ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2006
Электронный журнал,
рег. N П23275 от 07.03.97

http://www.neva.ru/journal
e-mail: jodiff@mail.ru

Динамические системы на многообразиях

СЛАБЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОТСЛЕЖИВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А.В.Осипов

Россия, 195197, Санкт-Петербург, пр. Металлистов, д. 118,
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
Математико-Механический Факультет,
e-mail: osipovav@list.ru

Аннотация.

Рассматриваются первое и второе слабые предельные свойства отслеживания нелинейных динамических систем и их "отрицательные" аналоги. Показано, что любая динамическая система с компактным фазовым пространством обладает вторым слабым предельным свойством отслеживания. Приведен пример диффеоморфизма двумерной сферы, обладающего первым слабым предельным свойством отслеживания, но не обладающего его "отрицательным" аналогом. Доказано, что C^1-внутренность множества диффеоморфизмов двумерного гладкого замкнутого многообразия, обладающих первым слабым предельным свойством отслеживания, совпадает с множеством Ω-устойчивых диффеоморфизмов.

1 Введение. Основные определения.

Теория свойств отслеживания изучает вопрос о близости приближенных и точных траекторий динамических систем на неограниченных временных промежутках. Этот вопрос важен как с точки зрения приложений (как правило, рассматриваются приближенные траектории, порожденные компьютерным моделированием системы), так и с точки зрения качественной теории динамических систем (наличие свойств отслеживания можно трактовать как ослабленную структурную устойчивость). Наряду с "обычными" свойствами отслеживания рассматривают и их предельные аналоги. Наличие предельных свойств отслеживания означает близость приближенных и точных траекторий динамической системы "на бесконечности". В работе показано, что для слабых предельных свойств отслеживания динамических систем на двумерных многообразиях выполняется ряд утверждений, аналогичных уже известным для соответствующих "обычных" слабых свойств отслеживания. Дадим основные определения.

Рассмотрим динамическую систему, порожденную гомеоморфизмом f метрического пространства (M, dist). Обозначим через $O(p, f)$ траекторию точки $p \in M$, т. е. множество $\{f^k(p) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Будем называть последовательность $\xi = \{x_k \in M \mid k \in \mathbf{Z}\}$ d-псевдотраекторией, если выполняются неравенства

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < d, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Свойство отслеживания POTP (pseudoorbit tracing property) динамической системы f формулируется следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории $\xi = \{x_k\}$ найдется такая точка $p \in M$, что

$$\mathrm{dist}\left(f^k(p), x_k\right) < \varepsilon, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Современное состояние теории отслеживания псевдотраекторий отражено в монографиях [1, 2]. В работе [3] введено следующее определение.

Будем говорить, что для f выполняется предельное свойство отслеживания LmSP (limit shadowing property), если для любой такой последовательности $\xi = \{x_k \mid k \in \mathbf{Z}_{>0}\}$, что

$$\mathrm{dist}\,(x_{k+1}, f(x_k)) \longrightarrow 0, \quad k \to \infty, \tag{1.1}$$

найдется такая точка $p \in M$, что

$$\operatorname{dist}(f^k(p), x_k) \longrightarrow 0, \quad k \to \infty.$$

Обозначим через $N(\varepsilon, Q)$ ε-окрестность множества $Q \subset M$. В работе [5] введено следующее определение. Будем говорить, что для f выполняется орбитальное свойство отслеживания OSP (orbital shadowing property), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраетории ξ найдется такая точка $p \in M$, что выполняются следующие включения:

$$\xi \subset N(\varepsilon, O(p, f)) \text{ и } O(p, f) \subset N(\varepsilon, \xi).$$

Нетрудно видеть, что POTP $\subset$ OSP. (Как обычно, мы обозначаем одними и теми же символами как некоторое свойство динамических систем, так и множество всех систем, обладающих этим свойством.)

В работах [4, 5] были введены следующие слабые свойства отслеживания.

