ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2011
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Динамические системы на многообразиях

УДК 517

ТЕОРИЯ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ПСЕВДОТРАЕКТОРИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

С.Ю.Пилюгин

Аннотация. Обзор посвящен основным результатам теории отслеживания псевдотраекторий в динамических системах, полученным в первые 10 лет XXI века. Основные разделы: отслеживание и структурная устойчивость; C^1-внутренности множеств систем со свойствами отслеживания; свойства отслеживания, эквивалентные структурной устойчивости; проблема плотности. Библиогр. 43 назв.

Ключевые слова: динамическая система, псевдотраектория, отслеживание, структурная устойчивость

MSC: 37C50

1. Введение

Теория отслеживания траекторий в динамических системах — одна из бурно развивающихся ветвей современной глобальной теории динамических систем.

Говоря о псевдотраекториях (приближенных траекториях), чаще всего отмечают, что основной источник их возникновения — компьютерное моделирование динамических систем, при котором ошибки методов, ошибки округления и т.д. неизбежно приводят к тому, что на “выходе” исследователь получает не точную траекторию, а некоторое ее приближение.

Следует отметить, однако, что как понятие псевдотраектории, так и первые результаты, относящиеся к теории отслеживания, появились при исследовании “внутренних” задач качественной теории динамических систем. Конли широко использовал идею изучения псевдотраекторий при исследовании цепно-рекуррентных множеств, первые классические результаты об отслеживании, принадлежащие Аносову и Боуэну, также несомненно связаны с “чистой” теорией динамических систем.

Современная теория отслеживания развивалась на мощном фундаменте теории структурной устойчивости, на наш взгляд, основного раздела глобальной теории динамических систем во второй половине XX века. Не случайно базовыми понятиями в теории отслеживания явились понятия гиперболичности и трансверсальности, ключевые для теории структурной устойчивости.

Итоги развития теории отслеживания псевдотраекторий к концу XX в. были подведены в двух монографиях — книгах автора [1] и Палмера [2], вышедших практически одновременно.

Несмотря на почти буквальное совпадение названий, книги [1] и [2] существенно различны по подбору материала. В то время как в книге [1] автор старался дать как можно более широкий обзор методов и результатов теории отслеживания, книга [2] в основном посвящена применению отслеживания к изучению сложных динамических структур, порождаемых трансверсальными гомоклиническими траекториями, а также задаче о теоретическом обосновании результатов численного моделирования.

За первые 10 лет XXI века в теории отслеживания псевдотраекторий получено много новых и важных результатов. Цель данной статьи — дать обзор некоторых из них. Конечно, проанализировать сотни статей по отслеживанию, вышедшие за последние 10 лет, можно было бы только в обширной монографии, поэтому автор ограничивается только результатами, близкими к его собственному кругу интересов.

Отметим, что в данном обзоре мы упоминаем только результаты, относящиеся к так называемому “прямому” отслеживанию. Пареллельно развивается теория “обратного” отслеживания (это понятие впервые введено в статье Корлесса и автора [3]), о которой мы здесь не упоминаем.

В данном тексте мы используем, не давая определений, такие стандартные для специалистов в области динамических систем термины, как структурная устойчивость, Ω-устойчивость, типичные свойства и т.д. Соответствующие определения читатель может найти, например, в книге автора [4].

При работе в описываемой области теории отслеживания автору были очень полезны контакты со многими отечественными математиками: Д.В.Аносовым, В.С.Афраймовичем, Ю.С.Ильяшенко, С.Г.Крыжевичем, Г.С.Осипенко, В.А.Плиссом. Упомянем также зарубежных математиков, таких как J.Hale, H.Kocak, G.Sell (США), K.Palmer (Тайвань), W.-J.Beyn, B.Fiedler, P.Kloeden, J.Rieger, H.-O.Walther (Германия), C.Bonatti и S.Crovisier (Франция), S.Gan и L.Wen (Китай), F.Abdenur и L.Diaz (Бразилия), K.Sakai (Япония), R.Corless (Канада), J.Ombach (Польша), K.Lee (Корея), B.Garay (Венгрия), T.Eirola и O.Nevanlinna (Финляндия), J.Lewowicz (Уругвай).

