ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2013
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Динамические системы на многообразиях

Отслеживание в окрестности сепаратрисы

Петров Алексей Алексеевич

al.petrov239@gmail.com

Аннотация

Рассматривается модельный пример диффеоморфизма двумерного многообразия, имеющего две неподвижные гиперболические точки, соединенные сепаратрисой. Доказывается, что в трубчатой окрестности сепаратрисы псевдотраектория, удовлетворяющая дополнительному условию на малость ошибки, может быть отслежена точной.

0 Введение

Один из первых результатов о поведении двумерного диффеоморфизма в окрестности сепаратрисы, соединяющей две гиперболические неподвижные точки, получен в [1]. В этой работе рассматриваются диффеоморфизмы двумерной поверхности, имеющие две гиперболические периодические точки, обладающие тем свойством, что устойчивое многообразие одной из них касается неустойчивого многообразия другой.

Также отметим работу [2]. В ней исследуется вопрос о наличии слабого отслеживания у Ω-устойчивого диффеоморфизма f двумерного тора, имеющего две неподвижные точки p и q. Необходимые и достаточные условия на существование слабого отслеживания выражаются в терминах арифметических соотношений между собственными числами $Df(p)$ и $Df(q)$.

В данной работе мы исследуем вопрос об отслеживаемости псевдотраекторий в трубчатой окрестности сепаратрисы. Для простоты изложения мы рассматриваем диффеоморфизм двумерной плоскости $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Хорошо известно, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $d > 0$ существует конечная d-псевдотраектория, которая расположена в трубчатой окрестности сепаратрисы и не может быть ε-отслежена точной (см., например, [3]). Однако, если предположить что пошаговая ошибка $\mathrm{dist}(f(x_n), x_{n+1})$ псевдотраектории тем меньше, чем ближе точка x_n расположена к сепаратрисе, то можно ожидать, что такая псевдотраектория отслеживается истинной. В данной работе используется подход, предложенный С. Тихомировым для исследования проблемы отслеживания в окрестности нетрансверсальных гетероклинических и гомоклинических траекторий. Он заключается в том, чтобы оценка на погрешность имела вид:

$$\mathrm{dist}(f(x_n), x_{n+1}) \le d\,\mathrm{dist}(x_n, I)^\alpha, \tag{0.1}$$

где $d, \alpha > 0$, через $I \subset \mathbb{R}^2$ обозначена сепаратриса, а расстояние от точки до множества определяется по формуле

$$\mathrm{dist}(x_n, I) = \inf\{\mathrm{dist}(x_n, x) \mid x \in I\}.$$

Отметим, что похожий подход был использован при исследовании свойства отслеживания в окрестности неизолированной неподвижной точки диффеоморфизма в работе [4].

В модельном примере (при предположении, что диффеоморфизм C^1-линеаризуем в окрестности данных двух гиперболических неподвижных точек) показано, что:

(a) при $\alpha \le 1$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что для каждого $d > 0$ существует d-псевдотраектория, удовлетворяющая условию (0.1), которая не может быть ε-отслежена точной;

(b) при $\alpha > 1$ найдутся такие $L > 0$ и $d_0 > 0$, что для любого $d \in (0, d_0)$, для каждой d-псевдотраектории, удовлетворяющей (0.1), существует точка $p \in \mathbb{R}^2$, Ld-отслеживающая данную псевдотраекторию.

1 Предположения о системе

Рассмотрим диффеоморфизм класса C^2 двумерной плоскости,

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Будем обозначать через p_x и p_y x- и y-координаты точки $p \in \mathbb{R}^2$ соответственно, т.е.

$$p = (p_x, p_y).$$

Предположим, что точки $r_1 = (0,0)$ и $r_2 = (1,0)$ — неподвижные гиперболические точки седлового типа для диффеоморфизма f. Предположим также, что найдутся окрестности V_1 и V_2 точек r_1 и r_2 соответственно, в которых диффеоморфизм f линеен, т.е.

$$f(x,y) = (\mu_1 x, \lambda_1 y), \quad (x,y) \in V_1, \tag{1.1}$$

$$f(x,y) = (\mu_2(x-1)+1, \lambda_2 y), \quad (x,y) \in V_2, \tag{1.2}$$

где $\lambda_1, \mu_2 \in (0,1)$, $\lambda_2, \mu_1 \in (1,\infty)$.

Мы предполагаем, кроме того, что

$$I = [0,1] \times \{0\} \subseteq W^u(r_1) \cap W^s(r_2), \tag{1.3}$$

т.е. отрезок I является сепаратрисой, соединяющей точки r_1 и r_2.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ мы введем метркику

$$\operatorname{dist}((x,y),(x',y')) = \max\{|x-x'|, |y-y'|\}.$$

Пусть $p \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$. Положим

$$B(p,\delta) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \operatorname{dist}((x,y),p) < \delta\}.$$

Пусть число $\nu \in (0,1)$ таково, что $B(r_i, 2\nu) \subseteq V_i$, $i = 1,2$.

