = \mu,$$

так что имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta y + \delta x^3 - 3\mu x y^2, \\ \dot{y} = \beta x - 3\delta x^2 y + \mu y^3. \end{cases} \quad (5.66)$$

Вычисляя коэффициенты формы  $M_4(x, y)$  по формулам (5.62) (при  $h_2 = 1$ ), получаем

$$M(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \frac{\delta}{\beta} x^3 y + 2 \frac{\mu}{\beta} x y^3.$$

Так как  $\operatorname{div} \bar{\xi} \equiv 0$ , то  $XM(x, y) \equiv 0$ , т.е.

$$x^2 + y^2 - 2\frac{\delta}{\beta}x^3y + 2\frac{\mu}{\beta}xy^3 = C$$

является общим интегралом системы (5.66).

**В)** Если при сохранении равенств (5.55) отказаться от выполнения равенств (5.54), то коэффициенты формы  $M_4(x, y)$  должны удовлетворять условиям (5.50). Из этих условий находим

$$a_{40} = \gamma^2 h_4, \quad a_{31} = a_{13} = -2\lambda\gamma h_4, \quad a_{22} = (\lambda^2 + \gamma^2)h_4, \quad a_{04} = \lambda^2 h_4.$$

Подставляя эти выражения в (5.56), получаем выражения параметров  $\delta$ ,  $\nu$  и  $\mu$  через параметры  $\lambda$  и  $\gamma$ :

$$\delta = (\alpha\gamma^2 - \beta\gamma\lambda)h, \quad \nu = [\beta(\gamma^2 - \lambda^2) - 2\alpha\gamma\lambda]h, \quad \mu = (\beta\gamma\lambda + \alpha\lambda^2)h, \quad (5.67)$$

где  $h = h_4 / h_2$ .

Таким образом, при  $\alpha \neq 0$  мы имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y + \lambda(x^2 + y^2) + \delta x^3 + \nu x^2 y + \mu x y^2, \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y + \gamma(x^2 + y^2) + \delta x^2 y + \nu x y^2 + \mu y^3, \end{cases} \quad (5.68)$$

где  $\delta$ ,  $\nu$  и  $\mu$  определены равенствами (5.67) с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = h_2 \{x^2 + y^2 + h[\gamma^2 x^4 - 2\gamma\lambda x^3 y + (\gamma^2 + \lambda^2)x^2 y^2 - 2\gamma\lambda x y^3 + \lambda^2 y^4]\}. \quad (5.69)$$

При  $\alpha = 0$

$$\delta = -\beta\gamma\lambda h, \quad \nu = \beta(\lambda^2 - \gamma^2)h, \quad \mu = \beta\gamma\lambda h.$$

Условие (5.61), как видим, выполняется. В этом случае имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta y + \lambda(x^2 + y^2) + \beta h[-\gamma\lambda x^3 + (\lambda^2 - \gamma^2)x^2 y + \gamma\lambda x y^2], \\ \dot{y} = \beta x + \gamma(x^2 + y^2) + \beta h[-\gamma\lambda x^2 y + (\lambda^2 - \gamma^2)x y^2 + \gamma\lambda y^3], \end{cases} \quad (5.70)$$

интегрирующей функцией которой также является функция (5.69).

Не интегрируя системы (5.68) и (5.70) в общем виде, положим и в том и в другом случае независимые параметры  $\beta, \gamma, \lambda, h$ , входящие в правые части уравнений, равными 1. Тогда, полагая в первом случае  $\alpha$  также равным 1, и, вычисляя параметры  $\delta, \nu, \mu$  по формулам (5.67), получим соответственно системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2 - 2x^2 y + 2x y^2, \\ \dot{y} = x + y + x^2 + y^2 - 2x y^2 + 2y^3 \end{cases} \quad (5.71)$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + y^2 - x^3 + x y^2, \\ \dot{y} = x + x^2 + y^2 - x^2 y + y^3 \end{cases} \quad (5.72)$$

с одной и той же интегрирующей функцией

$$M(x, y) = (x^2 + y^2)[1 + (x - y)^2].$$

Интегрируя соответствующие уравнения в полных дифференциалах, получаем для первой системы (5.71) общий интеграл в виде

$$(x^2 + y^2)e^{2\operatorname{arctg}\frac{(x-y)(1+x+y)}{x+y-(x-y)^2}} = C(1 + (x - y)^2),$$

а для системы (5.72) – в виде

$$(x^2 + y^2)e^{2\operatorname{arctg}(x-y)} = C(1 + (x - y)^2).$$

Полагая  $h = -1$ , а все остальные параметры, как и прежде, равными 1, получаем соответственно системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2 + 2x^2y - 2xy^2, \\ \dot{y} = x + y + x^2 + y^2 + 2xy^2 - 2y^3 \end{cases} \quad (5.73)$$

и

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + y^2 + x^3 - xy^2, \\ \dot{y} = x + x^2 + y^2 + x^2y - y^3 \end{cases} \quad (5.74)$$

с одной и той же интегрирующей функцией

$$M(x, y) = (x^2 + y^2)[1 - (x - y)^2].$$

Общие интегралы этих систем суть:

$$(x^2 + y^2)e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = C(y - x + 1)^2$$

для системы (5.73),

$$(x^2 + y^2) = C(y - x + 1)^2$$

для системы (5.74).

Г) Мы уже использовали тот факт, что формы, входящие в выражение для  $M(x, y)$ , можно в той или иной степени конкретизировать. В заключение найдем динамические системы вида (5.41), для которых форма  $M_4(x, y)$  представляется в виде

$$M_4(x, y) = a_{40}x^4 + a_{04}y^4,$$

так что  $a_{31} = a_{22} = a_{13} = 0$ . Из (5.50) сразу получаем, что  $\lambda = \gamma = 0$ , равенства (5.49) принимают вид

$$\begin{cases} 2\alpha a_{40} &= (b_{30} + c_{21})h_2, \\ -2\beta a_{40} &= (c_{12} - c_{30})h_2, \\ 0 &= (-b_{12} + 3c_{03} + 3b_{30} - c_{21})h_2, \\ 2\beta a_{04} &= (-b_{30} + b_{21})h_2, \\ 2\alpha a_{04} &= (b_{12} + c_{03})h_2. \end{cases} \quad (5.75)$$

а равенства (5.51) сводятся к равенствам

$$-b_{30} + c_{21} = 0, \quad -b_{21} + c_{12} = 0, \quad -b_{12} + c_{03} = 0, \quad b_{03}a_{40} + c_{30}a_{04} = 0. \quad (5.76)$$

Из равенств (5.75) и (5.76) находим

$$\begin{aligned} b_{30} &= \alpha h, \quad b_{21} = 0, \quad b_{21} = -2\beta h, \quad b_{12} = -\alpha h, \quad b_{03} = \omega, \\ c_{30} &= \omega, \quad c_{21} = \alpha h, \quad c_{12} = -2\beta h + \omega, \quad c_{03} = -\alpha h, \\ a_{40} &= -a_{04} = hh_2, \end{aligned}$$

где мы опять положили  $h = h_4 / h_2$ .

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y + \alpha h x^3 + (-2\beta h + \omega)x^2y - \alpha h xy^2 + \omega y^3, \\ \dot{y} = \beta x + \alpha y + \omega x^3 + \alpha h x^2y + (-2\beta h + \omega)xy^2 - \alpha h y^3, \end{cases}$$

с интегрирующей функцией

$$M(x, y) = h_2[x^2 + y^2 + h(x^4 - y^4)].$$

Интегрируя соответствующее этой системе уравнение в полных дифференциалах, находим ее общий интеграл в виде

$$(x^2 + y^2)^\beta [1 + h(x^2 - y^2)]^{\frac{\omega - \beta h}{h}} e^{2\alpha \arctan \frac{x}{y}} = C \quad (h \neq 0).$$

При  $\alpha = 0$  имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -\beta y + (\omega - 2\beta h)x^2 y + \omega y^3, \\ \dot{y} = \beta x + \omega x^3 + (\omega - 2\beta h)xy^2 \end{cases}$$

с этой же интегрирующей функцией. Общий интеграл этой системы

$$(x^2 + y^2)^\beta [1 + h(x^2 - y^2)]^{\frac{\omega - \beta h}{h}} = C$$

найден, как и прежде, интегрированием соответствующего уравнения в полных дифференциалах.

### §6. Линейные однородные системы с постоянной матрицей.

В этом параграфе мы покажем, каким образом знание интегрирующей функции помогает установить фазовый портрет линейной однородной системы

$$\dot{x} = ax + by \equiv \xi^1, \quad \dot{y} = cx + dy \equiv \xi^2 \tag{6.1}$$

с действительной постоянной ненулевой матрицей

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Полученные ниже результаты представляют интерес как сами по себе, так и с точки зрения их использования при рассмотрении нелинейных систем, так как исследование поведения траекторий любой нелинейной динамической системы в окрестности любого ее состояния равновесия всегда начинается с рассмотрения системы наинизшего приближения рассматриваемой системы в окрестности рассматриваемого состояния равновесия, которое может оказаться линейным.

Интегрирующая функция для системы (6.1) строится чрезвычайно просто. Так как матрица (6.2) коммутирует с единичной матрицей того же порядка, то для системы (6.1) заранее известна одна из допускаемых ею групп (группа подобных растяжений) с оператором

$$Af = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y},$$

коммутирующим с оператором

$$Xf = \xi^1 \frac{\partial f}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

соответствующим системе (6.1). Таким образом, одной из интегрирующих функций для системы (6.1) является функция

$$M(x, y) = \begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ x & y \end{vmatrix} = (ax + by)y - (cx + dy)x = -cx^2 + (a - d)xy + by^2, \tag{6.3}$$

представляющая собой, как видно, квадратичную форму относительно переменных  $x$  и  $y$ .

Применительно к системе  $\dot{x} = ax, \dot{y} = ay$  ( $a \neq 0$ ) формула (6.3) дает  $M(x, y) = (xy - xy) \equiv 0$ . Переписывая это тождество в виде  $M(x, y) = (x, y) \cdot (y, -x) \equiv 0$ , мы видим, что оно выражает свойство ортогональности траекторий векторных полей  $\alpha \bar{\zeta}_1 = \alpha(x, y)$  и  $\bar{\zeta}_2 = (y, -x)$ , изображенных на рис. 6.1. В качестве ненулевой интегрирующей функции для рассматриваемой системы можно взять произвольную однородную функцию  $M_2(x, y)$  второй степени, так как для нее  $XM_2 = 2M_2 = M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}$ , где  $Xf$  – соответствующий системе линейный дифференциальный

оператор и  $div \bar{\xi} = 2\alpha$  – дивергенция определяемого системой векторного поля  $\alpha \bar{\xi}_1$ . Отметим, что состояние равновесия  $O(0,0)$  рассматриваемой системы представляет собой так называемый дикритический узел, имеющий место только в случае этой системы.

Для дальнейшего полезно отметить, что функция  $M(x, y)$  может быть записана в виде

$$M(x, y) = \bar{\xi} \cdot \bar{\xi}_2. \quad (6.4)$$

Кроме того, мы будем использовать далее также функцию

$$M_1(x, y) = \bar{\xi} \cdot \bar{\xi}_1. \quad (6.5)$$

Разворачивая выражение (6.5), получаем

$$M_1(x, y) = (ax + by)x + (cx + dy)y = ax^2 + (b + c)xy + dy^2,$$

так что функция  $M_1(x, y)$  также представляет собой квадратичную форму относительно переменных  $x$  и  $y$ . Равенства (6.4) и (6.5) позволяют изучать поведение траекторий векторного поля  $\bar{\xi}$  относительно траекторий векторных полей  $\bar{\xi}_1$  и  $\bar{\xi}_2$ .

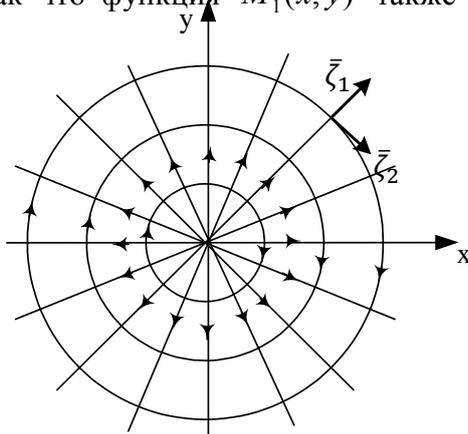


Рис.6.1

Приведем необходимые для дальнейшего сведения из теории кривых второго порядка [17].

Пусть

$$V(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \quad (6.6)$$

– произвольная действительная квадратичная форма, среди коэффициентов которой хотя бы один отличен от нуля. Равенство

$$V(x, y) = h, \quad (6.7)$$

где  $h$  – произвольная постоянная, определяет на плоскости  $Oxy$  семейство линий уровня функции  $V(x, y)$ . Вид этих линий зависит от того, какие значения принимают величины

$$s = a_{20} + a_{02}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{20} & a_{11} \\ a_{11} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{20} & \frac{a_{11}}{2} & 0 \\ \frac{a_{11}}{2} & a_{02} & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{vmatrix}$$

– инварианты кривой второго порядка.

Именно, при выполнении условия

$$\delta > 0$$

равенство (6.7) определяет семейство действительных эллипсов, если

$$D \neq 0 \quad (h \neq 0), \quad sD = -sh\delta < 0,$$

и точку  $O(0,0)$ , если  $D = 0$ , что равносильно условию  $h = 0$ . Выполнение перечисленных условий, согласно известному критерию Сильвестра, означает знакоопределенность функции (6.6) на всей плоскости  $Oxy$ . При этом, если  $s > 0$ , то должно быть  $h > 0$ , т.е. функция  $V(x, y)$  будет в этом случае положительно определенной, и если  $s < 0$ , то должно быть  $h < 0$ , т.е. функция  $V(x, y)$  будет в этом случае отрицательно определенной.

Далее, если

$$\delta < 0,$$

то равенство (6.7) определяет семейство гипербол при  $D \neq 0$  ( $h \neq 0$ ) и пару пересекающихся в точке  $O(0,0)$  прямых при  $D = 0$  ( $h = 0$ ). Функция  $V(x, y)$  в этом случае является знакопеременной: обращаясь в нуль на указанных прямых, она сохраняет знак в каждой из областей, на которые эти прямые разбивают плоскость  $Oxy$ .

Наконец, если

$$\delta = 0,$$

то равенство (6.7) определяет на плоскости  $Oxy$  семейство параллельных прямых. Функция  $V(x, y)$  в этом случае является знакопостоянной: обращаясь в нуль на прямой, соответствующей значению  $h = 0$ , во всех остальных точках плоскости она принимает значения только одного знака.

Далее мы исследуем поведение траекторий системы (6.1) в случаях знакоопределенной, знакопостоянной и знакопеременной функции  $M(x, y)$  в зависимости от того, какими свойствами при этом обладает функция  $M_1(x, y)$ .

**Случай 1.** Функции  $M(x, y)$  и  $M_1(x, y)$  – знакоопределенные. Тогда, обозначив

$$s = b - c, \quad \sigma = a + d, \quad \Delta = ad - bc,$$

соответственно имеем

$$\delta = \begin{vmatrix} -c & (a-d)/2 \\ (a-d)/2 & b \end{vmatrix} = \Delta - \frac{\sigma^2}{4} > 0, \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} a & (b+c)/2 \\ (b+c)/2 & d \end{vmatrix} = \Delta - \frac{s^2}{4} > 0.$$

Заметим, что из этих неравенств следует неравенство  $\Delta > 0$ . При  $s > 0$  функция  $M(x, y)$  является положительно определенной, при  $s < 0$  – отрицательно определенной. Функция  $M_1(x, y)$  положительно определена при  $\sigma > 0$  и отрицательно определена при  $\sigma < 0$ . Заметим также, что ни  $s$ , ни  $\sigma$  не могут быть нулями.

Пусть функция  $M(x, y)$  – положительно определенная ( $s > 0$ ). Равенство

$$M(x, y) = h, \tag{6.8}$$

где  $h \geq 0$ , определяет на плоскости  $Oxy$  семейство конгруэнтных эллипсов, стягивающихся к точке  $O(0, 0)$  при  $h \rightarrow 0$ . Эта точка является единственной траекторией системы (6.1), на которой определяющая функция обращается в нуль.

Чтобы установить поведение остальных траекторий системы, обратимся к равенству (1.7). Учитывая очевидное тождество  $XM \equiv \bar{\xi} \cdot \text{grad}M$ , равенство (6.8) и равенство  $\text{div} \bar{\xi} = \sigma$ , получаем равенство

$$\bar{\xi} \cdot \text{grad}M = h\sigma \tag{6.9}$$

которое показывает, что вдоль любой линии уровня (6.8), отличной от точки  $O(0, 0)$ , вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $\text{grad}M$  либо только острый, либо только тупой угол. Так как в рассматриваемом случае  $h > 0$ , то этот угол будет острым при  $\sigma > 0$  и тупым – при  $\sigma < 0$  (соответственно при положительно определенной и отрицательно определенной функции  $M_1(x, y)$ ). Остается заметить, что при положительно определенной функции  $M(x, y)$  направление вектора  $\text{grad}M$  в рассматриваемой точке линии уровня совпадает с направлением вектора внешней нормали к линии уровня в этой точке. Следовательно, в рассматриваемом случае все траектории векторного поля  $\bar{\xi}$  (системы (6.1)) при  $\sigma > 0$  покидают область, ограниченную любой линией уровня (6.8), неограниченно удаляясь от начала координат при  $t \rightarrow +\infty$ , а при  $\sigma < 0$  входят в эту область, неограниченно приближаясь к началу координат при  $t \rightarrow +\infty$ . В первом случае состояние равновесия  $O(0, 0)$  системы неустойчиво, во втором – асимптотически устойчиво.

Дополнительную информацию о поведении траекторий системы мы получим, если воспользуемся равенствами (6.4) и (6.5). Эти равенства показывают, что при  $s > 0$  вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $\bar{\zeta}_2$  острый угол, а с вектором  $\bar{\zeta}_1$  он образует острый угол при  $\sigma > 0$  и тупой угол – при  $\sigma < 0$ . Взаимное расположение всех рассмотренных векторов в произвольной точке произвольной линии уровня показано на рис.6.2 а) и 6.2 б).

Покажем теперь, что траектории системы являются спиралями, накручивающимися на состояние равновесия  $O(0, 0)$ , либо скручивающимися с него. Действительно, в противном

случае должна существовать по крайней мере одна траектория системы, входящая в начало координат (при  $t \rightarrow +\infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$ ) в некотором определенном направлении, т.е. касающаяся в начале координат некоторого луча  $\varphi = \varphi_0 (= const)$ . Преобразованиями допускаемой группы подобия такая траектория может преобразовываться только в траектории, также касающиеся луча  $\varphi = \varphi_0$  в начале координат. Отсюда следует, что область, ограниченная указанной траекторией и лучом  $\varphi = \varphi_0$ , сплошь заполнена траекториями системы, касающимися луча  $\varphi = \varphi_0$  в начале координат. Ясно, что луч  $\varphi = \varphi_0$  в таком случае сам является траекторией системы, а потому вдоль этого луча  $M(x, y) = \bar{\xi} \cdot \bar{\zeta}_2 = 0$ . Это, однако, противоречит знакоопределенности функции  $M(x, y)$  на всей плоскости  $Oxy$ , что и доказывает высказанное утверждение.

Фазовые портреты системы (6.1) в рассмотренном случае положительно определенной функции  $M(x, y)$  изображены на рис. 6.2 а) и б).

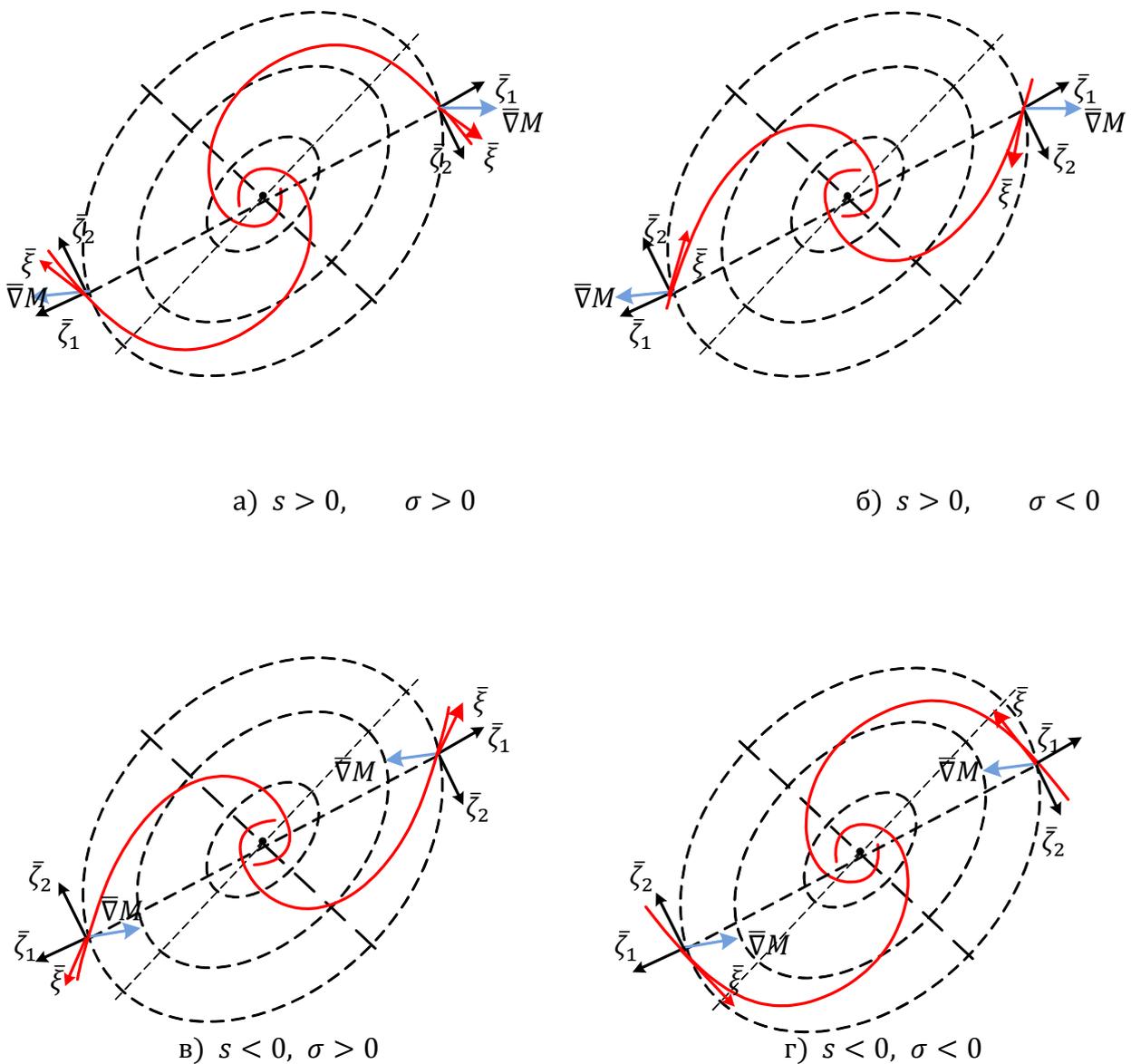


Рис. 6.2.

В случае отрицательно определенной функции  $M(x, y)$  ( $s < 0$ ) при помощи аналогичных рассуждений можно показать, что траектории системы ведут себя так, как показано на рис.6.2

в) и г). Во всех четырех случаях состояние равновесия  $O(0, 0)$  является фокусом (неустойчивым при  $\sigma > 0$  и устойчивым при  $\sigma < 0$ ).

**Случай 2.** Функция  $M(x, y)$  – знакоопределенная, функция  $M_1(x, y)$  – знакопостоянная. В этом случае

$$\delta = \Delta - \frac{\sigma^2}{4} > 0, \quad \delta_1 = \Delta - \frac{s^2}{4} = 0$$

так что

$$0 < \sigma^2 < s^2 = 4\Delta.$$

Заметим, что величина  $\sigma$  нулем быть не может.

Покажем сначала, что знак функции  $M_1(x, y)$  совпадает со знаком  $\sigma$ . Действительно, из выражения для функции  $M_1(x, y)$  следует, что  $a \neq 0$  и  $d \neq 0$ . Поэтому из условия  $\delta_1 = 0$  получаем

$$d = \frac{(b+c)^2}{4a}.$$

Тогда

$$M_1(x, y) = ax^2 + (b+c)xy + \frac{(b+c)^2}{4a}y^2 = a \left[ x^2 + \frac{(b+c)}{a}xy + \frac{(b+c)^2}{4a^2}y^2 \right] = a \left( x + \frac{b+c}{2a}y \right)^2,$$

откуда следует, что знак функции  $M_1(x, y)$  совпадает со знаком  $a$ . Но из того же условия  $\delta_1 = 0$  получаем

$$ad = (b+c)^2 / 4,$$

откуда следует, что  $a$  и  $d$  имеют одинаковые знаки, совпадающие со знаком  $\sigma$ , так как  $\sigma = a + d$ . Отсюда в свою очередь следует, что знак функции  $M_1(x, y)$  совпадает со знаком  $\sigma$ .

Теперь достаточно заметить, что рассуждения предыдущего пункта остаются в силе для всех точек плоскости  $Oxy$ , кроме точек прямой  $L$ , на которой функция  $M_1(x, y)$  обращается в нуль. В точках этой прямой, согласно равенству (6.5), векторы  $\xi$  и  $\bar{\zeta}_1$  взаимно перпендикулярны. Остается в силе и доказательство того, что ни одна траектория системы не может входить в начало координат (при  $t \rightarrow +\infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$ ) в определенном направлении. Следовательно, траекториями системы являются деформированные в точках прямой  $L$  спирали, скручивающиеся с состояния равновесия  $O(0, 0)$  и уходящие при  $t \rightarrow +\infty$  в бесконечность при  $\sigma > 0$ , либо накручивающиеся на состояние равновесия при  $t \rightarrow +\infty$  в случае  $\sigma < 0$ .

Мы не приводим фазовые портреты системы в этом случае, так как за исключением указанной особенности они ничем не отличаются от фазовых портретов, изображенных на рис. 6.2.

**Случай 3.** Функция  $M(x, y)$  – знакоопределенная, функция  $M_1(x, y)$  – знакопеременная. В этом случае

$$\delta = \Delta - \frac{\sigma^2}{4} > 0, \quad \delta_1 = \Delta - \frac{s^2}{4} < 0$$

так что

$$0 \leq \sigma^2 < 4\Delta < s^2.$$

Как и прежде, сохраняется неравенство  $\Delta > 0$ . Заметим, что величина  $\sigma$  может быть равной нулю.

При  $\sigma \neq 0$  отличие от предыдущего случая состоит только в том, что теперь функция  $M_1(x, y)$  обращается в нуль на двух прямых, проходящих через начало координат, которые траекториями системы пересекаются под прямым углом. Как и в предыдущих случаях,

состояние равновесия  $O(0,0)$  системы (6.1) является фокусом, неустойчивым при  $\sigma > 0$  и устойчивым при  $\sigma < 0$ .

Пусть теперь  $\sigma = 0$ . Тогда из равенства (6.9) получаем

$$XM \equiv \bar{\xi} \cdot \text{grad}M \equiv 0,$$

т.е. функция  $M(x, y)$  является общим интегралом системы (6.1). Следовательно, линии уровня (6.8) являются траекториями этой системы, так что вектор  $\bar{\xi}$  в каждой точке любой линии уровня направлен по касательной к линии уровня в этой точке. Направление движения изображающей точки по траекториям системы легко определяется при помощи равенства (6.4), согласно которому в каждой точке плоскости  $Oxy$ , отличной от точки  $O(0, 0)$ , вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $\bar{\zeta}_2$  острый угол при положительно определенной функции  $M(x, y)$ , и тупой угол – при отрицательно определенной функции  $M(x, y)$ . Фазовые портреты системы, соответствующие рассматриваемому случаю изображены на рис.6.3 а)-б). Состояние равновесия  $O(0, 0)$  в этом случае является центром.

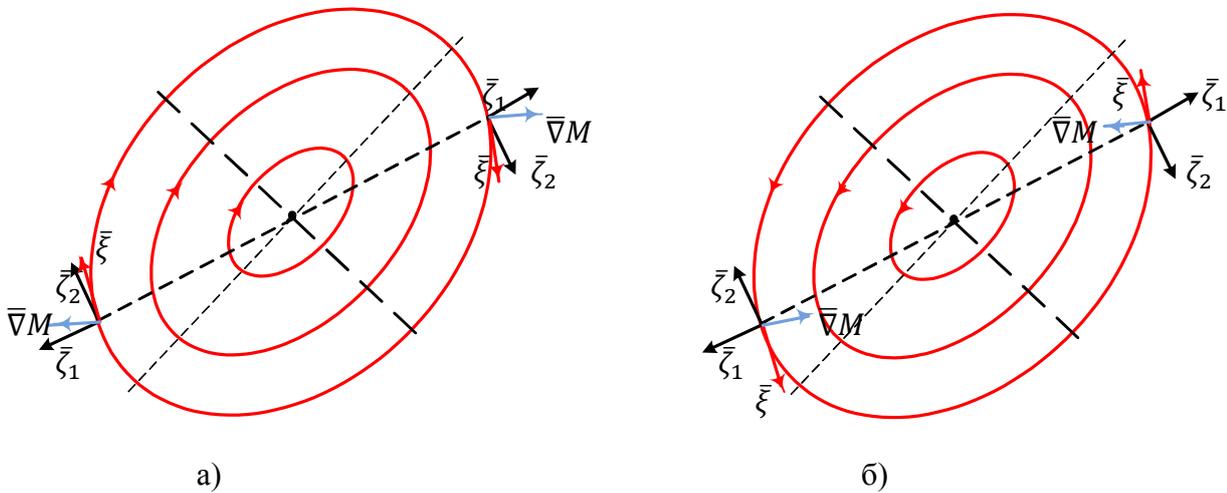


Рис. 6.3.

**Случай 4.** Функция  $M(x, y)$  – знакопостоянная, функция  $M_1(x, y)$  – знакоопределенная. В этом случае

$$\delta = \Delta - \frac{\sigma^2}{4} = 0, \quad \delta_1 = \Delta - \frac{s^2}{4} > 0$$

так что

$$0 < s^2 < 4\Delta = \sigma^2.$$

При  $s > 0$  функция  $M(x, y)$  постоянно положительна, при  $s < 0$  – постоянно отрицательна. Функция  $M_1(x, y)$  положительно определена при  $\sigma > 0$  и отрицательно определена при  $\sigma < 0$ .

Пусть  $s > 0$ . Тогда из равенства (6.4) следует, что вдоль любого луча, исходящего из начала координат, вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $\bar{\zeta}_2$  острый угол, кроме лучей  $\gamma^1$  и  $\gamma^2$ , принадлежащих прямой  $\Gamma$ , на которой функция  $M(x, y)$  обращается в нуль (в точках этих лучей вектор  $\bar{\xi}$  перпендикулярен вектору  $\bar{\zeta}_2$ ).

Пусть, далее,  $\sigma > 0$ . Тогда из равенства (6.5) следует, что вдоль любого луча, исходящего из начала координат, вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $\bar{\zeta}_1$  острый угол. В частности, вдоль лучей  $\gamma^1$  и  $\gamma^2$  направление вектора  $\bar{\xi}$  совпадает с направлением вектора  $\bar{\zeta}_1$ , так что эти лучи являются траекториями системы (6.1), выходящими из начала координат в некоторых определенных направлениях.