Будем говорить, что для f выполняется первое слабое свойство отслеживания 1WSP (first weak shadowing property), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории ξ найдется такая точка $p \in M$, что

$$\xi \subset N(\varepsilon, O(p, f)).$$

Будем говорить, что для f выполняется второе слабое свойство отслеживания 2WSP, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории ξ найдется такая точка $p \in M$, что

$$O(p, f) \subset N(\varepsilon, \xi).$$

Известно (см. [5], Теорема 3.1), что любой гомеоморфизм f компактного метрического пространства M обладает свойством 2WSP. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением случая компактного фазового пространства, поэтому мы будем рассматривать лишь свойство 1WSP и обозначать его через WSP.

Обозначим через $\omega(p)$ ω-предельное множество траектории $O(p, f)$, а через $\omega(\xi)$ — множество всех предельных точек последовательности $\xi = \{x_k \mid k \in \mathbf{Z}_{>0}\}$.

В работе [6] введено следующее определение. Будем говорить, что для f выполняется орбитальное предельное свойство отслеживания OLmSP, если для любой последовательности $\xi = \{x_k\}$, удовлетворяющей условию (1.1), найдется такая точка $p \in M$, что

$$\omega(\xi) = \omega(p).$$

Нетрудно видеть, что LmSP $\subset$ OLmSP.

Как и в случае обычных свойств отслеживания, исходя из определения OLmSP, можно ввести два слабых предельных свойства отслеживания.

Будем говорить, что для f выполняется первое слабое предельное свойство отслеживания 1WLmSP, если для любой последовательности $\xi = \{x_k\}$, удовлетворяющей условию (1.1), найдется такая точка $p \in M$, что

$$\omega(\xi) \subset \omega(p). \tag{1.2}$$

Это свойство было введено в работе [6], где оно было названо слабым предельным свойством отслежвания.

Будем говорить, что для f выполняется второе слабое предельное свойство отслеживания 2WLmSP, если для любой последовательности $\xi = \{x_k\}$, удовлетворяющей условию (1.1), найдется такая точка $p \in M$, что

$$\omega(p) \subset \omega(\xi). \tag{1.3}$$

Обозначим через $O_+(p, f)$ положительную полутраекторию точки $p \in M$, т. е. множество $\{f^k(p) \mid k \in \mathbf{Z}_{>0}\}$.

Покажем, что в случае компактного фазового пространства, так же, как и свойство 2WSP, свойство 2WLmSP выполняется для любого гомеоморфизма f.

Утверждение 1. *Динамическая система f на компактном метрическом пространстве M обладает свойством* 2WLmSP.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную последовательность ξ, удовлетворяющую условию (1.1). По теореме Больцано-Вейерштрасса найдется точка $p \in \omega(\xi)$. Это значит, что существует такая последовательность $\{n_k\}$, что

$$\operatorname{dist}(x_{n_k}, p) \longrightarrow 0, \quad k \to \infty.$$

Но тогда и

$$\operatorname{dist}(f(x_{n_k}), f(p)) \longrightarrow 0, \quad k \to \infty.$$

Используя это соотношение и соотношение (1.1) заключаем, что $f(p) \in \omega(\xi)$. Рассуждая по индукции, мы видим, что верно включение $O_+(f, p) \subset \omega(\xi)$. Следовательно, выполняется условие (1.3). Утверждение 1 доказано.

Напомним, что мы рассматриваем случай компактного метрического пространства M. В силу утверждения 1, любой гомеоморфизм f пространства M обладает свойством 2WLmSP, поэтому мы будем рассматривать лишь свойство 1WLmSP и обозначать его через WLmSP.

Наряду с LmSP, можно рассматривать и его "отрицательный" аналог Lm_SP.

Будем говорить, что f обладает свойством Lm_SP, если для любой такой последовательности $\xi = \{x_k \in M \mid k \in \mathbf{Z}_{<0}\}$, что

$$\operatorname{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) \longrightarrow 0, \quad k \to -\infty, \tag{1.4}$$

найдется такая точка $p \in M$, что

$$\operatorname{dist}(f^k(p), x_k) \longrightarrow 0, \quad k \to -\infty.$$

Так же, как и в случае свойства LmSP, существуют два способа определения слабого Lm_SP.

