

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 1, 2007

Электронный журнал,
рег. N П2375 от 07.03.97
ISSN 1817-2172

<http://www.neva.ru/journal>
<http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal/>
e-mail: jodiff@mail.ru

Прикладные задачи
Численные методы

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЗАМКНУТЫХ ВИХРЕВЫХ РАМОК ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ГРУНТАХ СЛОЖНОЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Д.Н. НИКОЛЬСКИЙ

Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, д. 95,
Орловский государственный университет,
физико-математический факультет,
e-mail: nikolskydn@mail.ru

Аннотация.

Предлагается модификация метода замкнутых вихревых рамок для вычисления скорости перемещения поверхности раздела жидкостей различной вязкости и плотности в модели «поршневого» вытеснения (модели Лейбензона-Маскета). Рассматривается случай неоднородного грунта.

⁰Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 06-01-96303.

1 Введение

Методы нанесения на подвижную границу раздела жидкостей квазипотенциалов (потенциалов) простого и двойного слоев позволили решить ряд двумерных задач вытеснения одной жидкости другой в однородном [1] и неоднородном [2, 3] грунтах. Этот же метод, в сочетании с методом замкнутых вихревых рамок, позволил смоделировать пространственную задачу вытеснения [4].

В данной работе для решения задачи о вычислении скорости перемещения поверхности раздела жидкостей в неоднородном грунте, также предлагается использовать квазипотенциал двойного слоя. Последнее требует численного решения интегрального уравнения, и последующего вычисления гиперсингулярного интеграла. Вычисление гиперсингулярного интеграла производится методом замкнутых вихревых рамок. Полученная численная схема тестируется на аналитическом решении частной задачи.

В отличие от [5] во-первых приводится численная схема; во-вторых интегралы, определяющие скорость перемещения поверхности раздела жидкостей позволяют построить более простую численную схему для их вычисления (нет необходимости аппроксимировать производные от искомой плотности квазипотенциала двойного слоя).

Математическая модель, построенная в данной работе, может быть использована для широкого круга задач, связанных с эволюцией поверхности раздела жидкостей. Такие задачи возникают при первичной разработке нефтяных месторождений, в задачах мониторинга окружающей среды, связанных с миграцией загрязнения.

2 Математическая модель

Рассмотрим пространственную фильтрацию в неоднородном изотропном и безграничном грунте. Пусть область течения $D \in \mathbb{R}^3$ безгранична. Резкая подвижная поверхность σ_0 делит область D на части D^- (внутренняя) и D^+ (внешняя). Область D^+ занята жидкостью с вязкостью μ_1 и плотностью ρ_1 , область D^- — μ_2 и ρ_2 . Нормаль к поверхности σ_0 направлена в область D^+ .

Поверхность σ_0 считаем гладкой. Неоднородность грунта определяется коэффициентом проницаемости грунта $K(M) \in C^{(1)}(D)$. Возбудителями течения в области D являются скважины.

Согласно [6], течение жидкостей в области D описывают закон Дарси и

уравнение неразрывности

$$\vec{v}(M) = K(M)\nabla\varphi(M), \quad \varphi(M) = -\frac{1}{\mu}(p - \rho(\vec{e}_g, \vec{r}_M)), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}(M) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\vec{v}(M)$ — скорость фильтрации, $\varphi(M)$ — квазипотенциал скорости фильтрации, p — гидростатическое давление, \vec{e}_g — единичный вектор, указывающий на направление ускорения свободного падения.

Скорость перемещение частиц жидкости, находящихся на поверхности σ_0 , определим следующим образом [2]

$$\vec{v}(M) = \frac{\vec{v}^+(M) + \vec{v}^-(M)}{2}. \quad (3)$$

Законы (1) — (3) записаны в безразмерных величинах. Характерные величины при этом

$$P_0 = \rho_0 g L_0, \quad V_0 = \frac{K_0 \rho_0 g}{\mu_0}, \quad T_0 = \frac{m L_0 \mu_0}{K_0 \rho_0 g},$$

где g — модуль ускорения свободного падения, m — пористость грунта.

На поверхности σ_0 выполняются условия непрерывности давлений и неразрывности фильтрационного потока [6]

$$p^+(M) = p^-(M), \quad v_n^+(M) = v_n^-(M), \quad M \in \sigma_0. \quad (4)$$

Здесь «+» и «-» обозначены предельные значения соответствующих функций, при их приближении к σ_0 из областей D^+ и D^- , соответственно.

Из (1) и (2) следует, что квазипотенциал скорости фильтрации $\varphi(M)$ удовлетворяет уравнению эллиптического типа

$$\nabla_M (K(M)\nabla_M\varphi(M)) = 0. \quad (5)$$

Квазипотенциал φ будем искать в классе функций $C^{(2)}(D)$.