Во многом помогло автору общение с его учениками: А.Катиной, А.Осиповым, О.Пламеневской, А.Родионовой, О.Таракановым и С.Тихомировым.

Поддержку исследованиям автора оказывали РФФИ (гранты 02–01–01675 и 05–01–01079); CRC701 "Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics", Univ. of Bielefeld (Германия); JSPS, grant S-0318 (Япония); The Abdus Salam ICTP, Trieste (Италия); NSC, grant 98–28U–M–002–061 (Тайвань); лаборатория им. П.Л.Чебышева (мат-мех факультет СПбГУ).

2. Свойства отслеживания

Вначале мы дадим определения основных свойств отслеживания псевдотраекторий, о которых будет идти речь в этом обзоре. Начнем со случая систем с дискретным временем.

Пусть f – гомеоморфизм метрического пространства (M, dist). Будем обозначать через $O(x, f)$ траекторию точки $x \in M$ в динамической системе, порождаемой гомеоморфизмом f (как обычно, мы не будем различать эти объекты).

Фиксируем $d > 0$. Назовем d-псевдотраекторией системы f последовательность

$$\xi = \{x_k \in M : k \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.1}$$

для которой выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) < d, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

Будем говорить, что псевдотраектория ξ ε-отслеживается точкой $x \in M$, если

$$\mathrm{dist}(f^k(x), x_k) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Говорят, что система f обладает свойством отслеживания (и пишут $f \in S_D$), если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что любая d-псевдотраектория f ε-отслеживается некоторой точкой $x \in M$. В этом и следующих определениях мы одновременно вводим как некоторое свойство, так и множество систем, обладающих этим свойством (в обозначении S_D нижний индекс показывает, что речь идет о системах с дискретным временем).

Пусть $N(a, A)$ – a-окрестность множества $A \subset M$.

Говорят, что система f обладает слабым свойством отслеживания ($f \in WS_D$), если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории ξ существует такая точка $x \in M$, что

$$\xi \subset N(\varepsilon, O(x, f)). \tag{2.4}$$

Говорят, что система f обладает орбитальным свойством отслеживания ($f \in OS_D$), если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории ξ существует такая точка $x \in M$, что

$$\mathrm{dist}_H(\overline{\xi}, \overline{O(x, f)}) < \varepsilon, \tag{2.5}$$

где dist_H – расстояние по Хаусдорфу.

Представляет интерес изучение свойств отслеживания, в которых предписывается тот или иной характер зависимости d от ε; наиболее интересны свойства, в которых такая зависимость линейна.

Говорят, что система f обладает липшицевым свойством отслеживания ($f \in LipS_D$), если существуют такие числа $L, d_0 > 0$, что для любой d-псевдотраектории ξ с $d \leqslant d_0$ найдется такая точка $x \in M$, что выполнено неравенство (2.3) с $\varepsilon = Ld$.

Неравенства (2.2) в определении d-псевдотраектории означают, что "на каждом шаге" допустима ошибка величины d.

Можно рассмотреть другой класс свойств отслеживания, в которых "пошаговые ошибки" стремятся к 0 при стремлении индекса к бесконечности [5].

Говорят, что система f обладает предельным свойством отслеживания ($f \in LimS_D$), если для любой последовательности вида (2.1), для которой выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(x_{k+1}, f(x_k)) \to 0, \quad k \to \infty, \tag{2.6}$$

найдется такая точка $x \in M$, что

$$\mathrm{dist}(f^k(x), x_k) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2.7}$$

У предельного свойства отслеживания есть "орбитальный" аналог. Обозначим через $\omega(x)$ ω-предельное множество траектории $O(x, f)$ и через $\omega(\xi)$ множество предельных точек (при $k \to \infty$) последовательности ξ вида (2.1).

Говорят, что система f обладает орбитальным предельным свойством отслеживания ($f \in OLimS_D$), если для любой последовательности вида (2.1), для которой выполнены соотношения (2.6), найдется такая точка $x \in M$, что

$$\omega(x) = \omega(\xi).$$

Наконец, можно потребовать, чтобы соотношения (2.6) выполнялись при $|k| \to \infty$. Это приводит к следующему определению.