Рассмотрим множество

$$V(\nu) = B(I,\nu) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\},$$

где $B(I,\nu)$ — ν-окрестность сепаратрисы. Уменьшая, если нужно, константу ν, можем считать, что если для точки

$$p \in V(\nu) \setminus B(r_1,\nu),$$

при некотором $k \in \mathbb{N}$ выполнены включения

$$f(p), \dots, f^k(p) \in V(\nu),$$

то

$$f^i(p) \notin B(r_1,\nu), \quad i = 1, \dots, k.$$

Ясно также, что при достаточно малом $\nu > 0$ найдется такое число $l \in \mathbb{N}$ (не зависящее от выбранной точки p), что если $k \geq l$, то выполнено включение

$$f^l(p) \in B(r_2, \nu).$$

Запишем f в соответствии с координатами в $\mathbb{R}^2$ в виде

$$f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)).$$

Из включения (1.3) следует, что $f(I) = I$. Таким образом,

$$(f^i)_y(x, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, l + 1, \tag{1.4}$$

для любого $x \in [0, 1]$

Поскольку отображение f дифференцируемо, то из (1.4) следует, что найдется такая константа $c_1 > 0$, что для всех $(x, y) \in V(\nu)$, таких что $x \in [0, 1]$, верны неравенства

$$|(f^i)_y(x, y)| \leq c_1|y|, \quad i = 1, \ldots, l + 1. \tag{1.5}$$

Также из (1.4) следует, что для всех $(x, y) \in V(\nu)$, таких что $x \in [0, 1]$, верны соотношения

$$\frac{\partial (f^i)_y}{\partial x}(x, 0) = 0, \quad i = 1, \ldots, l + 1. \tag{1.6}$$

Из того, что отображение f (а, следовательно, и его конечные итерации) принадлежит классу $C^2(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$, и из (1.6) следует, что найдется такая константа $\mathfrak{L} > 0$, что

$$|\frac{\partial (f^i)_y}{\partial x}(x, y)| \leq \mathfrak{L}|y|, \quad i = 1, \ldots, l + 1, \tag{1.7}$$

для всех $(x, y) \in V(\nu)$.

Кроме того, поскольку f — диффеоморфизм, то из (1.6) следует, что существует такое $c_0 > 0$, что для всех $x \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$|\frac{\partial f_y}{\partial y}(x, 0)| \geq 2c_0.$$

Уменьшая, если нужно, число ν, мы можем считать, что для всех $(x, y) \in V(\nu)$ выполнено неравенство

$$|\frac{\partial f_y}{\partial y}(x, y)| \geq c_0.$$

Уменьшая c_0, мы можем считать, что аналог последнего неравенства верен для $f^2, \ldots, f^{l+1}$, т.е.

$$|\frac{\partial (f^i)_y}{\partial y}(x,y)| \geq c_0, \quad i = 1, \ldots, l+1, \tag{1.8}$$

для всех $(x,y) \in V(\nu)$, таких что $f(x,y), \ldots, f^l(x,y) \in V(\nu)$. Кроме того, мы можем считать, что $c_0 < 1$.

Введем еще несколько обозначений. Положим

$$c_2 = \sup_{V(\nu), i=1,\ldots,l+1} |\frac{\partial (f^i)_y}{\partial y}|, \quad c_3 = \mathfrak{L}\nu + \mathfrak{L} + c_2. \tag{1.9}$$

2 Основной результат

Для формулировки основного результата нам понадобятся следующие определения.

Пусть (X, dist) — метрическое пространство, $A \subseteq X$, $h\colon X \to X$ — непрерывное отображение.

Определение 1 *Пусть $d > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что конечная последовательность $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^N$ точек в X есть d-псевдотраектория для h, если*

$$\mathrm{dist}(h(\xi_k), \xi_{k+1}) \leq d, \quad k = 0, \ldots, N-1. \tag{2.1}$$

Определение 2 *Пусть $d, \alpha > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что конечная последовательность $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^N$ точек в X есть d-псевдотраектория для h с плавающей точностью степени α относительно множества A, если*

$$\mathrm{dist}(f(\xi_k), \xi_{k+1}) \leq d\, (\mathrm{dist}(\xi_k, A))^\alpha, \quad k = 0, \ldots, N-1. \tag{2.2}$$

Определение 2 является модификацией определения 1; оно означает, что последовательность точек ξ тем больше похожа на истинную траекторию, чем ближе она к множеству A.

Дадим еще одно определение.