Будем говорить, что f обладает свойством 1WLm_SP, если для любой последовательности ξ, удовлетворяющей условию (1.4), найдется такая точка $p \in M$, что

$$\alpha(\xi) \subset \alpha(p), \tag{1.5}$$

где $\alpha(p)$ — α-предельное множество траектории $O(p, f)$, а $\alpha(\xi)$ — множество всех предельных точек последовательности $\xi = \{x_k \mid k \in \mathbf{Z}_{<0}\}$.

Будем говорить, что f обладает свойством 2WLm_SP, если для любой последовательности $\xi = \{x_k\}$, удовлетворяющей условию (1.4), найдется такая точка $p \in M$, что

$$\alpha(p) \subset \alpha(\xi).$$

Нетрудно видеть, что для свойства 2WLm_SP имеет место аналог утверждения 1. Поэтому мы будем рассматривать лишь свойство 1WLm_SP и обозначать его через WLm_SP.

2 WLmSP $\neq$ WLm_SP.

Покажем, что свойства WLmSP и WLm_SP различны. Приведем пример гомеоморфизма $f \in \mathrm{WLmSP} \setminus \mathrm{WLm\_SP}$.

Пример. Пусть M — двумерная сфера $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ с метрикой, индуцированной из $\mathbf{R}^3$.

Введем следующие обозначения:

$$S := \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad u_1 := (0, 0, 1), \quad u_2 := (0, 0, -1).$$

Рассмотрим гомеоморфизм f сферы M, обладающий следующими свойствами:

а) множество всех неподвижных точек f совпадает с $\{u_1\} \cup \{u_2\} \cup S$;

б) для любой точки $p = (x, y, z) \in M$:

$$\omega(p) = S,\ \alpha(p) = u_1 \text{ при } 0 < z < 1,$$

$$\omega(p) = S,\ \alpha(p) = u_2 \text{ при } -1 < z < 0;$$

в) если координаты образа точки $p = (x, y, z)$ под действием гомеоморфизма f обозначены через $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, то для любых двух точек (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in M$ выполнены неравенства:

$$0 < \overline{z}_1 < \overline{z}_2 < 1, \text{ если } 0 < z_1 < z_2 < 1,$$

$$-1 < \overline{z}_2 < \overline{z}_1 < 0, \text{ если } -1 < z_2 < z_1 < 0.$$

Покажем, что $f \notin$ WLm_SP.

Определим числовую последовательность $\{\varphi_k\}_{k \le 0}$ следующим образом:

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_k = \varphi_{k+1} - \frac{1}{k} \pmod{2\pi}; \quad k < 0,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Рассмотрим последовательность $\xi = \{x_k\} \subset M$ с $x_k = (\cos\varphi_k, \sin\varphi_k, 0)$. Легко видеть, что для последовательности ξ выполнено условие (1.4).

По построению, последовательность $\{\varphi_k\}$ плотна в отрезке $[0, 2\pi]$, следовательно, последовательность ξ плотна в множестве S, т. е. $\alpha(\xi) = S$. В силу условий а) и б), не существует такой точки $p \in M$, что $\alpha(p) \supset S$. Таким образом, включение (1.5) не выполнено ни для какой точки $p \in M$. Следовательно, $f \notin$ WLm_SP.

Покажем, что $f \in$ WLmSP. Рассмотрим произвольную последовательность $\xi = \{x_k \in M \mid k \ge 0\}$, удовлетворяющую условию (1.1). Найдется такое число N, что для любого числа $n > N$ выполняется неравенство

$$\operatorname{dist}(x_{n+1}, f(x_n)) < \frac{\sqrt{2}}{3}. \tag{2.6}$$

Заметим, что фактически в утверждении 1 было доказано, что в случае компактного пространства M из включения $p \in \omega(\xi)$ следует включение (1.3). Таким образом, в силу условия б) выполняется включение

$$\omega(\xi) \subset \{u_1\} \cup \{u_2\} \cup S. \tag{2.7}$$

Легко видеть, что возможны следующие четыре случая:

$\underline{1}.^0$ $\omega(\xi) \subseteq S$. Легко видеть, что тогда включение (1.2) выполняется, например, для точки $p := \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\underline{2}.^0$ $\omega(\xi) = u_1$ (или $\omega(\xi) = u_2$). В этом случае включение (1.2) выполняется для точки $p := u_1$ ($p := u_2$).