Заметим теперь, что неравенство  $\xi \cdot \xi_1 > 0$  сохраняется вдоль любой окружности с центром в начале координат. Отсюда следует, что траектории системы, выходя из начала координат, покидают области, ограниченные такими окружностями, и никогда в них не возвращаются. Т.е. состояние равновесия неустойчиво. При этом ни одна из траекторий не может выходить из начала координат в направлении, отличном от направлений лучей  $\gamma^1$  и  $\gamma^2$  (это утверждение доказывается точно так же, как и в случае 1. Следовательно, все траектории системы, отличные от траекторий  $\gamma^1$  и  $\gamma^2$ , делятся на два класса траекторий: траектории, выходящие из начала координат в направлении луча  $\gamma^1$ , и траектории, выходящие из начала координат в направлении луча  $\gamma^2$ .

Отметим, наконец, что линиями уровня функции  $M(x, y)$  являются прямые линии, параллельные прямой  $\Gamma$ . В рассматриваемом случае  $\sigma > 0$  из равенства (6.9) следует, что в каждой точке любой линии уровня вектор  $\xi$  образует с вектором  $gradM$  острый угол. Этот угол определяется равенством

$$\cos(\xi, gradM) = \frac{\xi \cdot gradM}{|\xi| |gradM|} = \frac{M\sigma}{|\xi| |gradM|}. \quad (6.10)$$

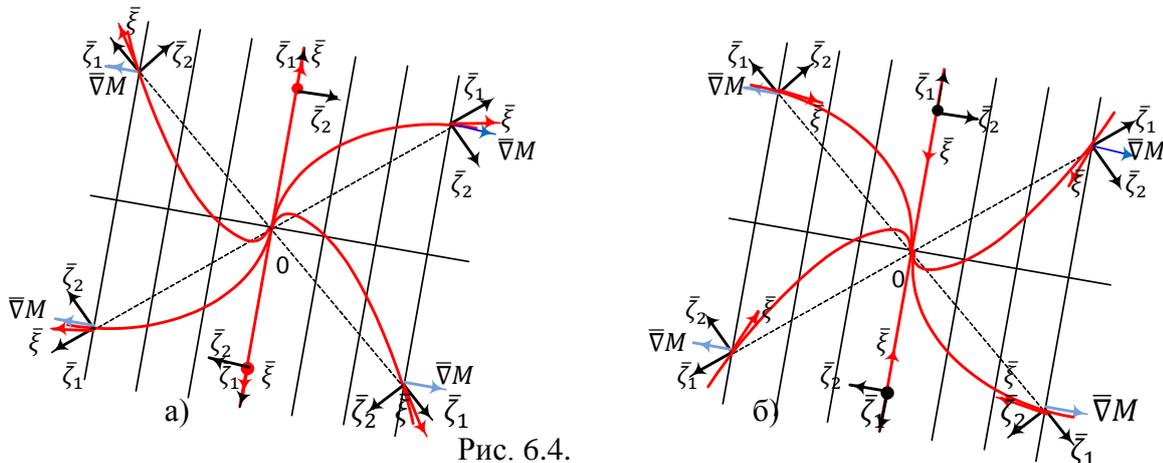


Рис. 6.4.

Так как числитель и знаменатель дроби в правой части этого равенства суть однородные многочлены  $x$  и  $y$  одной и той же степени, то после перехода к полярным координатам  $\rho$  и  $\varphi$  мы получим равенство, правая часть которого будет зависеть только от  $\varphi$ . Отсюда следует, что вдоль любого луча  $\varphi = \varphi_0$  указанный угол сохраняет постоянное значение. В частности, вдоль луча, определяемого равенством  $\cos(\xi, gradM) = 1$ , направление вектора  $\xi$  совпадает с направлением вектора  $gradM$ , т.е. вдоль этого луча траектории системы пересекают линии уровня функции  $M(x, y)$  под прямым углом. При переходе через этот луч меняется взаимная ориентация векторов  $\xi$  и  $gradM$ .

Из изложенного следует, что в рассмотренном случае  $s > 0$  и  $\sigma > 0$  траектории системы (6.1) ведут себя так, как показано на рис. 6.4 а). В случае  $s > 0$  и  $\sigma < 0$  траектории системы ведут себя так, как показано на рис. 6.4 б). Анализ остальных случаев аналогичен. Соответствующие им фазовые портреты мы не приводим.

Состояние равновесия  $O(0, 0)$  – узел, неустойчивый при  $\sigma > 0$  и устойчивый при  $\sigma < 0$ .

**Случай 5.** Функции  $M(x, y)$  и  $M_1(x, y)$  – знакопостоянные. В этом случае

$$\delta = \Delta - \frac{\sigma^2}{4} = 0, \quad \delta_1 = \Delta - \frac{s^2}{4} = 0$$

так что

$$0 < 4\Delta = \sigma^2 = s^2.$$

Исследование этого случая мало отличается от исследования предыдущего. К тому, что сказано в предыдущем случае, следует добавить, что на прямой, определяемой равенством  $M_1(x, y) = 0$ , векторы  $\bar{\xi}$  и  $\bar{\zeta}_1$  взаимно перпендикулярны, т.е. траектории системы пересекают эту прямую под прямым углом.

На рис. 6.5 а) и б) изображены фазовые портреты системы соответственно в случаях  $s > 0$ ,  $\sigma > 0$  и  $s < 0$ ,  $\sigma < 0$ . Фазовые портреты, соответствующие двум оставшимся случаям, мы не приводим ввиду их очевидности.

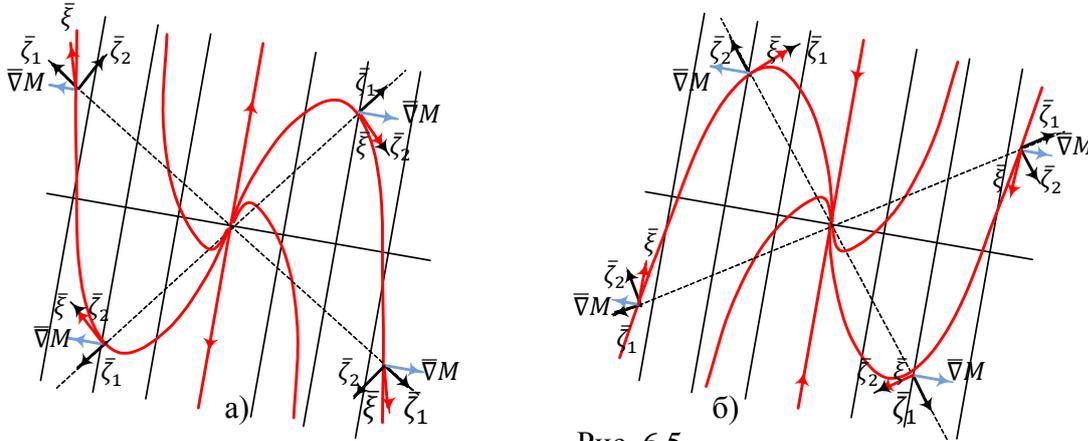


Рис. 6.5.

**Случай 6.** Функция  $M(x, y)$  – знакопостоянная, функция  $M_1(x, y)$  – знакопеременная. В этом случае

$$\delta = \Delta - \frac{\sigma^2}{4} = 0, \quad \delta_1 = \Delta - \frac{s^2}{4} < 0$$

так что

$$0 \leq 4\Delta = \sigma^2 < s^2.$$

Пусть сначала  $\Delta > 0$  и, кроме того,  $s > 0$  и  $\sigma > 0$ .

Функция  $M(x, y)$  положительна всюду на плоскости  $Oxy$ , кроме прямой  $\Gamma$ , на которой она обращается в нуль. Равенство (6.4) показывает, что вдоль любого луча, исходящего из начала координат (кроме лучей, принадлежащих прямой  $\Gamma$ ), вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $\bar{\zeta}_2$  острый угол.

Функция  $M_1(x, y)$  обращается в нуль на прямых  $L_1$  и  $L_2$ , пересекающихся в начале координат. В каждой из областей, на которые прямые  $L_1$  и  $L_2$  разбивают плоскость  $Oxy$ , функция  $M_1(x, y)$  сохраняет знак. В областях, определяемых неравенством  $M_1(x, y) > 0$ , вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $\bar{\zeta}_1$  острый угол, в областях, определяемых неравенством  $M_1(x, y) < 0$  – тупой. Прямые  $L_1$  и  $L_2$  пересекаются траекториями системы под прямым углом.

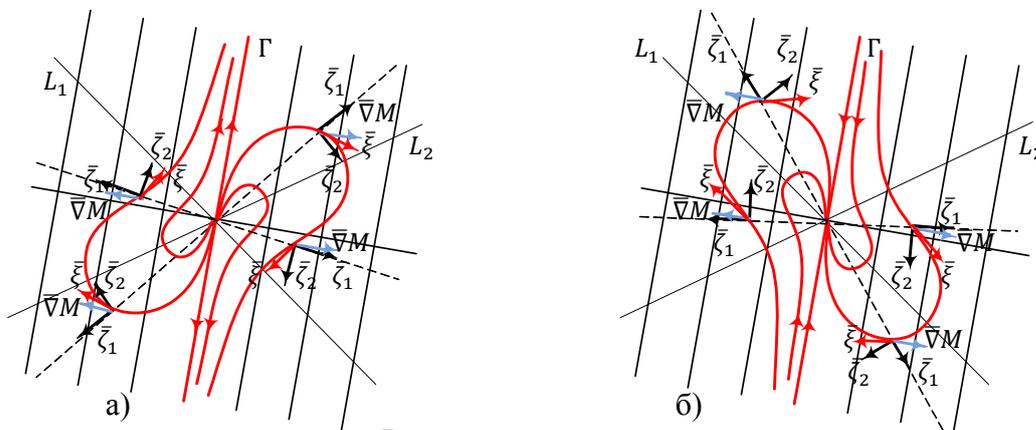


Рис. 6.6.

Линии ненулевого уровня функции  $M(x, y)$  суть прямые линии, параллельные прямой  $\Gamma$ . В рассматриваемом случае  $\sigma > 0$  из равенства (6.9) следует, что в каждой точке любой из этих прямых вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $gradM$  острый угол, т.е. траектории системы пересекают эти прямые изнутри наружу, удаляясь от начала координат. Следовательно, в рассматриваемом случае состояние равновесия системы  $O(0, 0)$  неустойчиво.

Фазовый портрет системы в рассматриваемом случае имеет вид, показанный на рис. 6.6 а). На рис. 6.6 б) показан фазовый портрет, соответствующий случаю  $s < 0$  и  $\sigma > 0$ . Фазовые портреты, соответствующие другим возможным случаям, очевидны, и мы их не приводим.

Если  $\Delta = \sigma = 0$ , то при  $a \neq 0$ ,  $d \neq 0$  имеем  $c = \lambda a$ ,  $d = \lambda b$ , так что система имеет вид  $\dot{x} = ax + by$ ,  $\dot{y} = \lambda(ax + by)$ ,

Тогда

$$M(x, y) = (ax + by)(y - \lambda x).$$

Но так как  $a + d = 0$ , то  $d = -a$ , так что  $a = -\lambda b$ , поэтому

$$M(x, y) = b(y - \lambda x)^2$$

и обращается в нуль на прямой

$$y - \lambda x = 0 \quad (\lambda = -\frac{a}{b}).$$

Линии уровня (6.8) определяются равенством

$$b(y - \lambda x)^2 = h,$$

где знак  $h$  должен совпадать со знаком  $b$ . Так как  $\sigma = 0$ , то из равенства (6.9) получаем, что последнее равенство определяет траектории указанной системы, представляющие собой прямые линии, параллельные прямой  $y - \lambda x = 0$ , все точки которой являются состояниями равновесия этой системы. Направление движения изображающей точки по траекториям легко определяется при помощи равенств (6.4) и (6.5).

Функция  $M_1(x, y)$ , определяемая равенством

$$M_1(x, y) = b(y - \lambda x)(x + \lambda y),$$

обращается в нуль на взаимно перпендикулярных прямых

$$y - \lambda x = 0, \quad x + \lambda y = 0.$$

Фазовые портреты системы, соответствующие случаям  $s > 0$  и  $s < 0$  изображены на рис. 6.7 а) и б).

Если  $a = d = 0$ , то из равенства  $\Delta = ad - bc = 0$  следует, что либо  $b \neq 0$ ,  $c = 0$ , либо  $b = 0$ ,  $c \neq 0$  (равенство  $b = c = 0$  невозможно, так как  $s \neq 0$ ). В первом случае имеем систему

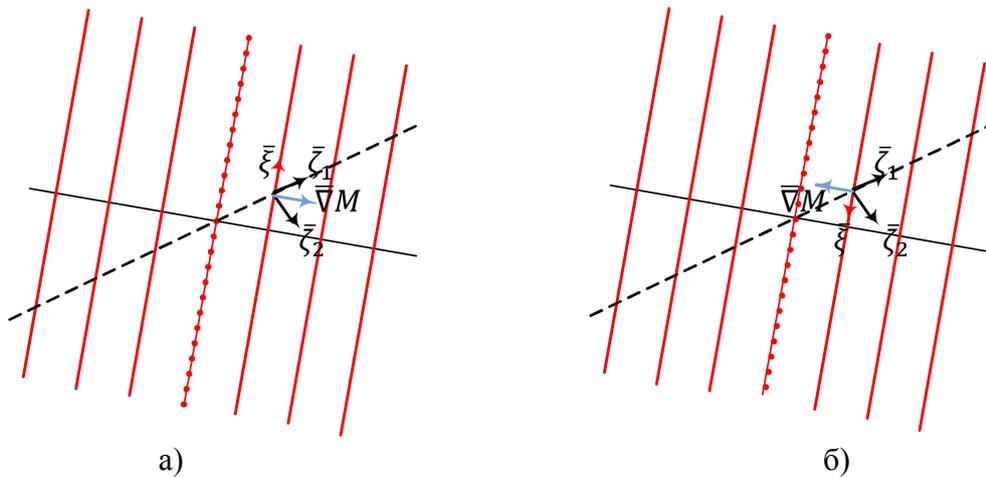


Рис. 6.7.

$$\begin{cases} \dot{x} = by, \\ \dot{y} = 0, \end{cases}$$

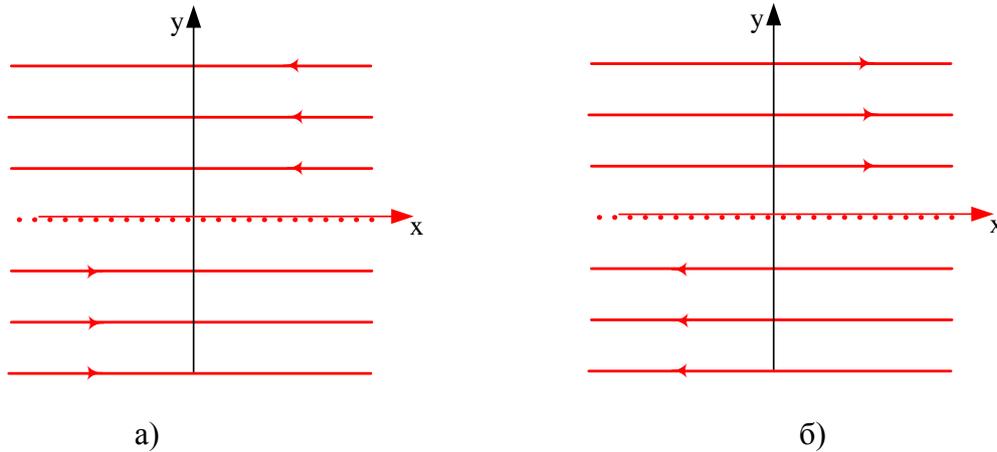


Рис.6.8.

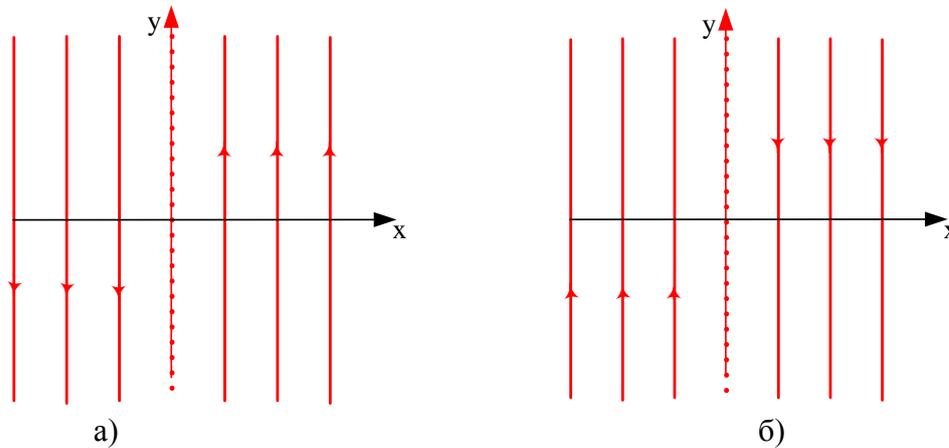


Рис. 6.9.

с очевидными фазовыми портретами, изображенными на рис. 6.8 а) и б) (ось  $Ox$  сплошь заполнена состояниями равновесия системы). Во втором случае имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = cx \end{cases}$$

с очевидными фазовыми портретами, изображенными на рис. 6.9 а) и б) (ось  $Oy$  сплошь заполнена состояниями равновесия системы).

**Случай 7.** Функция  $M(x, y)$  – знакопеременная, функция  $M_1(x, y)$  – знакоопределенная. В этом случае

$$\delta = \Delta - \frac{\sigma^2}{4} < 0, \quad \delta_1 = \Delta - \frac{s^2}{4} > 0$$

так что

$$0 \leq s^2 < 4\Delta < \sigma^2.$$

Пусть  $\sigma > 0$ . Тогда функция  $M_1(x, y)$  положительно определена на всей плоскости  $Oxy$ . Поэтому вдоль любого луча, исходящего из начала координат, вектор  $\xi$  образует с вектором  $\bar{\zeta}_1$  острый угол. Отсюда следует, что любая окружность с центром в начале координат пересекается траекториями системы изнутри наружу, т.е. траектории системы, выходя из начала координат, при  $t \rightarrow +\infty$  уходят в бесконечность, так что состояние равновесия системы  $O(0, 0)$  неустойчиво.

Функция  $M(x, y)$  обращается в нуль на прямых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , пересекающихся в точке  $O(0, 0)$ . Эта точка выделяет на прямых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  лучи  $\gamma_1^1, \gamma_1^2$  и  $\gamma_2^1, \gamma_2^2$ , являющиеся траекториями системы (6.1). В областях, ограниченных этими лучами, функция  $M(x, y)$  сохраняет знак. При этом в областях, определяемых неравенством  $M(x, y) > 0$ , вектор  $\xi$  образует с вектором  $\zeta_2$  острый угол, а в областях, определяемых неравенством  $M(x, y) < 0$  – тупой.

Можно показать (так же, как это сделано в случае 1), что кроме траекторий  $\gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_2^1, \gamma_2^2$  траекторий системы (6.1), выходящих из начала координат в других определенных направлениях, не существует. Отсюда следует, что в областях, ограниченных траекториями  $\gamma_1^1, \gamma_1^2, \gamma_2^1, \gamma_2^2$ , траектории системы выходят из начала координат в направлении одной из ограничивающих траекторий.

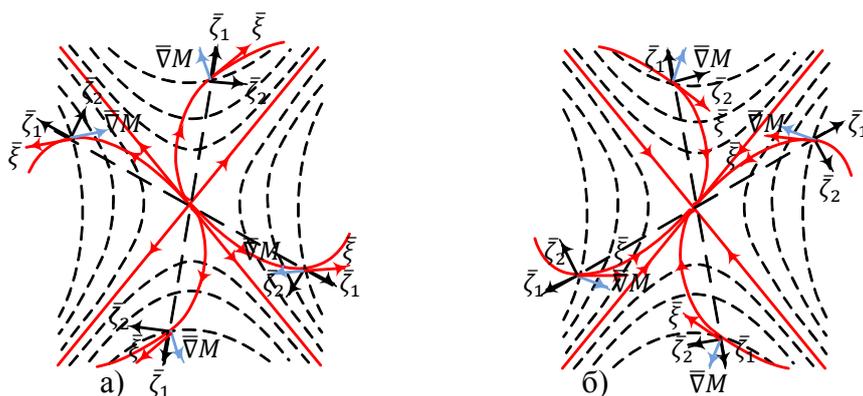


Рис.6.10.

Линии уровня функции  $M(x, y)$ , определяемые равенством (6.8), в рассматриваемом случае являются гиперболами, вырождающимися в прямые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  при  $h = 0$ . В каждой точке любой из гипербол вектор  $\xi$  образует с вектором  $gradM$  либо только острый, либо только тупой угол в зависимости от того, какие знаки имеют  $h$  и  $\sigma$ . В частности, в точках лучей, определяемых равенством (6.10), векторы  $\xi$  и  $gradM$  коллинеарны, т.е. траектории системы пересекают указанные гиперболы под прямым углом.

Фазовый портрет системы (6.1), соответствующий случаю  $\sigma > 0$ , изображен на рис. 6.10 а). На рис. 6.10 б) изображен фазовый портрет системы, соответствующий случаю  $\sigma < 0$ . Состояние равновесия  $O(0, 0)$  – узел, неустойчивый в первом случае и устойчивый во втором.

Прежде чем переходить к рассмотрению оставшихся случаев, проследим, как изменяются функции  $M(x, y)$  и  $M_1(x, y)$  при изменении  $\Delta, s$  и  $\sigma$ .

Пусть сначала выполняются неравенства

$$0 < s^2 < 4\Delta < \sigma^2.$$

В этом случае функция  $M(x, y)$  является знакопеременной и обращается в нуль на прямых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с угловыми коэффициентами

$$k_{12} = \frac{d - a \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2b} \quad (b \neq 0)$$

(при  $b = 0$  эти прямые определяются уравнениями  $x = 0$  и  $-cx + (a - d)y = 0$ ). Функция  $M(x, y)$  – знакоопределенная, ее знак совпадает со знаком  $\sigma$ .

Предположим теперь, что коэффициенты системы (6.1) таковы, что выполняются неравенства

$$0 < s^2 = 4\Delta < \sigma^2.$$

В этом случае, как и в предыдущем, функция  $M(x, y)$  является знакопеременной и обращается в нуль на прямых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , угловые коэффициенты которых определяются указанным выше равенством (или определяемых указанными выше уравнениями). Функция же  $M_1(x, y)$  является в этом случае знакопостоянной: она отлична от нуля и сохраняет знак на всей плоскости  $Oxy$ , кроме точек прямой  $L$  с угловым коэффициентом

$$\tilde{k} = -\frac{b+c}{2d},$$

в которых она обращается в нуль.

Ясно, что сколь угодно малого изменения коэффициентов системы достаточно для того, чтобы изменить эту ситуацию. Поэтому, если изменить коэффициенты системы таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < 4\Delta < s^2 < \sigma^2,$$

то мы, как и прежде, будем иметь прямые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , на которых обращается в нуль знакопеременная функция  $M(x, y)$ , а вместо прямой  $L$  появятся две прямые  $L_1$  и  $L_2$  с угловыми коэффициентами

$$\tilde{k}_{12} = \frac{-(b+c) \pm \sqrt{s^2 - 4\Delta}}{2d} \quad (d \neq 0)$$

(или прямые  $x=0$ ,  $ax+(b+c)y=0$  при  $d=0$ ,  $b \neq 0$ ) на которых обращается в нуль ставшая теперь знакопеременной функция  $M_1(x, y)$ . Ясно, что эта ситуация будет сохраняться до тех пор, пока будут выполняться последние неравенства.

Пусть, далее, коэффициенты системы таковы, что  $\Delta = 0$ . Тогда угловые коэффициенты прямых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно равны

$$k_1 = -\frac{c}{d}, \quad k_2 = -\frac{b}{d}$$

(или имеем прямые  $x=0$ ,  $-cx+ay=0$  при  $b=d=0$ ), а угловые коэффициенты прямых  $L_1$  и  $L_2$  равны соответственно

$$\tilde{k}_1 = \frac{d}{b}, \quad \tilde{k}_2 = -\frac{a}{b}$$

(или имеем прямые  $x=0$ ,  $ax+cy=0$  при  $b=d=0$ ). Так как из равенства  $\Delta = ad - bc = 0$  следует

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

то  $k_1 = \tilde{k}_2$ . Таким образом, прямые  $\Gamma_1$  и  $L_2$  сливаются в одну прямую, а прямые  $\Gamma_2$  и  $L_1$  оказываются взаимно перпендикулярными (так как  $k_2 \tilde{k}_1 = -1$ ). Дальнейшее уменьшение величин  $\Delta$  приводит к разделению прямых  $\Gamma_1$  и  $L_2$ . При этом в каждом из вертикальных углов, образованных прямыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  проходит одна из прямых  $L_1$  и  $L_2$ , и это взаимное расположение прямых  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $L_1$  и  $L_2$  сохраняется при всех значениях  $\Delta < 0$ .

Рассмотрим теперь оставшиеся случаи.

**Случай 8.** Функция  $M(x, y)$  – знакопеременная, функция  $M_1(x, y)$  – знакопостоянная. В этом случае

$$\delta = \Delta - \frac{\sigma^2}{4} < 0, \quad \delta_1 = \Delta - \frac{s^2}{4} = 0$$

так что

$$0 \leq 4\Delta = s^2 < \sigma^2.$$

Рассмотрим сначала случай  $4\Delta = s^2 > 0$ .

Этот случай отличается от предыдущего тем, что в одном из вертикальных углов, образованных прямыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , проходит упомянутая выше прямая  $L$ , которую траектории системы (6.1) пересекают под прямым углом. Возможные фазовые портреты системы изображены на рис. 6.11 а) и б). Состояние равновесия  $O(0,0)$ , как и в предыдущем случае, является узлом, неустойчивым при  $\sigma > 0$  и устойчивым при  $\sigma < 0$ .

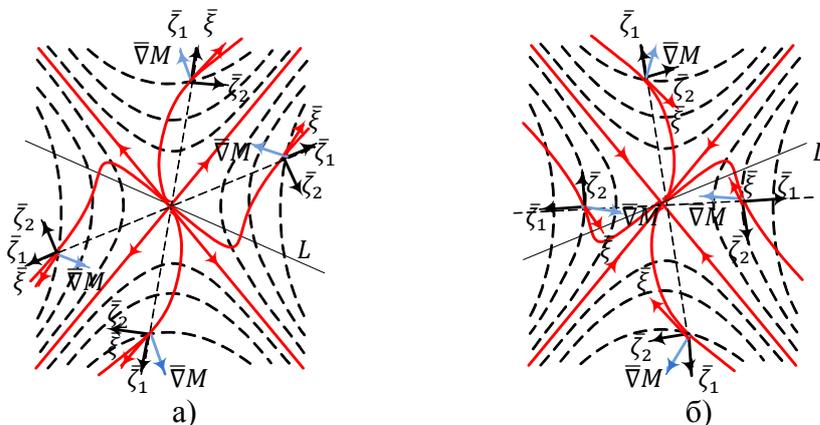


Рис. 6.11.

Пусть теперь  $\Delta = ad - bc = 0$ ,  $s = b - c = 0$ .

Если  $b = c = 0$ , то из первого равенства следует, что либо  $a \neq 0$ ,  $d = 0$ , либо  $a = 0$ ,  $d \neq 0$ .

Случай  $a = d = 0$  невозможен, так как в силу указанных выше неравенств  $\sigma \neq 0$ . В первом случае имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = bx, \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

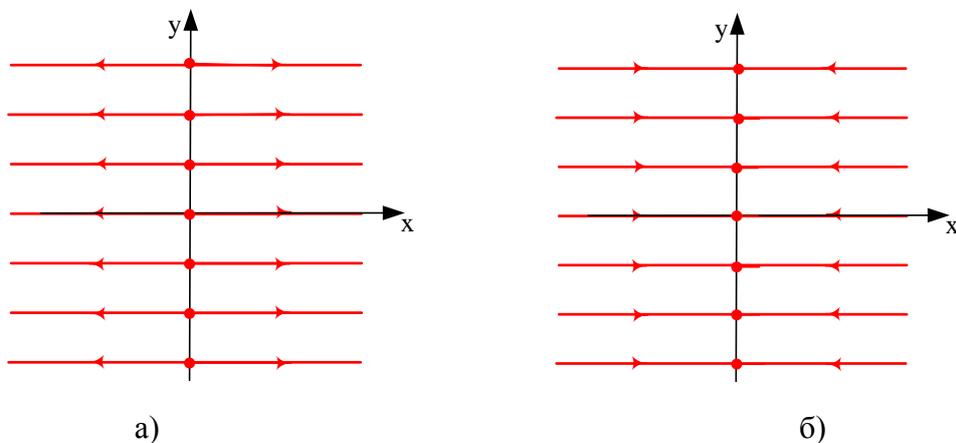
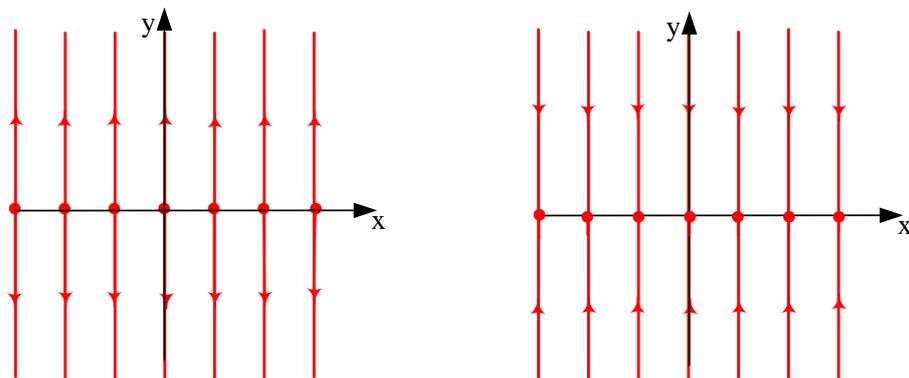


Рис. 6.12.



а)

б)

Рис. 6.13.

с очевидными фазовыми портретами, изображенными на рис. 6.12 а) и б) (ось  $Oy$  сплошь заполнена состояниями равновесия системы). Во втором случае имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = dy, \end{cases}$$

очевидные фазовые портреты которой изображены на рис. 6.13 а) и б) (ось  $Ox$  сплошь заполнена состояниями равновесия системы).