Говорят, что система f обладает двусторонним предельным свойством отслеживания ($f \in TSLimS_D$), если существует число $d > 0$ со следующим свойством: если для d-псевдотраектории вида (2.1) выполнены соотношения (2.6) при $|k| \to \infty$, то найдется такая точка $x \in M$, что выполнены соотношения (2.7) при $|k| \to \infty$.

Еще один вид свойств отслеживания возникает, если мы накладываем какие-либо условия на последовательности ξ вида (2.1). На наш взляд, наиболее естественно в этом случае рассматривать периодические последовательности.

Будем говорить, что система f обладает периодическим свойством отслеживания ($f \in PerS_D$), если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что любая периодическая d-псевдотраектория f ε-отслеживается периодической точкой системы f (при этом не требуется, чтобы периоды последовательности ξ и точки x совпадали). Если ε зависит от d линейно (как в случае липшицевого отслеживания), говорят, что f обладает липшицевым свойством периодического отслеживания ($f \in LipPerS_D$).

Перейдем к свойствам отслеживания для систем с непрерывным временем (потоков).

Пусть $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ – поток на метрическом пространстве (M, dist).

В отличие от случая систем с дискретным временем, для потоков существует несколько (впрочем, более или менее эквивалентных) определений псевдотраектории.

Мы будем использовать следующее, наиболее распространенное, определение.

Фиксируем $d > 0$. Назовем d-псевдотраекторией потока φ отображение

$g : \mathbb{R} \to M$, для которого выполнены неравенства

$$\mathrm{dist}(\varphi(t, g(\tau)), g(t+\tau)) < d, \ \tau \in \mathbb{R}, \ |t| \leqslant 1. \tag{2.8}$$

Отметим, что мы не предполагаем, что отображение g непрерывно.

Простые примеры показывают, что в случае потока неестественно ставить задачу об отслеживании, требуя, чтобы были близки точки псевдотраектории и отслеживающей ее точной траектории, соответствующие одним и тем же моментам времени.

Возникает необходимость репараметризовать отслеживающие точные траектории. Назовем репараметризацией такой возрастающий гомеоморфизм $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $h(0) = 0$. Обозначим через Rep множество всех репараметризаций. Для $a > 0$ обозначим через $Rep(a)$ множество

$$\left\{ h \in Rep : \left| \frac{h(t) - h(s)}{t - s} - 1 \right| \leqslant a, \quad t, s \in \mathbb{R}, t \neq s \right\}.$$

Аналогами основных свойств отслеживания, определенных нами для систем с дискретным временем, являются следующие свойства. Как и выше, мы одновременно вводим и свойство, и множество потоков, обладающих этим свойством (нижний индекс F показывает, что речь идет о потоках).

Будем говорить, что поток φ обладает свойством отслеживания ($\varphi \in S_F$), если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории можно найти такие точку $x \in M$ и репараметризацию $h \in Rep(\varepsilon)$, что

$$\mathrm{dist}(\varphi(h(t), x), g(t)) < \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Будем говорить, что поток φ обладает орбитальным свойством отслеживания ($\varphi \in OrbitS_F$), если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории g существует такая точка $x \in M$, что

$$\mathrm{dist}_H(\overline{\{g(t) : \, t \in \mathbb{R}\}}, \ \overline{\{\varphi(t, x) : \, t \in \mathbb{R}\}} < \varepsilon.$$

Будем говорить, что поток φ обладает липшицевым свойством отслеживания ($\varphi \in LipS_F$), если существуют такие числа $L, d_0 > 0$, что для любой d-псевдотраектории g с $d \leqslant d_0$ найдутся такие точка $x \in M$ и репараметризация $h = Rep(Ld)$, что выполнено неравенство (2.9) с $\varepsilon = Ld$.

В случае потоков изучают еще одно свойство отслеживания, не имеющее естественного аналога для случая систем с дискретным временем.

Говорят, что поток φ обладает ориентированным свойством отслеживания ($\varphi \in OrientS_F$), если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой d-псевдотраектории g существуют такие точка $x \in M$ и репараметризация h, что выполнено неравенство (2.9) (таким образом, в этом случае мы не требуем близости h и тождественного гомеоморфизма).