$\underline{3}.^0$ $\omega(\xi) = \{u_1\} \cup \{u_2\}$. В этом случае найдется такое число $n > N$, что

$$x_n \in N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_1\right), \quad x_{n+1} \notin N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_1\right). \tag{2.8}$$

В силу условия в),

$$f(x_n) \in N\left(\sqrt{2}, u_1\right). \tag{2.9}$$

Используя соотношения (2.6), (2.8) и (2.9), мы получаем, что

$$x_{n+1} \notin N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_1\right) \cup N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_2\right).$$

Так как число $n > N$ произвольно, некоторая подпоследовательность последовательности $\xi = \{x_k\}$ содержится в множестве $M \setminus \left(N\left(\sqrt{2}/3, u_1\right) \cup N\left(\sqrt{2}/3, u_2\right)\right)$. Следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса,

$$\omega(\xi) \cap M \setminus \left(N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_1\right) \cup N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_2\right)\right) \neq \varnothing,$$

что противоречит нашим предположениям. Таким образом, этот случай невозможен.

$\underline{4}.^0$ $\omega(\xi) \cap S \neq \varnothing$ и $\omega(\xi) \cap (\{u_1\} \cup \{u_2\}) \neq \varnothing$. В этом случае найдется такое число $n > N$, что

$$x_n \in N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, S\right), \quad x_{n+1} \notin N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, S\right). \tag{2.10}$$

В силу условия в),

$$f(x_n) \in N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, S\right). \tag{2.11}$$

Используя соотношения (2.6), (2.10) и (2.11), мы получаем, что

$$x_{n+1} \notin N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, S\right) \cup N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_1\right) \cup N\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, u_2\right).$$

Так как число $n > N$ было выбрано произвольным, некоторая подпоследовательность последовательности $\xi = \{x_k\}$ содержится в компакте $M \backslash (N(\sqrt{2}/3, S) \cup N(\sqrt{2}/3, u_1) \cup N(\sqrt{2}/3, u_2))$. Применяя теорему Больцано-Вейерштрасса, мы получаем противоречие с соотношением (2.7). Таким образом, этот случай невозможен.

Итак, для любой последовательности ξ, удовлетворяющей условию (1.1), мы построили точку $p \in M$, для которой выполняется включение (1.2). Следовательно, $f \in \mathrm{WLmSP}$.

Замечание: Аналогично можно построить гомеоморфизм $f \in \mathrm{WLm\_SP} \backslash \mathrm{WLmSP}$.

3 Формулировка и доказательство основного результата.

Пусть M — гладкое замкнутое 2-мерное многообразие. По теореме Уитни, существует вложение гладкого замкнутого n-мерного многообразия в евклидово пространство достаточно большой размерности. Таким образом, можно считать, что M является гладким подмногообразием некоторого евклидова пространства $\mathbf{R}^l$ и метрика на M индуцирована из $\mathbf{R}^l$.

Как обычно, обозначим через $\mathrm{Diff}^1(M)$ множество всех диффеоморфизмов многообразия M. Пусть $f, g \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Определим метрику на $\mathrm{Diff}^1(M)$ следующим образом:

$$\rho(f, g) := \max_{p \in M}\left(\operatorname{dist}(f(p), g(p)) + \max_{v \in T_pM,\ |v|=1} |Df(p)v - Dg(p)v|\right)$$

(Мы обозначаем через T_pM касательное пространство в точке p. Разность между векторами $Df(p)v$ и $Dg(p)v$ корректно определена, так как они принадлежат R^l.)

Топология, порожденная этой метрикой, называется C^1-топологией. Можно доказать, что в C^1-топологии пространство $\mathrm{Diff}^1(M)$ будет полным метрическим пространством.

Пусть P — некоторое свойство диффеоморфизмов. Обозначим через $\mathrm{Int}^1(P)$ внутренность множества P относительно C^1-топологии.

Пусть p — периодическая точка диффеоморфизма f периода m. Как обычно, будем называть точку p гиперболической, если у матрицы $Df^m(p)$ нет собственных чисел, по модулю равных единице. Будем говорить, что диффеоморфизм f обладает свойством HP, если все его периодические точки гиперболические.