Если  $b = c \neq 0$ , то из условия  $\Delta = 0$  следует  $a \neq 0$ ,  $d \neq 0$ ,  $c = \lambda_2 a$ ,  $d = \lambda_2 b$ , так что система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by = b(y + \lambda_1 x), \\ \dot{y} = \lambda_2(ax + by) = b\lambda_2(y + \lambda_1 x), \end{cases} \quad (\lambda_1 = \frac{a}{b}, \lambda_2 = \frac{b}{a}),$$

и

$$M(x, y) = (ax + by)(y - \lambda_2 x) = b(y - \lambda_1 x)(y - \lambda_2 x),$$

$$M_1(x, y) = (ax + by)(x + \lambda_2 y) = \frac{1}{a}(ax + by)^2.$$

Из вида системы следует, что прямая  $ax + by = b(y + \lambda_1 x)$  сплошь заполнена ее состояниями равновесия. Легко убедиться, что  $y - \lambda_2 x = C$  – первый интеграл системы, определяющий множество параллельных прямых, перпендикулярных прямой  $y + \lambda_1 x = 0$ . Траекториями системы являются полупрямые, на которые разделяются указанные параллельные прямые точками прямой  $y + \lambda_1 x = 0$ . Направление движения изображающей точки по траекториям определяется знаком  $\sigma$ . Фазовые портреты системы в рассматриваемом случае изображены на рис. 6.14 а) и б).

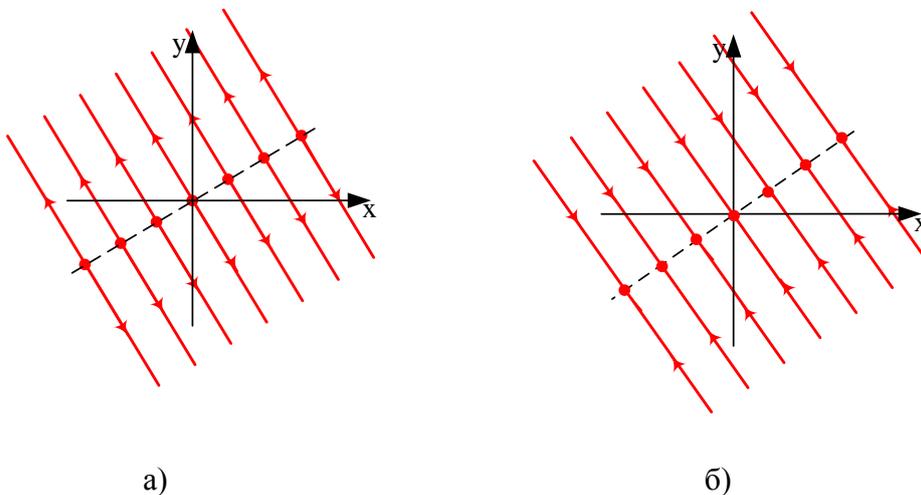


Рис. 6.14.

**Случай 9.** Функция  $M(x, y)$  и  $M_1(x, y)$  – знакопеременные. В этом случае

$$\delta = \Delta - \frac{\sigma^2}{4} < 0, \quad \delta_1 = \Delta - \frac{s^2}{4} < 0,$$

так что либо

а)  $0 < 4\Delta < \sigma^2 < s^2$  (или  $0 < 4\Delta < s^2 < \sigma^2$ ),

либо

б)  $4\Delta = 0 < \sigma^2 < s^2$  (или  $4\Delta = 0 < s^2 < \sigma^2$ ),

либо

в)  $4\Delta < 0 \leq \sigma^2 \leq s^2$  (или  $4\Delta < 0 \leq s^2 \leq \sigma^2$ )

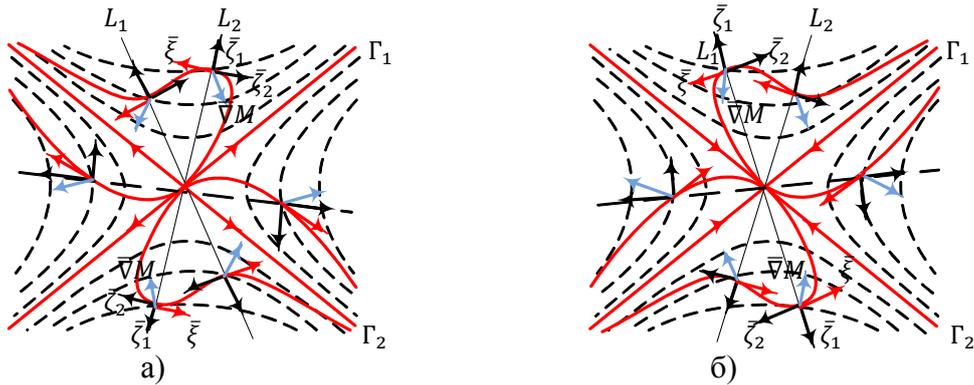


Рис. 6.15.

В случае а) внутри одной из пар вертикальных углов, образованных прямыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  проходят упомянутые выше прямые  $L_1$  и  $L_2$ , на которых функция  $M_1(x, y)$  обращается в нуль. Эти прямые пересекаются траекториями системы (6.1) под прямым углом. Возможные фазовые портреты системы в этом случае изображены на рис. 6.15 а) и 15 б). Состояние равновесия  $O(0, 0)$  – узел, неустойчивый при  $\sigma > 0$  и устойчивый при  $\sigma < 0$ .

В случае б) система (6.1) записывается в виде  
 $\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = \lambda(ax + by)$

поэтому

$$M(x, y) = (ax + by)(y - \lambda x), \quad M_1(x, y) = (ax + by)(x + \lambda y).$$

Прямая  $ax + by = 0$ , на которой  $M(x, y)$  и  $M_1(x, y)$  обращаются в нуль, сплошь заполнена состояниями равновесия указанной системы. Легко убедиться, что  $y - \lambda x = C$ , где  $C$  произвольная постоянная, – интеграл системы. Он определяет на плоскости  $Oxy$  семейство прямых, параллельных прямой  $y = \lambda x$ , составленных из траекторий системы. Возможные фазовые портреты системы изображены на рис. 6.16 а) и 16 б).

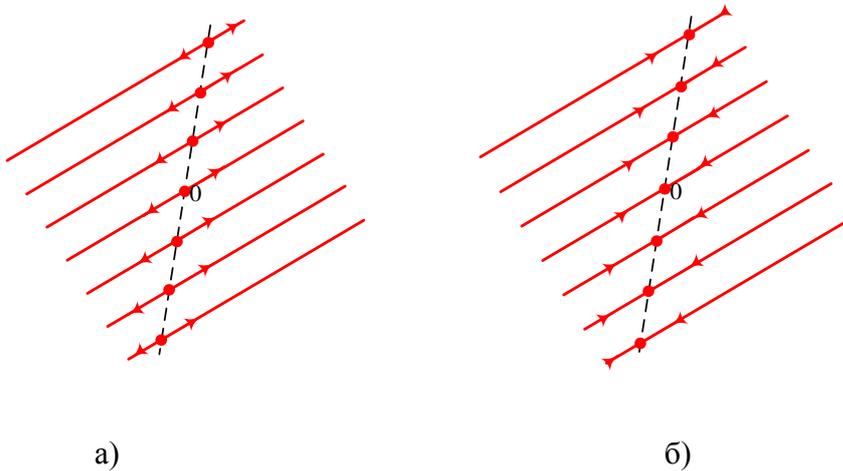


Рис. 6.16.

Рассмотрим случай в), считая, что  $\sigma \neq 0, s \neq 0$ . В этом случае, как установлено выше, прямые  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и  $L_1, L_2$ , на которых обращаются в нуль соответственно функции  $M(x, y)$  и  $M_1(x, y)$ , расположены так, что в каждой паре вертикальных углов, образованных прямыми  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , проходит одна из прямых  $L_1, L_2$ , и наоборот. Каждая из пар указанных прямых разбивает плоскость  $Oxy$  на области знакопостоянства соответствующих функций. Поэтому одна из прямых любой пары проходит в области, где определяющая функция, соответствующая другой паре прямых, положительна, а

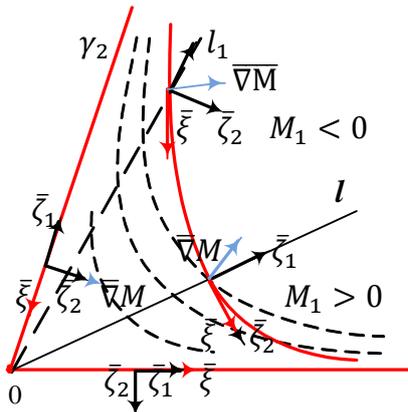


Рис. 6.17.

и  $gradM$  в каждой точке рассматриваемой области. Из равенства (6.4) следует, что вектор  $\bar{\xi}$  в каждой точке рассматриваемой области образует острый угол с вектором  $\bar{z}_2$ . Равенство (6.5) показывает, что выше прямой  $l$  вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $\bar{z}_1$  тупой угол, а ниже – острый. Из сказанного следует, что в области, расположенной выше полупрямой  $l$ , траектории системы (6.1) пересекают окружности с центром в начале координат снаружи внутрь, приближаясь к началу координат, а после пересечения полупрямой  $l$ , т.е. в области  $M_1(x, y) > 0$ , – изнутри наружу, удаляясь от начала координат. При этом они неограниченно приближаются к полупрямой  $\gamma_1$ , так как при  $\sigma < 0$  траектории системы могут пересекать линии уровня функции  $M(x, y)$  только снаружи внутрь. Остается заметить, что вдоль полупрямой  $\gamma_1$ , принадлежащей области  $M_1(x, y) > 0$ , вектор  $\bar{\xi}_0$  направлен так же, как и вектор  $\bar{z}_1$ , а вдоль полупрямой  $\gamma_2$ , принадлежащей области  $M_1(x, y) < 0$ , вектор  $\bar{\xi}$  направлен в сторону, противоположную направлению вектора  $\bar{z}_1$ . Сказанное позволяет заключить, что в рассматриваемой области при сделанных нами предположениях траектории системы ведут себя так, как показано на рис. 17.

Исследование других возможных ситуаций проводится аналогично. На рис. 6.18 а) и 18 б) изображены полные фазовые портреты системы (6.1) в рассматриваемом случае. Состояние равновесия системы  $O(0, 0)$  является седлом.

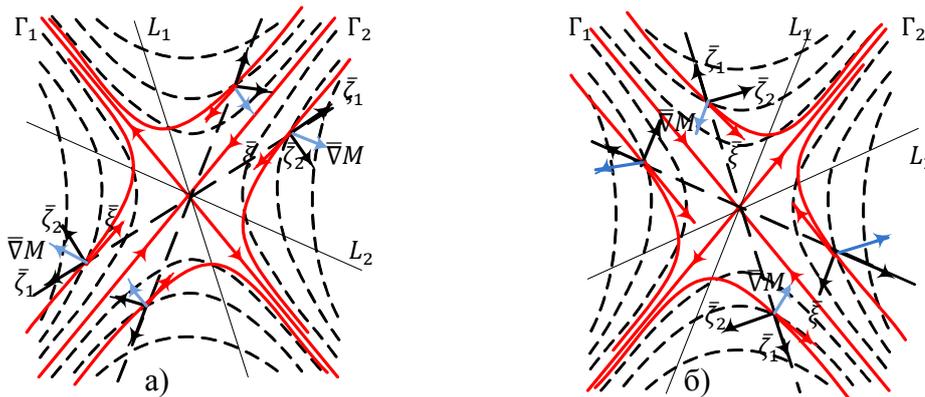


Рис.6.18.

При  $\Delta < 0$  состояние равновесия  $O(0, 0)$  является седлом при любых значениях  $\sigma$  и  $s$ , в частности и в том случае, когда  $\sigma = 0$ . В этом случае, как уже отмечалось выше, функция  $M(x, y)$  является общим интегралом системы (6.1) и ее линии уровня являются траекториями системы. В нашем случае это ветви гипербол и разделяющие их полупрямые – сепаратрисы седла. Фазовый портрет системы очевиден, поэтому мы его не приводим.

Подводя итог сказанному выше, сформулируем следующую теорему.

**Теорема 6.1.** Состояние равновесия  $O(0, 0)$  невырожденной системы (6.1):

1) устойчиво и является центром при  $\Delta > 0$ ,  $\sigma = 0$ ; 2) асимптотически устойчиво (неустойчиво) и является фокусом при  $4\Delta > \sigma^2$  и  $\sigma < 0$  ( $\sigma > 0$ ); 3) асимптотически устойчиво (неустойчиво) и является узлом при  $4\Delta = \sigma^2$  (дискритическим или вырожденным) и  $0 < 4\Delta < \sigma^2$  и  $\sigma < 0$  ( $\sigma > 0$ ); 4) неустойчиво и является седлом при  $\Delta < 0$ .

**§ 7. Качественное исследование однородных систем.**

**1. Переход к полярным координатам.** Имея в виду использование в дальнейшем полярных координат, выразим через эти координаты используемые нами выражения и соотношения. Предполагается, что полюс полярной системы координат совпадает с началом  $O(0,0)$  декартовой системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью  $Ox$ .

Найдем, прежде всего, в полярных координатах  $\rho, \varphi$  выражение для соответствующего системе

$$\dot{x} = \xi^1(x, y), \quad \dot{y} = \xi^2(x, y) \tag{7.1}$$

дифференциального оператора

$$Xf = \xi^1(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \xi^2(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Согласно правилам перехода к новым переменным в линейном дифференциальном операторе [12], имеем

$$\tilde{X}\tilde{f} = (\tilde{X}\rho) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + (\tilde{X}\varphi) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi},$$

где тильда сверху означает, что соответствующая величина выражена через новые координаты.

Учитывая равенства

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

получаем при  $x^2 + y^2 \neq 0$

$$X\rho = \xi^1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\xi^1 x + \xi^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ X\varphi = \xi^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\xi^1(-y) + \xi^2 x}{x^2 + y^2},$$

и

$$(\tilde{X}\rho) = \xi^1(\rho, \varphi) \cos \varphi + \xi^2(\rho, \varphi) \sin \varphi \equiv \xi^\rho(\rho, \varphi), \\ (\tilde{X}\varphi) = \frac{1}{\rho} [-\xi^1(\rho, \varphi) \sin \varphi + \xi^2(\rho, \varphi) \cos \varphi] \equiv \frac{1}{\rho} \xi^\varphi(\rho, \varphi). \tag{7.2}$$

Таким образом, в полярных координатах получаем оператор

$$\tilde{X}\tilde{f} = \xi^\rho(\rho, \varphi) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \xi^\varphi(\rho, \varphi) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}, \tag{7.3}$$

характеризующий бесконечно малые сдвиги вдоль траекторий системы

$$\frac{d\rho}{dt} = \xi^\rho(\rho, \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\rho} \xi^\varphi(\rho, \varphi).$$

Геометрический смысл величин  $\xi^\rho$  и  $\xi^\varphi$  легко выясняется при помощи равенства

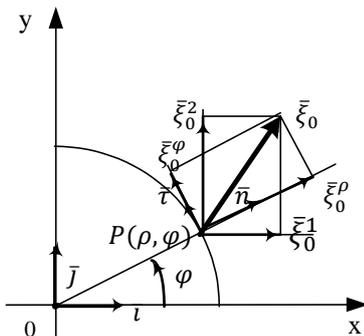


Рис.7.1

$$\tilde{\xi} = \xi^1 \tilde{i} + \xi^2 \tilde{j} = \xi^\rho \tilde{n} + \xi^\varphi \tilde{\tau}$$

(см. рис. 7.1). Умножая обе части этого равенства скалярно на векторы  $\tilde{n}$  и  $\tilde{\tau}$ , получаем

$$\xi^\rho = \xi^1 \tilde{i} \cdot \tilde{n} + \xi^2 \tilde{j} \cdot \tilde{n} = \xi^1 \cos \varphi + \xi^2 \sin \varphi, \\ \xi^\varphi = \xi^1 \tilde{i} \cdot \tilde{\tau} + \xi^2 \tilde{j} \cdot \tilde{\tau} = -\xi^1 \sin \varphi + \xi^2 \cos \varphi.$$

Таким образом, величина  $\xi^\rho$  есть проекция вектора  $\tilde{\xi}$  на направление вектора  $\tilde{n}$ , направленного по координатному лучу  $\varphi = const$  в сторону возрастания величины  $\rho$ , а величина  $\xi^\varphi$  есть проекция

вектора  $\bar{\xi}$  на направление вектора  $\bar{\tau}$ , касательного в рассматриваемой точке  $P(\rho, \varphi)$  к координатной линии  $\rho = const$  и направленного в сторону увеличения угла  $\varphi$ .

Если

$$Af = \eta^1(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta^2(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}$$

– допускаемый системой (7.1) оператор, то после перехода к полярным координатам аналогично предыдущему получаем оператор

$$\tilde{A}\tilde{f} = \eta^\rho(\rho, \varphi) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \eta^\varphi(\rho, \varphi) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}$$

При этом

$$(X, A)f = (\tilde{X}, \tilde{A})\tilde{f},$$

т.е. коммутатор сохраняется.

Из полученных выше выражений для  $\xi^\rho$  и  $\xi^\varphi$  находим

$$\xi^1 = \xi^\rho \cos\varphi - \xi^\varphi \sin\varphi, \quad \xi^2 = \xi^\rho \sin\varphi + \xi^\varphi \cos\varphi.$$

Аналогично получается равенства

$$\eta^1 = \eta^\rho \cos\varphi - \eta^\varphi \sin\varphi, \quad \eta^2 = \eta^\rho \sin\varphi + \eta^\varphi \cos\varphi.$$

Пользуясь этими равенствами, получаем выражение в полярных координатах интегрирующей функции:

$$\tilde{M}(\rho, \varphi) = M(x, y) \Big|_{\substack{x=\rho \cos\varphi \\ y=\rho \sin\varphi}} = \begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{vmatrix} \Big|_{\substack{x=\rho \cos\varphi \\ y=\rho \sin\varphi}} = \begin{vmatrix} \xi^\rho & \xi^\varphi \\ \eta^\rho & \eta^\varphi \end{vmatrix} = \tilde{M}(\rho, \varphi).$$

При помощи непосредственных вычислений легко убедиться, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$\tilde{X}\tilde{M}(\rho, \varphi) = \tilde{M}(\rho, \varphi) \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \xi^\rho) + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial \varphi} \right],$$

полученному из уравнения  $XM = Mdiv\bar{\xi}$  переходом к полярным координатам.

**2. Однородные системы.** В этом параграфе мы будем рассматривать системы вида

$$\dot{x} = \xi^1(x, y), \quad \dot{y} = \xi^2(x, y), \tag{7.4}$$

правые части которых суть однородные функции переменных  $x$  и  $y$  одинаковой степени  $m$ , принадлежащие, по меньшей мере, классу  $C_1$  на всей плоскости  $Oxy$  и не имеющие общих множителей (при наличии последних задачу исследования заданной системы можно свести к задаче исследования системы, полученной из заданной заменой общего множителя единицей).

Линейный дифференциальный оператор

$$Xf = \xi^1(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \xi^2(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

соответствующий системе (7.4), допускает оператор

$$Af = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

группы подобия, поэтому качественное исследование системы (7.4) можно провести аналогично тому, как это сделано в предыдущем параграфе для линейной однородной системы с постоянной матрицей, являющейся частным случаем рассматриваемых систем.

Интегрирующая функция системы (7.4)

$$M(x, y) = \bar{\xi} \cdot \bar{\zeta}_2 = \xi^1 y - \xi^2 x \tag{7.5}$$

и функция

$$M_1(x, y) = \bar{\xi} \cdot \bar{\zeta}_1 = \xi^1 x + \xi^2 y \tag{7.6}$$

являются однородными функциями степени  $m + 1$  относительно  $x$  и  $y$  и удовлетворяют соответственно уравнениям

$$XM = \bar{\xi} \cdot grad M = Mdiv\bar{\xi} \tag{7.7}$$

и

$$X_1 M_1 = \bar{\zeta} \cdot grad M_1 = M_1 div\bar{\zeta}$$

где  $\bar{\zeta} = (\xi^2, -\xi^1)$ . В рассматриваемом случае величины

$$\sigma(x, y) = div\bar{\xi} \quad \text{и} \quad s(x, y) = div\bar{\zeta}$$

уже не являются постоянными, а являются однородными функциями степени  $m - 1$  относительно  $x$  и  $y$ , что обуславливает гораздо большее разнообразие фазовых портретов рассматриваемых систем по сравнению с рассмотренными в предыдущем параграфе линейными однородными системами.

Для дальнейшего полезно отметить очевидные равенства

$$\bar{\xi} \times \bar{\zeta}_1 = M\bar{k} \tag{7.8}$$

и

$$\bar{\xi} \times \bar{\zeta}_2 = M_1\bar{k}$$

где  $\bar{k}$  – единичный вектор, образующий с осями  $\bar{i}$  и  $\bar{j}$  осей  $Ox$  и  $Oy$  правую тройку векторов и, как и в §6,  $\bar{\zeta}_1 = (x, y, 0)$ ,  $\bar{\zeta}_2 = (y, -x, 0)$ .

При переходе к полярным координатам с учетом однородности степени  $m$  функций  $\xi^1(x, y)$  и  $\xi^2(x, y)$  формулы (7.2) дают

$$\xi^\rho(\rho, \varphi) = \frac{\tilde{M}_1(\rho, \varphi)}{\rho} = \rho^m Q(\varphi), \quad \frac{1}{\rho} \xi^\varphi(\rho, \varphi) = \frac{\tilde{M}(\rho, \varphi)}{\rho^2} = \rho^{m-1} R(\varphi), \tag{7.9}$$

где

$$Q(\varphi) = \xi^1(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + \xi^2(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi,$$

$$R(\varphi) = \xi^2(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi - \xi^1(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi.$$

Согласно формуле (7.3), получаем оператор

$$\tilde{X}\tilde{f} = \rho^{m-1} \left[ \rho Q(\varphi) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + R(\varphi) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right] \tag{7.10}$$

характеризующий бесконечно малые сдвиги вдоль траекторий системы

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho^m Q(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \rho^{m-1} R(\varphi).$$

Траектории векторного поля, определяемого оператором (7.10), совпадают с траекториями векторного поля, определяемого оператором

$$\tilde{X}\tilde{f} = \rho Q(\varphi) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + R(\varphi) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \tag{7.11}$$

Следовательно, вместо предыдущей системы можно рассматривать систему

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho Q(\varphi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = R(\varphi), \tag{7.12}$$

соответствующую оператору (7.11).

Заметим, что из равенств (7.9) следуют равенства

$$\tilde{M}_1(\rho, \varphi) = \rho^{m+1} Q(\varphi), \quad \tilde{M}(\rho, \varphi) = \rho^{m+1} R(\varphi).$$

Функция  $\tilde{M}(\rho, \varphi)$ , определяемая вторым из этих равенств, удовлетворяет уравнению

$$\hat{X}\tilde{M} = \tilde{M} \operatorname{div} \bar{\xi}(\rho, \varphi),$$

где

$$\operatorname{div} \bar{\xi}(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho \xi^\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial \varphi} \right] = \rho^{m-1} [(m+1)Q(\varphi) - R'(\varphi)] \equiv \rho^{m-1} P(\varphi). \tag{7.13}$$

Отметим некоторые особенности в поведении траекторий рассматриваемых систем.

Отметим, прежде всего, что начало координат является единственным состоянием равновесия системы (7.4).

Далее, в силу однородности одинаковой степени функций  $\xi^1(x, y)$  и  $\xi^2(x, y)$ , дифференциальное уравнение траекторий системы

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\xi^2(x, y)}{\xi^1(x, y)}$$

не меняется при замене  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ . Отсюда следует симметричность фазового портрета системы относительно начала координат. Поэтому, в частности, если какая-либо траектория системы проходит через две точки, симметричные относительно начала координат, то эта траектория замкнута. Преобразованиями допускаемой системой группы подобия эта траектория

преобразуется в замкнутые же и симметричные относительно начала координат траектории системы всюду плотно заполняющие ее фазовую плоскость, так что состояние равновесия  $O(0,0)$  системы в этом случае является центром.

Таким образом, если у однородной динамической системы существует хотя бы одна замкнутая траектория, содержащая начало координат внутри, то ее состояние равновесия  $O(0,0)$  является центром.

Переходя к полярным координатам в равенствах

$$\cos(\bar{\xi}, \bar{\zeta}_1) = \frac{M_1(x,y)}{|\bar{\xi}||\bar{\zeta}_1|}, \quad \cos(\bar{\xi}, \bar{\zeta}_2) = \frac{M(x,y)}{|\bar{\xi}||\bar{\zeta}_2|},$$

где числитель и знаменатель каждой дроби являются однородными функциями переменных  $x$  и  $y$  одной и той же степени, получаем равенства

$$\cos(\bar{\xi}, \bar{\zeta}_1) = \frac{Q(\varphi)}{\sqrt{R^2(\varphi) + Q^2(\varphi)}}, \quad \cos(\bar{\xi}, \bar{\zeta}_2) = \frac{R(\varphi)}{\sqrt{R^2(\varphi) + Q^2(\varphi)}},$$

правые части которых зависят только от  $\varphi$ . Это означает, что вдоль любого луча  $\varphi = \varphi_0$  углы, образуемые вектором  $\bar{\xi}$  с векторами  $\bar{\zeta}_1$  и  $\bar{\zeta}_2$ , сохраняют постоянные значения. Отсюда следует, что траектории системы могут пересекать лучи, исходящие из начала координат, только в одном направлении. Поэтому, в частности, если какая-либо траектория системы пересекает один и тот же луч дважды в различных точках, то она может это сделать, только сделав, по меньшей мере, один полный оборот вокруг начала координат. Ясно, что в этом случае траектория пересекает все лучи, исходящие из начала координат, бесконечное число раз и является спиралью, которая накручивается на начало координат либо при  $t \rightarrow +\infty$ , либо при  $t \rightarrow -\infty$ , и уходит в бесконечность соответственно при  $t \rightarrow -\infty$ , либо при  $t \rightarrow +\infty$ .

Отметим, наконец, что отличные от состояния равновесия инвариантные траектории систем (если они существуют) могут быть только прямолинейными, так как прямолинейными являются траектории допускаемой группы. Отсюда, в частности, следует, что рассматриваемые системы не могут иметь замкнутых инвариантных траекторий (предельных циклов). Число инвариантных траекторий определяется свойствами функции  $M(x,y)$ , поведение же всех траекторий определяется свойствами этой функции и функций  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  и  $M_1(x,y)$ . Каждая из этих функций может быть либо знакоопределенной, либо знакопостоянной, либо знакопеременной. Таким образом, мы имеем всего 27 вариантов сочетания перечисленных свойств указанных функций. Однако, с точки зрения топологической классификации состояний равновесия не все из этих вариантов существенно различны. Это, естественно, упрощает задачу исследования систем рассматриваемого типа.

**3. Случай знакоопределенной интегрирующей функции.** Пусть  $F(x,y)$  – любая из функций, которые мы будем использовать в дальнейшем. Условимся писать  $F(x,y) > 0$  ( $F(x,y) < 0$ ), если функция  $F(x,y)$  в некоторой окрестности начала координат положительно (отрицательно) определена; если функция  $F(x,y)$  в некоторой окрестности начала координат и в самом начале координат положительна (отрицательна), то будем писать  $F(x,y) > |0|$  ( $F(x,y) < |0|$ ); если в сколь угодно малой окрестности начала координат функция  $F(x,y)$  знакопостоянна (т.е. сохраняет знак, но может обращаться в нуль на некоторых кривых, проходящих через начало координат), то будем писать  $F(x,y) \geq 0$  ( $F(x,y) \leq 0$ ) соответственно в случаях постоянно положительной и постоянно отрицательной функции  $F(x,y)$ ; наконец, будем писать  $F(x,y) \geq 0$ , если в сколь угодно малой окрестности функции  $F(x,y)$  является знакопеременной (т.е. меняет знак при переходе через некоторые кривые, проходящие через начало координат, на которых она обращается в нуль).

В этом пункте мы опишем фазовые портреты системы (7.4) в случае знакоопределенной функции  $M(x,y)$ . Отличительной особенностью этого случая является отсутствие инвариантных траекторий, отличных от состояния равновесия системы  $O(0,0)$ , так как функция  $M(x,y)$  обращается в нуль только в этой точке.

Ниже приводятся теоремы, полностью характеризующие возможные фазовые портреты однородной системы (7.4) в рассматриваемом случае.

**Теорема 7.1.** *При знакоопределенной функции  $M(x, y)$  состояние равновесия  $O(0, 0)$  однородной системы (7.4) может быть только либо центром, либо фокусом.*

**Доказательство.** Действительно, если функция  $M(x, y)$  однородной системы (7.4) является знакоопределенной, то не существует траекторий системы, входящих в начало координат или выходящих из него в определенном направлении. В самом деле, если предположить противное, то существует траектория системы, касающаяся в начале координат некоторого луча  $\varphi = \varphi_0$ . Преобразованиями допускаемой группы подобия такая траектория может преобразоваться только в траектории, также касающиеся в начале координат луча  $\varphi = \varphi_0$ . Отсюда следует, что область, ограниченная указанной траекторией и лучом  $\varphi = \varphi_0$ , сплошь заполнена траекториями системы, касающимися луча  $\varphi = \varphi_0$  в начале координат. Ясно, что луч  $\varphi = \varphi_0$  в таком случае сам является траекторией системы, вдоль которой, согласно формуле (7.5),  $M(x, y) = 0$ , что противоречит предположенной знакоопределенности этой функции. Это противоречие доказывает высказанное утверждение.

Теперь, учитывая, что при знакоопределенной функции  $M(x, y)$  все траектории системы (7.4), отличные от ее состояния равновесия, ведут себя подобным образом, заключаем, что либо все траектории системы являются замкнутыми кривыми, окружающими начало координат, т.е. состояние равновесия является центром, либо все траектории системы являются спиралями, обращающимися вокруг начала координат, т.е. состояние равновесия системы является фокусом, что и требовалось доказать.

Легко понять, что если функция  $M(x, y)$  не является знакоопределенной, то состояние равновесия однородной системы не может быть ни центром, ни фокусом. Действительно, в этом случае существуют траектории системы, входящие в начало координат или выходящие из него в определенном направлении, на которых функция  $M(x, y)$  обращается в нуль. Таким образом, знакоопределенность функции  $M(x, y)$  необходима и достаточна для того, чтобы состояние равновесия  $O(0, 0)$  однородной системы (7.4) было центром или фокусом.

**Теорема 7.2.** *Состояние равновесия системы (7.4) асимптотически устойчиво при  $M_1(x, y) < 0$  и при  $M_1(x, y) \leq 0$ . При  $M_1(x, y) > 0$  и при  $M_1(x, y) \geq 0$  состояние равновесия системы неустойчиво (асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow -\infty$ ).*

**Доказательство.** Действительно, при  $M_1(x, y) < 0$  в силу (7.6) получаем неравенство

$$\bar{\xi} \cdot \bar{\zeta}_1 < 0,$$

которое показывает, что любая траектория системы (7.4) пересекает окружности с центром в начале координат снаружи внутрь, откуда и следует асимптотическая устойчивость состояния равновесия  $O(0, 0)$ . В случае  $M_1(x, y) \leq 0$  отличие состоит в том, что вдоль прямых, определяемых равенством  $M_1(x, y) = 0$ , траектории системы касаются указанных окружностей.

Очевидное доказательство второго утверждения теоремы мы не приводим.

**Теорема 7.3.** *При знакоопределенной функции  $M(x, y)$  состояние равновесия системы (7.4) асимптотически устойчиво при  $\operatorname{div} \bar{\xi} < |0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} < 0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} \leq 0$ . При  $\operatorname{div} \bar{\xi} > |0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} > 0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} \geq 0$  состояние равновесия системы неустойчиво (асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow -\infty$ ).*

Справедливость утверждений этой теоремы следует из более общей теоремы, которая будет сформулирована и доказана в §9.