Ограничимся рассмотрением метагармонической (гармонической) серий сред [7], когда $\sqrt{K(M)}$ удовлетворяет метагармоническому (гармоническому при $\beta = 0$) уравнению

$$\Delta_M \sqrt{K(M)} - \beta^2 \sqrt{K(M)} = 0. \quad (6)$$

В этом случае фундаментальное решение уравнения (5) имеет вид [7]

$$\Phi(M, N) = \frac{U(r_{NM}) + G(M, N)}{\sqrt{K(M)K(N)}}. \quad (7)$$

Причем $U(r_{NM}) = \frac{e^{-\beta r_{NM}}}{4\pi r_{NM}}$ представляет собой решение уравнения

$$\Delta_M U(r_{NM}) = \beta^2 U(r_{NM}), \quad (8)$$

а функция $G(M, N)$ — конечная и регулярная. Когда область D безгранична $G = 0$.

Условия (4) для квазипотенциала скорости фильтрации примут вид

$$\begin{aligned} \mu_1 \varphi^+(M) - \mu_2 \varphi^-(M) &= (\rho_1 - \rho_2) (\vec{e}_g, \vec{r}_M), \\ \left(K(M) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} \right)^+ &= \left(K(M) \frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} \right)^-, \quad M \in \sigma_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Квазипотенциал скорости фильтрации $\varphi(M)$ представим в виде суммы

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) + \varphi_*(M), \quad (10)$$

где $\varphi_0(M)$ — квазипотенциал невозмущенного течения, вызванного работой системы скважин (выписывается для конкретной зависимости коэффициента $K(M)$), $\varphi_*(M)$ — квазипотенциал возмущения, вызванного поверхностью σ_0 .

Квазипотенциалы $\varphi_0(M)$ и $\varphi_*(M)$ должны удовлетворять уравнению (5). С учетом (10) условия (9) примут вид:

$$\begin{aligned} \mu_1 \varphi_*^+(M) - \mu_2 \varphi_*^-(M) &= (\mu_1 - \mu_2) \varphi_0(M) + (\rho_1 - \rho_2) (\vec{e}_g, \vec{r}_M), \\ \left(K(M) \frac{\partial \varphi_*(M)}{\partial n} \right)^+ &= \left(K(M) \frac{\partial \varphi_*(M)}{\partial n} \right)^-, \quad M \in \sigma_0. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (1) и (10) выражение (3) примет вид

$$\begin{aligned} \vec{v}(M) &= \vec{v}_0(M) + \vec{v}_*(M), \quad M \in \sigma_0, \\ \vec{v}_0(M) &= K(M) \nabla \varphi_0(M), \\ \vec{v}_*(M) &= K(M) \frac{(\nabla \varphi_*(M))^+ + (\nabla \varphi_*(M))^-}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Положение поверхности раздела жидкостей σ_0 задано параметрически

$$\vec{r}_{M0} = \vec{r}_0(\kappa_1, \kappa_2), \quad \kappa_1, \kappa_2 - \text{параметры}. \quad (13)$$

В бесконечности для квазипотенциала φ_* выполняются условия регулярности

$$\varphi_*(M) = O\left(\frac{1}{r_{MN}}\right), \quad |v_*(M)| = |K(M) \nabla \varphi_*(M)| = O\left(\frac{1}{r_{MN}^2}\right) \quad (14)$$

при $r_{MN} \rightarrow \infty$ ($N \in D$). Условия (14) обеспечивают единственность решения задачи сопряжения (5), (11) для квазипотенциала возмущения $\varphi_*(M)$ [8].

Таким образом, для вычисления скорости $\vec{v}(M)$ точек поверхности σ_0 нужно решить задачу сопряжения (5), (11) для квазипотенциала $\varphi_*(M)$, с учетом (14), а затем вычислить выражение, стоящее в правой части (12).