Определение 3 *Пусть $p \in X$, $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^N$ — конечная последовательность точек в X, а также пусть нам дано $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что точка p ε-отслеживает последовательность ξ, если*

$$\mathrm{dist}(f^i(p), \xi_i) \leq \varepsilon, \quad i = 0, \ldots, N. \tag{2.3}$$

Обычно определение 3 используется в случае, когда последовательность ξ является псевдотраекторией (см., например, [3]), однако нам будет удобно в данном тексте употребить понятие "ε-отслеживания" и в более общем смысле.

Отметим также, что в нашем случае $X = \mathbb{R}^2$, $A = I$, $h = f$, а неравенство (2.2), в случае, если $\xi \subseteq V(\nu)$, означает, что

$$\mathrm{dist}(f(\xi_i), \xi_{i+1}) \le d|y_i|^\alpha,$$

где $y_i = (\xi_i)_y$.

Теперь перейдем непосредственно к формулировке результата.

Теорема 1 *Найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $d > 0$ существует конечная d-псевдотраектория $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^N$ для f с плавающей точностью степени 1 относительно множества I, для которой не существует точки $p \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей соотношениям (2.3).*

Теорема 2 *Пусть $\alpha > 0$. Найдутся такие положительные числа L, d_0, что для любого $d \in (0, d_0)$ и для любой конечной d-псевдотраектории $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^N$ для f, лежащей в $V(\nu)$ и удовлетворяющей неравенствам*

$$|f_y(\xi_i) - (\xi_{i+1})_y| \le d|(\xi_i)_y|^{1+\alpha}, \quad i = 0, \ldots, N-1, \tag{2.4}$$

найдется точка $p \in V(\nu)$, Ld-отслеживающая ξ.

Отметим, что если последовательность $\xi = \{\xi_k\}_{k=0}^N \subseteq V(\nu)$ является d-псевдотраекторией для f с плавающей точностью степени $(1+\alpha)$ относительно I, то неравенства (2.4) выполнены автоматически. Таким образом, теорема 1 показывает, что при недостаточной точности псевдотраектории при подходе к сепаратрисе (а именно, если ошибка сравнима с расстоянием до сепаратрисы) отслеживаемость такой псевдотраектории не гарантируется. Однако если ошибка по y-координате сравнима с расстоянием до сепаратрисы в степени $(1+\alpha)$ (которая больше единицы при положительном α), а по x-координате не превосходит d, то такая псевдотраектория Ld-отслеживается, причем $L > 0$ не зависит ни от d ни от псевдотраектории ξ.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\nu}{2\mu_1}, \frac{(1-\mu_2)\nu}{2}, \frac{\nu c_1}{3c_3}, \frac{1}{12}\nu\right\}. \tag{2.5}$$

Для каждого $d > 0$ мы построим конечную d-псевдотраекторию для f с плавающей точностью степени 1 относительно I, которая не ϵ-отслеживается ни одной точкой из $\mathbb{R}^2$. Итак, пусть $d > 0$.

Рассмотрим функцию

$$\phi(d,k) = \left(1 + \frac{d}{\lambda_2}\right)^k - 1,$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Ясно, что

$$\lim_{k\to\infty} \phi(d,k) = \infty.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\phi(d,m)\lambda_1^2 \frac{c_0}{c_1}\nu > 1. \tag{2.6}$$

Положим

$$n = [m \log_{\lambda_1} \lambda_2] + [-\log_{\lambda_1} c_1] + 2, \tag{2.7}$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа $a \in \mathbb{R}$.

Опишем построение псевдотраектории.

Пусть

$$\xi_0 = (\frac{\nu}{\mu_1^{n+1}}, \frac{\nu}{2}).$$

Для $i = 1, \dots, n+l$ положим $\xi_i = f^i(\xi_0)$ (напомним, что константа l была определена во введении).

Ясно, что $\xi_n \in B(r_1,\nu)$, а $\xi_{n+1} \notin B(r_1,\nu)$, так как

$$x_n = (\xi_n)_x = \frac{\nu}{\mu_1}.$$

Поскольку $I = f(I) = f^2(I) = \dots = f^{l+1}(I)$, то для точек $q \in V(\nu)$, достаточно близких к множеству I, выполнены включения

$$f(q), \dots, f^{l+1}(q) \in V(\nu).$$

Поэтому, увеличивая, если нужно, m и переопределяя в соответствии с формулой (2.7) n, можем считать, что $\xi_{n+l} \in B(r_2,\nu)$.

Положим

$$\xi_{n+l+j+1} = f(\xi_{n+l+j}) + (0, dy_{n+l+j}), \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Очевидно, что построенная псевдотраектория $\xi = \{\xi_i\}_{i=0}^{n+m+l}$ является d-псевдотраекторией для f с плавающей точностью степени 1 относительно I.