Из теоремы 7.3 видно, что характер устойчивости состояния равновесия определяется знаком  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  и не зависит от знака функции  $M(x, y)$ .

Из теорем 7.2 и 7.3 следует, что если для рассматриваемой системы функции  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  и  $M_1(x, y)$  оказываются знакоопределенными или знакопостоянными, то их знаки необходимо совпадают, так как в противном случае заключения о характере устойчивости состояния равновесия системы, сделанные на основании этих теорем, будут противоречить друг другу.

Из теорем 7.1, 7.2 и 7.3 очевидным образом вытекают следующие утверждения.

**Следствие 1.** Если для системы (7.4) функция  $M(x, y)$  является знакоопределенной, а функции  $M_1(x, y)$  и  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  являются знакоопределенными или знакопостоянными, то состояние равновесия  $O(0,0)$  системы является фокусом.

**Следствие 2.** Если состояние равновесия  $O(0,0)$  системы (7.4) является центром, то функция  $M(x, y)$  является знакоопределенной, а функции  $M_1(x, y)$  и  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  являются либо знакопеременными, либо тождественно равны нулю.

**Теорема 7.4.** Состояние равновесия однородной системы (7.4) устойчиво (не асимптотически, т.е. является центром) тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$M(x, y) \neq 0 \quad \forall x, y \neq 0, \quad \iint_S \operatorname{div} \bar{\xi} dS = 0,$$

где  $S$  – область на плоскости  $Oxy$ , ограниченная любой линией уровня функции  $M(x, y)$ .

**Доказательство.** Найдем сначала выражение в полярных координатах для указанного в теореме интеграла. Учитывая, что в полярных координатах  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  определяется равенством (7.13) получаем

$$\iint_S \operatorname{div} \bar{\xi} dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho^m P(\varphi) d\rho = \int_0^{2\pi} P(\varphi) d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho^m d\rho = \int_0^{2\pi} P(\varphi) \frac{\rho^{m+1}(\varphi)}{m+1} d\varphi.$$

Семейство линий уровня функции  $M(\rho, \varphi)$  определяется равенством

$$\rho^{m+1}(\varphi) = \frac{h}{R(\varphi)},$$

где  $h$  – произвольная постоянная. Поэтому имеем

$$\iint_S \operatorname{div} \bar{\xi} dS = h \int_0^{2\pi} \frac{P(\varphi)}{R(\varphi)} d\varphi = h \int_0^{2\pi} \frac{Q(\varphi)}{R(\varphi)} d\varphi - \frac{h}{m+1} \int_0^{2\pi} \frac{R'(\varphi)}{R(\varphi)} d\varphi. \quad (a)$$

Докажем достаточность условий теоремы. Из первого условия и приведенного выше выражения интегрирующей функции в полярных координатах следует неравенство  $R(\varphi) \neq 0$ . Тогда, так как функция  $R(\varphi)$   $2\pi$  – периодическая,

$$\int_0^{2\pi} \frac{R'(\varphi)}{R(\varphi)} d\varphi = \ln |R(\varphi)| \Big|_0^{2\pi} = 0, \quad (б)$$

и в силу второго условия теоремы получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{Q(\varphi)}{R(\varphi)} d\varphi = 0. \quad (в)$$

Далее, интегрируя дифференциальное уравнение траекторий системы

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{Q(\varphi)}{R(\varphi)} d\varphi,$$

вытекающее из системы (7.12), вдоль любой траектории системы в пределах от 0 до  $2\pi$ , получаем

$$\ln \rho(2\pi) - \ln \rho(0) = \int_0^{2\pi} \frac{Q(\varphi)}{R(\varphi)} d\varphi, \quad (г)$$

откуда в силу равенства нулю интеграла в правой части получаем равенство

$$\ln \rho(2\pi) = \ln \rho(0)$$

показывающее, что все траектории системы замкнуты. Отсюда следует, что состояние равновесия системы (7.4) является центром, а поэтому устойчиво.

Докажем необходимость условий теоремы.

Если состояние равновесия системы (7.4) является центром, то, как отмечалось выше, необходимо  $M(x, y) \neq 0$ . Поэтому  $R(\varphi) \neq 0$  и в силу  $2\pi$  – периодичности этой функции имеет место равенство (б). Кроме того, в случае центра левая часть равенства (г) равна нулю, поэтому имеет место равенство (в). В силу равенств (б) и (в) из равенства (а) следует выполнимость второго условия теоремы.

Теорема полностью доказана.

Теорему 7.4 можно сформулировать также следующим образом: состояние равновесия системы (7.4) является центром тогда и только тогда, когда функция  $M(x, y)$  является знакоопределенной и поток векторного поля, определяемого системой (7.4), через любую линию уровня функции  $M(x, y)$  равен нулю.

Приведенное доказательство теоремы 7.4 содержит в себе также доказательство следующей теоремы.

**Теорема 7.5.** *Состояние равновесия однородной системы (7.4) является центром тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$R(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{P(\varphi)}{R(\varphi)} d\varphi = 0,$$

где  $P(\varphi) = (m + 1)Q(\varphi) - R'(\varphi)$ .

Из теоремы 7.4 очевидным образом вытекают следующие достаточные признаки центра.

**Следствие 3.** Состояние равновесия  $O(0,0)$  однородной системы (7.4) является центром, если функция  $M(x, y)$  является знакоопределенной и выполняется одно из следующих условий: 1)  $\operatorname{div} \bar{\xi} \equiv 0$ ; 2) линии уровня функции  $M(x, y)$  имеют ось симметрии и  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  в точках, симметричных относительно этой оси принимает значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку.

При выполнении первого условия из равенства (7.7) получаем

$$XM \equiv \bar{\xi} \cdot \operatorname{grad} M \equiv 0,$$

откуда следует, что в каждой точке любой линии уровня функции  $M(x, y)$  векторы  $\bar{\xi}$  и  $\operatorname{grad} M$  взаимно перпендикулярны. Это означает, что линии уровня функции  $M(x, y)$  являются траекториями векторного поля  $\bar{\xi}$ , или, другими словами, функция  $M(x, y)$  является интегралом системы (7.4).

Условие 1) может выполняться и в тех случаях, когда функция  $M(x, y)$  не является знакоопределенной. Во всех таких случаях только что сказанное относительно линий уровня функции  $M(x, y)$  (которые уже не будут замкнутыми) остается в силе, поэтому возвращаться к условию 1) в дальнейшем мы не будем.

**Следствие 4.** Состояние равновесия  $O(0,0)$  однородной системы (7.4) является центром, если  $R(\varphi) \neq 0$  для всех значений  $\varphi$  и выполняется одно из следующих условий: 1)  $P(\varphi) \equiv 0$ ; 2)  $P(\varphi) = kR'(\varphi)$  ( $k$  – постоянная); 3) существует значение  $\varphi = \varphi_0$  такое, что

$$\frac{P(\varphi_0 - \varphi)}{R(\varphi_0 - \varphi)} = -\frac{P(\varphi_0 + \varphi)}{R(\varphi_0 + \varphi)}, \quad \varphi_0 \in [0, \pi].$$

Отметим, наконец, случай, когда  $M_1(x, y) \equiv 0$ . В этом случае из тождества

$$x\xi^1 + y\xi^2 \equiv 0$$

получаем

$$\frac{\xi^2}{x} \equiv \frac{-\xi^1}{y} = \lambda(x, y),$$

так что система (7.4) представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \xi^1(x, y) = -\lambda(x, y)y, \\ \dot{y} &= \xi^2(x, y) = \lambda(x, y)x. \end{aligned}$$

Из выражения

$$M(x, y) = -\lambda(x, y)(x^2 + y^2)$$

для интегрирующей функции этой системы следует, что в рассматриваемом случае знакоопределенной функции  $M(x, y)$  функция  $\lambda(x, y)$  необходимо является также

знакоопределенной. Тогда, интегрируя дифференциальное уравнение траекторий указанной системы

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \quad (x \neq 0, y \neq 0),$$

получаем ее интеграл

$$x^2 + y^2 = C \quad (C > 0),$$

показывающий, что состояние равновесия системы является центром. При этом, в силу следствия 2,

$$\operatorname{div} \bar{\xi} = -y \frac{\partial \lambda}{\partial x} + x \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

либо является функцией знакопеременной, либо тождественно равна нулю.

*Замечание.* Если при  $M_1(x, y) \equiv 0$  функция  $M(x, y)$  является знакопостоянной или знакопеременной, то из указанного выше выражения для  $M(x, y)$  следует, что функция  $\lambda(x, y)$  также является соответственно знакопостоянной или знакопеременной. И в этих случаях интегральными кривыми системы являются окружности с центром в начале координат, однако, точки этих окружностей, расположенные на прямых, вдоль которых  $\lambda(x, y) = 0$ , являются ее состояниями равновесия.

В дальнейшем при рассмотрении случаев знакопостоянной и знакопеременной функции  $M(x, y)$  возвращаться к случаю  $M_1(x, y) \equiv 0$  мы не будем.

Полученные результаты позволяют указать все возможные варианты фазовых портретов рассматриваемых систем в случае знакоопределенной функции  $M(x, y)$ . Для лучшей обзорности все эти варианты сведены в таблицу. В дополнение к этой таблице напомним, что прямые, определяемые равенством  $M_1(x, y) = 0$ , пересекаются траекториями системы под прямым углом, а в точках прямых, определяемых равенством  $\operatorname{div} \bar{\xi} = 0$ , траектории системы касаются линий уровня функции  $M(x, y)$ , проходящих через эти точки.

$M_1(x, y) \backslash \operatorname{div} \bar{\xi}$	$> 0$	$\geq 0$	$\leq 0$	$\equiv 0$
$> 0$	неустойч. фокус	неустойч. фокус	неустойч. фокус	—
$< 0$	устойч. фокус	устойч. фокус	устойч. фокус	—
$\geq 0$	неустойч. фокус	неустойч. фокус	неустойч. фокус	—
$\leq 0$	устойч. фокус	устойч. фокус	устойч. фокус	—
$\geq 0$	неустойч. фокус	неустойч. фокус	центр или фокус	центр
$\equiv 0$	—	—	центр	центр

Из таблицы видно, что состояние равновесия системы  $O(0,0)$  может оказаться центром только в случаях, когда каждая из функций  $div\bar{\xi}$  и  $M_1(x, y)$  для рассматриваемой системы оказывается либо знакопеременной, либо тождественно равной нулю. В силу теоремы 7.3 оно будет центром, если выполняется условие  $\iint_S div\bar{\xi}dS = 0$ , и фокусом в противном случае. Эти два случая мы проиллюстрируем конкретными примерами.

**Пример 7.1.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = xy^2 + 2y^3, \quad \dot{y} = -2x^3 - x^2y.$$

Для этой системы по формулам (7.5) и (7.6) получаем

$$M(x, y) = 2(x^4 + y^4) + xy(x^2 + y^2), \quad M_1(x, y) = 2xy(y^2 - x^2).$$

Дивергенция векторного поля системы определяется равенством

$$div\bar{\xi} = y^2 - x^2.$$

Равенство

$$\tilde{M}(\rho, \varphi) = \frac{\rho^4}{2}(3 + \sin 2\varphi + \cos 4\varphi),$$

полученное из выражения для  $M(x, y)$  переходом к полярным координатам, показывает, что интегрирующая функция системы положительно определена. Прямые  $y = \pm x$  являются осями симметрии ее линий уровня, так как выражение для  $M(x, y)$  не меняется при замене  $x$  на  $\pm x$  и  $y$  на  $\pm x$  соответственно.

Из выражения для  $div\bar{\xi}$  следует, что эта функция является знакопеременной, обращается в нуль на прямых  $y = \pm x$  и в точках плоскости  $Oxy$ , симметричных относительно этих прямых, принимает значения, равные по абсолютной величине и

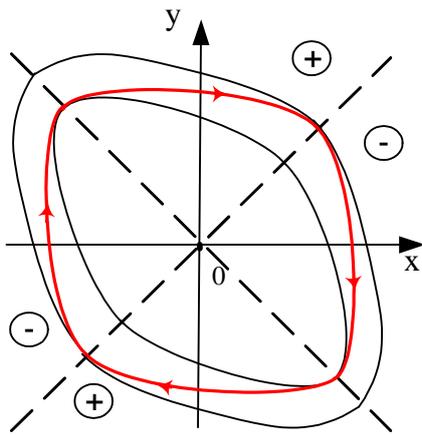


Рис.7.2

противоположные по знаку.

В силу следствия 3 из сказанного следует, что состояние равновесия системы  $O(0,0)$  является центром. Ее фазовый портрет изображен на рис. 7.2. Тонкие замкнутые линии на этом рисунке – линии уровня интегрирующей функции, определяемые в полярных координатах уравнением

$$\rho(\varphi) = (2h/3 + \sin 2\varphi + \cos 4\varphi)^{\frac{1}{4}} \quad h = const > 0,$$

вытекающим из приведенного выше выражения в полярных координатах для интегрирующей функции. Утолщенные замкнутые линии со стрелками – траектории системы. В кружках указаны знаки для  $div\bar{\xi}$  в областях, на которые прямые  $y = \pm x$  разбивают плоскость  $Oxy$ . В тех областях, где  $div\bar{\xi} > 0$ , траектории системы пересекают линии уровня интегрирующей функции изнутри наружу, в областях, где  $div\bar{\xi} < 0$  – снаружи внутрь. Прямые  $y = \pm x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  пересекаются траекториями системы под прямым углом, так как вдоль этих прямых функция  $M_1(x, y)$  обращается в нуль.

**Пример 7.2.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x^2y + xy^2 + 2y^3, \quad \dot{y} = -2x^3 - x^2y + xy^2.$$

Для этой системы

$$M(x, y) = 2(x^4 + y^4) + xy(x^2 + y^2),$$

$$M_1(x, y) = 4xy^3, \quad div\bar{\xi} = y^2 + 4xy - x^2.$$

или в полярных координатах

$$\tilde{M}(\rho, \varphi) = \frac{\rho^4}{4}(3 + \sin 2\varphi + \cos 4\varphi),$$

$$\tilde{M}_1(\rho, \varphi) = \frac{\rho^4}{4}(2\sin 2\varphi - \sin 4\varphi), \quad div\bar{\xi}_0 = \rho^2(2\sin 2\varphi - \cos 2\varphi).$$

Интегрирующая функция рассматриваемой системы совпадает с интегрирующей

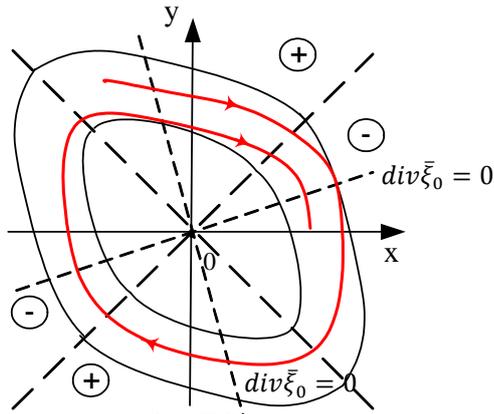


Рис.7.3

7.3. Спиралевидные кривые со стрелками на этом рисунке – траектории рассматриваемой системы. Направление стрелок предопределено знаком интегрирующей функции: в силу положительной определенности этой функции для рассматриваемой системы векторы  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\xi}_1$  и  $\bar{k}$  во всех точках плоскости  $Oxy$ , отличных от точки  $O(0,0)$ , образуют правую тройку векторов (напоминаем, что это следует из равенства (7.8)).

**4. Случай знакопостоянной интегрирующей функции.** В случае знакопостоянной функции  $M(x, y)$  прямые, на которых эта функция обращается в нуль, являются линиями ее экстремума, поэтому в точках любого инвариантного луча  $\gamma$  выполняются равенства  $M'_x = M'_y = 0$ . Отсюда, так как  $M(x, y) = \xi^1 y - \xi^2 x$ ,

$$\left( y \frac{\partial \xi^1}{\partial x} - \xi^2 - x \frac{\partial \xi^2}{\partial x} \right) \Big|_{\gamma} = 0, \quad \left( \xi^1 + y \frac{\partial \xi^1}{\partial y} - x \frac{\partial \xi^2}{\partial y} \right) \Big|_{\gamma} = 0.$$

Если в точках инвариантного луча  $div \bar{\xi} = 0$ , т.е.  $\frac{\partial \xi^1}{\partial x} \Big|_{\gamma} = -\frac{\partial \xi^2}{\partial x} \Big|_{\gamma}$ , то предыдущие равенства дают

$$\left( -y \frac{\partial \xi^2}{\partial y} - x \frac{\partial \xi^2}{\partial x} - \xi^2 \right) \Big|_{\gamma} = (X\xi^2 + \xi^2) \Big|_{\gamma} = 0,$$

$$\left( \xi^1_m + y \frac{\partial \xi^1}{\partial y} + x \frac{\partial \xi^1}{\partial x} \right) \Big|_{\gamma} = (X\xi^1 + \xi^1) \Big|_{\gamma} = 0,$$

или, так как  $X\xi^1 = m\xi^1$ ,  $X\xi^2 = m\xi^2$ ,

$$(m + 1)\xi^1 \Big|_{\gamma} = 0, \quad (m + 1)\xi^2 \Big|_{\gamma} = 0.$$

Отсюда, так как  $m + 1 \neq 0$ , получаем  $\xi^1 \Big|_{\gamma} = \xi^2 \Big|_{\gamma} = 0$ .

Таким образом, если при знакопостоянной функции  $M(x, y)$  в точках инвариантного луча  $div \bar{\xi} = 0$ , то все точки этого луча являются состояниями равновесия системы.

Покажем еще, что если в точках инвариантного луча  $M_1(x, y) = 0$ , то все точки этого луча являются состояниями равновесия системы как в случае знакопостоянной, так и в случае знакопеременной функции  $M(x, y)$ . Действительно, с одной стороны, так как  $M \Big|_{\gamma} = 0$ , то  $\bar{\xi} \perp \bar{\xi}_2$  в точках  $\gamma$ . С другой стороны, если  $M_1 \Big|_{\gamma} = 0$ , то  $\bar{\xi} \parallel \bar{\xi}_2$  в точках  $\gamma$ . Ясно, что такая ситуация возможна лишь при условии, что  $\bar{\xi} \Big|_{\gamma} = \bar{0}$ .

Заметим, что в рассмотренных нами случаях функции  $\xi^1$  и  $\xi^2$  имеют общий множитель (обращающийся в нуль на инвариантном луче). В п.2 системы с такими правыми частями мы исключили из рассмотрения по указанной там же причине. Поэтому в рассматриваемом нами случае знакопостоянной функции  $M(x, y)$  мы можем считать, что в достаточно малой

функцией предыдущей системы и является функцией знакоопределенной. Функции  $M_1(x, y)$  и  $div \bar{\xi}$  – знакопеременные. Первая из них обращается в нуль на осях координат, вторая – на прямых, определяемых равенствами

$$y = (-2 \pm \sqrt{5})x.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\varphi)}{R(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{2\sin 2\varphi - \cos 2\varphi}{3 + \sin 2\varphi + \cos 4\varphi} d\varphi \neq 0.$$

Следовательно, согласно теореме 7.5, состояние равновесия  $O(0,0)$  рассматриваемой системы является фокусом.

Фазовый портрет системы изображен на рис.

окрестности  $(\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon)$  инвариантного луча  $\varphi = \varphi_0$  функции  $div \bar{\xi}$  и  $M_1(x, y)$  в нуль не обращаются.

В случае знакопостоянной функции  $M(x, y)$  кроме состояния равновесия  $O(0,0)$  существует еще  $k \leq [m + 1]$  инвариантных траекторий – лучей  $\varphi^i = \varphi_0^i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), принадлежащих прямым, на которых интегрирующая функция обращается в нуль. Эти лучи разбивают плоскость  $Oxy$  на области, поведение траекторий системы в каждой из которых зависит от свойств функций  $M_1(x, y)$  и  $div \bar{\xi}$ . Исходя из теоремы 7.1 мы можем утверждать, что во всех случаях, когда функция  $M_1(x, y)$  является знакоопределенной или знакопостоянной, состояние равновесия системы является узлом, устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, какой знак имеет функция  $M_1(x, y)$ .

Таким образом, в шести из возможных девяти случаев сочетания свойств функций  $M_1(x, y)$  и  $div \bar{\xi}$  структура разбиения на траектории фазовой плоскости ясна. Остается рассмотреть случай, когда функция  $M_1(x, y)$  является знакопеременной.

Рассмотрим ситуацию, определяемую неравенствами  $M(x, y) \geq 0$ ,  $div \bar{\xi} > 0$ . Из первого неравенства и равенства

$$\bar{\xi} \times \bar{\zeta}_1 = M \bar{k}$$

следует, что на всей плоскости  $Oxy$ , кроме точек инвариантных лучей, векторы  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\zeta}_1$  и  $\bar{k}$  образуют правую тройку векторов. Из первого и второго неравенства и равенства

$$\bar{\xi} \cdot grad M = M div \bar{\xi}$$

следует, что также на всей плоскости  $Oxy$ , кроме точек инвариантных лучей, векторы  $\bar{\xi}$  и  $grad M$  образует острый угол. Из сказанного следует, что в достаточно малой окрестности любого инвариантного луча взаимное расположение векторов  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\zeta}_1$  и  $grad M$  может быть только таким, как показано на рис.7.4 (а), так что любой инвариантный луч в рассматриваемом случае может быть расположен только в области  $M_1(x, y) > 0$ . Отсюда следует, что в областях, определяемых неравенством  $M(x, y) > 0$ , функция  $M_1(x, y)$  либо не меняет знака, либо меняет его четное число раз. Ясно, что в рассматриваемом случае состояние равновесия системы может быть только неустойчивым узлом.

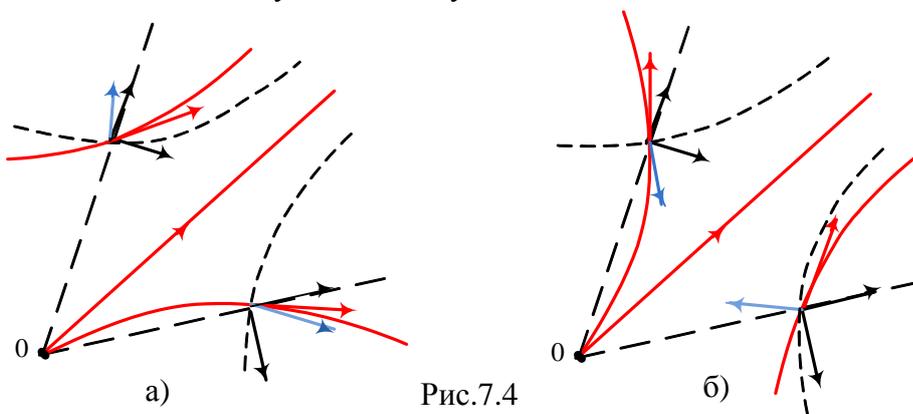


Рис.7.4

Взаимное расположение векторов  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\zeta}_1$  и  $grad M$  в достаточно малой окрестности любого инвариантного луча в случае, определяемом неравенствами  $M(x, y) \leq 0$ ,  $div \bar{\xi} > 0$ , показано на рис.7.4 (б). Ясно, что и в этом случае состояние равновесия системы является неустойчивым узлом.

Случаи, определяемые неравенствами  $M(x, y) \geq 0$ ,  $div \bar{\xi} < 0$  и  $M(x, y) \leq 0$ ,  $div \bar{\xi} < 0$  рассматриваются аналогично. В этих случаях состояние равновесия системы является устойчивым узлом.

Если во всех предыдущих случаях условие знакоопределенности функции  $div \bar{\xi}$  заменить условием ее знакопостоянства, то ко всем сделанным выводам следует только добавить, что в точках прямых, определяемых равенством  $div \bar{\xi} = 0$ , траектории системы касаются проходящих через эти точки линий уровня функции  $M(x, y)$ . Ограничившись сделанным замечанием, проиллюстрируем этот случай конкретным примером.

**Пример 7.3.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x^2y + xy^2 + y^3, \quad \dot{y} = -x^3 + xy^2 + y^3.$$

Вычисления дают:

$$M(x, y) = (x^2 - y^2)^2 \geq 0, \quad \operatorname{div} \bar{\xi} = 4y^2 \geq 0,$$

$$M_1(x, y) = y(-2x^3 + x^2y + 2xy^2 + y^3) \geq 0.$$

Функция  $M(x, y)$  обращается в нуль на прямых  $y = \pm x$ ,  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  – на прямой  $y = 0$ . Во всех точках плоскости  $Oxy$ , кроме точек этих прямых, траектории системы пересекают линии уровня функции  $M(x, y)$  изнутри наружу, так как  $\operatorname{div} \bar{\xi} > 0$  для всех значений  $y \neq 0$ .

Функция  $M_1(x, y)$  обращается в нуль на прямой  $y = 0$  и на прямой, образующей с осью  $Ox$  угол около  $35^\circ$ , (последнее легко установить, пользуясь выражением для  $M_1(x, y)$  в полярных координатах). В областях, определяемых неравенством  $M_1(x, y) > 0$ , вектор  $\bar{\xi}$  образует с векторами  $\bar{\zeta}_1$  и  $\bar{\zeta}_2$  острый угол, а в областях, определяемых неравенством  $M_1(x, y) < 0$ , он образует тупой угол с вектором  $\bar{\zeta}_1$  и острый угол с вектором  $\bar{\zeta}_2$ . Прямые, определяемые равенством  $M_1(x, y) = 0$ , пересекаются траекториями системы под прямым углом.

В дополнение к сказанному имеем

$$\dot{x}|_{y=x} = x^3, \quad \dot{y}|_{y=x} = x^3$$

и

$$\dot{x}|_{y=-x} = x^3, \quad \dot{y}|_{y=-x} = -x^3$$

Из этих равенств следует, что при движении по инвариантным лучам изображающая точка удаляется от начала координат.

В сущности, фазовый портрет системы уже определен. Желая несколько уточнить поведение траекторий системы, заметим, что, как показывают равенства

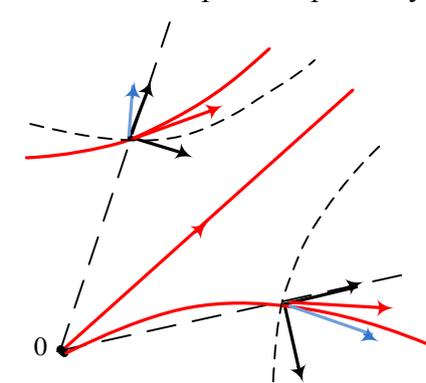
$$\dot{x}|_{x=0} = y^3, \quad \dot{y}|_{x=0} = y^3$$

положительная полуось  $Oy$  пересекается ими под углом  $45^\circ$  к оси  $Ox$ , а отрицательная полуось  $Oy$  – под углом  $-135^\circ$  к оси  $Ox$ . Заметим, кроме того, что,

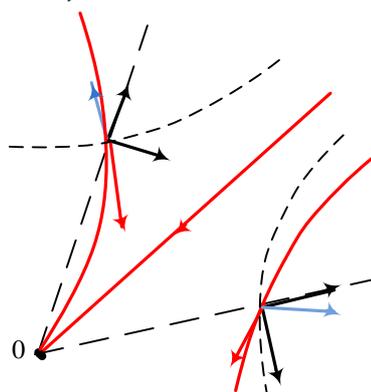
пересекая под прямым углом ось  $Ox$ , траектории системы касаются соответствующих линий уровня функции  $M(x, y)$ .

Фазовый портрет системы изображен на рис.7.5.

Нам осталось рассмотреть случай, когда  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  также является знакопеременной.



а)  $\operatorname{div} \bar{\xi} > 0$



б)  $\operatorname{div} \bar{\xi} < 0$

Рис.7.6

В этом случае на всей плоскости  $Oxy$ , кроме точек инвариантных лучей, векторы  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\zeta}_1$  и  $\bar{k}$  образуют правую тройку векторов, если  $M(x, y) \geq 0$ , и левую тройку векторов, если  $M(x, y) \leq 0$ . Поэтому, так как  $\operatorname{div} \bar{\xi} \geq 0$ , в случае  $M(x, y) \geq 0$  в достаточно малой окрестности

инвариантного луча взаимное расположение векторов  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\zeta}_1$  и  $gradM$  может быть таким, как показано на рис.7.6 (а), либо таким, как показано на рис.7.6 (б). Тем самым определяются возможные варианты поведения траекторий системы в областях  $M(x, y) > 0$ , изображенные на рис.7.7 (а-г). Общий фазовый портрет системы зависит от того, какие из указанных на рис.7.7 вариантов поведения траекторий в областях, определяемых неравенством  $M(x, y) > 0$ , возможны для рассматриваемой системы.

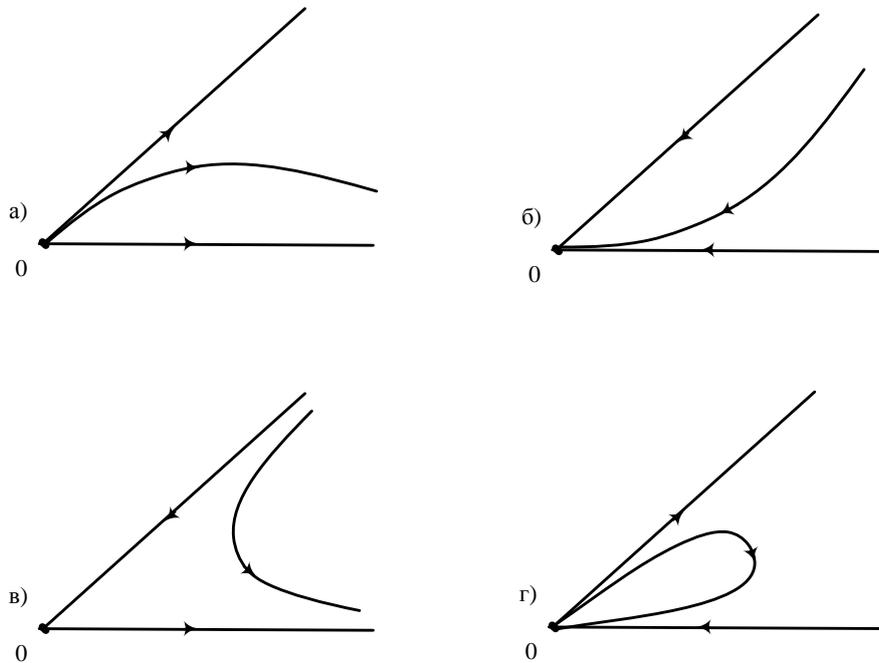


Рис.7.7

Аналогичные для случая  $M(x, y) \leq 0$  рассуждения мы опускаем.