3 Основная система интегрального и дифференциального уравнений

Квазипотенциал возмущения $\varphi_*(M)$ ищем в виде потенциала двойного слоя, распределенного по σ_0 с плотностью $g(M) \in H$ ($g(M)$ удовлетворяет условию Гельдера)

$$\varphi_*(M) = \iint_{\sigma_0} g(N, t) \Omega(M, N) d\sigma_N, \quad M \notin \sigma_0, \quad (15)$$

$$\Omega(M, N) = K(N) (\nabla_N \Phi(M, N), \vec{n}_N).$$

Несложно заметить, что ядро $\Omega(M, N)$ квазипотенциала $\varphi_*(M)$ представимо в виде

$$\Omega(M, N) = \sqrt{\frac{K(N)}{K(M)}} (\nabla_N U, \vec{n}_N) -$$

$$- \sqrt{\frac{K(N)}{K(M)}} \frac{(\nabla_N K(N), \vec{n}_N)}{2K(N)} U(M, N) + K(N) \left(\nabla_N \frac{G(M, N)}{\sqrt{K(M)K(N)}}, \vec{n}_N \right),$$

а значит скачок потенциала $\varphi_*(M)$ при переходе через σ_0 обусловлен только асимптотическим приближением в точке N вида

$$\Omega(M, N) \sim \frac{(\vec{r}_{NM}, \vec{n}_N)}{r_{NM}^3} \quad \text{при} \quad r_{NM} \rightarrow 0,$$

что позволяет воспользоваться предельными значениями потенциала двойного слоя для уравнения Лапласа [9]

$$\varphi_*^\pm(M) = \iint_{\sigma_0} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N \pm \frac{g(M)}{2}, \quad M \in \sigma_0. \quad (16)$$

Потенциал $\varphi(M)$ в виде (10), с учетом свойств φ_0 и (15) удовлетворяет уравнению (5), условию регулярности (14) и второму граничному условию из

(11). Подставим (10) в первое условие из (11), с учетом (16) получим

$$g(M) - 2\lambda \int_{\sigma_0} g(N, t) \Omega(M, N) dl_N = 2\lambda \varphi_0(M) + \alpha (\vec{e}_g, \vec{r}_M), \quad M \in \sigma_0, \quad (17)$$

$$\lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}, \quad \alpha = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_2 + \mu_1}.$$

Воспользовавшись (7), представим скорость возмущения следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{v}_*(M) = & \sqrt{K(M)} \iint_{\sigma_0} \sqrt{K(N)} g(N, t) \nabla_M (\nabla_N U(r_{NM}), \vec{n}_N) d\sigma_N - \\ & - \nabla_M \sqrt{K(M)} \iint_{\sigma_0} \sqrt{K(N)} g(N, t) (\nabla_N U(r_{NM}), \vec{n}_N) d\sigma_N - \\ & - \frac{\sqrt{K(M)}}{2} \iint_{\sigma_0} g(N, t) (\nabla_N \sqrt{K(N)}, \vec{n}_N) \nabla_M U(r_{NM}) d\sigma_N + \\ & + \nabla_M \sqrt{K(M)} \iint_{\sigma_0} g(N, t) (\nabla_N \sqrt{K(N)}, \vec{n}_N) U(r_{NM}) d\sigma_N + \\ & + K(M) \iint_{\sigma_0} K(N) g(N, t) \nabla_M \left(\nabla_N \frac{G(M, N)}{\sqrt{K(M)K(N)}}, \vec{n}_N \right) d\sigma_N, \quad M \notin \sigma_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Используя известные предельные значения для потенциалов простого и двойного слоев и их производных, а так же тот факт, что интеграл со слабой сингулярностью типа $\frac{1}{r_{NM}}$ не испытывает скачка на σ_0 [9], имеем для (18):

$$\begin{aligned} \vec{v}_*^\pm(M) = & \sqrt{K(M)} \iint_{\sigma_0} \sqrt{K(N)} g(N, t) \nabla_M (\nabla_N U(r_{NM}), \vec{n}_N) d\sigma_N - \\ & - \nabla_M \sqrt{K(M)} \iint_{\sigma_0} \sqrt{K(N)} g(N, t) (\nabla_N U(r_{NM}), \vec{n}_N) d\sigma_N + \\ & + \frac{\sqrt{K(M)}}{2} \iint_{\sigma_0} g(N, t) (\nabla_N \sqrt{K(N)}, \vec{n}_N) \nabla_M U(r_{NM}) d\sigma_N + \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 & + \nabla_M \sqrt{K(M)} \iint_{\sigma_0} g(N, t) \left(\nabla_N \sqrt{K(N)}, \vec{n}_N \right) U(r_{NM}) d\sigma_N + \\
 & + K(M) \iint_{\sigma_0} K(N) g(N, t) \nabla_M \left(\nabla_N \frac{G(M, N)}{\sqrt{K(M)K(N)}}, \vec{n}_N \right) d\sigma_N \pm \\
 & \pm \sqrt{K(M)} \frac{\tilde{\nabla} \left(g(M) \sqrt{K(M)} \right)}{2} \mp \frac{\nabla_M K(M)}{4} g(M) \mp \\
 & \mp \frac{(\nabla_M K(M), \vec{n}_M)}{4} g(M) \vec{n}_M, \quad M \in \sigma_0.
 \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\nabla}_M g(M)$ — касательная составляющая градиента функции $g(M)$ [9].