Пилюгин доказал (см. [6]), что $\mathrm{Int}^1(\mathrm{LmSP}) \subset \mathrm{Int}^1(\mathrm{HP})$. В статье Сакая [7] доказывается, что в случае двумерного многообразия M выполняется включение $\mathrm{Int}^1(\mathrm{WSP}) \subset \mathrm{Int}^1(\mathrm{HP})$. Мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Если M — двумерное замкнутое гладкое многообразие, то* $\mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP}) \subset \mathrm{Int}^1(\mathrm{HP})$.

Замечание 1. Хаяши и Аоки доказали, что $\mathrm{Int}^1(\mathrm{HP}) \subset \Omega\mathrm{S}$ (см. [8, 9]), где $\Omega\mathrm{S}$ — это множество Ω-устойчивых диффеоморфизмов. Пилюгин доказал (см. [6]), что $\Omega\mathrm{S} \subset \mathrm{LmSP} \subset \mathrm{WLmSP}$. Так как множество $\Omega\mathrm{S}$ открыто в C^1-топологии, из сформулированной выше теоремы следует, что в случае двумерного замкнутого гладкого многообразия M выполняется равенство $\mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP}) = \Omega\mathrm{S}$.

Замечание 2. Сформулированная теорема не обобщается на случай многообразий более высокой размерности.

Как обычно, обозначим через $\Omega(f)$ множество неблуждающих точек диффеоморфизма f. В статье [10] Мане построил такую подобласть G множества диффеоморфизмов 3-мерного тора $\mathbf{T}^3$, что любой диффеоморфизм $f \in G$ имеет всюду плотную в $\mathbf{T}^3$ траекторию, $\Omega(f) = \mathbf{T}^3$, но f не является Ω-устойчивым. Известно (см. [11]), что если отображение f является гомеоморфизмом компактного метрического пространства X и $\Omega(f) = X$, то из существования плотной траектории следует существование плотной положительной полутраектории. Таким образом, $G \subset \mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP})\backslash\Omega\mathrm{S}$, следовательно, $G \subset \mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP})\backslash\mathrm{Int}^1(\mathrm{HP})$.

Замечание 3. Как будет видно из доказательства, для WLm_SP справедлива аналогичная теорема.

Доказательство сформулированной теоремы основывается на конструкциях, близких к использованным в статье [6].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы будем доказывать теорему от противного. Предположим, что существует диффеоморфизм $g \in \mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP}) \setminus \mathrm{Int}^1(\mathrm{HP})$. Тогда найдется такая окрестность W диффеоморфизма g в C^1-топологии, что $W \subset \mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP})$ и в W существует диффеоморфизм f с негиперболической точкой покоя p. Пусть m — период точки p, обозначим через p_j точки $f^j(p)$, $j = 0, \ldots, m-1$. Так как точка p негиперболическая, у матрицы $Df^m(p)$ существует собственное число λ, по модулю равное единице.

Дальнейшее доказательство состоит из разбора следующих двух случаев.

Случай I. Число λ вещественно.
Выберем диффеоморфизм $h \in W$, обладающий следующими свойствами:

(h1) $p_j = h^j(p)$, $0 \leq j \leq m-1$, $p = h^m(p)$ (т. е. точка p периодическая с периодом m для диффеоморфизма h);

(h2) для собственных чисел λ и μ матрицы $Dh^m(p)$ выполнены следующие соотношения: $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $|\lambda| = 1$, $|\mu| \neq 1$;

(h3) существуют дизъюнктные окрестности $U_0, \ldots, U_{m-1}$ точек $p_0, \ldots, p_{m-1}$ с локальными координатами $y_j = (v_j, w_j)$, $0 \leq j \leq m-1$, обладающие следующими свойствами:

(h3.1) $p_j = (0,0)$ в системе координат y_j;

(h3.2) существует такое число $a > 0$ (не зависящее от индекса j), что для множеств

$$V_j = \{(v_j, w_j) \mid |v_j| \leq a, \ |w_j| \leq a\}$$

выполняются включения

$$V_j \subset U_j, \quad h(V_j) \subset U_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq m-1$$

(как обычно, мы полагаем $U_m = U_0$);

(h3.3) Сужение $h_j = h|_{V_j}$ определяется формулой

$$h_j(v_j, w_j) = (r_j v_j, s_j w_j) \text{ для } (v_j, w_j) \in V_j, \quad 0 \leq j \leq m-1,$$

где $r_j, s_j \in \mathbf{R}$, $r_0 \cdots r_{m-1} = \lambda$, $s_0 \cdots s_{m-1} = \mu$.