Далее, мы покажем, что при нашем выборе n, m найдется такое натуральное $j_0 < m$, что

$$\xi_{n+l+j_0} \in B(r_2, \nu), \quad \xi_{n+l+j_0+1} \notin B(r_2, \nu),$$

откуда в частности следует, что $y_{n+l+j_0+1} = (\xi_{n+l+j_0+1})_y \geq \nu$. Кроме того, рассуждая от противного и предполагая, что найдется точка $p \in \mathbb{R}^2$, ε-отслеживающая построенную псевдотраекторию ξ, мы покажем, что выполнено неравенство

$$(f^{n+l+j_0+1}(p))_y \leq \frac{5}{6}\nu,$$

откуда, учитывая (2.5), мы приходим к противоречию, и, таким образом, доказательство теоремы будет закончено.

Введем обозначения

$$\xi_k = (x_k, y_k), \quad k = 0, \dots, n+l+m.$$

Из (1.5) следует, что

$$(f^m(\xi_{n+l}))_y = \lambda_2^m y_{n+l} \leq \lambda_2^m c_1 |y_n| = \lambda_2^m c_1 \lambda_1^n \frac{\nu}{2}, \tag{2.8}$$

но из (2.7) вытекает, что $\lambda_2^m c_1 \lambda_1^n \leq 1$, откуда следует оценка

$$(f^m(\xi_{n+l}))_y \leq \frac{\nu}{2}. \tag{2.9}$$

Из соотношений (2.6) и (1.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} &y_{n+l+m} - (f^m(\xi_{n+l}))_y = (\lambda_2 + d)^m y_{n+l} - \lambda_2^m y_{n+l} = \\ &= ((\lambda_2 + d)^m - \lambda_2^m) y_{n+l} = ((1 + \frac{d}{\lambda_2})^m - 1)\lambda_2^m y_{n+l} \geq \\ &\geq ((1 + \frac{d}{\lambda_2})^m - 1)\lambda_2^m c_0 y_n \geq \lambda_1^{-2} \frac{c_1}{c_0 \nu} \lambda_2^m \lambda_1^n c_0 \nu \geq 1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Поскольку $\nu < 1$, то найдется такое натуральное $j_0 \leq m$, что

$$\xi_{n+l+j} \in B(r_2, \nu), \quad j = 0, \dots, j_0,$$

а $y_{n+l+j_0+1} \geq \nu$.

Предположим теперь, что найдется точка $p \in \mathbb{R}^2$, которая ε-отслеживает последовательность ξ.

Введем обозначения:

$$f^i(p) = (u_i, v_i), \quad i = 0, \dots, n+l+m.$$

Так как для $0 \le i \le n$ выполнены неравенства $\mathrm{dist}(f^i(p), \xi_i) \le \varepsilon$, то из (2.5) следует, что $f^i(p) \in B(r_1, \nu)$, для $i = 0, \dots, n$.

Таким образом, $|v_n - y_n| \le \varepsilon\lambda_1^n$. Кроме того, из (2.5) и из того, что $|u_n - x_n| = |u_n - \nu/\mu_1| \le \varepsilon$ следует, что $u_n \ge 0$.

Таким образом, применяя (1.7), получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
&|v_{n+l+1} - y_{n+l+1}| = |(f^{l+1}(x_n, y_n))_y - (f^{l+1}(u_n, v_n))_y| = \\
&= |\int_0^1 \frac{\partial (f^{l+1})_y}{\partial x}(x_n + t(u_n - x_n), y_n + t(v_n - y_n))(u_n - x_n) + \\
&+ \frac{\partial (f^{l+1})_y}{\partial y}(x_n + t(u_n - x_n), y_n + t(v_n - y_n))(v_n - y_n)dt| \le \\
&\le |x_n - u_n|\mathfrak{L}(|y_n| + |y_n - v_n|) + c_2|v_n - y_n| \le \varepsilon\mathfrak{L}(\frac{\nu}{2}\lambda_1^n + \varepsilon\lambda_1^n) + c_2\varepsilon\lambda_1^n \le \\
&\le \varepsilon\lambda_1^n c_3.
\end{aligned}$$

Кроме того, т.к. $\xi_{n+l}, \xi_{n+l+1} \in B(r_2, \nu)$, то $x_{n+l+1} \in [1-\mu_2\nu, 1]$, и поскольку $\varepsilon \le (1-\mu_2)\nu/2$, то $f^{n+l+1}(p) \in B(r_2, \nu)$.

Покажем, что $f^{n+l+1+j}(p) \in B(r_2, \nu)$, для $j = 0, \dots, m-1$. Эти включения следуют из оценки

$$\begin{aligned}
&\lambda_2^{m-1} v_{n+l+1} \le \lambda_2^m v_{n+l+1} \le \lambda_2^m (y_{n+l+1} + |v_{n+l+1} - y_{n+l+1}|) \le \\
&\le \lambda_2^m \lambda_1^n (c_1\nu/2 + \varepsilon c_3) \le \lambda_2^m \lambda_1^n (c_1\nu/2 + c_1\nu/3) \le \frac{5}{6}\nu.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь мы использовали (1.5), (2.7), и (2.5).