С учетом (10) и (19), скорости перемещения точек поверхности σ_0 (12) примут вид

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(M) = & \vec{v}_0(M) + \sqrt{K(M)} \iint_{\sigma_0} \sqrt{K(N)} g(N, t) \nabla_M (\nabla_N U(r_{NM}), \vec{n}_N) d\sigma_N - \\
 & - \nabla_M \sqrt{K(M)} \iint_{\sigma_0} \sqrt{K(N)} g(N, t) (\nabla_N U(r_{NM}), \vec{n}_N) d\sigma_N + \\
 & + \frac{\sqrt{K(M)}}{2} \iint_{\sigma_0} g(N, t) \left(\nabla_N \sqrt{K(N)}, \vec{n}_N \right) \nabla_M U(r_{NM}) d\sigma_N + \\
 & + \nabla_M \sqrt{K(M)} \iint_{\sigma_0} g(N, t) \left(\nabla_N \sqrt{K(N)}, \vec{n}_N \right) U(r_{NM}) d\sigma_N + \\
 & + K(M) \iint_{\sigma_0} K(N) g(N, t) \nabla_M \left(\nabla_N \frac{G(M, N)}{\sqrt{K(M)K(N)}}, \vec{n}_N \right) d\sigma_N, \quad M \in \sigma_0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

4 Переход к контурному интегралу

Пусть имеется некоторая поверхность Σ , опирающаяся на контур L . Имеет место теорема.

Теорема 1 Для функции $U(r_{NM})$ из фундаментального решения (7) уравнения (5) имеет место тождество:

$$\iint_{\Sigma} \nabla_M (\nabla_M U(r_{NM}), \vec{n}_N) d\sigma_N = - \oint_L [\nabla_M U(r_{NM}), d\vec{r}_N] - \iint_{\Sigma} \beta^2 U(r_{NM}) \vec{n}_N d\sigma_N. \quad (21)$$

Доказательство. Применим известную теорему Стокса к скалярной функции:

$$\iint_{\Sigma} [d\vec{\sigma}_N, \nabla_M U(M, N)] = \oint_L d\vec{r}_N U(M, N).$$

Поддействуем оператором ∇_M на левую и правую части последнего выражения, имеем

$$\iint_{\Sigma} [\nabla_M, [d\vec{\sigma}_N, \nabla_M U(M, N)]] = \oint_L [\nabla_M, d\vec{r}_N U(M, N)]. \quad (22)$$

Несложно доказать следующие соотношения

$$\nabla_M (\nabla_N U(M, N), d\vec{\sigma}_N) = - [\nabla_M, [d\vec{\sigma}_N, \nabla_N U(M, N)]] + \quad (23)$$

$$+ d\vec{\sigma}_N (\nabla_M, \nabla_N U(M, N)) + [d\vec{\sigma}_N, [\nabla_M, \nabla_N U(M, N)]],$$

$$[\nabla_M, U(M, N) d\vec{r}_N] = [\nabla_M U(M, N), d\vec{r}_N] \quad (24)$$

Учтем, что $\nabla_M U(r_{NM}) = -\nabla_N U(r_{NM})$ и (8) имеем (23)

$$\nabla_M (\nabla_N U(r_{NM}), d\vec{\sigma}_N) = \quad (25)$$

$$- [\nabla_M, [d\vec{\sigma}_N, \nabla_N U(r_{NM})]] - \beta^2 U(r_{NM}) d\vec{\sigma}_N.$$

Тогда, с учетом (24) и (25), преобразованная теорема Стокса (22) примет вид (21). Отметим, что при $\beta = 0$ (21) представляет собой известную теорему Ампера.

5 Численное решение

Пусть выбрана правая система координат. Построим численную схему для уравнений (17), (20), воспользовавшись методом дискретных особенностей

для решения (17) и разовьем метод замкнутых вихревых рамок, для вычисления гиперсингулярного интеграла в (20). Для этого поверхность σ_0 представим элементарными площадками $\Delta\sigma_{mk}$, $m = 0, 1, \dots, n_1 - 2$, $k = 0, 1, \dots, n_2 - 2$ одинаковой площади.

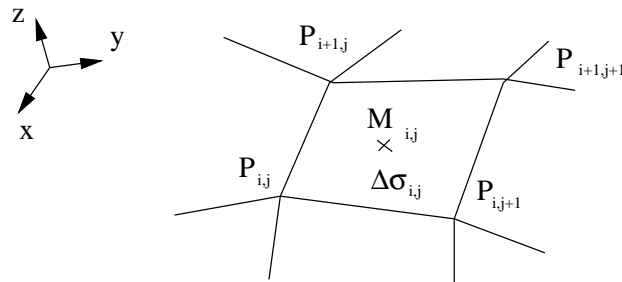


Рис. 1. Элементарные площадки.