Таким образом, мы предположили, что диффеоморфизм h линеен в малых окрестностях точек p_j и у матрицы $Dh^m(p)$ одно из собственных чисел лежит на единичной окружности, а другое не лежит на ней. Ясно, что этого всегда можно добиться сколь угодно C^1-малым возмущением диффеоморфизма f.

Возможны следующие два подслучая:

а) $|\mu| > 1$.

Выберем число $c \in (0, a/3)$ и рассмотрим отображение $F : M \mapsto M$, совпадающее с диффеоморфизмом h вне множества V_0, а внутри V_0 определяемое следующей формулой:

$$F(v_0, w_0) = (r_0 t(v_0), s_0 w_0)\,, \quad (v_0, w_0) \in V_0, \tag{3.12}$$

где $t(v)$ — непрерывно-дифференцируемая функция, обладающая следующими свойствами:

(t1) $t(v) = v$ при $|v| \le c$ или $|v| \ge 3c$,

(t2) $|t(v)| > |v|$ при $c < |v| < 3c$.

Очевидно, что при достаточно малом c найдется непрерывно-дифференцируемая функция $t(v)$, обладающая свойствами (t1) и (t2), для которой соответствующее отображение F является диффеоморфизмом, лежащим в W, и выполняется включение $F(V_0) \subset U_1$.

Рассмотрим компакты

$$A_0 = \{(v_0, 0) \in V_0 \mid |v_0| \le c\} \text{ и } A = A_0 \cup F(A_0) \cup \ldots \cup F^{m-1}(A_0).$$

Докажем, что компакт A обладает следующими свойствами:

(r1) он инвариантен относительно диффеоморфизма F;

(r2) для любой окрестности U компакта A найдется такая окрестность V, что $F^{-k}(V) \subset U$ при $k \in \mathbf{Z}_{\ge 0}$;

(r3) существует такая окрестность Δ компакта A, что $F^k(q) \longrightarrow A$ при $k \to -\infty$ для любой точки $q \in \Delta$.

Компакт A, обладающий свойствами (r1)–(r3), называется репеллером.

По построению диффеоморфизма F,

$$F^m(A_0) = \{(\lambda v, 0) \mid |v| \le c\} = \{(v, 0) \mid |v| \le c\} = A_0.$$

Следовательно, для компакта A выполняется свойство (r1).

Докажем, что для компакта A выполняется свойство (r2).
Без ограничения общности можно считать, что множество U имеет следующий вид:

$$U = \bigcup_{j=0}^{m-1} \left\{ (v_j, w_j) \in V_j \mid |v_j| < d_1, |w_j| < d_2 \right\}.$$

Рассмотрим множество

$$\Delta = \bigcup_{j=0}^{m-1} \left\{ (v_j, w_j) \in V_j \mid |v_j| < 2c, |w_j| < a \right\}.$$

Так как нас интересуют сколь угодно малые окрестности U, будем считать, что $U \subset \Delta$.

Определим окрестность V следующим образом:

$$V = U \cap F(U) \cap \ldots \cap F^{m-1}(U).$$

Фиксируем произвольные числа $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ и $j \in \{0, \ldots, m-1\}$. Так как выполняются свойства (t1), (t2) и

$$F^{km}(v, w) = \left(\lambda^k t^k(v), \mu^k w\right), \quad (v, w) \in U,$$

выполняется включение

$$U \subset F^{km}(U).$$

Следовательно, имеют место включения

$$V \subset F^j(U) \subset F^{km+j}(U).$$

В силу произвольности выбора чисел k и j, выполняется свойство (r2).

Нетрудно видеть, что, по построению диффеоморфизма F и функции t, для определенной выше окрестности Δ и компакта A выполняется свойство (r3).