Кроме того, как следует из (2.11),

$$v_{n+l+j_0+1} \le \frac{5}{6}\nu,$$

что и требовалось. Таким образом, теорема доказана. $\square$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются две вспомогательные леммы.

Лемма 1 *Пусть* $\lambda \in (0,1)$, $d > 0$, $\alpha > 0$.

Положим $s_i(\alpha, \lambda) = 1 + \lambda^\alpha + \dots + \lambda^{\alpha(i-1)})$, *для* $i \in \mathbb{N}$, $s_0(\alpha, \lambda) = 0$, $s(\alpha, \lambda) = \lim_{i\to\infty} s_i(\alpha, \lambda)$.

Рассмотрим последовательности чисел $\{a_i\}_{i=0}^N, \{\delta_i\}_{i=0}^N$, *удовлетворяющие соотношениям:*

$$a_{i+1} = \lambda a_i + \delta_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$\delta_{i+1} \le d|a_i|^{1+\alpha}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Предположим, что $d > 0$ *такого, что*

$$\Big(1 + \frac{2d|a_0|^\alpha s(\alpha, \lambda)}{\lambda}\Big)^{1+\alpha} \le 2. \tag{2.12}$$

Тогда для $i = 0, \dots, N$ *справедливы неравенства*

$$|a_i - \lambda^i a_0| \le 2d|a_0|^{1+\alpha}\lambda^{i-1}s_i(\alpha, \lambda). \tag{2.13}$$

Лемма 2 *Пусть* $\lambda \in (0, 1)$, $d > 0$, $\alpha > 0$.

Пусть последовательности чисел $\{b_i\}_{i=0}^N, \{\zeta_i\}_{i=0}^N$ *удовлетворяют соотношениям:*

$$b_{i+1} = \frac{b_i}{\lambda} + \zeta_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$\zeta_{i+1} \le d|b_i|^{1+\alpha}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Предположим, что d *и* b_0 *удовлетворяют соотношениям:*

$$(1 + 2d|b_0|^\alpha s_N(-\alpha, \lambda))^{1+\alpha} \le \frac{2}{\lambda}. \tag{2.14}$$

Тогда для $i = 0, \dots, N$ *выполнены неравенства*

$$|b_i - \lambda^{-i}b_0| \le \frac{2d|b_0|^{1+\alpha}s_i(-\alpha, \lambda)}{\lambda^i}. \tag{2.15}$$

Доказательство леммы 1. Доказательство будем проводить по индукции.

Для $i = 0$ утверждение очевидно.

Индукционный переход. Нам известно, что

$$|a_i - \lambda^i a_0| \le 2d|a_0|^{\alpha+1}\lambda^{i-1}s_i(\alpha, \lambda).$$

Неравенство (2.13) для $i + 1$ следует из последовательности оценок:

$$|a_{i+1} - \lambda^{i+1}a_0| \le |a_{i+1} - \lambda a_i| + \lambda|a_i - \lambda^i a_0| = |\delta_{i+1}| + \lambda|a_i - \lambda^i a_0|, \tag{2.16}$$

$$|\delta_{i+1}| \le d|a_i|^{1+\alpha} \le d|\lambda^i|a_0| + 2d|a_0|^{\alpha+1}\lambda^{i-1}s_i(\alpha,\lambda)|^{1+\alpha} = \\ = d\lambda^i\lambda^{\alpha i}|a_0|^{1+\alpha}\big(1 + \frac{2d|a_0|^{\alpha}s_i(\alpha,\lambda)}{\lambda}\big)^{1+\alpha} \le \\ \le 2d|a_0|^{1+\alpha}\lambda^i\lambda^{i\alpha}. \tag{2.17}$$

Подставляя (2.17) в (2.16), получим неравенства

$$|a_i + 1 - \lambda^{i+1}a_0| \le 2d|a_0|^{\alpha+1}\lambda^i s_i(\alpha,\lambda) + 2d|a_0|^{1+\alpha}\lambda^i\lambda^{i\alpha} = \\ 2d|a_0|^{1+\alpha}\lambda^i s_{i+1}(\alpha,\lambda),$$

что и требовалось. Таким образом, лемма 1 доказана. $\square$.

Доказательство леммы 2.

Снова рассуждаем по индукции. Для $i = 0$ утверждение очевидно.

Индукционный переход от i к $i+1$.