Края этих площадок задают точки P_{ij} , $i = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, $j = 0, 1, \dots, n_2 - 1$, (см. рисунок 1). Приблизительно в центре каждой площадки $\Delta\sigma_{mk}$ расположим расчетные точки M_{mk} $i = 0, 1, \dots, n_1 - 2$, $j = 0, 1, \dots, n_2 - 2$, вычислив их координаты по следующей формуле:

$$M_{mk} = \frac{1}{4} (P_{mk} + P_{m+1,k} + P_{m+1,k+1} + P_{m,k+1}).$$

В интегральном уравнении (17) заменим интеграл на суммы

$$g_{mk} - 2\lambda \sum_{\substack{i=0 \\ mk \neq ij}}^{n_1-2} \sum_{j=0}^{n_2-2} g_{ij} \Omega_{mkij} \Delta\sigma_{ij} = 2\lambda \varphi_{0mk} + \alpha (\vec{e}_g, \vec{r}_{mk}), \quad (26)$$

$$m = 0, 1, \dots, n_1 - 2, \quad k = 0, 1, \dots, n_2 - 2.$$

(26) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений.

Отметим, что в ходе численных расчетов для системы (26) было установлено диагональное преобладание, что позволило решать эту систему методом простой итерации. В этом методе каждое новое приближение находится по формуле:

$$g_{mk}^p = 2\lambda \sum_{\substack{i=0 \\ mk \neq ij}}^{n_1-2} \sum_{j=0}^{n_2-2} g_{ij}^{p-1} \Omega_{mkij} \Delta\sigma_{ij} + 2\lambda \varphi_{0mk} + \alpha (\vec{e}_g, \vec{r}_{mk}), \quad (27)$$

$$m = 0, 1, \dots, n_1 - 2, \quad k = 0, 1, \dots, n_2 - 2. \quad p = 1, 2, \dots, J.$$

или в матричном виде

$$g^p = B^{p-1} + C, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (28)$$

$$p = 1, 2, \dots, J, \quad \text{при} \quad \|B^{p-1}\| < 1.$$

Здесь J — число итераций, которое определяется из условия [10]

$$\frac{\|g^J - g^{J-1}\|_1}{\|g^J\|_1} < \frac{1 - \|B\|_1}{\|B\|_1} \varepsilon, \quad (29)$$

где ε — заданная точность.

Выбор метода простой итерации в данной работе объясняется простотой его распараллеливания.

Считаем, что плотность потенциала двойного слоя g_{mk} и коэффициент $K(M)$ не меняются в пределах каждой площадки $\Delta\sigma_{mk}$, $m = 0, 1, \dots, n_1 - 2$, $k = 0, 1, \dots, n_2 - 2$, $s = 0, 1, \dots$. Тогда разностная схема для (20), с учетом (21), примет вид

$$\begin{aligned} \vec{v}_{mk} = & \vec{v}_{0\ mk} - \sqrt{K_{mk}} \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{j=0}^{n_2-2} \sqrt{K_{ij}} g_{ij} \oint_{L_{ij}} \nabla_M U(r_{NM}) d\vec{r}_N + \\ & + \sqrt{K_{mk}} \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{j=0}^{n_2-2} \sqrt{K_{ij}} g_{ij} \iint_{\Delta\sigma_{ij}} \left((\nabla_N \ln \sqrt{K(N)}, \vec{n}_N) \nabla_N U(r_{NM}) - \right. \\ & \left. - \nabla_M \ln \sqrt{K(M)} (\nabla_N U(r_{NM}), \vec{n}_N) \right) d\sigma_N + \\ & + \sqrt{K_{mk}} \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{j=0}^{n_2-2} \sqrt{K_{ij}} g_{ij} \iint_{\Delta\sigma_{ij}} \left((\nabla_N \ln \sqrt{K(N)}, \vec{n}_N) \nabla_M \ln \sqrt{K(M)} - \right. \\ & \left. - \beta^2 \vec{n}_N \right) U(r_{NM}) d\sigma_N + \\ & + K_{mk} \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{j=0}^{n_2-2} K_{ij} g_{ij} \iint_{\Delta\sigma_{ij}} \nabla_M \left(\nabla_N \frac{G(M, N)}{\sqrt{K(M)K(N)}}, \vec{n}_N \right) d\sigma_N, \\ & m = 0, 1, \dots, n_1 - 2, \quad k = 0, 1, \dots, n_2 - 2. \end{aligned} \quad (30)$$

Уточним формулы (27) и (30) для конкретной зависимости коэффициента проводимости $K(M)$

$$K(M) = e^{2\beta z_M}. \quad (31)$$

(Нетрудно убедиться, что \sqrt{K} является метагармонической функцией.)