Из определений немедленно следует, что выполнены следующие включения (здесь и далее имеется в виду, что фазовые пространства рассматриваемых систем совпадают):

$$LipS_D \subset S_D \subset OS_D \subset WS_D, \tag{2.10}$$

$$TSLimS_D \subset LimS_D \subset OLimS_D, \tag{2.11}$$

$$LipS_F \subset S_F \subset OrientS_F \subset OrbitS_F. \tag{2.12}$$

3. Отслеживание и структурная устойчивость

Как уже отмечалось выше, теория отслеживания псевдотраекторий тесно связана с теорией структурной устойчивости. К настоящему времени мы знаем довольно много о соотношении этих двух теорий. В этом разделе мы предполагаем, что M – гладкое замкнутое (т.е. компактное и без края) многообразие с римановой метрикой dist.

Будем обозначать через $\mathcal{S}_D$ и $\Omega\mathcal{S}_D$ множества структурно устойчивых и Ω-устойчивых диффеоморфизмов многообразия M (как уже говорилось, при выписывании соотношений, связывающих множества динамических систем, имеется в виду, что их фазовые пространства совпадают).

Мы будем рассматривать потоки, порождаемые гладкими векторными полями на M (предполагается, что как диффеоморфизмы, так и векторные поля имеют класс гладкости C^1). Будем обозначать через $\mathcal{S}_F$ и $\Omega\mathcal{S}_F$ множества структурно устойчивых и Ω-устойчивых потоков (при этом C^1-топология на пространстве потоков порождается C^1-метрикой на пространстве соответствующих векторных полей).

Достаточно давно было доказано, что структурно устойчивый диффеоморфизм обладает свойством отслеживания (т.е. $\mathcal{S}_D \subset S_D$) (см. [6–8]). Анализируя классические результаты Аносова [9] и Боуэна [10] об отслеживании в окрестности гиперболического множества, нетрудно понять, что это отслеживание липшицево. То же самое справедливо и для структурно устойчивых диффеоморфизмов:

$$\mathcal{S}_D \subset LipS_D \tag{3.1}$$

(по-видимому, впервые соотношение (3.1) было явно отмечено и доказано в книге автора [11]).

Аналогичный результат верен и в случае потоков:

$$\mathcal{S}_F \subset LipS_F \tag{3.2}$$

(это утверждение было доказано автором в [12] и потребовало разработки новой техники для преодоления трудностей, связанных с возможным наличием у потоков точек покоя).

Автор показал в [13], что

$$\mathcal{S}_D \subset TSLimS_D. \tag{3.3}$$

Из соотношений (2.10)–(2.12) и (3.1)–(3.3) следует, что структурно устойчивые системы обладают всеми свойствами отслеживания псевдотраекторий, которые были определены выше.

В то же время легко привести примеры систем, которые обладают свойством отслеживания и не являются структурно устойчивыми ($S_D \setminus \mathcal{S}_D \neq \emptyset$). Таким образом, вопрос о соотношении между структурной устойчивостью и отслеживанием не является тривиальным. Одним из эффективных подходов к решению этого вопроса явился переход к C^1-внутренностям множеств систем, обладающих различными свойствами отслеживания. Этому подходу посвящен следующий раздел обзора.

3.1. C^1-внутренности множеств систем со свойствами отслеживания

Пусть P – некоторое множество динамических систем на многообразии M. Будем обозначать через $Int^1(P)$ C^1-внутренность этого множества (в топологии пространства C^1-диффеоморфизмов в случае дискретного времени и в топологии пространства векторных полей класса C^1 в случае непрерывного времени).

Таким образом, если P – множество динамических систем, обладающих некоторым свойством, то $Int^1(P)$ – его подмножество, состоящее из систем, у которых это свойство сохраняется при C^1-малых возмущениях.

Первым из результатов теории отслеживания, использовавших переход к C^1-внутренностям, была следующая теорема, доказанная Сакаем в 1994 г.

Теорема 3.1 (Sakai [14]).

$$Int^1(S_D) = \mathcal{S}_D.$$

Эта теорема была обобщена на случай орбитального свойства отслеживания.

Теорема 3.2 (Pilyugin, Rodionova, Sakai [15]).

$$Int^1(OS_D) = \mathcal{S}_D.$$

Методы возмущений диффеоморфизмов, использованные при доказательстве теоремы 3.2, принципиально отличались от методов работы [14]; эти методы нашли применение при изучении аналогичной задачи для потоков.