Как и при доказательстве леммы 1 оцениваем

$$|b_{i+1} - \frac{b_0}{\lambda^{i+1}}| \le \frac{1}{\lambda}|\frac{b_0}{\lambda^i} - b_i| + |b_{i+1} - \frac{b_i}{\lambda}| \le \frac{2d|b_0|^{1+\alpha}s_i(-\alpha,\lambda)}{\lambda^{i+1}} + |\zeta_{i+1}|, \tag{2.18}$$

$$|\zeta_{i+1}| \le d\big(\frac{b_0}{\lambda^i} + \frac{2d|b_0|^{1+\alpha}s_i(-\alpha,\lambda)}{\lambda^i}\big)^{1+\alpha} = \\ = d\frac{|b_0|^{1+\alpha}}{\lambda^i\lambda^{i\alpha}}\big(1 + 2db_0^{\alpha}s_i(-\alpha,\lambda)\big)^{1+\alpha} \le \frac{2d|b_0|^{1+\alpha}}{\lambda^{i+1}\lambda^{n\alpha}}. \tag{2.19}$$

Подставляя (2.19) в (2.18), получаем неравенства

$$|b_{i+1} - \frac{b_0}{\lambda^{i+1}}| \le \frac{2d|b_0|^{1+\alpha}s_i(-\alpha,\lambda)}{\lambda^{i+1}} + \frac{2d|b_0|^{1+\alpha}}{\lambda^{i+1}\lambda^{n\alpha}} = \frac{2d|b_0|^{1+\alpha}s_{i+1}(-\alpha,\lambda)}{\lambda^{i+1}},$$

что и требовалось. $\square$

Доказательство теоремы 2. Фиксируем в начале такое число $d_0 > 0$, что для любой d_0-псевдотраектории

$$\{\xi_i\}_{i=0}^k \subseteq V(\nu),$$

из включения

$$\xi_0 \in V(\nu) \setminus B(r_1,\nu),$$

следует, что

$$\xi_i \notin B(r_1,\nu), \quad i = 0,\dots,k,$$

и, в случае, когда $k \ge l$,

$$\xi_{l+j} \in B(r_2, 2\nu), \quad j = 0,\dots,k-l.$$

В ходе доказательства мы будем несколько раз уменьшать число d_0.

Пусть $\{\xi_k\}_{k=0}^N \subseteq V(\nu)$ — d-псевдотраектория; предположим, что (2.4) имеет место для числа α из формулировки теоремы.

Мы будем рассматривать случай, когда $\xi_0 \in B(r_1, \nu)$, ибо в противном случае, почти вся (за исключением не более чем l первых элементов) псевдотраектория лежит в $B(r_2, 2\nu)$, и, таким образом, задача сводится к отслеживанию псевдотраектории в окрестности гиперболического множества.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}, n + m + l = N$ — такие натуральные числа, что

$$\xi_i \in B(r_1, \nu), \quad i = 0, \dots, n,$$

$$\xi_{n+l+i} \in B(r_2, 2\nu), \quad i = 0, \dots m.$$

Случай, когда либо длина псевдотраектории меньше, чем l, либо $\xi_i \notin B(r_2, 2\nu)$, $i = 0, \dots N$, тривиален, и мы его опускаем.

Мы утверждаем, что точка

$$p = (p_x, p_y) = (\lambda_1^{-n} x_n, y_0)$$

Ld-отслеживает ξ, где значение константы $L > 0$ мы установим в конце доказательства.

Введем обозначения:

$$f^i(p) = (u_i, v_i), \quad i = 0, \dots, N,$$

$$\xi_i = (x_i, y_i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Стандартная оценка для линейного растягивающего отображения дает неравенство

$$|(f^i(p))_x - x_i| \leq \frac{d\lambda_1}{(\lambda_1 - 1)}, \quad i = 0, \dots, n. \tag{2.20}$$

Уменьшая, если нужно, d_0, можем считать, что выполнено неравенство (2.12). Применяя лемму 1 к $a_i = y_i$, $i = 0, \dots, n$, $\lambda = \lambda_1$, мы получаем, что

$$|y_i - v_i| = |y_i - \lambda_1^i y_0| \leq 2d|y_0|^{1+\alpha} \lambda_1^{i-1} s_i(\alpha, \lambda_1), \quad i = 0, \dots, n. \tag{2.21}$$

Кроме того, по построению $u_n = x_n$.

Таким образом, мы можем произвести оценку

$$\begin{aligned} |v_{n+l} - (f^l(\xi_n))_y| = |(f^l(u_n, v_n))_y - (f^l(x_n, y_n))_y| \leq \\ \leq |\frac{\partial (f^l)_y}{\partial y}||v_n - y_n| \leq 2dc_4|y_0|^{1+\alpha}\lambda_1^n, \end{aligned} \tag{2.22}$$

где $c_4 = s(\alpha, \lambda_1)c_2/\lambda_1$.

Оценим теперь величину $|(f^l(\xi_n)) - y_{n+l}|$.