С учетом (31), имеем (27) и (30)

$$g_{mk}^p = 2\lambda \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{\substack{j=0 \\ mk \neq ij}}^{n_2-2} g_{ij}^{p-1} \Omega_{mkij} \Delta\sigma_{ij} + 2\lambda\varphi_{0mk} + \alpha (\vec{e}_g, \vec{r}_{mk}), \quad (32)$$

$$\Omega_{mkij} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{K_{ij}}{K_{mk}}} \left(\frac{(1 + \beta r_{mkij}) e^{-\beta r_{mkij}} (\vec{r}_{mkij}, \vec{n}_{ij})}{(r_{mkij})^3} - \frac{\beta (\vec{k}, \vec{n}_{ij}) e^{-\beta r_{mkij}}}{r_{mkij}} \right),$$

$$m = 0, 1, \dots, n_1 - 2, \quad k = 0, 1, \dots, n_2 - 2, \quad p = 1, 2, \dots, J,$$

$$\vec{v}_{mk} = \vec{v}_{0mk} + \vec{v}_{*mk}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{*mk} = & -\sqrt{K_{mk}} \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{\substack{j=0 \\ mk \neq ij}}^{n_2-2} \sqrt{K_{ij}} g_{ij} \sum_{\gamma=1}^4 \vec{V}_{1mkij}^\gamma + \\ & + \sqrt{K_{mk}} \sum_{i=0}^{n_1-2} \sum_{\substack{j=0 \\ mk \neq ij}}^{n_2-2} \sqrt{K_{ij}} g_{ij} \left(\beta \vec{V}_{2mkij} + \beta^2 \vec{V}_{3mkij} \right) \Delta\sigma_{ij}, \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{1mkij}^\gamma = \frac{\vec{e}_{1mkij}}{4\pi r_{0mkij}^\gamma} \int_{\theta_1^\gamma}^{\theta_2^\gamma} \left(\sin \theta + \beta r_{0mkij}^\gamma \right) e^{-\frac{\beta r_{0mkij}^\gamma}{\sin \theta}} d\theta,$$

$$r_{0mkij}^\gamma = \frac{\left| \left[\vec{r}_{12ij}^\gamma, \vec{r}_{1mkij}^\gamma \right] \right|}{r_{12ij}^\gamma}, \quad \vec{e}_{1mkij} = \frac{\left[\vec{r}_{1mkij}^\gamma, \vec{r}_{12ij}^\gamma \right]}{\left| \left[\vec{r}_{1mkij}^\gamma, \vec{r}_{12ij}^\gamma \right] \right|},$$

$$\theta_\zeta = \arcsin \frac{\left| \left[\vec{r}_{12ij}^\gamma, \vec{r}_{\zeta mkij}^\gamma \right] \right|}{r_{12ij}^\gamma r_{\zeta mkij}^\gamma}, \quad \zeta = 1, 2,$$

$$\vec{V}_{2mkij} = \frac{(1 + \beta r_{mkij}) U_{mkij}}{(r_{mkij})^2} \left[\vec{n}_{ij}, \left[\vec{r}_{mkij}, \vec{k} \right] \right],$$

$$\vec{V}_{3mkij} = U_{mkij} \left[\vec{k}, \left[\vec{k}, \vec{n}_{ij} \right] \right], \quad U_{mkij} = \frac{e^{-\beta r_{mkij}}}{4\pi r_{mkij}},$$

$$m = 0, 1, \dots, n_1 - 2, \quad k = 0, 1, \dots, n_2 - 2.$$

Интеграл в (33) не выражается через элементарные функции, и потому вычисляется численно по формуле Симпсона. Вектора $\vec{r}_{1\,mkij}^\gamma$, $\vec{r}_{2\,mkij}^\gamma$, $\vec{r}_{12\,ij}^\gamma$ изображены на рисунке 2.

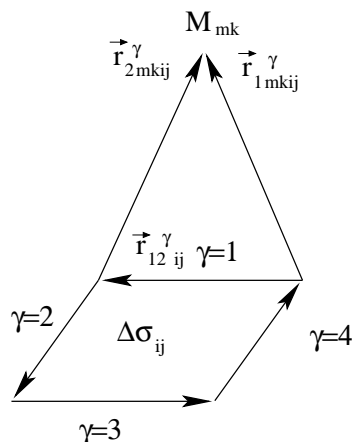


Рис. 2. Вихревая рамка.