При изучении слабого свойства отслеживания естественно рассматривать не структурно устойчивые, а Ω-устойчивые системы. Следует отметить, что связь между слабым свойством отслеживания и Ω-устойчивостью нетривиальна. Пламеневская изучила в [16] Ω-устойчивый диффеоморфизм f двумерного тора, имеющий сепаратрису, связывающую две гиперболические седловые неподвижные точки p и q. Она выразила необходимые и достаточные условия, при которых $f \in WS_D$, в терминах арифметических условий на собственные числа матриц Якоби $Df(p)$ и $Df(q)$.

Теорема 3.3 (Sakai [17]). *Если* $\dim M \leqslant 2$, *то*

$$Int^1(WS_D) = \Omega\mathcal{S}_D.$$

Было показано также, что теорема 3.3 перестает быть верной, если $\dim M \geq 3$.

Так как множество $\mathcal{S}_D$ C^1-открыто, из соотношения (3.3) следует, что

$$\mathcal{S}_D \subset Int^1(TSLimS_D).$$

Теорема 3.4 (Pilyugin [13]).

$$\mathcal{S}_D \neq Int^1(TSLimS_D).$$

Орбитальное предельное свойство отслеживания оказалось естественно связанным с Ω-устойчивостью.

Теорема 3.5 (Pilyugin [13]).

$$Int^1(OLimS_D) = \Omega\mathcal{S}_D.$$

К периодическим свойствам отслеживания относится следующий результат.

Теорема 3.6 (Osipov, Pilyugin, Tikhomirov [18]).

$$Int^1(PerS_D) = LipPerS_D = \Omega\mathcal{S}_D.$$

Перейдем к результатам этого направления в случае потоков.

Пусть $\mathcal{N}$ – множество потоков, не имеющих точек покоя. Применение техники, близкой к технике работы [15], позволило доказать следующее утверждение.

Теорема 3.7 (Lee, Sakai [19]).

$$Int^1(S_F \cap \mathcal{N}) \subset \mathcal{S}_F.$$

Этот результат был усилен Тихомировым.

Теорема 3.8 (Тихомиров [20]).

$$Int^1(OrbitS_F \cap \mathcal{N}) \subset \mathcal{S}_F.$$

Наиболее нетривиальным оказался случай ориентированного свойства отслеживания.

Дадим следующее определение. Пусть φ – поток, порожденный векторным полем X. Будем говорить, что поток φ принадлежит классу $\mathcal{B}$, если у него есть две гиперболические точки покоя p и q (не обязательно различные), обладающие следующими свойствами:

(1) у матрицы Якоби $DX(p)$ есть такая пара комплексно сопряженных собственных чисел $a_1 \pm ib_1$ кратности 1 с $a_1 < 0$, что если $c_1 \pm id_1$ – собственные числа $DX(p)$, отличные от $a_1 \pm ib_1$, и $c_1 < 0$, то $c_1 < a_1$ (это условие означает, что "слабейшее притяжение" в устойчивом многообразии $W^s(p)$ порождается парой комплексно сопряженных собственных чисел);

(2) у матрицы Якоби $DX(q)$ есть такая пара комплексно сопряженных собственных чисел $a_2 \pm ib_2$ кратности 1 с $a_2 > 0$, что если $c_2 \pm id_2$ – собственные числа $DX(q)$, отличные от $c_2 \pm id_2$, и $c_2 > 0$, то $c_2 > c_1$;

(3) существует траектория нетрансверсального пересечения устойчивого многообразия $W^s(q)$ и неустойчивого многообразия $W^u(p)$.

Теорема 3.9 (Pilyugin, Tikhomirov [21]).

$$Int^1(OrientS_F \setminus \mathcal{B}) = \mathcal{S}_F.$$

Теорема 3.10 (Pilyugin, Tikhomirov [21]).

$$Int^1(OrientS_F) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset.$$

Теорема 3.10 показывает, что существуют такие потоки, не являющиеся структурно устойчивыми, что при C^1-малых возмущениях эти потоки сохраняют ориентированное свойство отслеживания. Тихомиров доказал усиленный вариант теоремы 3.9 при ограничении на размерность многообразия.