Для начала оценим

$$\begin{aligned}|y_n| \le |v_n| + |y_n - v_n| \le \lambda_1^n|y_0| + 2ds_n(\alpha, \lambda_1)|y_0|^{1+\alpha}\lambda_1^n \le \\ \le \lambda_1^n|y_0|c_5,\end{aligned}$$

где $c_5 = (1 + 2d_0 s(\alpha, \lambda_1)\nu^\alpha)$.

Отсюда, используя условие (2.4) получаем неравенства

$$|f_y(x_n, y_n) - y_{n+1}| \le d(\lambda_1^n|y_0|c_5)^{1+\alpha} \le d\lambda_1^n|y_0|c_5^{1+\alpha}, \tag{2.23}$$

и, как следствие, неравенства

$$\begin{aligned}|f_y(\xi_n)| \le |f_y(x_n, y_n)| + |f_y(x_n, y_n) - y_{n+1}| \le \\ \le c_1|y_n| + d\lambda_1^n|y_0|c_5^{1+\alpha} \le 2c_1\lambda_1^n|y_0|,\end{aligned} \tag{2.24}$$

при $d_0 \le c_1/c_5^{1+\alpha}$ (снова уменьшаем d_0, если это не так).

Вместе с (2.23) оценка (2.24) дает неравенства

$$|y_{n+1}| \le |f_y(\xi_n)| + |f_y(\xi_n) - y_{n+1}| \le 3c_1\lambda_1^n|y_0|. \tag{2.25}$$

Кроме того, из определения d-псевдотраектории непосредственно следует, что

$$|f_x(\xi_n) - x_{n+1}| \le d. \tag{2.26}$$

Таким образом, из (1.7), (1.9), (2.21), (2.25) и (2.26) следует, что

$$\begin{aligned}|(f^2(\xi_n))_y - y_{n+2}| \le |(f(f(\xi_n)))_y - (f(\xi_{n+1}))_y| + |f_y(\xi_{n+1}) - y_{n+2}| = \\ = |f_y(f_x(\xi_n), f_y(\xi_n)) - f_y(x_{n+1}, y_{n+1})| + |f_y(\xi_{n+1}) - y_{n+2}| = \\ = |f_y(f_x(\xi_n), f_y(\xi_n)) - f_y(x_{n+1}, f_y(\xi_n))| + \\ + |f_y(x_{n+1}, f_y(\xi_n)) - f_y(x_{n+1}, y_{n+1})| + \\ + |f_y(\xi_{n+1}) - y_{n+2}| \le \\ \le d\mathfrak{L}2c_1\lambda_1^n|y_0| + c_2 d\lambda_1^n|y_0|c_5^{1+\alpha} + d(3c_1\lambda_1^n|y_0|)^{1+\alpha} \le dc_6\lambda_1^n|y_0|,\end{aligned}$$

где константа $c_6 > 0$ зависит только от $\mathfrak{L}, c_1, c_2$ и c_5.

Используя (1.5) и (2.24), мы видим, что

$$|(f^2(\xi_n))_y| \le c_1|f_y(\xi_n)| \le 2c_1^2\lambda_1^n|y_0|.$$

Теперь, так же как и раньше, оценим

$$|y_{n+2}| \le |f_y(f(\xi_n))| + |f_y(f(\xi_n)) - y_{n+2}| \le c_7\lambda_1^n|y_0|,$$

где константа $c_7 > 0$ зависит от $\mathfrak{L}, c_1, c_2, c_5$ и c_6.

Продолжая эту последовательность оценок, мы, наконец, получим неравенства

$$|(f^i(\xi_n))_y - y_{n+i}| \le dE\lambda_1^n|y_0|, \quad i = 0, \dots, l, \tag{2.27}$$

$$|y_{n+i}| \le F\lambda_1^n|y_0|, \quad i = 0, \dots, l, \tag{2.28}$$

где константы E, F зависят только от f (а именно, от констант $c_0, c_1, c_2, \mathfrak{L}$).

Объединяя оценки (2.22) и (2.27), мы видим, что

$$|v_{n+i} - y_{n+i}| \le dD\lambda_1^n|y_0|, \quad i = 0, \dots, l, \tag{2.29}$$

где $D > 0$ зависит только от f.

Кроме того, из (1.8) следует, что

$$|v_{n+l}| \ge c_0\lambda_1^n|y_0|. \tag{2.30}$$

Поэтому при

$$d_0 \le \frac{c_0}{2D}$$

из (2.29) и (2.30) следует неравенство

$$|y_{n+l}| \ge \frac{c_0}{2}\lambda_1^n|y_0|. \tag{2.31}$$

Пусть $m_0 \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\frac{c_0}{2}\lambda_1^n\lambda_2^{m_0}|y_0| \in [2\nu, 2\lambda_2\nu]. \tag{2.32}$$

Мы утверждаем, что при достаточно малом d_0 (как обычно, близость d_0 к нулю не зависит от псевдотраектории) $m < m_0$.