Итак, для численного решения задачи вычисления скоростей перемещения точек поверхности раздела жидкостей в неоднородном грунте, проводимость которого характеризуется функцией (31) имеем: систему линейных алгебраических уравнений (32) и (33). Для нахождения скоростей перемещения расчетных точек M_{mk} , $m = 0, 1, \dots, n_1 - 2$, $k = 0, 1, \dots, n_2 - 2$ нужно найти плотность g_{mk} в этих точках путем решения системы (32). Затем вычислить их по формулам (33).

Отметим, что при $\beta = 0$ полученная дискретная система совпадает с результатом из [4].

6 Сопоставление с аналитическим решением

Рассмотрим случай, когда поверхность раздела жидкостей σ_0 моделируется плоскостью $x = 0$, а влияние силы тяжести мало $\alpha = 0$ (напорная фильтрация).

Скважину моделируем единичным стоком, потенциал которого имеем вид

$$\varphi_0(M) = \frac{q}{4\pi} \sqrt{\frac{K(M_1)}{K(M)} \frac{e^{-\beta r_{M_1 M}}}{r_{M_1 M}}}, \quad q = \frac{\Pi}{K_{M_1}}, \quad (34)$$

где q — приведенный дебит (расход на единицу проводимости грунта).

При этих условиях несложно выписать аналитическое выражение, определяющее скорость перемещения поверхности σ_0 . Действительно, потенциалы φ_1 и φ_2

$$\begin{aligned} \varphi_1(M) &= \varphi_0(M) - \lambda \tilde{\varphi}_0(M), & \varphi_2(M) &= (1 + \lambda)\varphi_0(M) & (35) \\ \tilde{\varphi}_0(M) &= \frac{q}{4\pi} \sqrt{\frac{K(M_1)}{K(M)}} \frac{e^{-\beta r_{\tilde{M}_1 M}}}{r_{\tilde{M}_1 M}}, & q &= \frac{\Pi}{K_{M_1}}, & \tilde{M}_1 &= (-1, 0, 0). \end{aligned}$$

удовлетворяют уравнению (5), граничным условиям (9) и описывают течения жидкостей вязкостей μ_1 и μ_2 , соответственно.

Из (3), с учетом (35), скорость перемещения точек поверхности σ_0 примет вид

$$\vec{v}_a(M, 0) = \vec{v}_0(M, 0) + K(M) \frac{\nabla_M \varphi_1(M) + \nabla_M \varphi_2(M)}{2}, \quad M \in \sigma_0. \quad (36)$$

Для оценки ошибки вычислений введем величину

$$\eta(M) = \left| \frac{v(M)}{v_a(M)} - 1 \right| 100\%.$$

В ходе численных расчетов было замечено, что ошибка η принимает наибольшее значение в центре плоскости σ_0 (напротив скважины). Исключение представляют только крайние точки плоскости (образуют рамку) при $\beta > 0$ и крайняя полоса плоскости (область между двумя рамками) при $\beta = 0$ [4]. Погрешность в них связана с обрывом σ_0 , поэтому здесь и далее устраняем ее путем наложения ограничений на скорость возмущения

$$\begin{aligned} \vec{v}_*(x_M, y_M, z_M, t) &= \vec{v}_{\min} & (37) \\ \text{для } |y_M| &\in [|y_{\min}|, |y_{\max}|], & |z_M| &\in [|z_{\min}|, |z_{\max}|]. \end{aligned}$$

Здесь y_{\min} , z_{\min} — координаты точки, в которой модуль скорости возмущения $v_*(M)$ уменьшается в 1000 раз при движении от центра плоскости σ_0 к ее краям вдоль одной из координатной оси Oy и Oz , соответственно.

Для выполнения численных расчетов, с учетом (37) плоскость заменим квадратом $x = 0$, $y \in [-3, 3]$ и $z \in [-3, 3]$ ¹. Точность ε из (29) выберем равной $\varepsilon = 10^{-10}$.

Введем обозначение $\eta = \eta(0, 0, 0)$. В таблице 1 представлена зависимость ошибки η от $n = n_1 - 1 = n_2 - 1$ для различных значений λ . Для определенности выберем $\beta = 1$.

¹Из-за малости z-й компоненты скорости по сравнению с модулем скорости, несимметрия практически не заметна.