Таким образом, компакт A является репеллером.
Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Если A — репеллер для диффеоморфизма F и существует такая точка y, что $\omega(y) \cap A \neq 0$, то $y \in A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о (утверждения 2). Чтобы достигнуть противоречия, предположим, что $y \notin A$. Тогда найдется окрестность U компакта A, не содержащая точку y. Выберем по окрестности U окрестность V из свойства (r2).

По условию, найдется такой номер $k \in \mathbf{N}$, что $F^k(y) \in V$. Тогда по свойству (r2),

$$y \in F^{-k}(V) \subset U,$$

что противоречит нашим предположениям.

Следовательно, $y \in A$. Утверждение 2 доказано.

Построим последовательность $\{x_k\}_{k\geq 0} \subset A_0$ следующим образом:
<u>шаг 1</u> : $x_0 = (-c, 0),\ x_1 = (0, 0),\ x_2 = (c, 0)$;
<u>шаг 2</u> : $x_3 = (c, 0),\ x_4 = (c/2, 0),\ x_5 = (0, 0),\ x_6 = (-c/2, 0),\ x_7 = (-c, 0)$;
и т. д.
На k-м шаге мы "проходим" все точки вида

$$\left(\frac{lc}{2^{k-1}}, 0\right), \quad l \in \left\{-2^{k-1}, \dots, 2^{k-1}\right\},$$

после каждого шага меняя направление обхода на противоположное.

Рассмотрим последовательность

$$\xi = \{y_k\}_{k\geq 0} \subset A, \quad y_k = F^k(x_k).$$

Заметим, что

$$\operatorname{dist}(y_{k+1}, F(y_k)) = \operatorname{dist}(F^{k+1}(x_k), F^{k+1}(x_{k+1})) =$$

$$= \operatorname{dist}(x_{k+1}, x_k) \longrightarrow 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

т. е. для последовательности ξ выполняется условие (1.1).

Так как $F \in \mathrm{WLmSP}$, найдется такая точка $y \in M$, что

$$\omega(y) \supset \omega(\xi). \tag{3.13}$$

По построению, $\omega(\xi) = A$. Таким образом, мы находимся в условиях утверждения 2. Следовательно, $y \in A$.

По построению множества A, найдется такое число $|v| \leq c$, что

$$y = F^j(v, 0), \quad \text{где } 0 \leq j \leq m - 1.$$

Тогда

$$F^{km+j}(y) = (\lambda^k t^k(v), 0) = (\lambda^k v, 0), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Мы видим, что траектория $O(y, f)$ состоит не более чем из $2m$ точек. (Напомним, что $\lambda = \pm 1$.) Следовательно, $\omega(\xi) = A \not\subset \omega(y)$, т. е. мы получили противоречие с включением (3.13).

б) $|\mu| < 1$.

Определим множества

$$A_0 = \left\{ (v_0, 0) \in V_0 \mid |v_0| \le \frac{a}{2} \right\}, \quad A = A_0 \cup h(A_0) \cup \ldots \cup h^{m-1}(A_0)$$

$$\text{и } V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_{m-1}.$$

Так же, как в пункте а), построим последовательность $\xi = \{y_k\}$, плотную в компакте A. Так же, как в пункте а), доказывается, что для последовательности ξ выполняется условие (1.1). Так как $h \in \mathrm{WLmSP}$, найдется точка $y \in M$, для которой выполняется включение (3.13).

Без ограничения общности будем считать, что $y \in V$. Тогда найдутся такие $|v| \le a$ и $|w| \le a$, что $y = (v, w)$. Следовательно,

$$h^{2mk}(y) = \left(\lambda^{2k} v, \mu^{2k} w\right) = \left(v, \mu^{2k} w\right) \longrightarrow (v, 0)\,, \quad k \to \infty.$$

Мы видим, что множество $\omega(y)$ состоит не более чем из $2m$ точек. Следовательно, $\omega(\xi) = A \not\subset \omega(y)$, т. е. мы получили противоречие с включением (3.13).

Случай II. λ — комплексное число.