**Пример 7.4.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -3x^2y + y^3, \quad \dot{y} = -x^3 - xy^2.$$

Вычисления дают:

$$M(x, y) = (x^2 - y^2)^2 \geq 0, \quad div \bar{\xi} = 4xy \geq 0, \quad M_1(x, y) = -4x^3y \geq 0.$$

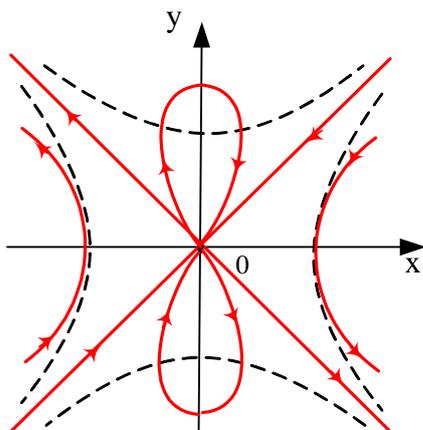


Рис.7.8

Функция  $M(x, y)$  положительна на всей плоскости  $Oxy$ , кроме прямых  $y = \pm x$ , на которых она обращается в нуль. Функции  $M_1(x, y)$  и  $div \bar{\xi}$  обращаются в нуль на координатных осях. Траектории системы, пересекая координатные оси под прямым углом, касаются линий уровня функции  $M(x, y)$ . Направления движения изображающей точки по инвариантным лучам легко определяются по знаку функции  $M_1(x, y)$  на этих лучах. Фазовый портрет системы изображен на рис.7.8.

**Пример 7.5.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -4x^3 - x^2y + xy^2 + y^3, \quad \dot{y} = -x^3 - 4x^2y + xy^2 - y^3.$$

Вычисления дают:

$$M(x, y) = (x^2 - y^2)^2 \geq 0, \quad \text{div} \bar{\xi} = -4x^2 + y^2 \geq 0,$$

$$M_1(x, y) = -4x^4 - 2x^3y + 2xy^3 - 3x^2y^2 + y^4 \geq 0.$$

Функция  $M(x, y)$  положительна на всей плоскости  $Oxy$ , кроме прямых  $y = \pm x$ , на которых она обращается в нуль. Функция  $\text{div} \bar{\xi}$  обращается в нуль на прямых  $y = \pm 2x$ . В точках этих прямых траектории системы касаются линий уровня функции  $M(x, y)$ . Функция  $M_1(x, y)$  обращается в нуль на прямых, образующих с положительным направлением оси  $Ox$  углы около  $58^\circ$  и около  $109^\circ$ . Траектории системы пересекают эти прямые под прямым углом.

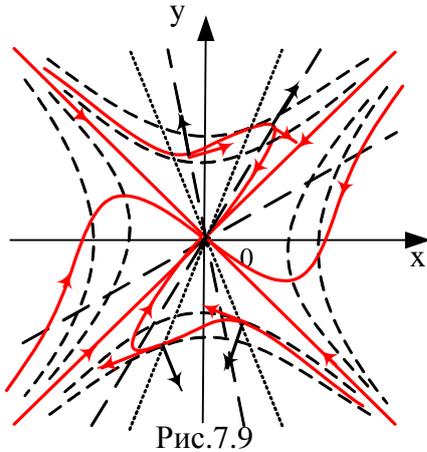


Рис.7.9

Равенства  $M_1(x, y)|_{y=\pm x} = -6x^4$  показывают, что при движении по инвариантным лучам изображающая точка приближается к началу координат. Отсюда следует, что состояние равновесия системы является устойчивым узлом. Поведение траекторий системы можно уточнить,

определив при помощи уравнений системы направления, в которых траектории пересекают координатные оси.

Фазовый портрет системы изображен на рис. 7.9.

**5. Случай знакопеременной интегрирующей функции.** В этом случае, как и в предыдущем, в силу доказанной в § 3 теоремы 7.1 мы можем утверждать, что во всех случаях, когда функция  $M_1(x, y)$  является знакоопределенной или знакопостоянной, состояние равновесия системы является узлом, устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, какой знак имеет функция  $M_1(x, y)$ . Поэтому нам остается рассмотреть лишь те случаи, когда функция  $M_1(x, y)$  является знакопеременной.

Пусть  $\text{div} \bar{\xi} > 0$ . Из этого неравенства и равенства (7.7) следует, что на всей плоскости  $Oxy$ , кроме инвариантных лучей, траектории системы пересекают линии уровня функции  $M(x, y)$  изнутри наружу. При этом векторы  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\zeta}_1$  и  $\bar{k}$  образуют правую тройку векторов в тех областях, где  $M(x, y) > 0$ , и левую тройку векторов в тех областях, где  $M(x, y) < 0$ .

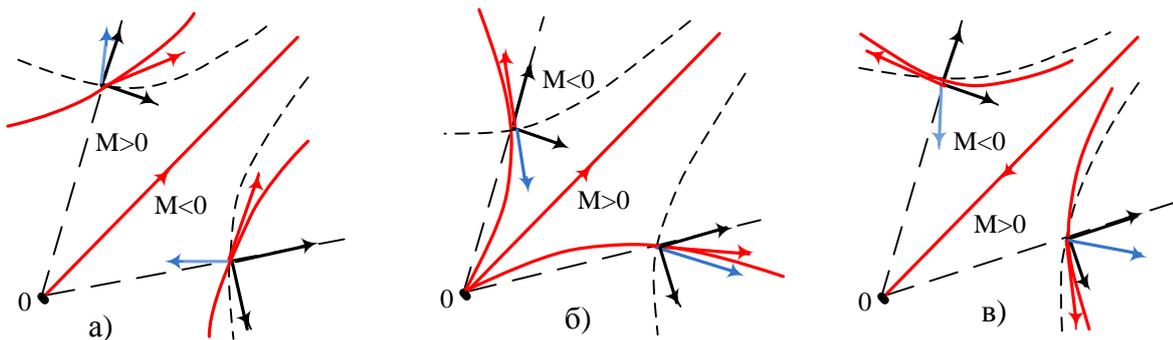


Рис.7.10

Взаимное расположение векторов  $\bar{\xi}$ ,  $\text{grad} M$ ,  $\bar{\zeta}_1$  и  $\bar{\zeta}_2$  в точках достаточно малой окрестности инвариантного луча в рассматриваемом нами случае изображено на рис. 7.10 (а, б, в). Эти рисунки показывают, что поведение траекторий системы в области, ограниченной инвариантными лучами, может быть либо таким, как показано на рис. 7.11 (а) (параболический сектор), либо таким, как показано на рис. 7.11 (б) (гиперболический сектор).

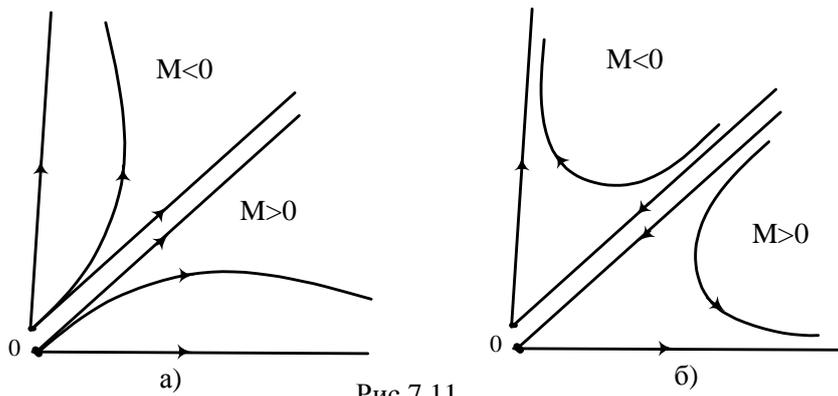


Рис.7.11

Возможные варианты взаимного расположения векторов  $\bar{\xi}$ ,  $gradM$ ,  $\bar{\zeta}_1$  и  $\bar{\zeta}_2$  в достаточно малой окрестности инвариантного луча в случае  $div\bar{\xi} < 0$  изображены на рис. 7.12 (а, б, в).

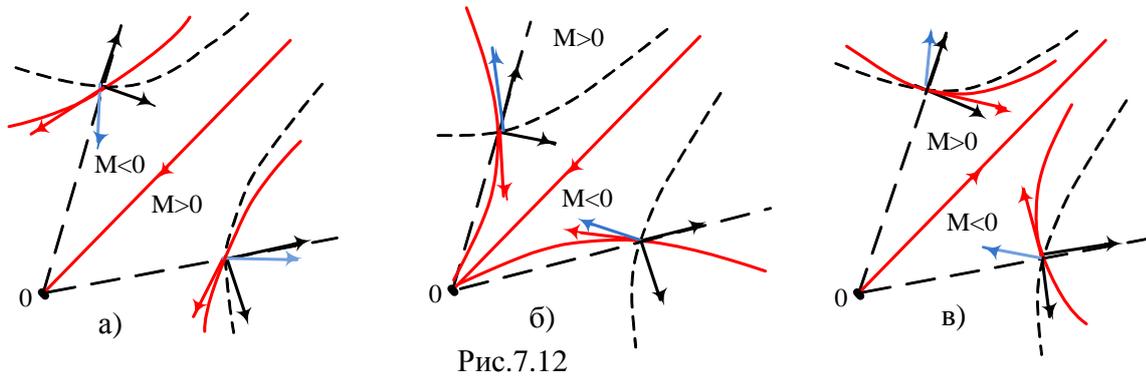


Рис.7.12

Поведение траекторий системы в областях, ограниченных инвариантными лучами, показано на рис. 7.13 (а,б).

Заметим, что если на ограничивающих область  $M(x, y) \neq 0$  инвариантных лучах функция  $M_1(x, y)$  имеет один и тот же знак, то область является параболической. Отсюда ясно, что если на всех инвариантных лучах функция  $M_1(x, y)$  имеет один и тот же знак, то состояние равновесия является узлом, устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, какой знак имеет функция  $M_1(x, y)$  на инвариантных лучах. Точнее, если для всех  $\varphi^i$  ( $i = 1, \dots, k \leq [m + 1]$ ), удовлетворяющих уравнению  $R(\varphi) = 0$ , выполняется неравенство  $Q(\varphi) > 0$  ( $Q(\varphi) < 0$ ), то состояние равновесия является неустойчивым (устойчивым) узлом.

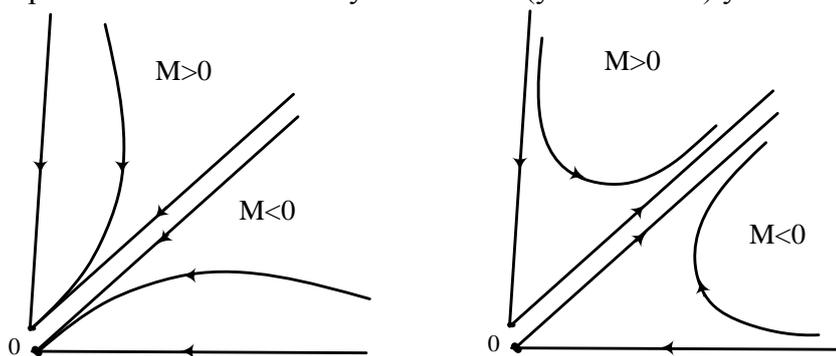


Рис.7.13

Может, конечно, оказаться, что на любых двух соседних инвариантных лучах функция  $Q(\varphi)$  имеет противоположные знаки. В этом случае фазовый портрет системы составляется только из гиперболических секторов.

Наконец, может оказаться, что среди секторов, ограниченных инвариантными лучами, имеются как гиперболические, так и параболические. Состояние равновесия  $O(0,0)$  однородной

динамической системы, фазовая плоскость которой инвариантными лучами разбивается на конечное число гиперболических и параболических секторов, будем называть *седло-узлом*.

**Пример 7.6.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = 3x^3 - 6x^2y + 2y^3, \quad \dot{y} = -2x^3 - 2xy^2 + 3y^3.$$

Вычисления дают:

$$M(x, y) = -(x^2 - y^2)(y - 2x)(x + 2y) \geq 0, \quad \operatorname{div} \bar{\xi} = 9x^2 - 16xy + 9y^2 > 0,$$

$$M_1(x, y) = 3x^4 - 8x^3y + 3y^4 \geq 0.$$

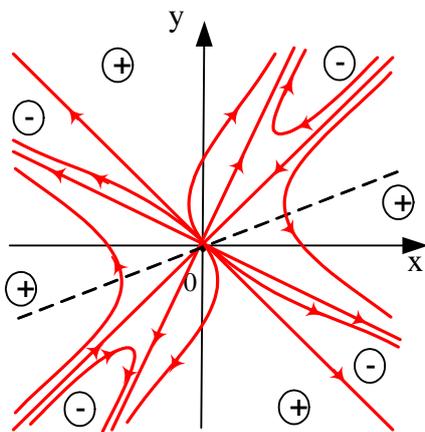


Рис.7.14

Функция  $M(x, y)$  обращается в нуль на прямых  $y = \pm x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = -\frac{1}{2}x$ . Вдоль этих прямых имеем:

$$M_1(x, y)|_{y=x} = -2x^4 < 0, \quad M_1(x, y)|_{y=-x} = 14x^4 > 0,$$

$$M_1(x, y)|_{y=2x} = 35x^4 > 0, \quad M_1(x, y)|_{y=-\frac{1}{2}x} = \frac{115}{16}x^4 > 0,$$

откуда видно, что при движении по инвариантным лучам  $\varphi = \pi/4$  и  $\varphi = 5\pi/4$  изображающая точка приближается к началу координат, а на остальных инвариантных лучах – удаляется от него.

Функция  $M_1(x, y)$  обращается в нуль на лучах  $\varphi \cong 21^\circ$  и  $\varphi \cong 21^\circ + \pi$ . Траектории системы пересекают эти лучи под прямым углом.

Учитывая сказанное выше для случая  $\operatorname{div} \bar{\xi} > 0$ , легко понять, что фазовый портрет системы имеет вид,

показанный на рис. 7.14 (в кружках указаны знаки функции  $M(x, y)$  в соответствующих областях).

Случаи  $\operatorname{div} \bar{\xi} \geq 0$  и  $\operatorname{div} \bar{\xi} \leq 0$  по существу не отличаются от рассмотренных, поэтому мы на них не останавливаемся.

Нам осталось рассмотреть случай, когда  $\operatorname{div} \bar{\xi} \geq 0$ . В этом случае, как и прежде, мы предполагаем, что в некоторой окрестности инвариантного луча  $M_1(x, y) \neq 0$ . Однако, в отличие от случая знакопостоянной функции  $M(x, y)$ , случай обращения в нуль на инвариантном луче функции  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  не исключается.

Легко сообразить, что в рассматриваемом случае возможны все варианты поведения траекторий в областях  $M(x, y) \neq 0$ , указанные ранее. Другими словами, среди секторов, которые могут встретиться при исследовании систем со знакопеременными функциями  $M(x, y)$ ,  $M_1(x, y)$  и  $\operatorname{div} \bar{\xi}$ , могут оказаться и параболические, и гиперболические, и эллиптические. Поэтому нам остается только резюмировать полученные выше результаты, что мы и делаем в формулируемой ниже теореме.

**Теорема 7.6.** Если для системы (7.4) функция  $M(x, y)$  является знакопостоянной или знакопеременной, то ее фазовый портрет составляется из секторов, границами которых являются лучи, исходящие из начала координат, на которых функция  $M(x, y)$  обращается в нуль. Указанные секторы могут быть трех типов: параболические, гиперболические и эллиптические, причем:

1. сектор является параболическим тогда и только тогда, когда на ограничивающих его лучах функция  $M_1(x, y)$  имеет одинаковые знаки; при этом вдоль любой траектории, принадлежащей сектору  $M(x, y) > 0$  ( $M(x, y) < 0$ ) векторы  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\zeta}_1$  и  $\bar{k}$  образуют правую (левую) тройку векторов;
2. сектор является гиперболическим тогда и только тогда, когда на ограничивающих его лучах функция  $M_1(x, y)$  имеет противоположные знаки и граница сектора обходится изображающей точкой в направлении, совпадающем со знаком функции  $M(x, y)$  в рассматриваемом секторе;
3. сектор является эллиптическим тогда и только тогда, когда на ограничивающих его лучах функция  $M_1(x, y)$  имеет противоположные знаки и граница сектора обходится

изображающей точкой в направлении, противоположном знаку функции  $M(x, y)$  в рассматриваемом секторе.

Как следствие этой теоремы в дополнение к теореме 7.2 получаем следующие теоремы, полезные в тех случаях, когда речь идет только об исследовании устойчивости состояния равновесия.

**Теорема 7.7.** Состояние равновесия системы (7.4) в случаях знакопостоянной и знакопеременной функции  $M(x, y)$  асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда для всех исходящих из начала координат лучах, вдоль которых  $M(x, y) = 0$ , выполняется неравенство  $M_1(x, y) < 0$ .

Отсюда следует достаточный признак неустойчивости состояния равновесия однородной системы в случаях знакопостоянной и знакопеременной функции  $M(x, y)$ .

**Теорема 7.8.** Если в случаях знакопостоянной и знакопеременной функции  $M(x, y)$  хотя бы на одном из лучей исходящих из начала координат, вдоль которых  $M(x, y) = 0$ , выполняется неравенство  $M_1(x, y) > 0$ , то состояние равновесия системы неустойчиво.

В полярных координатах эти теоремы выглядят следующим образом.

**Теорема 7.7а.** Состояние равновесия системы (7.4) в случаях знакопостоянной и знакопеременной функции  $M(x, y)$  асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда для всех  $\varphi^i$  ( $i = 1, \dots, k \leq [m + 1]$ ), удовлетворяющих уравнению  $R(\varphi) = 0$ , выполняется неравенство  $Q(\varphi^i) < 0$ .

**Теорема 7.8а.** Если хотя бы на одном из лучей  $\varphi^i$  ( $i = 1, \dots, k \leq [m + 1]$ ), удовлетворяющих уравнению  $R(\varphi) = 0$ , выполняется неравенство  $Q(\varphi^i) > 0$ , то состояние равновесия  $O(0,0)$  неустойчиво.

## § 8. Квазиоднородные системы.

Система

$$\dot{x} = \xi^1(x, y), \quad \dot{y} = \xi^2(x, y)$$

называется квазиоднородной степени  $d$ , если функции  $\xi^1(x, y)$  и  $\xi^2(x, y)$  являются квазиоднородными функциями соответственно степени  $m = \alpha + d$  и  $n = \beta + d$  с весом  $\alpha$  и  $\beta$  переменных  $x$  и  $y$  соответственно ( $\alpha, \beta, d$  – действительные числа). Легко проверить, что в этом случае система допускает группу квазиоднородных растяжений с оператором

$$Af = \alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + \beta y \frac{\partial f}{\partial y},$$

причем, как легко проверить  $(XA)f = -dXf$ .

Траектории указанной группы определяются равенствами

$$x = x_0 e^{\alpha\tau}, \quad y = y_0 e^{\beta\tau},$$

где  $\tau$  – групповой параметр. Единственная точка покоя этой группы – начало координат  $O(0,0)$ . Вид остальных траекторий определяется знаками чисел  $\alpha$  и  $\beta$ . Если  $\alpha$  и  $\beta$  имеют одинаковые знаки, то траекториями группы являются полупараболы, исходящие из начала координат или входящие в него. Если же  $\alpha$  и  $\beta$  имеют разные знаки, то траекториями группы являются ветви гипербол, асимптотами которых являются координатные полуоси. Тем самым определяются возможные инвариантные траектории рассматриваемой квазиоднородной системы: точка  $O(0,0)$ , координатные полуоси и ветви парабол или гипербол в зависимости от знаков  $\alpha$  и  $\beta$ .

Равенство

$$AM(x, y) = M(x, y)(\alpha + \beta - \rho) \quad (\rho = -d)$$

показывает, что функция

$$M(x, y) = \xi^1 \cdot \beta y - \xi^2 \cdot \alpha x$$

является квазиоднородной функцией переменных  $x$  и  $y$  (с весами  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно) степени  $\alpha + \beta + d$ .

Квазиоднородной (с теми же весами переменных  $x$  и  $y$ ) является и функция  $\text{div} \bar{\xi}$ .

Действительно,

$$A \operatorname{div} \bar{\xi} = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \alpha x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi^2}{\partial y} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \xi^2}{\partial y}.$$

Меняя во втором и третьем слагаемых порядок дифференцирования (в предположении непрерывности смешанных частных производных второго порядка функций  $\xi^1(x, y)$  и  $\xi^2(x, y)$ ), получаем

$$A \operatorname{div} \bar{\xi} = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \xi^1}{\partial y} + \alpha x \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \xi^2}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \xi^2}{\partial y}.$$

Воспользовавшись правилом дифференцирования произведения функций, получаем

$$\begin{aligned} A \operatorname{div} \bar{\xi} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha x \frac{\partial \xi^1}{\partial x} \right) - \alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta y \frac{\partial \xi^1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha x \frac{\partial \xi^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta y \frac{\partial \xi^2}{\partial y} \right) - \beta y \frac{\partial \xi^2}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha x \frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \beta y \frac{\partial \xi^1}{\partial y} \right) - \alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha x \frac{\partial \xi^2}{\partial x} + \beta y \frac{\partial \xi^2}{\partial y} \right) - \beta y \frac{\partial \xi^2}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} X \xi^1 - \alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} X \xi^2 - \beta y \frac{\partial \xi^2}{\partial y}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $A \xi^1 = (\alpha + d) \xi^1$ ,  $A \xi^2 = (\beta + d) \xi^2$ , получаем

$$A \operatorname{div} \bar{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha + d) \xi^1 - \alpha \frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\beta + d) \xi^2 - \beta y \frac{\partial \xi^2}{\partial y} = d \operatorname{div} \bar{\xi},$$

откуда и следует высказанное выше утверждение.

Последнее равенство показывает также, что  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  инвариантна относительно преобразований группы с оператором  $Af$ , откуда следует, что кривые, на которых  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  обращается в нуль (если они существуют), составлены из траекторий этой группы.

Функция  $M_1(x, y) = \bar{\xi} \cdot \bar{\xi}_1 = \xi^1 \cdot \alpha x + \xi^2 \cdot \beta y$ , как легко понять, квазиоднородной не является, (кроме случая  $\alpha = \beta$ , т.е. случая обычной однородности), и может обращаться в нуль на произвольной кривой, лежащей в плоскости  $Oxy$ . Поэтому в случае квазиоднородной системы роль этой функции весьма незначительна.

Ограничившись изложенным выше, приведем примеры исследования конкретных квазиоднородных систем.

**Пример 8.1.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = x(x + y^2), \quad \dot{y} = y(2x + y^2).$$

Проверим, является ли эта система квазиоднородной. Для этого попытаемся найти числа  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $d$  такие, при которых выполняются равенства

$$X \xi^1 = (\alpha + d) \xi^1, \quad X \xi^2 = (\beta + d) \xi^2$$

или в развернутом виде

$$\alpha x \frac{\partial \xi^1}{\partial x} + \beta y \frac{\partial \xi^1}{\partial y} = (\alpha + d) \xi^1,$$

$$\alpha x \frac{\partial \xi^2}{\partial x} + \beta y \frac{\partial \xi^2}{\partial y} = (\beta + d) \xi^2.$$

В нашем случае

$$\xi^1 = x(x + y^2), \quad \xi^2 = y(2x + y^2).$$

Пользуясь предыдущими равенствами, получаем

$$\alpha x \cdot (2x + y^2) + \beta y \cdot 2xy \equiv 2\alpha x^2 + (\alpha + 2\beta)xy^2 = (\alpha + d)xy^2,$$

$$\alpha x \cdot 2y + \beta y \cdot (2x + 3y^2) \equiv 2(\alpha + \beta)xy + 3\beta y^3 = (\beta + d)y^3.$$

Тождественное выполнение этих равенств имеет место тогда и только тогда, когда

$$2\alpha = \alpha + d, \quad \alpha + 2\beta = \alpha + d, \quad \alpha + \beta = \beta + d, \quad 3\beta = \beta + d,$$

откуда находим

$$\alpha = C, \quad \beta = C/2, \quad d = C \quad (C = \text{const}).$$

Таким образом, числа  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $d$  определяются с точностью до постоянного множителя.

Положив  $C = 2$ , получаем  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  и  $d = 2$ , так что рассматриваемая система является квазиоднородной системой степени  $d = 2$  с весами  $\alpha = 2$  и  $\beta = 1$  переменных  $x$  и  $y$  соответственно и допускает группу квазиоднородных растяжений с оператором

$$Af = 2x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Траектории последней определяются равенствами

$$x = x_0 e^{2\tau}, \quad y = y_0 e^{\tau},$$

и представляют собой начало координат  $O(0,0)$  и полупараболы, исходящие из начала координат.

Вычисляя интегрирующую функцию и дивергенцию векторного поля системы, получаем

$$M(x, y) = -xy(3x + y^2), \quad \text{div} \bar{\xi} = 4(x + y^2).$$

Из первого выражения следует, что инвариантными траекториями являются: точка  $O(0,0)$ ; лучи  $y = 0, x > 0$ ;  $y = 0, x < 0$ ;  $x = 0, y > 0$ ;  $x = 0, y < 0$ ; полупараболы  $3x + y = 0, y > 0$ ;  $3x + y = 0, y < 0$ .

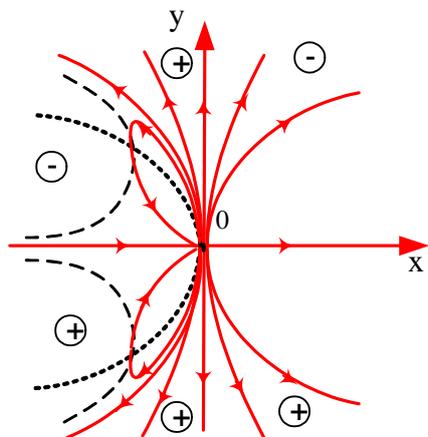


Рис.6.1

### § 9. Применение интегрирующей функции к исследованию поведения траекторий заданной динамической системы.

Применение интегрирующей функции к решению указанных выше задач основано на использовании уравнения (1.7), позволяющего изучать поведение траекторий системы (4.1) относительно ее линий уровня, определяемых равенством

$$M(x, y) = h, \tag{9.1}$$

где  $h$  – произвольная постоянная. Заменяя в этом уравнении  $M(x, y)$  на  $h$  и учитывая очевидное тождество  $X M \equiv \bar{\xi} \cdot \text{grad} M$ , получаем равенство

$$\bar{\xi} \cdot \text{grad} M = h \text{div} \bar{\xi} \tag{9.2}$$

справедливое в каждой точке рассматриваемой линии уровня. Это равенство мы уже использовали в приведенных выше примерах.

Полезным также оказывается равенство

$$\frac{dM}{dt} = M \text{div} \bar{\xi}, \tag{9.3}$$

получаемое из равенства (1.7) на основании равенства (1.3). Это равенство позволяет судить о поведении функции  $M(x, y)$  вдоль траекторий системы (4.1).

Равенство (9.2) позволяет делать заключения о взаимном расположении векторов  $\bar{\xi}$  и  $\text{grad} M$  вдоль линии уровня, соответствующей заданному значению  $h$ , в зависимости от того, какие значения вдоль этой линии принимает  $\text{div} \bar{\xi}$ . Действительно, если изучается поведение траекторий системы в области  $M(x, y) > 0$ ,  $\text{grad} M \neq 0$ , то в равенстве (9.2)  $h > 0$ . Поэтому в тех точках линии уровня, в которых  $\text{div} \bar{\xi} > 0$ , угол между векторами  $\bar{\xi}$  и  $\text{grad} M$  острый; в тех точках линии уровня, в которых  $\text{div} \bar{\xi} < 0$ , угол между векторами  $\bar{\xi}$  и  $\text{grad} M$  тупой; в тех точках линии уровня, в которых  $\text{div} \bar{\xi} = 0$ , векторы  $\bar{\xi}$  и  $\text{grad} M$  взаимно перпендикулярны. Учитывая, что вектор  $\text{grad} M$  в каждой точке любой линии уровня направлен в сторону возрастания функции  $M(x, y)$ , приходим к выводу, что в тех точках линии уровня, в которых  $\text{div} \bar{\xi} > 0$ , траектории системы пересекают линию уровня в направлении возрастания функции  $M(x, y)$ ; в тех точках линии уровня, в которых  $\text{div} \bar{\xi} < 0$ , траектории системы пересекают линию уровня в направлении убывания функции  $M(x, y)$ ; в тех точках линии уровня, в которых  $\text{div} \bar{\xi} = 0$ , траектории системы касаются линии уровня.

Аналогично, если изучается поведение траекторий системы в области  $M(x, y) < 0$ ,  $gradM \neq 0$ , то в равенстве (9.2)  $h < 0$ . Тогда в тех точках линии уровня, в которых  $div\bar{\xi} > 0$ , вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $gradM$  тупой угол; в тех точках линии уровня, в которых  $div\bar{\xi} < 0$ , вектор  $\bar{\xi}$  образует с вектором  $gradM$  острый угол; в тех точках линии уровня, в которых  $div\bar{\xi} = 0$ , векторы  $\bar{\xi}$  и  $gradM$  взаимно перпендикулярны. Учитывая указанное выше направление вектора  $gradM$  в каждой точке любой линии уровня, приходим к выводу, что в тех точках линии уровня, в которых  $div\bar{\xi} > 0$ , траектории системы пересекают линию уровня в направлении убывания функции  $M(x, y)$ ; в тех точках, в которых  $div\bar{\xi} < 0$ , траектории системы пересекают линию уровня в направлении возрастания функции  $M(x, y)$ ; в тех точках, в которых  $div\bar{\xi} = 0$ , траектории системы касаются линии уровня.

К тем же выводам приводит рассмотрение равенства (9.3).

Полученную информацию можно дополнить, если воспользоваться равенством

$$\bar{\xi} \cdot \bar{e} = \xi^1 \frac{\partial M}{\partial y} + \xi^2 \left( -\frac{\partial M}{\partial x} \right) \equiv T(x, y), \quad (9.4)$$

где  $\bar{e} = \left( \frac{\partial M}{\partial y}, -\frac{\partial M}{\partial x} \right)$  – вектор, полученный поворотом вектора  $gradM$  на угол  $\pi/2$  по ходу часовой стрелки. Ясно, что вектор  $\bar{e}$  направлен по касательной к линии уровня, проходящей через рассматриваемую точку. Равенство (9.4) показывает, что в каждой точке любой из областей, определяемых неравенством  $T(x, y) > 0$ , векторы  $\bar{\xi}$  и  $\bar{e}$  образуют острый угол, а в каждой точке любой из областей, определяемых неравенством  $T(x, y) < 0$  – тупой. Полезно заметить, что на траектории  $\gamma$ , принадлежащей линии нулевого уровня функции  $M(x, y)$ , функция  $T(x, y)$  либо только положительна, либо только отрицательна, либо равна нулю (последнее имеет место тогда и только тогда, когда  $gradM|_{\gamma} = \bar{0}$ ). В первых двух случаях равенство (9.4) позволяет определять направление движения изображающей точки по траектории  $\gamma$ : так как вдоль траектории  $\gamma$  векторы  $\bar{\xi}$  и  $\bar{e}$  коллинеарны, то при  $M(x, y)|_{\gamma} > 0$ , направление вектора  $\bar{\xi}$  совпадает с направлением вектора  $\bar{e}$ , а при  $M(x, y)|_{\gamma} < 0$  – противоположно направлению вектора  $\bar{e}$ .

Займемся теперь задачей исследования поведения траекторий системы (4.1) в окрестностях ее состояний равновесия.

Пусть точка  $P_0(x_0, y_0) \in D$  – изолированное состояние равновесия системы (4.1). Пользуясь формулами параллельного переноса, мы всегда можем перенести начало координат в эту точку и получить систему, для которой начало координат будет состоянием равновесия. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что система (4.1) и есть преобразованная система, для которой точка  $O(0, 0)$  является изолированным состоянием равновесия, т.е. выполняются равенства  $\xi^1(0, 0) = \xi^2(0, 0) = 0$ .