Табл.1. Сопоставление с аналитикой при $\beta = 1$.

n	10	20	40	80
$\eta_{\lambda=1}, \%$	12.4	5.4	2.4	1.2
$\eta_{\lambda=0.5}, \%$	7.9	3.4	1.6	0.7
$\eta_{\lambda=-0.5}, \%$	14.1	5.9	2.6	1.2

Анализируя таблицу 1 замечаем, что с ростом n ошибка η уменьшается, а значит численное решение приближается к аналитическому.

7 Уточнение численной схемы

При построении дискретной схемы, из предпоследнего слагаемого в (30) в точке M_{mk} из сумм выбрасывается слагаемое, которое является конечным. Даже грубый учет этого слагаемого позволяет в несколько раз уменьшить погрешность вычислений. Покажем это.

Вычислим слагаемое, отброшенное из сумм предпоследнего слагаемого в (30):

$$\vec{v}_{*3mk} = K_{mk}g_{mk} \int\int_{\Delta\sigma_{mk}} \beta^2 \left[\vec{k}, \left[\vec{k}, \vec{n}_N \right] \right] U(r_{NM}) \Delta\sigma_N$$

$$m = 0, 1, \dots, n_1 - 1, \quad k = 0, 1, \dots, n_2 - 1.$$

Заменим площадку $\Delta\sigma_{mk}$ на круг радиусом

$$R = \frac{r_{P_{mk}P_{m+1,k}} + r_{P_{m+1,k}P_{m+1,k+1}} + r_{P_{m+1,k+1}P_{mk+1}} + r_{P_{mk+1}P_{mk}}}{8}$$

Тогда в полярной системе координат ρ, θ с центром в M_{mk}^2 интеграл \vec{v}_{*3mk} может быть вычислен точно

$$\begin{aligned} \vec{v}_{*3mk} &= K_{mk}g_{mk} \frac{\beta^2 \left[\vec{k}, \left[\vec{k}, \vec{n}_{mk} \right] \right]}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{e^{-\beta\rho}}{\rho} \rho d\theta d\rho = \\ &= K_{mk}g_{mk}\beta \left[\vec{k}, \left[\vec{k}, \vec{n}_{mk} \right] \right] \frac{1 - e^{-\beta R}}{2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Проведем численный эксперимент, описанный в п.6, с учетом (38). Его результаты отображены в таблице 2.

Табл.2. Сопоставление с аналитикой при $\beta = 1$
в случае уточненной численной схемы.

n	10	20	40	80
$\eta_{\lambda=1}, \%$	5.8	1.9	0.7	0.3
$\eta_{\lambda=0.5}, \%$	3.7	1.2	0.4	0.2
$\eta_{\lambda=-0.5}, \%$	6.4	2.1	0.7	0.3

Из таблицы 2 видно, что уточнение численной схемы привело к уменьшению погрешности вычислений.

Список литературы

- [1] *Danilov V.L.* Method of integro-differential equation (IDE) in hydrodynamic theory of filtration// Intern. conference dedicated to P.Ya.Polubarinova-Kochina «Modern approaches to flow in porous media», 1999, P.9-10.
- [2] *Lifanov I.K., Nikolsky D.N., Piven' V.F.* Mathematical modelling of the work of the system of wells in a layer with the exponential law of permeability variation and the mobile liquid interface// Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling, 2002, Vol.17, No.4, 381-391.
- [3] *Никольский Д.Н.* Решение двумерной задачи о нахождении критического дебита водозабора, работающего вблизи загрязненного бассейна// Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2004, № 3. С.57-63.
- [4] *Никольский Д.Н.* Математическое моделирование трехмерной задачи эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости и плотности в однородном и безграничном грунте// Вычислительные методы и программирование, 2006, Т.7, Раздел 1, С.236-242. (http://num-meth.srcc.msu.su/zhurnal/tom_2006/v7r129.html)
- [5] *Пивень В.Ф., Буравлев И.В.* Исследование трехмерной задачи эволюции границы раздела жидкостей к несовершенной скважине// Тр. XII Межд. симп. «МДОЗМФ–2005», Харьков-Херсон, 2005. С.275-278.
- [6] *Голубева О.В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972.
- [7] *Пивень В.Ф.* Фундаментальные решения уравнений физических процессов, протекающих в неоднородных средах// Тр. Межд. шк.-сем. «МДОЗМФ». Вып.3. Орел, 2004. С.43-53.

- [8] *Ливень В.Ф.* Единственность решения граничных задач сопряжения физических процессов в неоднородной среде// Тр. X Межд. симп. «МДОЗМФ–2001». Херсон, 2001. С.265-269.
- [9] *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО Янус, 1995.
- [10] *Рябенский В.С.* Введение в вычислительную математику. М.: Физматлит, 2000.