Теорема 3.11 (Тихомиров [20]). *Если* $\dim M \leqslant 3$, *то*

$$Int^1(OrientS_F) = \mathcal{S}_F.$$

Он доказал также, что $Int^1(LipS_F) = S_F$, но этот результат перекрывается формулируемой ниже теоремой 3.14.

3.2. Свойства отслеживания, эквивалентные структурной устойчивости

Как уже отмечалось, из структурной устойчивости динамической системы следуют все упомянутые в этом обзоре свойства отслеживания псевдотраекторий.

До недавнего времени не было известно, вытекает ли структурная устойчивость из каких-либо свойств отслеживания. Видимо, первым результатом в этом направлении явилась теорема автора о так называемом вариационном отслеживании.

Пусть f – диффеоморфизм гладкого замкнутого многообразия M. Будем обозначать через T_xM касательное пространство к M в точке x и через $|v|$ норму вектора $v \in T_xM$, индуцированную римановой метрикой dist. Будем обозначать через $Df(x)$ дифференциал f в точке x; для точки $p \in M$ положим $p_k = f^k(p),\ k \in \mathbb{Z}$.

Будем говорить, что f обладает свойством вариационного отслеживания ($f \in VarS_D$), если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $d > 0$, что для любой точки $p \in M$ и для любой последовательности векторов $w_k \in T_{p_k}M$, удовлетворяющей неравенствам

$$|Df(p_k)w_k - w_{k+1}| < d, \quad k \in \mathbb{Z},$$

найдется такая последовательность векторов $v_k \in T_{p_k}M$, что

$$Df(p_k)v_k = v_{k+1} \quad \text{и} \quad |v_k - w_k| < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 3.12 (Pilyugin [22]).

$$VarS_D = \mathcal{S}_D.$$

По существу, доказательство теоремы 3.12 сводится к комбинации известных результатов из теории структурной устойчивости. В то же время, дальнейшее развитие основной идеи работы [22] легло в основу доказательства следующего результата, который автор считает одним из важнейших в описываемой области теории отслеживания.

Теорема 3.13 (Pilyugin, Tikhomirov [23]).

$$LipS_D = \mathcal{S}_D.$$

Таким образом, оказалось, что липшицево отслеживание равносильно структурной устойчивости. Аналог теоремы 3.14 верен и для потоков. Заметим, что доказательство следующей теоремы потребовало разработки принципиально нового аппарата.

Теорема 3.14 (Palmer, Pilyugin, Tikhomirov [24]).

$$LipS_F = \mathcal{S}_F.$$

Отметим относящуюся к изучаемому направлению гипотезу Абденура и Диаца о том, что C^1 – типичный диффеоморфизм, обладающий свойством отслеживания, структурно устойчив. Абденур и Диац доказали эту гипотезу в работе [25] для так называемых ручных (tame) диффеоморфизмов. Совсем недавно Тихомиров показал [26], что если f – диффеоморфизм класса C^2, для которого существуют такие $L, d_0 > 0$ и $\alpha > 1/2$, что любая d-псевдотраектория с $d \leq d_0$ ε-отслеживается некоторой точкой с $\varepsilon = Ld^{\alpha}$, то f структурно устойчив.

4. Проблема плотности

Вопрос о плотности и типичности динамических систем, обладающих свойствами отслеживания, изучался достаточно долго (иногда, особенно в японской математической литературе, его называют проблемой Моримото).

Ответы на этот вопрос принципиально различны для пространств гомеоморфизмов и диффеоморфизмов.

Напомним вначале основные результаты, относящиеся к гомеоморфизмам.

Пусть M – гладкое замкнутое многообразие и пусть $H(M)$ – пространство гомеоморфизмов многообразия M с C^0-топологией. Вначале Яно [27] показал, что типичный гомеоморфизм окружности S^1 обладает свойством отслеживания, затем Одани [28] распространил этот результат на случай многообразий M с $\dim M \leqslant 3$. Основная трудность при попытках распространения этого результата на случай многообразий произвольной размерности состояла в том, что при $\dim M \geqslant 4$ не любой гомеоморфизм многообразия M можно C^0-приблизить диффеоморфизмом [29].