Всюду в этом параграфе при исследовании поведения траекторий системы (4.1) в окрестности ее состояния равновесия  $O(0, 0)$  под интегрирующей функцией  $M(x, y)$  системы мы будем понимать функцию, представленную разложением (4.7), полученным при помощи указанного в §4 вычислительного процесса. Разложение (4.7) позволяет судить о том, какой является функция  $M(x, y)$  в окрестности точки  $O(0, 0)$ : знакоопределенной, знакопеременной или знакопостоянной.

Именно [18], она будет в некоторой окрестности точки  $O(0, 0)$  знакоопределенной или знакопеременной всякий раз, как только знакоопределенной или знакопеременной будет функция  $M_{m+1}(x, y)$ , определяемая равенством (4.5). При  $m$  четном форма  $M_{m+1}(x, y)$  будет функцией нечетной степени, а потому обязательно знакопеременной. Следовательно, знакоопределенность функции  $M_{m+1}(x, y)$  может иметь место лишь при  $m$  нечетном, однако, в

этом случае функция  $M_{m+1}(x, y)$  может оказаться также и знакопеременной, и знакопостоянной, и даже тождественно равной нулю. В двух последних случаях вопрос о том, какой на самом деле является функция  $M(x, y)$ , решается привлечением к рассмотрению в разложении (4.7) форм более высоких степеней.

Рассмотрим сначала случай, когда в некоторой окрестности состояния равновесия  $O(0, 0)$  системы (4.1) интегрирующая функция  $M(x, y)$  является знакоопределенной.

Докажем следующую теорему [19].

**Теорема 9.1.** *Если в некоторой окрестности состояния равновесия  $O(0, 0)$  системы (4.1) функция  $M(x, y)$  является знакоопределенной и в этой же окрестности  $\operatorname{div} \bar{\xi} < |0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} < 0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} \leq 0$ , то состояние равновесия  $O(0, 0)$  системы асимптотически устойчиво; если в указанной окрестности  $\operatorname{div} \bar{\xi} > |0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} > 0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} \geq 0$ , то состояние равновесия  $O(0, 0)$  неустойчиво (асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow -\infty$ ); если  $\operatorname{div} \bar{\xi} \equiv 0$ , то состояние равновесия устойчиво.*

**Доказательство.** Пусть  $D_0$  – окрестность точки  $O(0, 0)$ , в которой функция  $M(x, y)$  является знакоопределенной. Тогда, как известно [18], ее линии уровня в этой окрестности, определяемые равенством (9.1), при достаточно малых по абсолютной величине значениях  $h$ , являются замкнутыми кривыми, содержащими точку  $O(0, 0)$  внутри и стягивающимися к ней при  $h \rightarrow 0$ . Если в  $D_0$   $\operatorname{div} \bar{\xi} < |0$  или  $\operatorname{div} \bar{\xi} < 0$ , то согласно сказанному выше, в  $D_0$  все траектории системы (4.1) пересекают все линии уровня функции  $M(x, y)$  снаружи внутрь, неограниченно приближаясь к точке  $O(0, 0)$  при  $t \rightarrow +\infty$ , т.е. точка  $O(0, 0)$  является асимптотически устойчивым состоянием равновесия.

В случае, когда  $\operatorname{div} \bar{\xi} \leq 0$  в  $D_0$ , все траектории системы пересекают все линии уровня функции  $M(x, y)$  в  $D_0$  также снаружи внутрь, с той лишь разницей, что в точках пересечения линий уровня с кривыми  $\operatorname{div} \bar{\xi} = 0$  траектории системы пересекают линии уровня, касаясь последних. Таким образом, и в этом случае состояние равновесия  $O(0, 0)$  является асимптотически устойчивым.

При помощи аналогичных рассуждений нетрудно показать, что при выполнении в  $D_0$  одного из условий  $\operatorname{div} \bar{\xi} > |0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} > 0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} \geq 0$  состояние равновесия  $O(0, 0)$  неустойчиво (асимптотически устойчиво при  $t \rightarrow -\infty$ ).

Если  $\operatorname{div} \bar{\xi} \equiv 0$ , то  $X M \equiv 0$ , т.е. функция  $M(x, y)$  является знакоопределенным в  $D_0$  интегралом системы (4.1), и, следовательно, упомянутые выше ее замкнутые линии уровня, определяемые равенством (9.1) при достаточно малых по абсолютной величине значениях  $h$  являются траекториями системы. Отсюда следует, что в этом случае состояние равновесия  $O(0, 0)$  системы устойчиво и является центром.

Согласно приведенному доказательству теоремы 9.1, в первых двух случаях состояние равновесия  $O(0, 0)$  системы (4.1) может оказаться или узлом, или фокусом.

**Замечание.** Легко заметить, что при знакоопределенной в  $D_0$  функции  $M(x, y)$  правая часть равенства (9.3) будет функцией знакоопределенной со знаком, противоположным знаку функции  $M(x, y)$ , если в  $D_0$   $\operatorname{div} \bar{\xi} < |0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} < 0$ , и знакоопределенной функцией того же знака, что и функция  $M(x, y)$ , если в  $D_0$   $\operatorname{div} \bar{\xi} > |0$ , или  $\operatorname{div} \bar{\xi} > 0$ . В первых двух случаях заключение об асимптотической устойчивости состояния равновесия  $O(0, 0)$  можно сделать на основании теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, а в последних двух случаях заключение о неустойчивости (асимптотической устойчивости при  $t \rightarrow -\infty$ ) состояния равновесия можно сделать на основании теоремы Ляпунова о неустойчивости; в случае, когда  $\operatorname{div} \bar{\xi} \equiv 0$  в  $D$ , заключение об устойчивости состояния равновесия  $O(0, 0)$  можно сделать на основании теоремы Ляпунова об устойчивости [15].

Для системы, рассмотренной в примере 2.2, при положительно определенной в любой окрестности состояния равновесия  $O(0, 0)$  интегрирующей функции дивергенция векторного поля в той же окрестности является функцией отрицательно определенной, откуда следует,

согласно сформулированной теореме, асимптотическая устойчивость состояния равновесия. Для системы, рассмотренной в примере 3.1, при положительно определенной в окрестности  $0 \leq x^2 + y^2 < 1/2$  интегрирующей функции дивергенция векторного поля является в той же окрестности положительной функцией, что, в силу сформулированной теоремы, свидетельствует о неустойчивости состояния равновесия  $O(0,0)$  этой системы.

Для систем, рассмотренных в примерах 2.1 и 2.3 исследовать устойчивость их состояний равновесия при помощи сформулированной теоремы невозможно, так как соответствующие им интегрирующие функции и дивергенции векторных полей условиям этой теоремы не удовлетворяют.

**Пример 9.1.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xy^2, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

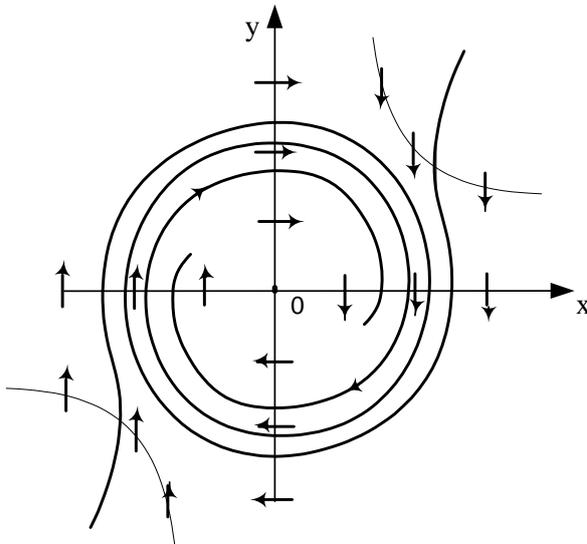


Рис.9.1.

единственным состоянием равновесия которой является точка  $O(0,0)$ . Дивергенция векторного поля системы  $div \bar{\xi} = -y^2$  является постоянно отрицательной и обращается в нуль на оси  $Ox$ . Функция (4.5) в данном случае имеет вид

$$M_2 = \alpha(x^2 + y^2)$$

и при  $\alpha > 0$  является положительно определенной, так что интегрирующую функцию для заданной системы также можно считать положительно определенной. В силу теоремы 9.1 из сказанного следует, что состояние равновесия  $O(0,0)$  системы асимптотически устойчиво.

Для установления фазового портрета системы отметим следующие особенности

поведения ее траекторий:

- 1)  $\dot{x} = 0, \dot{y} = -x$  при  $y = 0$  и  $y - xy = 0$ , т.е. в точках оси  $Ox$  (кроме точки  $x = 0$ ) и точках ветвей гиперболы  $y = 1/x$  вектор поля параллелен оси  $Oy$ ;
- 2)  $\dot{x} = y, \dot{y} = 0$  при  $x = 0$ , т.е. в точках оси  $Oy$  (кроме точки  $y = 0$ ) вектор поля параллелен оси  $Ox$ ;
- 3)  $\cos(\bar{\xi}, \bar{\zeta}_1) = \frac{\bar{\xi} \cdot \bar{\zeta}_1}{|\bar{\xi}| |\bar{\zeta}_1|} = \frac{-x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{(y - xy^2)^2 + x^2}} \leq 0 \quad \forall x, y,$

причем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \cos(\bar{\xi}, \bar{\zeta}_1) = \left| \frac{x = \rho \cos \varphi}{y = \rho \sin \varphi} \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{-\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - 2\rho^2 \cos \varphi \sin^4 \varphi + \rho^4 \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi}} = 0 \quad \forall \varphi,$$

откуда следует, что ни одна траектория системы не входит в начало координат в определенном направлении;

- 4)  $\xi^1(-x, -y) = -\xi^1(x, y), \xi^2(-x, -y) = -\xi^2(x, y)$ , т.е. поле направлений системы обладает центральной симметрией.

Из всего сказанного следует, что состояние равновесия  $O(0,0)$  заданной системы является устойчивым фокусом. Фазовый портрет системы изображен на рис. 9.1.

**Пример 9.2.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 \equiv \xi^1(x, y), \\ \dot{y} = x - 2xy \equiv \xi^2(x, y). \end{cases}$$

Ее состояниями равновесия являются точки  $O(0,0), A(1/\sqrt{2}, 1/2)$  и  $B(-1/\sqrt{2}, 1/2)$ .

Так как для рассматриваемой системы  $div \bar{\xi} \equiv 0$ , то, как указывалось выше, в качестве интегрирующей функции может быть взят любой ее первый интеграл. Последний можно найти, интегрируя сопряженное данной системе дифференциальное уравнение

$$(x - 2xy)dx - (-y + x^2)dy = 0,$$

являющееся уравнением в полных дифференциалах. Общий интеграл этого уравнения

$$x^2 + y^2 - 2x^2y = C,$$

является знакоопределенным в некоторой окрестности состояния равновесия  $O(0,0)$  и в этой окрестности определяет замкнутые интегральные кривые, содержащие точку  $O(0,0)$  внутри и стягивающиеся к ней при  $C \rightarrow +0$ . Отсюда следует, что точка  $O(0,0)$  для рассматриваемой системы является центром, т.е. устойчива.

Установим полный фазовый портрет системы.

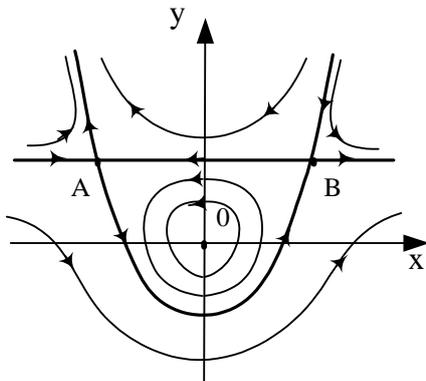


Рис.9.2.

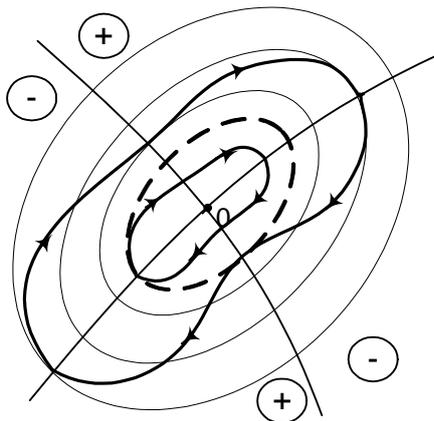


Рис.9.3

Заметим, прежде всего, что равенства  $\xi^1(-x, y) = \xi^1(x, y)$ ,  $\xi^2(-x, y) = -\xi^2(x, y)$  указывает на симметричность поля направлений системы относительно оси  $Oy$ . Далее, полагая в выражении для общего интеграла системы  $x = \pm 1/\sqrt{2}$ ,  $y = 1/2$ , получаем  $C = 1/4$ , так что интегральные кривые, проходящие через точки  $A$  и  $B$ , определяются уравнением

$$x^2 + y^2 - 2x^2y = 1/2,$$

которое переписывается в виде

$$(y - 1/2)(y - 2x^2 + 1/2) = 0$$

и определяет прямую

$$y = 1/2$$

и параболу

$$y = 2x^2 + 1/2,$$

изображенные на рис. 9.2 жирными линиями. Направления движения изображающей точки по составляющим указанные интегральные кривые траекториям системы, указанные на рисунке, легко находятся при помощи уравнений системы. Нетрудно сообразить, что остальные траектории системы ведут себя так, как показано на рис. 9.2 тонкими линиями. Впрочем, имея в своем распоряжении общий интеграл системы, можно подтвердить это непосредственными вычислениями.

Нам осталось рассмотреть случай, когда при знакоопределенной в  $D_0$  функции  $M(x, y)$  дивергенция векторного поля является функцией знакопеременной, т.е. обращается в нуль на некоторых кривых,

проходящих через начало координат, при переходе через которые она меняет знак. Именно в этом случае возникает известная «проблема различения центра и фокуса» [16], до конца не решенная до сих пор. Ниже указываются некоторые возможные пути решения этой проблемы с использованием функций  $M(x, y)$  и  $div \bar{\xi}$ .

Напомним, что, если функция  $M(x, y)$  в некоторой окрестности  $D_0$  состояния равновесия  $O(0,0)$  системы (4.1) является знакоопределенной, например, положительно определенной, то ее линии уровня, определяемые равенством (9.1), являются в  $D_0$  замкнутыми кривыми, содержащими точку  $O(0,0)$  внутри и стягивающимися к ней при  $h \rightarrow +0$ . При знакопеременной в  $D_0$  функции  $div \bar{\xi}$ , кривые, на которых эта функция обращается в нуль, разбивают  $D_0$  на четное число секторов, в каждом из которых она сохраняет знак, различный для любых двух соседних секторов.

Если состояние равновесия  $O(0,0)$  для системы (4.1) является центром, то ее траектории в достаточно малой окрестности  $D'_0 \subseteq D_0$  замкнуты. При этом, как показывает равенство (9.2), во всех секторах, где  $div \bar{\xi} > 0$ , линии уровня функции  $M(x, y)$ , принадлежащие  $D'_0$ , пересекаются

траекториями системы изнутри наружу (т.е. в сторону возрастания функции  $M(x, y)$  при  $M(x, y) > 0$  в  $D_0$ ), а во всех секторах, где  $div \bar{\xi} < 0$  – снаружи внутрь (т.е. в сторону убывания функции  $M(x, y)$  при  $M(x, y) > 0$  в  $D_0$ ). В точках, принадлежащих границам секторов, траектории касаются (без пересечения) проходящих через эти точки линий уровня функции  $M(x, y)$ , что следует из равенства  $\bar{\xi} \cdot grad M = 0$ , выполняющегося в каждой граничной точке (см. рис. 9.3, на котором изображен один из возможных вариантов поведения траекторий системы для случая четырех секторов; в кружках указаны знаки  $div \bar{\xi}$  в соответствующих секторах).

Приведенные рассуждения показывают, что в случае центра каждая принадлежащая  $D_0$  траектория системы оказывается заключенной в кольцевую область, ограниченную двумя ненулевыми линиями уровня функции  $M(x, y)$ , которых она касается в точках пересечения с границами указанных выше секторов. Обратное утверждение представляется совершенно очевидным, т.е. мы можем утверждать, что в рассматриваемом случае  $M(x, y) > 0$  и  $div \bar{\xi} \geq 0$  в  $D_0$  состояние равновесия  $O(0,0)$  системы (4.1) является центром тогда и только тогда, когда каждая принадлежащая  $D_0$  траектория системы обладает указанным свойством.

Но в таком случае, как легко сообразить, и наоборот, любая линия уровня функции  $M(x, y)$ , принадлежащая  $D_0$ , может быть заключена в кольцевую область, ограниченную двумя траекториями системы, которых она касается в точках пересечения с кривыми, при переходе через которые  $div \bar{\xi}$  меняет знак. Отсюда, исходя из физических соображений, можно заключить, что поток векторного поля системы (4.1) через любую принадлежащую  $D_0$  линию уровня функции  $M(x, y)$  должен быть равен нулю, что выражается равенством

$$\iint_S div \bar{\xi} ds = 0,$$

где  $S$  – область, ограниченная любой принадлежащей  $D_0$  линией уровня функции  $M(x, y)$ .

Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

**Теорема 9.2.** *Состояние равновесия  $O(0,0)$  системы (4.1) является центром тогда и только тогда, когда в некоторой его окрестности  $D_0$  интегрирующая функция  $M(x, y)$  является знакоопределенной и выполняется равенство*

$$\iint_S div \bar{\xi} ds = 0,$$

где  $S$  – область, ограниченная любой принадлежащей  $D_0$  линией уровня функции  $M(x, y)$ .

Для случая однородных динамических систем эта теорема доказана в § 5.

Последнее равенство заведомо выполняется в следующих двух случаях: 1)  $div \bar{\xi} \equiv 0$ ; 2) линии уровня функции  $M(x, y)$  имеют ось симметрии, проходящую через начало координат, и в точках, симметричных относительно этой оси,  $div \bar{\xi}$  принимает равные по абсолютной величине и противоположные по знаку значения.

**Пример 9.3.** Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x^2, \\ \dot{y} &= -x^3, \end{aligned}$$

единственным состоянием равновесия которой является точка  $O(0,0)$ . В окрестности этой точки, совпадающей со всей плоскостью  $Oxy$ ,

$$div \bar{\xi}_1 = 0, \quad div \bar{\xi}_2 = 2x, \quad div \bar{\xi}_3 = \dots \equiv 0.$$

$$X_1 f = y \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = x^2 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_3 f = -x^3 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_4 f = \dots \equiv 0.$$

В рассматриваемом случае  $m=1$ , так что форма (4.5) имеет вид

$$M_2(x, y) = \alpha y^2$$

и, является, как видим, функцией знакопостоянной на всей плоскости  $Oxy$ .

Для нахождения коэффициентов функции  $M_3(x, y)$ , определяемой равенством (4.10), служит второе из равенств (4.6)  $X_1M_3 + X_2M_2 = M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 + M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_1$ :

$$y(3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2) = \alpha y^2 \cdot 2x,$$

так что система (4.11) имеет вид

$$3a_{30} = 0, \quad 2a_{21} = 2\alpha, \quad a_{12} = 0, \quad a_{30} = \beta,$$

где  $\beta$  – произвольная постоянная. Согласно этим равенствам

$$M_3(x, y) = \alpha x^2 y + \beta y^3.$$

Коэффициенты функции

$$M_4(x, y) = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}y^4$$

находится при помощи третьего равенства (4.6)  $X_1M_4 + X_2M_3 + X_3M_2 = M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 + M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 + M_4 \operatorname{div} \bar{\xi}_1$ :

$$y(4a_{40}x^3 + 3a_{31}x^2y + 2a_{22}xy^2 + a_{13}y^3) + x^2 \cdot 2\alpha xy - x^3 \cdot 2\alpha y = (\alpha x^2 y + \beta y^3) \cdot 2x,$$

откуда получаем систему равенств

$$4a_{40} = 2\alpha, \quad 3a_{31} = 0, \quad 2a_{22} = 2\beta, \quad a_{13} = 0, \quad a_{04} = \gamma,$$

где  $\gamma$  – произвольная постоянная. Согласно этим равенствам

$$M_4(x, y) = \frac{\alpha}{2} x^4 + \beta x^2 y^2 + \gamma y^4.$$

При помощи аналогичных вычислений получаем выражение

$$M_5(x, y) = \frac{3}{4} \beta x^4 y + \gamma x^2 y^3 + \lambda y^5,$$

примечательное тем, что оно уже не содержит постоянной  $\alpha$ , и, следовательно, этой постоянной не будут содержать выражения  $M_6(x, y)$ ,  $M_7(x, y)$ , ... Поэтому, считая  $\alpha \neq 0$ , а постоянные  $\beta, \gamma, \lambda, \dots$  полагая равными нулю, получаем

$$M_2(x, y) = \alpha y^2, \quad M_3(x, y) = \alpha x^2 y, \quad M_4(x, y) = \frac{\alpha}{2} x^4, \quad M_5(x, y) = \dots = 0$$

так что одна из интегрирующих функций рассматриваемой системы имеет вид

$$M(x, y) = \alpha(y^2 + x^2 y + x^4/2) = \alpha[(y + x^2/2)^2 + x^4/4]$$

и, как видим, является знакоопределенной на всей плоскости  $Oxy$ , в то время как функция  $M_2(x, y)$  является знакопостоянной.

Линии уровня найденной интегрирующей функции симметричны относительно оси  $x = 0$  и в точках, симметричных относительно этой оси. дивергенция векторного поля системы принимает равные по абсолютной величине и противоположные по знаку значения. В силу теоремы 9.2, начало координат для рассматриваемой системы является центром.

Представление о траекториях рассматриваемой системы можно получить, изобразив на координатной плоскости линии уровня найденной интегрирующей функции и (приближенно) кривые, соответствующие указанному выше взаимному расположению линий уровня и траекторий системы в случае центра (рис. 9.4). Можно, разумеется, изобразить траектории системы и точно, если воспользоваться соотношениями

$$F_1(x, y) \equiv (y^2 + x^2 y + x^4/2) e^{2 \operatorname{arctg} \frac{2y+x^2}{x^2}} = C, \quad x \neq 0$$

и

$$F_2(x, y) \equiv (y^2 + x^2 y + x^4/2) e^{-2 \operatorname{arctg} \frac{y+x^2}{y}} = C, \quad y \neq 0,$$

полученными интегрированием уравнения в полных дифференциалах

$$\frac{x^3 dx}{y^2 + x^2 y + x^4/2} + \frac{(y + x^2) dy}{y^2 + x^2 y + x^4/2} = 0,$$

соответствующего заданной динамической системе.

**Пример 9.4.** Рассмотрим систему

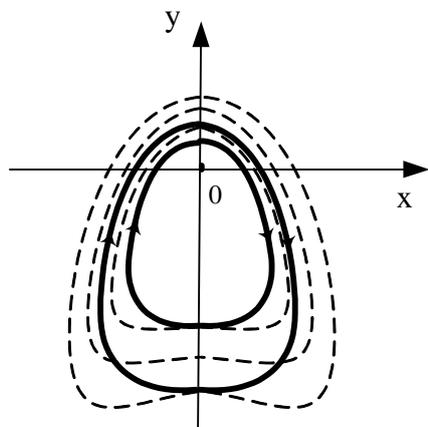


Рис.9.4.

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x - x(x^2 - y^2), \end{cases}$$

состояния равновесия которой находятся в точках  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$  и  $B(-1,0)$ ,  $\operatorname{div} \bar{\xi} = 4xy$ .

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, находим представление (4.7) интегрирующей функции в окрестности точки  $O(0,0)$

$$\begin{aligned} M(x, y) &= x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)^3 + \frac{1}{6}(x^2 + y^2)^4 + \dots = \\ &= e^{2(x^2+y^2)} + 2(x^2 - y^2) - 1, \end{aligned}$$

Из вида этой функции следует, что в указанной окрестности она является положительно определенной и координатные оси являются осями симметрии ее линий уровня. Так как в точках, симметричных относительно этих осей,  $\operatorname{div} \bar{\xi} = 4xy$  принимает равные по абсолютной величине и противоположные по знаку значения, то, согласно теореме 9.2, точка  $O(0,0)$  для рассматриваемой системы является центром.

Заметим, что указанную интегрирующую функцию можно получить иначе, если воспользоваться уравнениями (2.1), имеющими для данной системы вид

$$\frac{dx}{y(x^2 - y^2)} = \frac{dy}{x - x(x^2 - y^2)} = \frac{dM}{4xyM}.$$

Из этих равенств, пользуясь свойством равных отношений, получаем равенства

$$\frac{1}{2} \frac{d(x^2 - y^2)}{xy[2(x^2 - y^2) - 1]} = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{xy} = \frac{dM}{4xyM},$$

откуда при  $xy \neq 0$  находим две интегрирующие функции  $M_1(x, y) = 2(x^2 - y^2) - 1$  и  $M_2(x, y) = e^{2(x^2+y^2)}$  и общий интеграл системы

$$F(x, y) \equiv (2(x^2 - y^2) - 1)e^{-2(x^2+y^2)} = C.$$

Как видим, сумма функций  $M_1(x, y)$  и  $M_2(x, y)$  дает найденную выше функцию  $M(x, y)$  (свойство 5 интегрирующих функций).

Для установления типа состояния равновесия  $A(1,0)$ , перенесем начало координат в эту точку, положив  $z = x - 1$ ,  $w = y$ , так что  $x = z + 1$ ,  $y = w$ . Тогда указанная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \dot{z} = w + 2zw + w(z^2 - w^2), \\ \dot{w} = -2z - 3z^2 + w^2 - z(z^2 - w^2). \end{cases}$$

Преобразуя к новым переменным функции  $M_1(x, y)$  и  $M_2(x, y)$ , получаем

$$\tilde{M}_1(z, w) = 2(z^2 + 2z - w^2) + 1, \quad \tilde{M}_2(z, w) = e^{2(z^2+2z+w^2)}e^2.$$

Пользуясь свойством 5 интегрирующих функций, находим интегрирующую функцию

$$\tilde{M}(z, w) = e^{-2}\tilde{M}_2(z, w) - \tilde{M}_1(z, w) = e^{2(z^2+2z+w^2)} - 2(z^2 + 2z - w^2) - 1,$$

положительно определенную в некоторой окрестности точки  $z = 0, w = 0$ . Кроме того,

$\tilde{M}(z, -w) = \tilde{M}(z, w)$ , т.е. линии уровня функции  $\tilde{M}(z, w)$  симметричны относительно оси  $Oz$ . В точках, симметричных относительно этой оси,  $\operatorname{div} \bar{\xi} = 4w(1 + z)$  принимает равные по абсолютной величине и противоположные по знаку значения и обращается в нуль на самой оси. Из сказанного следует, что точка  $A$  для рассматриваемой системы является центром.

Точно так же можно показать, что центром для рассматриваемой системы является и точка  $B(-1,0)$ .

Фазовый портрет системы, полученный при помощи указанного выше ее общего интеграла, изображен на рис.9.5.

Перейдем теперь к случаям, когда в окрестности состояния равновесия  $O(0,0)$  системы (4.1) функция  $M(x, y)$  является либо знакопостоянной, либо знакопеременной. В таких случаях окрестность точки  $O(0,0)$  разбивается кривыми,

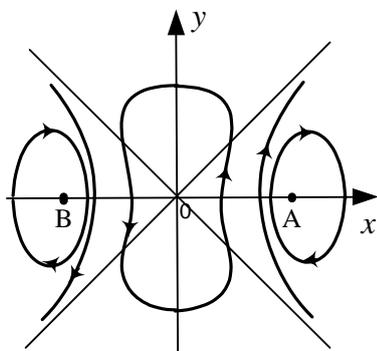


Рис.9.5

определяемыми равенством  $M(x, y) = 0$ , на секторы, в каждом из которых имеет место определенное сочетание знаков функции  $M(x, y)$  и  $\text{div}\bar{\xi}$ . При этом возможны все типы секторов перечисленные в §7, причем правило определения типов секторов, сформулированное в теореме 7.6 остается неизменным при условии, что постоянная  $\alpha$  в выражении (4.5) выбирается положительной.

Вернемся к разложению (4.7).

Если функция  $M_{m+1}(x, y)$  – знакопеременная, то входящие или выходящие из начала координат траектории системы (4.1), определяемые равенством  $M(x, y) = 0$ , касаются в начале координат лучей, на которых обращается в нуль функция  $M_{m+1}(x, y)$ , являющаяся интегрирующей функцией соответствующей системе (4.1) «укороченной» системы

$$\dot{x} = \xi_m^1(x, y), \quad \dot{y} = \xi_m^2(x, y). \tag{9.5}$$

Указанные лучи являются траекториями системы (9.5) и ими, как показано в §7, определяется разбиение окрестности начала координат (совпадающей для системы (9.5) со всей плоскостью  $Oxy$ ) на секторы, в каждом из которых траектории системы (9.5) ведут себя подобным образом. Если при этом на всех указанных лучах функция  $M_{m+1}^1(x, y) = \xi_m^1 x + \xi_m^2 y \equiv \bar{\xi}_m \cdot \bar{\zeta}_1 \neq 0$  ( $\bar{\zeta}_1 = (x, y)$ ), то тем самым определяется и разбиение на секторы сколь угодно малой окрестности начала координат траекториями системы (4.1), определяемыми равенством  $M(x, y) = 0$ , т.е. в рассматриваемом случае для установления структуры разбиения на траектории окрестности состояния равновесия системы (4.1) достаточно рассмотреть систему (9.5).

Из сказанного в силу теорем 7.7 и 7.8 вытекает следующая теорема

**Теорема 9.4.** Пусть функция  $M_{m+1}(x, y)$  является знакопеременной и на всех инвариантных лучах системы (9.5) функция  $M_{m+1}^1(x, y)$  отлична от нуля. Тогда, если на всех указанных лучах  $M_{m+1}^1(x, y) < 0$ , то состояние равновесия  $O(0,0)$  системы (4.1) асимптотически устойчиво; если же хотя бы на одном из указанных лучей  $M_{m+1}^1(x, y) > 0$ , то состояние равновесия  $O(0,0)$  системы (4.1) неустойчиво.

Этот результат не нов и содержится в [20].

**Пример 9.5.** Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x^2, \\ \dot{y} &= x + y^2, \end{aligned} \tag{9.6}$$

состояниями равновесия которой являются точки  $O(0,0)$  и  $A(-1, -1)$ . Установим тип состояния равновесия  $O(0,0)$ . В окрестности этой точки

$$\bar{\xi}_1 = (y, x), \quad \bar{\xi}_2 = (x^2, y^2), \quad \bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_4 = \dots = 0,$$

$$\text{div}\bar{\xi}_1 = 0, \quad \text{div}\bar{\xi}_2 = 2(x + y), \quad \text{div}\bar{\xi}_3 = \text{div}\bar{\xi}_4 = \dots = 0.$$

$$X_1 f = y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = X_4 f = \dots = 0.$$

Система первого приближения для данной системы в окрестности состояния равновесия  $O(0,0)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x. \end{aligned}$$

Интегрирующая функция для этой системы

$$M_2(x, y) = \alpha(x^2 - y^2)$$

обращается в нуль на ее траекториях:  $O(0,0)$ ;  $y = x, x > 0$ ;  $y = x, x < 0$ ;  $y = -x, x > 0$ ;  $y = -x, x < 0$ , изображенных на рис. 9.6. Функция  $M_2^1(x, y) = 2xy$  на всех указанных лучах отлична от нуля, причем  $M_2^1(x, y)|_{y=x} = x^2 > 0$  и  $M_2^1(x, y)|_{y=-x} = x^2 < 0$ . Отсюда в силу теоремы 5.6 следует, что для рассматриваемой укороченной системы точка  $O(0,0)$  является седлом.