Действительно, предположим противное. Тогда для $i = 0, \dots, m_0$ выполнены неравенства $y_{n+l+i} \le \nu$.

Из нашего выбора m_0 следует, что

$$\lambda_1^{\alpha n}\lambda_2^{\alpha m_0}|y_0|^\alpha \le \frac{(4\lambda_2\nu)^\alpha}{c_0^\alpha}, \tag{2.33}$$

что, вместе с (2.28), дает оценку

$$|y_{n+l}|^\alpha s_{m_0}(-\alpha, 1/\lambda_2) \le \frac{F^\alpha(4\lambda_2\nu)^\alpha}{c_0^\alpha(\lambda_2^\alpha - 1)}. \tag{2.34}$$

Применим лемму 2 к последовательности

$$b_i = y_{n+l+i}, \quad i = 0, \dots, m_0,$$

и константам

$$\lambda = \lambda_2^{-1}, \quad N = m_0.$$

Из (2.34) следует, что найдется такое $d_0 > 0$, не зависящее от ξ, что соотношение (2.14) выполнено. Снова уменьшаем d_0, если требуется.

Как следствие из леммы 2, получаем, что

$$|y_{n+l+i} - \lambda_2^i y_{n+l}| \le \frac{2d|y_{n+l}|^{1+\alpha} s_i(-\alpha, \lambda_2^{-1})}{\lambda_2^{-i}} \le G_1 d, \tag{2.35}$$

где $G_1 > 0$ также не зависит от ξ.

Из (2.31) вытекает, что $|y_{n+l}| \ge c_0 \lambda_1^n |y_0|/2$.

Откуда из (2.32) следует что

$$|\lambda_2^{m_0} y_{n+l}| \ge \frac{c_0}{2} \lambda_1^n |y_0| \lambda_2^{m_0} \ge 2\nu.$$

Таким образом, если

$$d_0 \le \frac{\nu}{2G_1},$$

то

$$|y_{n+l+m_0}| \ge |\lambda_2^{m_0} y_{n+l}| - |\lambda_2^{m_0} - y_{n+l+m_0}| \ge \frac{3\nu}{2},$$

что противоречит тому, что $m \ge m_0$. Отсюда мы заключаем, что $m < m_0$.

Так как

$$|v_{n+l} - y_{n+l}| \le dD\lambda_1^n |y_0|$$

в силу (2.29), принимая во внимание установленное нами неравенство $m < m_0$, мы получаем из (2.35), что

$$\begin{aligned} &|v_{n+l+i} - y_{n+l+i}| \le |v_{n+l+i} - \lambda_2^i y_{n+l}| + |y_{n+l+i} - \lambda_2^i y_{n+l}| \le \\ &\le dD\lambda_1^n |y_0| \lambda_2^{m_0} + G_1 d \le G_2 d, \end{aligned} \tag{2.36}$$

где $G_2 > 0$ зависит только от f.

Таким образом, для всех $i = 0, \dots, n + l + m$, из оценок (2.21), (2.29) и (2.36) следует, что

$$|v_i - y_i| \le \max\{G_2, D, 2s(\lambda_1, \alpha)\} d. \tag{2.37}$$

Кроме того, из (2.20) и из стандартной оценки (см. [1], лемма 1.1.3) для псевдотраектории ограниченной длины (в нашем случае длина ограничена числом l, которое не зависит от исходной псевдотраектории ξ), следует, что

$$|u_i - x_i| \leq H_1 d, \quad i = 0, \dots, n + l, \tag{2.38}$$

где $H_1 > 0$ зависит только от f.

Поскольку в окрестности $B(r_2, 2\nu)$ точки r_2 отображение f_x является линейным сжимающим отображением, то также из стандартной оценки (см. [1], теорема 1.2.3) вытекает, что

$$|u_{n+l+j} - x_{n+l+j}| \leq H_2 d, \quad i = 0, \dots, m, \tag{2.39}$$

где $H_2 > 0$ не зависит от ξ.

Суммируя (2.37), (2.38), (2.39) мы получаем, что если

$$L = \max\{G_2, H_2, D, 2s(\lambda_1, \alpha)\},$$

то

$$\mathrm{dist}(f^i(p), \xi_i) \leq Ld, \quad i = 0, \dots, n + l + m,$$

что и требовалось доказать. □

Список литературы

[1] W. de Melo, *Moduli of stability for diffeomorphisms*, Topology 19 (1980) 9-21.

[2] O. Plamenevskaya, *Weak shadowing for two dimensional diffeomor phisms*, Vestnik St. Petersburg Univ. Math, 31, 49–56 (1999).

[3] S. Yu. Pilyugin, *Shadowing in dynamical systems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer **1706** (1999).

[4] A.A. Petrov, S. Yu. Pilyugin, *Shadowing near nonhyperbolic fixed points*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (submitted)