Выберем такой диффеоморфизм $h \in W$, что собственные числа λ и $\overline{\lambda}$ матрицы $Dh^m(p)$ являются корнями степени ν из 1 и выполняются свойства (h1) и (h3), причем, свойство (h3.3) модифицируется следующим образом:

(h3.3') если $y_j = (\rho_j \cos(\theta_j), \rho_j \sin(\theta_j))$, где $\rho_j \ge 0$, $\theta_j \in [0, 2\pi)$, то сужение $h_j = h|_{V_j}$ определяется по следующей формуле:

$$h_j(y_j) = \left(r_j \rho_j \cos\left(\theta_j + \chi_j\right), r_j \rho_j \sin(\theta_j + \chi_j)\right),$$

где

$$(r_0 \cdot \ldots \cdot r_{m-1})^\nu = 1, \quad \nu(\chi_0 + \ldots + \chi_{m-1}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2\pi), \quad 0 \le j \le m-1.$$

Таким образом, мы предположили, что диффеоморфизм h линеен в малых окрестностях точек p_j и собственные числа матрицы $Dh^m(p)$ являются корнями из единицы. Ясно, что этого всегда можно добиться сколь угодно C^1-малым возмущением диффеоморфизма f.

Так же, как в пункте б), определим множество V. Рассмотрим компакты

$$A_0 = \left\{(\rho_0, 0)\in V_0 \mid |\rho_0| \leq \frac{a}{2}\right\} \text{ и } A = A_0 \cup h(A_0) \cup \ldots \cup h^{\nu m-1}(A_0).$$

Так же, как и в пункте а), построим последовательность $\xi = \{y_k\}_{k\geq 0}$, плотную в компакте A. Так же, как и в пункте а) доказывается, что для последовательности ξ выполняется свойство (1.1). Так как $h\in \mathrm{WLmSP}$, найдется точка $y\in M$, для которой выполняется включение (3.13).

Без ограничения общности будем считать, что $y \in V$. Тогда найдутся такие $0 \leq \rho_j \leq a$ и $\theta_j \in [0, 2\pi)$, что $y = (\rho_j \cos(\theta_j), \rho_j \sin(\theta_j))$.

Следовательно, в силу свойства (h3.3$'$),

$$h^{mk\nu}(y) = (\rho_j \cos(\theta_j), \rho_j \sin(\theta_j)), \quad k\in \mathbf{N}.$$

Мы видим, что траектория $O(y, h)$ состоит не более чем из $m\nu$ точек. Следовательно, $A = \omega(\xi) \not\subset \omega(y)$, что противоречит включению (3.13).

Итак, во всех возможных случаях мы пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение неверно, и $\mathrm{Int}^1(\mathrm{WLmSP})\backslash\mathrm{Int}^1(\mathrm{HP}) = \varnothing$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Pilyugin S.Yu.* Shadowing in Dynamical Systems. Lecture Notes in Math., 1999. Vol. 1706. Springer-Verlag, Berlin.

[2] *Palmer K.* Shadowing in Dynamical Systems. Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] *Eirola T., Nevanlinna O., Pilyugin S.Yu.* Limit shadowing property. Numer. Funct. Anal. Optim., 1997. Vol. 18, pp. 75–92.

[4] *Corless R.M., Pilyugin S.Yu.* Approximate and real trajectories for generic dynamical systems. J. Math. Anal. Appl., 1995. Vol. 189, pp. 409–423.

[5] *Pilyugin S.Yu., Rodionova A.A., Sakai K.* Orbital and weak shadowing properties. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2003. Vol. 9, pp. 287–308.

[6] *Pilyugin S.Yu.* Sets of dynamical systems with various limit shadowing properties (в печати).

[7] *Sakai K.* Diffeomorphisms with weak shadowing. Fund. Math., 2001. Vol. 168, pp. 53–75.

[8] *Hayashi S.* Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1$(M) satisfy Axiom A. Ergod. Theory Dyn. Syst., 1992. Vol. 12, pp. 233–253.

[9] *Aoki N.* The set of Axiom A diffeomorphisms with no cycle condition. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N. S.), 1992. Vol. 23, pp. 21–65.

[10] *M̃ãné R.*, Contributions to the stability conjecture. Topology, 1978. Vol. 17, pp. 383–396.

[11] *Walters P.* An Introduction to Ergodic Theory. 1982. Springer-Verlag.