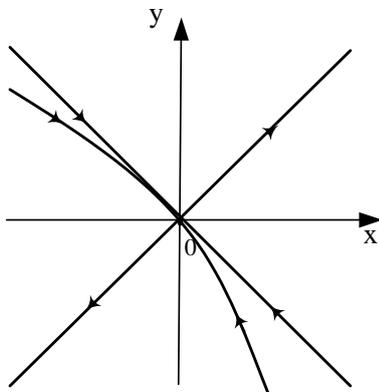


Рис.9.6.

Точка  $O(0,0)$  является одновременно состоянием равновесия заданной системы, траектории которой, примыкающие к этой точке, касаются в этой точке указанных лучей.

На этих траекториях обращается в нуль интегрирующая функция системы (9.6)

$$M(x, y) = M_2(x, y) + M_3(x, y) + M_4(x, y) + \dots,$$

где  $M_2(x, y)$  – уже найденная нами функция.

Для нахождения функции  $M_3(x, y)$  (4.10) пользуемся вторым равенством (4.9), приводящем к системе (4.11), которая в нашем случае представляется в виде

$$\begin{cases} a_{21} & = 0, \\ 3a_{30} + 2a_{12} & = 2h, \\ 2a_{21} + 3a_{03} & = -2h, \\ a_{12} & = 0, \end{cases}$$

и имеют решение  $a_{30} = 2/3\alpha$ ,  $a_{21} = a_{12} = 0$ ,  $a_{03} = 2/3\alpha$ , так что для нашей системы

$$M_3(x, y) = \frac{2}{3}\alpha(x^3 - y^3).$$

Коэффициенты формы

$$M_4(x, y) = a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}y^4$$

находятся из системы

$$\begin{cases} a_{31} & = d_{40}, \\ 4a_{40} + 2a_{22} & = d_{31}, \\ 3a_{31} + 3a_{13} & = d_{22}, \\ 2a_{22} + 4a_{04} & = d_{13}, \\ a_{13} & = d_{04}, \end{cases}$$

где  $d_{40}, \dots, d_{04}$  находятся из равенства

$$\begin{aligned} d_{40}x^4 + d_{31}x^3y + d_{22}x^2y^2 + d_{13}xy^3 + d_{04}y^4 &= M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_3 - X_3 M_2 + M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_3 = \\ &= \frac{2}{3}\alpha(x^3 - y^3) \cdot 2(x + y) - 2\alpha(x^4 - y^4) = -\frac{2}{3}\alpha x^4 + \frac{4}{3}\alpha x^3 y - \frac{4}{3}\alpha x y^3 + \frac{2}{3}\alpha y^4, \end{aligned}$$

так что имеем  $d_{40} = -2/3\alpha$ ,  $d_{31} = 4/3\alpha$ ,  $d_{22} = 0$ ,  $d_{13} = -4/3\alpha$ ,  $d_{04} = 2/3\alpha$ . Подставляя эти выражения в написанную систему, находим

$$a_{40} = \frac{1}{3}\alpha - \beta, \quad a_{31} = -\frac{2}{3}\alpha, \quad a_{22} = -2\beta, \quad a_{13} = \frac{2}{3}\alpha, \quad a_{04} = \frac{1}{3}\alpha - \beta$$

и

$$M_4(x, y) = \frac{1}{3}\alpha(x^4 - 2x^3y + 2xy^3 - y^4) - \beta(x^2 - y^2)^2,$$

где  $\beta$  – новая произвольная постоянная. Мы можем положить эту постоянную равной нулю и во всех дальнейших вычислениях считать, что

$$M_4(x, y) = \frac{1}{3}\alpha(x^4 - 2x^3y + 2xy^3 - y^4) = \frac{1}{3}\alpha(x - y)(x^3 - x^2y - xy^2 + y^3).$$

Не приводя выражений для  $M_5(x, y)$ ,  $M_6(x, y), \dots$ , отметим только, что все указанные функции содержат множитель  $(x - y)$ , обращающийся в нуль на интегральной кривой системы, определяемой уравнением  $y = x$ , проходящей через оба ее состояния равновесия. Следовательно,

$$M(x, y) = \alpha(x - y)\left[x + y + \frac{2}{3}(x^2 + xy + y^2) + \frac{1}{3}(x^3 - x^2y - xy^2 + y^3) + \dots\right].$$

Найдем разложение в степенной ряд функции  $y = f(x)$ , обращающей в нуль выражение в квадратной скобке. Подставляя в это выражение разложение

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

и приравнявая полученное выражение нулю, получим равенство

$$\begin{aligned} x + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots) + \\ + \frac{2}{3}(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots) - \\ - \frac{1}{3}x(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^2 + (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots)^3 = 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю коэффициенты при различных степенях  $x$ , получаем равенства

$$\begin{aligned} x: 1 + \alpha_1 &= 0, \\ x^2: \alpha_2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_1^2 &= 0, \\ x^3: \alpha_3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\alpha_1 - \frac{1}{3}\alpha_1^2 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{4}{3}\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_1^3 &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

из которых последовательно находим

$$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2/3, \alpha_3 = -4/9, \dots$$

Таким образом, функция  $M(x, y)$  обращается в нуль на интегральной кривой заданной системы, определяемой уравнением

$$y = -x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + \dots \equiv f(x)$$

Приближенный график этой кривой изображен на рис.9.6. Ее составляют траектории системы:  $O(0,0)$ ;  $y = f(x), x > 0$ ;  $y = f(x), x < 0$ . Последние две траектории касаются в начале координат лучей  $y = -x, x > 0$  и  $y = -x, x < 0$  – траекторий системы первого приближения.

Учитывая указанные на рис.9.8 направления векторного поля системы на осях координат, приходим к выводу, что состояние равновесия системы  $O(0,0)$  является седлом.

Обратимся теперь к состоянию равновесия системы  $A(-1, -1)$ . Переносим начало координат в точку  $A(-1, -1)$  с помощью замены переменных  $u = x + 1, v = y + 1$ , переходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -2u + v + u^2, \\ \dot{v} &= u - 2v + v^2, \end{aligned}$$

для которой система первого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -2u + v, \\ \dot{v} &= u - 2v. \end{aligned}$$

Интегрирующая функция этой системы

$$\tilde{M}_2(u, v) = h_1(v^2 - u^2)$$

обращается в нуль на ее траекториях:  $\tilde{A}(0,0)$ ;  $v = u, u > 0$ ;  $v = u, u < 0$ ;  $v = -u, u > 0$ ;  $v = -u, u < 0$ , изображенных на рис. 9.7. Функция  $\tilde{M}_2^1(u, v) = 2(u^2 - uv + v^2)$  на всех указанных лучах отрицательна, так что, согласно теореме 5.6, точка  $\tilde{A}(0,0)$  для рассматриваемой укороченной системы является устойчивым узлом.

Точка  $\tilde{A}(0,0)$  является одновременно состоянием равновесия заданной системы, траектории которой, примыкающие к этой точке, касаются в этой точке указанных лучей. На этих траекториях обращается в нуль интегрирующая функция заданной системы, представляемая в окрестности точки  $\tilde{A}(0,0)$  разложением

$$\tilde{M}(u, v) = \tilde{M}_2(u, v) + \tilde{M}_3(u, v) + \tilde{M}_4(u, v) + \dots,$$

где  $\tilde{M}_2(u, v)$  указана выше.

Для нахождения коэффициентов функции  $\tilde{M}_3(u, v)$  пользуемся системой (4.11), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} -2a_{30} + a_{21} &= 0, \\ 3a_{30} - 2a_{21} + 2a_{12} &= -2h_1, \\ 2a_{21} - 2a_{12} + 3a_{03} &= 2h_1, \\ a_{12} - 2a_{03} &= 0, \end{cases}$$

Ее решением является:  $a_{30} = 2/5h_1, a_{21} = 4/5h_1, a_{12} = -4/5h_1, a_{03} = -2/5h_1$ , так что

$$\tilde{M}_3(u, v) = \frac{2}{5}h_1(u^3 + 2u^2v - 2uv^2 - u^3) = \frac{2}{5}h_1(u - v)(u^2 - uv + v^2).$$

Опуская вычисления, приведем выражение для  $\tilde{M}_4(u, v)$

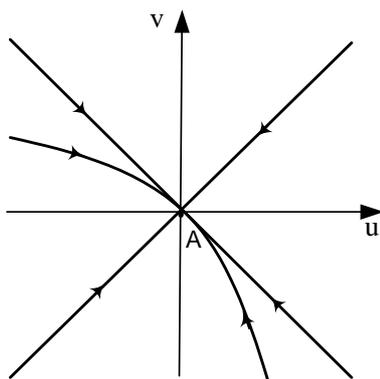


Рис.9.7.

$$\tilde{M}_4(u, v) = \frac{h_1}{15}(u - v)(u^3 - u^2v - uv^2 + u^3) + \frac{\alpha_1}{6}(u + v)$$

где  $\alpha_1$  – новая произвольная постоянная, которую мы можем положить равной нулю и во всех дальнейших вычислениях принимать во внимание только выражение

$$\tilde{M}_4(u, v) = \frac{h_1}{15}(u - v)(u^3 - u^2v - uv^2 + u^3)$$

При дальнейших вычислениях всякий раз при нахождении коэффициентов форм четной степени будут появляться новые произвольные постоянные, которые мы всегда можем положить равными нулю. В результате мы будем получать функции  $\tilde{M}_5(u, v), \tilde{M}_6(u, v), \dots$ , каждая из которых будет иметь множитель  $u - v$ , обращающийся в нуль на интегральной кривой системы  $v = u$ , проходящей через оба ее состояния равновесия. Следовательно, существует интегрирующая функция  $\tilde{M}(u, v)$ , представляемая в окрестности точки  $\tilde{A}(0,0)$  в виде

$$\tilde{M}(u, v) = h_1(v - u)[u + v - \frac{2}{5}(u^2 + 3uv + v^2) - \frac{1}{15}(u^3 - u^2v - uv^2 + u^3) + \dots]$$

Разыскивая функцию

$$v = \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \dots \equiv \varphi(u),$$

обращающую в нуль квадратную скобку, содержащуюся в выражении  $\tilde{M}(u, v)$ , находим

$$v = -u - \frac{2}{5}u^2 + \frac{4}{25}u^3 + \dots \equiv \varphi(u).$$

Ориентировочный график этой функции в окрестности точки  $\tilde{A}(0,0)$  изображен на рис.9.7.

Таким образом, инвариантными траекториями системы, примыкающими к состоянию равновесия  $\tilde{A}(0,0)$  являются:  $v = u, u > 0$ ;  $v = u, u < 0$ ;  $v = \varphi(u), u > 0$ ;  $v = \varphi(u), u < 0$ . Учитывая направление движения изображающей точки по этим траекториям, указанное на рис.9.8, приходим к выводу, что состояние равновесия  $\tilde{A}(0,0)$  системы является устойчивым узлом.

Для уточнения поведения траекторий системы на фазовой плоскости, отметим, что вдоль параболы  $y = -x^2$  имеем  $\dot{x} = 0, \dot{y} = x + x^4 \neq 0 (x \neq 0, -1)$  (т.е. вдоль этой параболы вектор поля параллелен

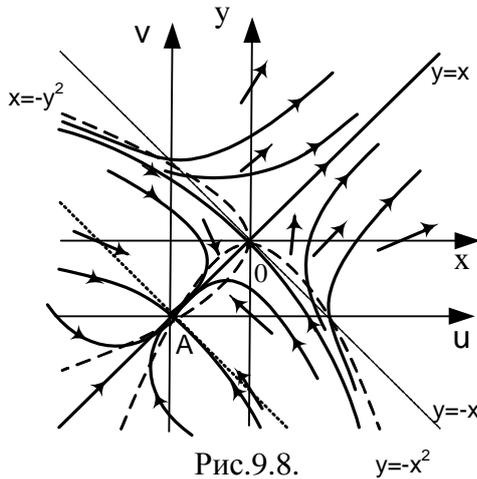


Рис.9.8.  $y = -x^2$

оси  $Oy$ ), а вдоль параболы  $x = -y^2$  имеем  $\dot{y} = 0, \dot{x} = y + y^4 \neq 0 (y \neq 0, -1)$  (т.е. вдоль этой параболы вектор поля параллелен оси  $Ox$ ).

Если, кроме того, указать направление векторного поля системы в точках координатных осей, то нетрудно сообразить, что фазовый портрет рассматриваемой системы имеет вид, указанный на рис.9.8.

**Пример 9.6.** Рассмотрим систему [4]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - xy, \\ \dot{y} &= -y + x^2 - y^2, \end{aligned}$$

состояниями равновесия которой являются точки  $O(0,0)$  и  $A(0,-1)$ . Дивергенция векторного поля  $div \bar{\xi} = -1 + 2x - 3y$  обращается в нуль на прямой  $-1 + 2x - 3y = 0$ , выше которой она отрицательна, а ниже – положительна, причем в точке  $O(0,0)$   $div \bar{\xi} = -1$ , а в точке  $A(0,-1)$   $div \bar{\xi} = 2$ .

Установим тип состояния равновесия  $O(0,0)$ . В окрестности этого состояния равновесия

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= (0, -y), \quad \bar{\xi}_2 = (x^2 - xy, x^2 - y^2), \quad \bar{\xi}_3 = \dots \equiv 0; \\ div \bar{\xi}_1 &= -1, \quad div \bar{\xi}_2 = 2x - 3y, \quad div \bar{\xi}_3 = \dots \equiv 0. \end{aligned}$$

$$X_1 f = -y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = (x^2 - xy) \frac{\partial f}{\partial x} + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \dots \equiv 0,$$

Система первого приближения в окрестности состояния равновесия  $O(0,0)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

Интегрирующая функция для этой системы  $M_2(x, y) = \alpha xy$  ( $\alpha$  – произвольная постоянная), как видим, является знакопеременной и обращается в нуль на осях координат. Так как  $M_2^1(x, y) = (0, -y) \cdot (x, y) = -y^2$  обращается в нуль на оси  $Ox$  (все точки которой для системы первого приближения являются ее состояниями равновесия), то, согласно сказанному выше, определить тип состояния равновесия  $O(0,0)$  заданной системы с помощью системы первого приближения в данном случае нельзя. Мы можем только утверждать, что полуоси  $x = 0, y > 0$  и  $x = 0, y < 0$  являются для системы первого приближения положительными полутраекториями ( $M_2^1(x, y) = -y^2$  при  $x = 0, y \neq 0$ ), т.е. полутраекториями, входящими в начало координат при  $t \rightarrow +\infty$ . Попутно отметим, что ось  $x = 0$  является интегральной кривой заданной системы ( $\bar{\xi}(0, y) = (0, -y - y^2)$ ) и состоит из ее траекторий  $x = 0, y > 0$ ;  $x = 0, 0 < y < -1$ ;  $x = 0, y < -1$  и разделяющих эти траектории состояний равновесия  $O(0,0)$  и  $A(0, -1)$ .

При помощи вычислений, подобных тем, которые мы уже выполняли в предыдущем примере, находим  $a_{30} = a_{12} = a_{03} = \alpha = 0, a_{21} = \lambda$  ( $\lambda$  – произвольная постоянная), так что

$$M_2(x, y) \equiv 0, \quad M_3(x, y) = \lambda x^2 y.$$

Не приводя вычислений, укажем также выражение для  $M_4(x, y)$ :

$$M_4(x, y) = -\lambda x^4 + \gamma x^3 y.$$

Функция  $M_5(x, y)$  находится при помощи равенства  $X_1 M_5 - M_5 \operatorname{div} \bar{\xi}_1 = M_4 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_4$ , которое после соответствующих вычислений записывается в виде

$$-y(a_{41}x^4 + 2a_{31}x^3y + 3a_{13}x^2y^2 + 4a_{04}y^4) + a_{50}x^5 + a_{41}x^4y + a_{32}x^3y^2 + a_{23}x^2y^3 + a_{14}xy^4 + a_{05}y^5 = (2\lambda - \gamma)x^5 - (\lambda + \gamma)x^4y + \gamma x^3y$$

и приводят к равенствам

$$a_{50} = 2\lambda - \gamma, \quad a_{41} = \delta, \quad \lambda + \gamma = 0, \quad a_{32} = \lambda, \quad a_{23} = a_{14} = a_{05} = 0.$$

В результате имеем

$$M_4(x, y) = -\lambda x^4 - \lambda x^3 y, \quad M_5(x, y) = 3\lambda x^5 + \delta x^4 y + \lambda x^3 y^2.$$

Ограничившись знанием найденных форм, заметим, что из структуры составляемых равенств следует, что все последующие формы не будут содержать по крайней мере двух последних слагаемых. Это позволяет записать интегрирующую функцию в виде

$$M(x, y) = M_3(x, y) + M_4(x, y) + \dots = x^2(\lambda y - \lambda x^2 - \lambda xy + \dots).$$

Разыскивая решение  $y = \varphi(x)$  уравнения

$$\lambda y - \lambda x^2 - \lambda xy + \dots = 0$$

в виде ряда

$$\varphi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots,$$

находим  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ , так что при достаточно малых  $x$  можно считать, что функция  $M(x, y)$  обращается в нуль на кривых  $x = 0$  и  $y = x^2$  и ее можно считать равной  $M(x, y) = x^2(y - x^2)$  (при  $\lambda = 1$ ).

Таким образом, в сколь угодно малой окрестности начала координат инвариантными являются траектории  $x = 0, y > 0$ ;  $x = 0, 0 < y < -1$  и две ветви параболы  $y = x^2$ , направление движения изображающей точки по которым можно установить, вычислив вектор поля в точках полупарабол, достаточно близких к началу координат.

Эти инвариантные траектории разбивают окрестность начала координат на четыре сектора, в которых функции  $M(x, y)$  и  $\operatorname{div} \bar{\xi}$  имеют указанные в кружках знаки (рис. 9.9). Из сказанного выше следует, что секторы, расположенные левее оси ординат являются параболическими, а секторы, расположенные правее оси ординат – гиперболическими, т.е. в точке  $O(0,0)$  имеет место так называемый седло-узел.

[Вообще, *седло-узлом* называют состояние равновесия системы (1.1), если его достаточно малая

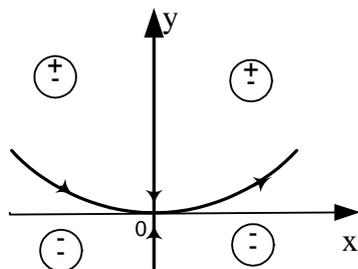


Рис.9.9.

окрестность инвариантными полутраекториями, одним концом примыкающими к этому состоянию равновесия, разбивается на конечное число только гиперболических и параболических секторов [4,5].]

Заметим теперь, что  $\dot{x} = 0, \dot{y} = -y \neq 0$  вдоль прямой  $x - y = 0$  ( $x \neq 0, y \neq 0$ ), т.е. в точках прямой  $x - y = 0$ , отличных от точки  $O(0,0)$ , вектор поля  $\bar{\xi}(x, y)$  параллелен оси  $Oy$ :  $\bar{\xi}(x, x) \downarrow \bar{j}$  и  $\bar{\xi}(x, x) \uparrow \bar{j}$  (рис. 9.10). Кроме того,  $\dot{x} \neq 0, \dot{y} = 0$  ( $\dot{x} \neq 0, \dot{y} \neq 0, -1$ ) вдоль кривой  $-y + x^2 - y^2 = 0$ , представляющей собой равнобочную гиперболу  $x^2 - (y + \frac{1}{2})^2 = -\frac{1}{4}$ , изображенную на рис. 9.10. Нетрудно проверить, что в точках ветвей этой гиперболы вектор поля направлен так, как показано на этом рисунке. Далее, при  $y = 0, \dot{x} = x^2, \dot{y} = x^2$ , т.е. полуоси  $Ox$  пересекаются траекториями системы под углом  $45^\circ$ . Наконец, прямая  $x - y - 1 = 0$ , как мы убедимся позже, является интегральной кривой системы, составленной из траекторий  $y = x - 1, x = 0; y = x - 1, x < 0; A(0, -1)$ .

Рис. 9.10 наглядно показывает, что правая ветвь кривой  $y = \varphi(x)$  может быть расположена только ниже расположенного в первом квадрате отрезка верхней ветви указанной выше гиперболы и только выше расположенного в этом же квадрате отрезка траектории  $y = x - 1, x > 0$ . Левая же ветвь кривой  $y = \varphi(x)$  может вести себя только так, как ведут себя все остальные траектории системы, пересекающие отрицательную полуось  $Ox$ .

Установим теперь тип состояния равновесия  $A(0, -1)$ . Переносим начало координат в эту точку, получаем систему

$$\dot{u} = u + u(u - v),$$

$$\dot{v} = v + u^2 - v^2,$$

имеющую среди своих инвариантных кривых прямые  $u = 0$  и  $u - v = 0$ , проходящие через ее состояние равновесия  $\tilde{A}(0,0)$ , что следует из равенств

$$Xu = [u + u(u - v)]|_{u=0} = 0, \quad X(u - v) = (u - v)(1 - v)|_{u=v=0} = 0.$$

Прямая  $u = 0$  составлена из траекторий системы  $u = 0, v > 1; \tilde{O}(0,1); u = 0, 0 < v < 1; \tilde{A}(0,0); u = 0, v < 0$ . Прямую  $u - v = 0$  составляют траектории  $v = u, u < 0; \tilde{A}(0,0); v = u, u > 0$ . Указанные на рис. 9.10 направления движения изображающей точки вдоль каждой из указанных траекторий, отличной от состояния равновесия, легко определяется при помощи уравнений системы. Из всего сказанного следует, что состояние равновесия  $\tilde{A}(0,0)$  является неустойчивым узлом, причем в сколь угодно малой окрестности этой

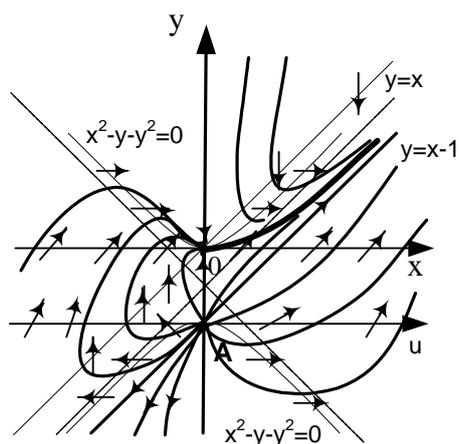


Рис.9.10.

точки траектории системы с точностью до бесконечно малых высших порядков ведут себя также как и траектории системы первого приближения  $\dot{u} = u, \dot{v} = v$ .

К сказанному добавим, что вдоль оси  $Ou$  ( $v = 0$ )  $\dot{u} = u + u^2, \dot{v} = u^2$ , откуда следует, что  $\dot{u} > 0$  при  $u < -1$  и  $u > 0$ , и  $\dot{u} < 0$  при  $-1 < u < 0$ , а  $\dot{v} > 0$  для всех значений  $u$ . Таким образом, в точках оси  $Ou$  в интервалах  $(-\infty, -1)$  и  $(0, +\infty)$  вектор поля образует с положительным направлением этой оси острый угол, а в интервале  $(-1, 0)$  – тупой, что отражено на рис. 9.10 соответствующими стрелками.

Все изложенное позволяет заключить, что фазовый портрет рассматриваемой системы имеет вид, указанный на рис. 9.10.

**Пример 9.7.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = y - xy - x^2,$$

$$\dot{y} = -xy - y^2,$$

единственным состоянием равновесия которой являются точка  $O(0,0)$ , в окрестности которой (совпадающей со всей плоскостью  $Oxy$ )

$$\bar{\xi}_1 = (y, 0), \quad \bar{\xi}_2 = (-xy - x^2, -xy - y^2), \quad \bar{\xi}_3 = \dots \equiv 0;$$

$$\operatorname{div} \bar{\xi}_1 \equiv 0, \quad \operatorname{div} \bar{\xi}_2 = 3(x + y), \quad \operatorname{div} \bar{\xi}_3 = \dots \equiv 0.$$

$$X_1 f = y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2 f = (-xy - x^2) \frac{\partial f}{\partial x} + (-xy - y^2) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \dots \equiv 0.$$

Ищем разложение

$$M(x, y) = M_2(x, y) + M_3(x, y) + M_4(x, y) + \dots.$$

По формуле (4.5) получаем

$$M_2(x, y) = \alpha y^2,$$

где  $\alpha$  – произвольная постоянная.

Коэффициенты формы  $M_3(x, y)$  найдем при помощи системы (4.11). Вычислив

$$M_2 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_2 = -\alpha xy^2 - \alpha y^3$$

имеем  $d_{30} = 0, d_{21} = 0, d_{12} = -\alpha, d_{03} = -\alpha$ . Так как в рассматриваемом случае  $a = c = d = 0, b = 1$ , система (4.11) дает

$$a_{30} = 0, \quad a_{21} = -\alpha/2, \quad a_{12} = -\alpha, \quad d_{03} = \beta \quad (\beta - \text{произвольная постоянная}),$$

так что

$$M_3(x, y) = -\alpha \left( \frac{1}{2} x^2 y + xy^2 \right) + \beta y^3.$$

Коэффициенты формы  $M_4(x, y)$  находятся из системы

$$\begin{aligned} 0 &= d_{40}, \\ 4a_{40} &= d_{31}, \\ 3a_{31} &= d_{22}, \\ 2a_{22} &= d_{13}, \\ a_{13} &= d_{04}, \end{aligned}$$

Вычисляя

$$M_3 \operatorname{div} \bar{\xi}_2 - X_2 M_3 \equiv 0,$$

имеем  $d_{40} = d_{31} = d_{22} = d_{13} = d_{04} = 0$ , так что

$$a_{40} = a_{31} = a_{22} = a_{13} = 0, \quad d_{04} = \gamma \quad (\gamma - \text{произвольная постоянная}),$$

и, следовательно,

$$M_4(x, y) = \gamma y^4.$$

Так как  $\gamma$  – произвольная постоянная, мы можем положить ее равной нулю. Тогда будем иметь  $M_4(x, y) \equiv 0$  и все последующие уравнения системы (4.6) будут удовлетворяться функциями  $M_5(x, y) = M_6(x, y) = \dots \equiv 0$ . Это означает, что функция

$$M(x, y) = M_2(x, y) + M_3(x, y) = \alpha \left( y^2 - \frac{1}{2} x^2 y - xy^2 \right) + \beta y^3$$

является интегрирующей для заданной системы при любых значениях произвольных постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ . Поэтому, положив  $\alpha = 1, \beta = 0$  и  $\alpha = 0, \beta = 1$ , получим функции

$$M^1(x, y) = y^2 - \frac{1}{2} x^2 y - xy^2, \quad M^2(x, y) = y^3,$$

являющиеся также интегрирующими для заданной системы. Согласно свойству 2 интегрирующих функций,

$$F(x, y) = \frac{M^1(x, y)}{M^2(x, y)} = \frac{y - \frac{1}{2} x^2 - xy}{y^2}$$

– интеграл рассматриваемой системы.

Функция  $M^1(x, y)$  обращается в нуль на интегральных кривых системы, определяемых равенствами

$$y = 0 \quad (\text{ось } Ox) \quad \text{и} \quad y - \frac{1}{2} x^2 - xy = 0.$$

Ось  $Ox$  состоит из трех траекторий:  $-\infty < x < 0, y = 0$ ;  $x = 0, y = 0$ ;  $0 < x < +\infty, y = 0$ . Уравнения системы показывают, что отрицательная полуось  $Ox$  является отрицательной

полутраекторией, а положительная полуось  $Ox$  – положительной полутраекторией ( $\dot{x} = -x^2$ ,  $\dot{y} = 0$  при  $y = 0$ ).

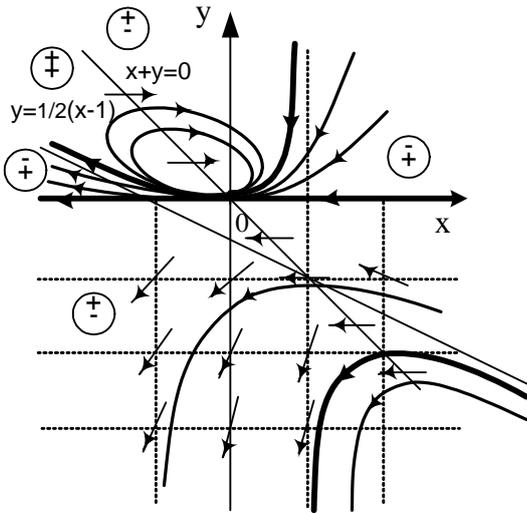


Рис.9.11.

Второе из указанных равенств, которое можно переписать в виде

$$y = \frac{1}{2} \frac{x^2}{1-x} \equiv \varphi(x) \quad x \neq 1,$$

определяет интегральную кривую, имеющую две асимптоты – вертикальную,  $x = 1$  и наклонную  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ , и состоящую из четырех траекторий:  $y = \varphi(x), x < 1$ ;  $x = 0, y = 0$ ;  $y = \varphi(x), 0 < x < 1$ ;  $y = \varphi(x), x > 1$  (рис. 9.13). Указанное на рисунке направление движения изображающей точки вдоль каждой из ненулевых траекторий легко определяется при помощи дифференциальных уравнений системы.

Рассмотрим достаточно малую окрестность точки  $O(0,0)$ . Инвариантными кривыми, примыкающими к этой точке, она разбивается на четыре сектора, в каждом из которых имеет место указанное в кружочках на рис. 9.11 распределение знаков функций

$M^1(x, y)$  и  $div \bar{\xi}$ . Согласно правилу определения типа сектора, можно утверждать, что сектор, ограниченный траекториями  $y = \varphi(x), x < 1$  и  $y = \varphi(x), 0 < x < 1$  является эллиптическим, два соседних с ним сектора, ограниченных снизу полуосями  $Ox$ , являются параболическими, а сектор, расположенный под осью  $Ox$  является гиперболическим.

В отношении траектории  $y = \varphi(x), x > 1$  особых пояснений не требуется.

Отметим, что в точках прямой  $x + y = 0$ , на которой обращается в нуль  $div \bar{\xi}$ , вектор поля параллелен оси абсцисс ( $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = 0$  при  $x + y = 0$ ). Указав для контроля направление вектора поля в нескольких точках с целочисленными координатами, нетрудно прийти к выводу, что фазовый портрет системы имеет вид, изображенный на рис. 9.11.

Поведение траекторий системы в областях знакопостоянства функции  $M(x, y)$  можно уточнить непосредственными вычислениями при помощи указанного выше интеграла.

### §10. Фазовые портреты некоторых частных случаев дифференциальных систем, найденных в §5.

В этом параграфе мы только указываем фазовые портреты некоторых частных случаев дифференциальных систем, найденных в §5, которые можно установить, пользуясь полученными в §9 результатами. Знание общего интеграла в каждом из рассмотренных случаев существенно упрощает установление соответствующих фазовых портретов, однако следует отметить, что они все-таки являются *качественными* в известном смысле. Для каждой рассмотренной системы указываются все ее состояния равновесия, расположенные в конечной части фазовой плоскости, дивергенция определяемого системой векторного поля, одно из возможных выражений интегрирующей функции и одно из возможных выражений общего интеграла вида  $\mathcal{F}(x, y) = C$  без указания тех решений рассматриваемой системы, которые теряются при таком способе его записи и которые во всех рассмотренных случаях очевидны.

1. Полагая в уравнениях (5.5)  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \alpha = \beta = 1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + xy, \\ \dot{y} = -y + xy. \end{cases}$$

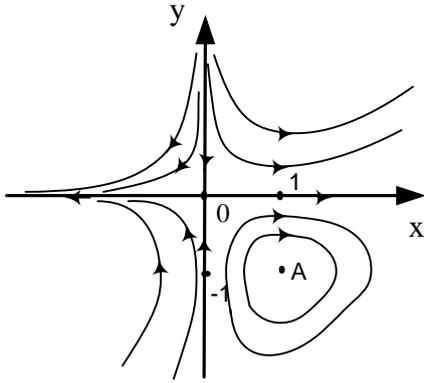


Рис. 1.

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(1,-1)$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x,y) = x + y$ ,  $M(x,y) = xy$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv xye^{y-x} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 1.

2. Полагая в уравнениях (5.14)  $\lambda_1 = \lambda = \gamma = 1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + xy, \\ \dot{y} = 2y + xy + y^2. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(-1,0)$ ,  $B(0,-2)$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x,y) = 3(1+x+y)$ ,  $M(x,y) = x^3$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv \frac{2y+2xy+y^2}{x^2} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 2.

3. Полагая в уравнениях (5.15)  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = 8y + 4xy. \end{cases}$$

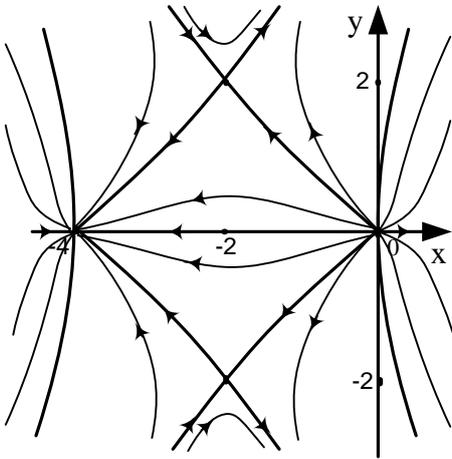


Рис. 3.

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(-4,0)$ ,  $B(-2,2)$ ,  $C(-2,-2)$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x,y) = 6(1+x)$ ,  $M(x,y) = y(12x + 3x^2 - y^2)$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv \frac{(12x+3x^2-y^2)^2}{y} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 3.

4. Полагая в уравнениях (5.17)  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\gamma = 1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2x^2 + xy, \\ \dot{y} = y + 2xy + y^2. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(-1,0)$ ,  $B(0,-1)$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x,y) = 3(1+2x+y)$ ,  $M(x,y) = xy(1+x+y)$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv \frac{x(1+x+y)}{y^2} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 4.

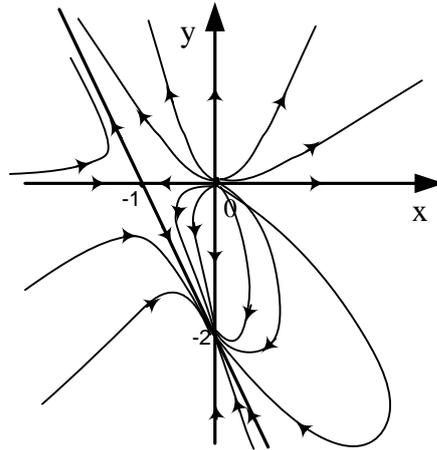


Рис. 2.

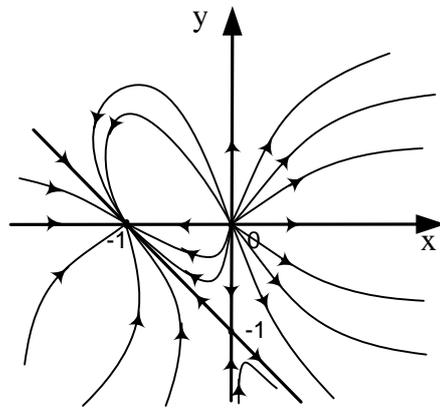


Рис. 4.

5. Полагая в уравнениях (5.27)  $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ ,  $\lambda = -\frac{1}{3}$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\delta = -1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x^2, \\ \dot{y} = \frac{1}{3}y - x^2 - \frac{1}{3}xy. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(-1, \frac{3}{2})$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x,y) = 1+x$ ,  $M(x,y) = x(y+x^2+xy)$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv \frac{(y+x^2+xy)^2}{x} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 5.

6. Полагая в уравнениях (5.19)  $\lambda_1 = \lambda = \gamma = 1$ ,  $\delta = \nu = 0$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 - 2xy, \\ \dot{y} = -y - 2xy + y^2. \end{cases}$$

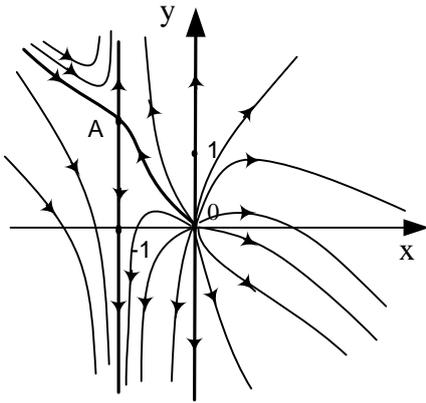


Рис. 5.

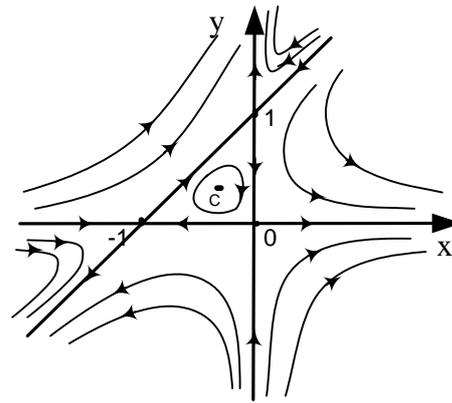


Рис. 6.

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(-1,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x,y) \equiv 0$ ,  $M(x,y) \equiv \mathcal{F}(x,y) \equiv xy(1+x-y) = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 6.

7. Полагая в уравнениях (5.27)  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\gamma = \delta = \lambda = 1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + xy + x^2y - xy^2, \\ \dot{y} = -y + xy + y^2 + x^2y - xy^2. \end{cases}$$

В переменных  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u} = v + u^2 + \frac{v}{2}(u^2 - v^2), \\ \dot{v} = u + uv, \end{cases}$$

для которой  $O(0,0)$ ,  $A(0, \sqrt{2})$ ,  $B(0, -\sqrt{2})$ ,  $C(1, -1)$ ,  $D(-1, -1)$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(u,v) = u(3+v)$ ,  $\tilde{M}(u,v) = (u^2 - v^2)(1+v)$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}(u,v) \equiv \frac{u^2 - v^2}{1+v} e^{-v} = C$ . Фазовый портрет последней изображен на рис. 7.

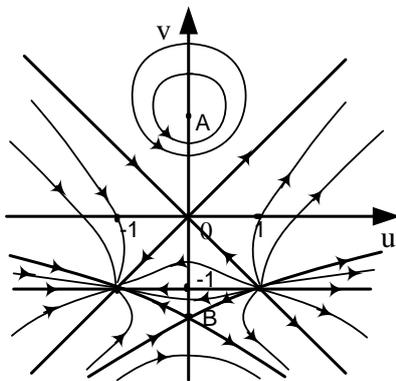


Рис. 7.

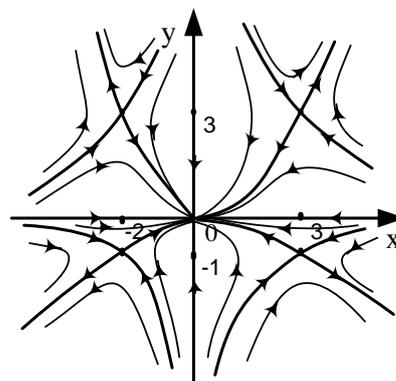


Рис. 8а.

8. а). Полагая в уравнениях (5.28)  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = -6$ ,  $\alpha = -2$ ,  $\beta = -1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\gamma = \lambda = 1$ , получаем систему
- $$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2xy + xy^2, \\ \dot{y} = -6y - xy + x^2y. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(3,3)$ ,  $B(3,-1)$ ,  $C(-2,3)$ ,  $D(-2,-1)$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x,y) = -9 - x - 2y + x^2 + y^2$ ,  $M(x,y) = xy$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv \frac{y^3}{x^6} e^{-x+2y+\frac{1}{2}(x^2-y^2)} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 8а.

- б). Полагая в уравнениях (5.28)  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -4$ ,  $\delta = 0$ ,  $\gamma = \lambda = 1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + xy + xy^2, \\ \dot{y} = 3y - 4xy + x^2y. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(1,1)$ ,  $B(3,1)$ ,  $C(1,-2)$ ,  $D(3,-2)$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x,y) = 1 - 4x + y + x^2 + y^2$ ,  $M(x,y) = xy$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv x^3y^2e^{-4x-y+\frac{1}{2}(x^2-y^2)} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 8б.

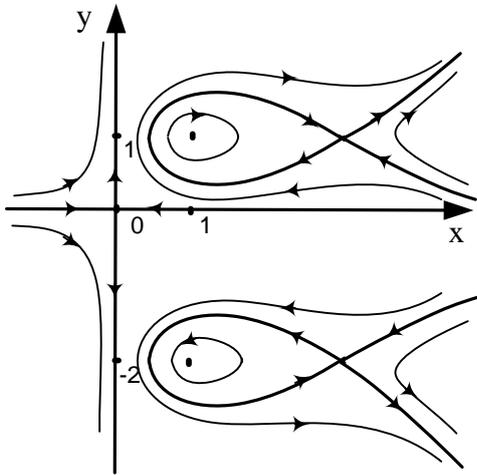


Рис. 8б.

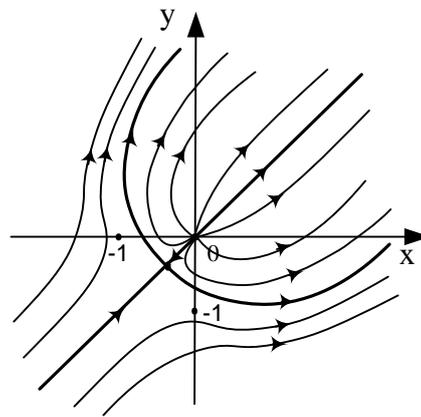


Рис. 9а.

9. а). Полагая в уравнениях (5.33) все коэффициенты равны 1, получаем систему
- $$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + xy + y^2, \\ \dot{y} = y + x^2 + xy + y^2. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x,y) = 2 + 3(x+y)$ ,  $M(x,y) = x^2 + xy + y^2$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv x - y - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arctg} \frac{x+2y}{\sqrt{3}x} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 9а.

- б). Полагая в уравнениях (5.33)  $\lambda_1 = \alpha = \beta = \nu = \omega = 1$ ,  $\gamma = -1$ , получаем систему
- $$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + xy - y^2, \\ \dot{y} = y + x^2 + xy - y^2. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(-1,-1)$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x,y) = 2 + 3(x+y)$ ,  $M(x,y) = x^2 + xy - y^2 = [y - \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)x][y + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)x] = [f][g]$ ,

$\mathcal{F}(x,y) \equiv \frac{2y-(1+\sqrt{5})x}{2y-(1-\sqrt{5})x} e^{\sqrt{5}(x-y)} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 9б.

- в). Полагая в уравнениях (5.33)  $\lambda_1 = \alpha = \gamma = \nu = 1$ ,  $\beta = \omega = 2$ , получаем систему
- $$\begin{cases} \dot{x} = x + (x+y)^2, \\ \dot{y} = y + 2(x+y)^2. \end{cases}$$

В переменных  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u} = u + 3u^2, \\ \dot{v} = v - u^2. \end{cases}$$

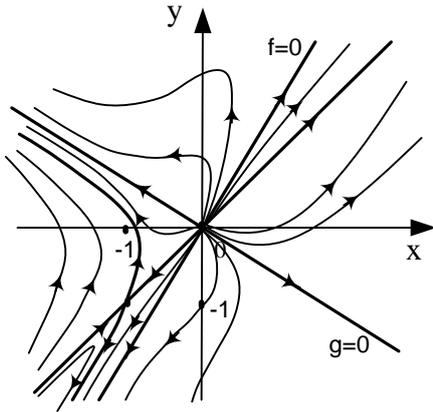


Рис. 9б.

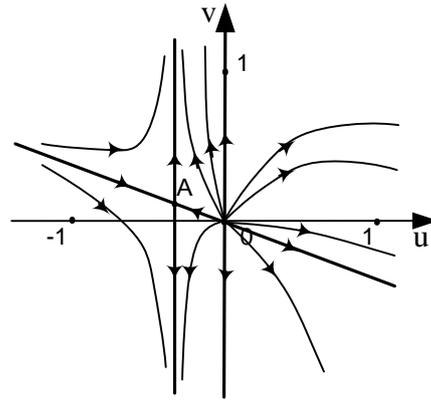


Рис. 9в.

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(u, v) = 2 + 6u$ ,  $\tilde{M}(u, v) = u^2$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}(u, v) \equiv \frac{v+3uv+v^2}{u} = C$ . Ее фазовый портрет изображен на рис. 9в.

10. Полагая в уравнениях (5.37)  $\lambda_1 = \lambda = \delta = 1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y^2, \\ \dot{y} = y + y^2. \end{cases}$$

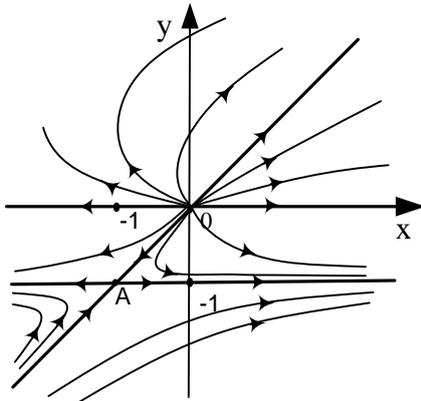


Рис. 10.

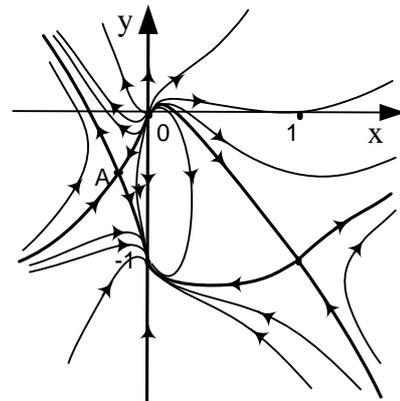


Рис. 11

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(-1, -1)$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x, y) = 2(x + y)$ ,  $M(x, y) = y^2$ ,  $\mathcal{F}(x, y) \equiv \frac{x+xy-y^3}{y} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 10.

11. Полагая в уравнениях (5.38)  $\lambda_1 = \lambda = \delta = \gamma = 1$ ,  $\mu = -1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + 2xy, \\ \dot{y} = -x + y + x^2 + y^2. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(0, -1)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$  – состояния равновесия,  $\text{div}\bar{\xi}(x, y) = 2(1 + x + 2y)$ ,  $M(x, y) = x^2$ ,  $\mathcal{F}(x, y) \equiv xe^{\frac{y-x^2+xy+y^2}{x}} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 11.

12. а). Полагая в уравнениях (5.39)  $\lambda_1 = \lambda = \gamma = 1$ ,  $\mu = -1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + xy, \\ \dot{y} = -x + y + xy + y^2. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(0,-1)$  – состояния равновесия,  $div\bar{\xi}(x,y) = 2 + 3(x+y)$ ,  $M(x,y) = x^2(1+2x+y)$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv \frac{x}{1+2x+y} e^{\frac{y}{x}} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 12а.

б). Полагая в уравнениях (5.39)  $\lambda_1 = \lambda = \gamma = \mu = 1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + xy, \\ \dot{y} = x + y + xy + y^2. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(0,-1)$  – состояния равновесия,  $div\bar{\xi}(x,y) = 2 + 3(x-y)$ ,  $M(x,y) = x^2(1+y)$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv \frac{x}{1+y} e^{-\frac{y}{x}} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 12б.

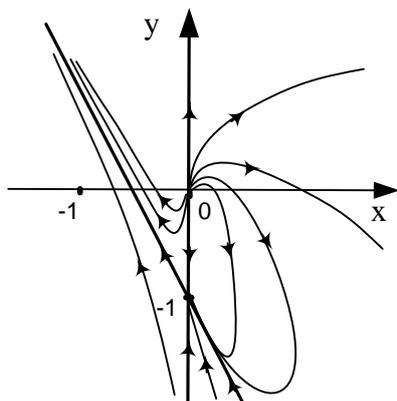


Рис. 12а.

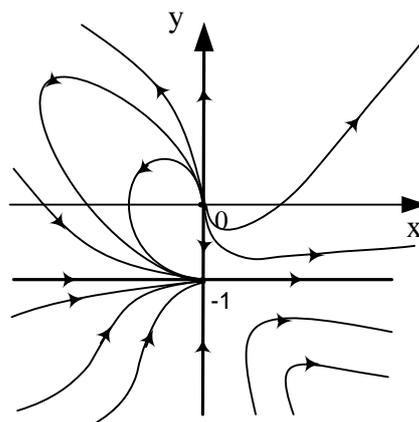


Рис. 12б.

13. Полагая в уравнениях (5.40)  $\lambda_1 = \lambda = \gamma = 1$ ,  $\mu = -1$ , получаем систему

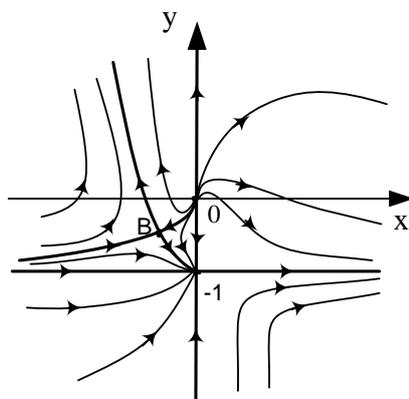


Рис. 13.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 + xy, \\ \dot{y} = -x + y - xy + y^2. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$ ,  $A(0,-1)$ ,  $B(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  – состояния равновесия,  $div\bar{\xi}(x,y) = 2 + x + 3y$ ,  $M(x,y) = x^2(1+y)$ ,  $\mathcal{F}(x,y) \equiv x(1+y)e^{\frac{y}{x}} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 13.

14. а). Полагая в уравнениях (5.53)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = \lambda = \frac{3}{2}$ ,  $\delta = 2$ ,  $\nu = 1$ ,  $\mu = -1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + 2x^3 + x^2y + 2xy^2 + y^3, \\ \dot{y} = x + \frac{3}{2}(x^2 + y^2) - x^3 - 2x^2y - xy^2 - 2y^3. \end{cases}$$

В переменных  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , получаем систему

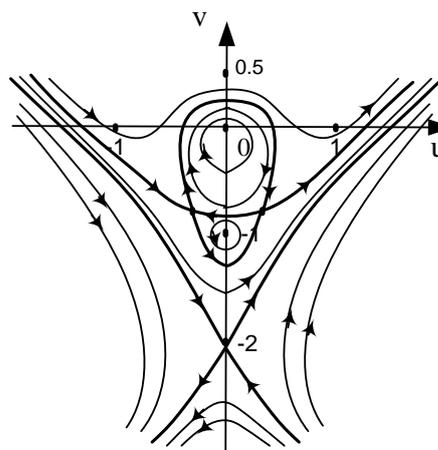


Рис. 14а.

$$\begin{cases} \dot{u} = v + \frac{1}{2}(3+v)(u^2 + v^2), \\ \dot{v} = -u + \frac{3}{2}u(u^2 + v^2). \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0), A(0,-1), B(0,-2), C(\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}, -\frac{3}{4}), D(-\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}, -\frac{3}{4})$  – состояния равновесия,  $div \bar{\xi}(u, v) = 3u + 4v, \tilde{M}(u, v) = (u^2 + v^2), \tilde{F}(u, v) \equiv (u^2 + v^2)e^{3v - \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2} = C$ . Ее фазовый портрет изображен на рис. 14а.

б). Полагая в уравнениях (5.53)  $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = \lambda = \nu = \mu = 0, \delta = 1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

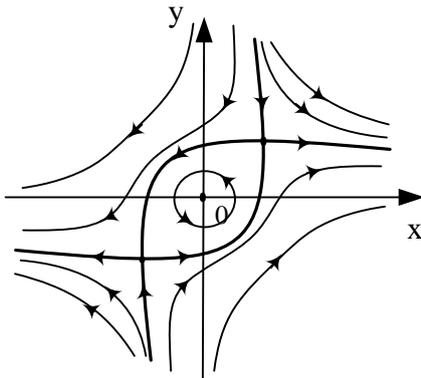


Рис. 14б.

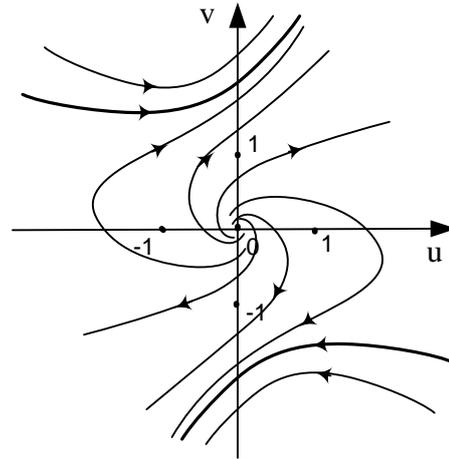


Рис. 15.

Для этой системы:  $O(0,0), A(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), B(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  – состояния равновесия,  $div \bar{\xi}(x, y) = 2(x^2 - y^2), M(x, y) = (x^2 + y^2), F(x, y) \equiv (x^2 + y^2)e^{2xy} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 14б.

15. Полагая в уравнениях (5.58)  $\alpha = \beta = \delta = 1, \nu = 0, \mu = -1$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + x(x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y + y(x^2 - y^2). \end{cases}$$

В переменных  $u = x + y, v = x - y$ , получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u} = u + v + u^2v, \\ \dot{v} = -u + v + uv^2. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$  – состояние равновесия,  $div \bar{\xi}(u, v) = 2(1 + uv), \tilde{M}(u, v) = (u^2 + v^2)(4 + u^2 + 2uv - v^2), \tilde{F}(u, v) \equiv \frac{u^2 + v^2}{4 + u^2 + 2uv - v^2} e^{2 \arctg \frac{v}{u}} = C$ . Ее фазовый портрет изображен на рис. 15.

16. Полагая в уравнениях (5.63) все коэффициенты равными 1, получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 + x^2y - xy^2, \\ \dot{y} = x + x^2y + xy^2 - y^3. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0)$  – состояние равновесия,  $div \bar{\xi}(x, y) = 4(x^2 - y^2), M(x, y) = (x^2 + y^2)(1 + 2xy + y^2), F(x, y) \equiv \frac{x^2 + y^2}{1 + 2xy + y^2} = C$ . Фазовый портрет изображен на рис. 16.

17. а). В переменных  $u = x + y, v = x - y$ , система (5.71) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u + v + u^2 + v^2 - (u - v)uv, \\ \dot{v} = -(u - v)(1 + v^2). \end{cases}$$

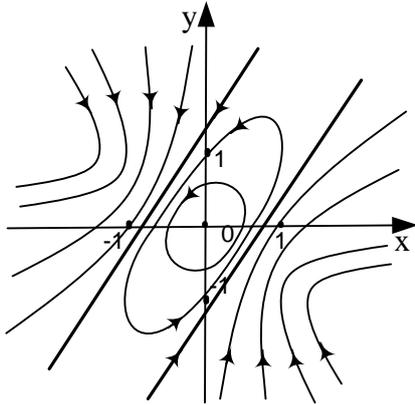


Рис. 16.

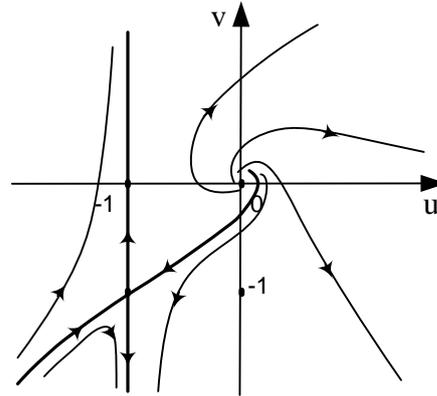


Рис. 17а.

Для этой системы:  $O(0,0), A(-1, -1)$  – состояния равновесия,  $div\bar{\xi}(u, v) = 2 + 2u - 4uv + 4v^2$ ,  $\tilde{M}(x, y) = (u^2 + v^2)(1 + v^2)$ ,  $\tilde{F}(u, v) \equiv \frac{u^2+v^2}{1+v^2} e^{2\arctg\frac{v(1+u)}{u-v^2}} = C$ . Ее фазовый портрет изображен на рис. 17а.

б). Система (5.73) представляется в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - y - 2xy)(x - y + 1), \\ \dot{y} = (x + y + 2y^2)(x - y + 1), \end{cases}$$

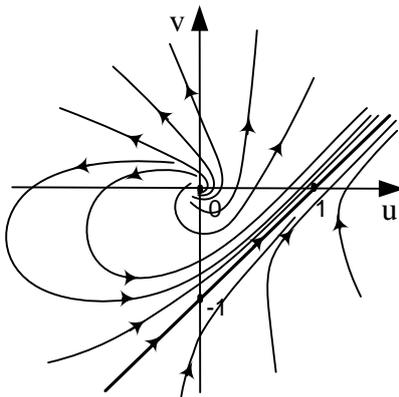


Рис. 17б.

фазовый портрет которой отличается от фазового портрета системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - 2xy, \\ \dot{y} = x + y + 2y^2 \end{cases}$$

тем, что прямая  $x - y + 1 = 0$  сплошь заполнена ее состояниями равновесия.

Для последней системы:  $O(0,0)$  – состояние равновесия,  $div\bar{\xi}(x, y) = 2 + 6y$ ,  $M(x, y) = (x^2 + y^2)(1 - x + y)$ ,  $\mathcal{F}(x, y) \equiv \frac{x^2+y^2}{(1-x+y)^2} e^{-2\arctg\frac{y}{x}} = C$ . Ее фазовый портрет изображен на рис. 17б.

18. а). В переменных  $u = x + y, v = x - y$ , система (5.72) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u + u^2 + v^2 - u^2v, \\ \dot{v} = -u - uv^2. \end{cases}$$

Для этой системы:  $O(0,0), A(0, -1)$  – состояния равновесия,  $div\bar{\xi}(u, v) = 2u - 4uv$ ,  $\tilde{M}(u, v) = (u^2 + v^2)(1 + v^2)$ ,  $\tilde{F}(u, v) \equiv \frac{u^2+v^2}{1+v^2} e^{2\arctg v} = C$ . Ее фазовый портрет изображен на рис. 18а.

б). Как и в случае 17.б). вместо системы (5.74), правые части которой имеют общий множитель  $x - y + 1$ , рассматриваем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + 2xy, \\ \dot{y} = x + xy + y^2. \end{cases}$$

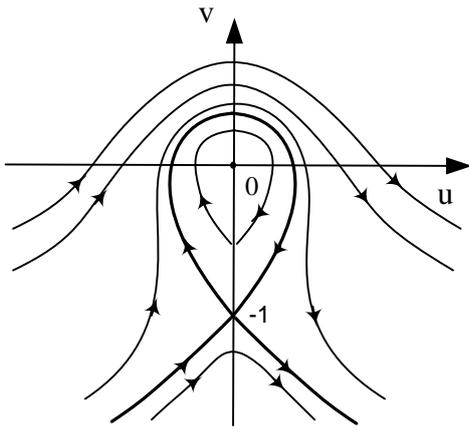


Рис. 18а.

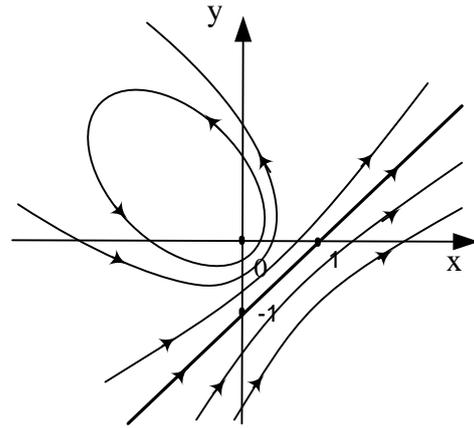


Рис. 18б.

Для этой системы:  $O(0,0)$  – состояние равновесия,  $div \bar{\xi}(x, y) = 3(x + y)$ ,  $M(x, y) = (x^2 + y^2)(1 - x + y)$ ,  $\mathcal{F}(x, y) \equiv \frac{x^2 + y^2}{(1 - x + y)^2} = C$ . Ее фазовый портрет изображен на рис. 18б.

Литература.

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: «Наука», 1978. 399 с.
2. Назиев Э.Х. Об исследовании поведения траекторий в окрестностях состояний равновесия динамических систем второго порядка. Киев, 1988. – 28 с. – Деп. в УкрНИИТИ 27.10.88, №2750-Ук88.
3. Назиев Э.Х. Фазовые портреты однородных динамических систем второго порядка. Киев, 1991. – 34с. – Деп. в УкрНИИТИ 30.10.91, №1429-Ук91.
4. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1956. 568 с.
5. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
6. Андреев А.Ф. Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. Учебное пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. университета, 2001. – 106 с.
7. Басов В.В. Метод нормальных форм в локальной качественной теории дифференциальных уравнений. Учебное пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. университета, 2001. – 47 с.
8. Ушхо Д.С. Введение в качественную теорию динамических систем второго порядка. Майкоп, 2003г. – 104 с.
9. Богданов Р.И. Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения. М. «Вузовская книга», 2003. 373 с.
10. Богданов Р.И. Фазовые портреты динамических систем на плоскости и их инварианты. М. «Вузовская книга», 2008. 427 с.
11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИФМЛ, 1958. 468 с.
12. Эльсгольц С.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 271 с.
13. Картан Э. Интегральные инварианты. М.-Л.: ГИТТЛ, 1940. 216 с.
14. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: ГИИЛ, 1947. 359 с.
15. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: ГИИЛ, 1961. 387 с.
16. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. 448 с.
17. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: «Наука», 1975. 407 с.
18. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: «Наука», 1966. 530 с.
19. Назиев Э.Х., Назиев А.Х., Келейникова Г.И. Об однородных линейных дифференциальных системах с постоянными коэффициентами и полной проблеме собственных значений (Часть 2). Рязань, 2012. – 40 с. – Вестник Рязанского Государственного университета имени С.А. Есенина №1/34.
20. Каменков Г.В. Избранные труды. т. II. М.: «Наука», 1972. 214 с.