Первым шагом в направлении доказательства типичности свойства отслеживания в случае фазового пространства произвольной размерности было введение Корлессом и автором слабого свойства отслеживания; в статье [3] было показано, что это свойство типично.

Окончательное решение проблемы Моримото для случая гомеоморфизмов было получено автором вместе с его ученицей Пламеневской.

Теорема 4.1 (Pilyugin, Plamenevskaya [30]). *Свойство отслеживания типично в $H(M)$ для многообразия M произвольной размерности.*

При доказательстве теоремы 4.1 была применена тонкая топологическая техника разложения на ручки и топологической трансверсальности [31].

Перейдем к проблеме плотности и типичности свойства отслеживания в пространстве $Diff^1(M)$ диффеоморфизмов класса C^1 с C^1-топологией.

Первой из статей, относящихся к этой проблеме, следует считать статью Юана и Йорке [31], в которой построено открытое (правда, в C^r-топологии с $r > 1$) множество диффеоморфизмов, обладающих следующим свойством: существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ и для любой точки фазового пространства почти любая d-псевдотраектория, проходящая через эту точку, не является ε-отслеживаемой.

Первый пример такого открытого множества $U \subset Diff^1(M)$, что $U \cap S_D = \emptyset$, был построен в работе [33] для случая, когда фазовым пространством является трехмерный тор T^3.

Теорема 4.2 (Bonatti, Diaz, Turcat [33]). *Существует такое открытое множество $U \subset Diff^1(T^3)$, что $U \cap S_D = \emptyset$.*

Авторы работы [33] используют принадлежащий Мане [34] пример открытого подмножества пространства $Diff^1(T^3)$, в котором каждый диффеоморфизм топологически транзитивен (т.е. у него есть плотная положительная полутраектория) и не является аносовским.

В работе [35] показано, что аналогичным свойством (S_D не плотно в

$Diff^1(M)$) обладает двумерный тор T^2 (в этом случае используется стандартная конструкция DA (derived from Anosov) диффеоморфизма). Из результатов [27] следует, что множество S_D плотно в пространстве $Diff^1(S^1)$ диффеоморфизмов окружности. Таким образом, 2 – минимальная размерность многообразия M, для которого множество S_D может быть неплотно в $Diff^1(M)$.

Гораздо труднее оказалось доказать C^1-неплотность множества OS_D. Это сделал ученик автора Осипов.

Теорема 4.3 (Осипов [36]). *Существует такое открытое множество* $U \subset Diff^1(S^2 \times S^1)$, *что* $U \cap OS_D = \emptyset$.

Конструкция Осипова использует технику частично-гиперболических мягких косых произведений над подковой Смейла, развитую Городецким и Ильяшенко (см., например, [37]).

Отметим, наконец, что C^1-типичность свойства слабого отслеживания была доказана Кровизье [38] с использованием глубоких обобщений классической леммы о замыкании.

5. Заключительные замечания

Как уже говорилось выше, в кратком обзоре невозможно осветить все результаты теории отслеживания, полученные в XXI веке.

Отметим лишь, не касаясь работ других исследователей, что автором (в сотрудничестве с другими учеными) изучались условия отслеживания в Ω-устойчивых диффеоморфизмах [39], действиях многомерных групп [40], в системах, порождаемых многозначными отображениями [41–43].

Литература

1. S. Yu. Pilyugin. Shadowing in Dynamical Systems. Lecture Notes in Math., vol. 1706, Springer-Verlag (1999).

2. K. Palmer. Shadowing in Dynamical Systems. Theory and Applications. Kluwer (2000).

3. R. Corless and S. Yu. Pilyugin. Approximate and real trajectories for generic dynamical systems, J. Math. Anal. Appl., vol. 189, 409-423 (1995).

4. С. Ю. Пилюгин. Пространства динамических систем. "Рег. и хаотич. динамика М.-Ижевск (2008).

5. T. Eirola, O. Nevanlinna, and S. Yu. Pilyugin. Limit shadowing property, Numer. Funct. Anal. Optim., vol. 18, 75-92 (1997).

6. C. Robinson. Stability theorems and hyperbolicity in dynamical systems, Rocky Mount. J. Math., vol. 7, 425-437 (1977).

7. A. Morimoto. The method of pseudo-orbit tracing and stability of dynamical systems. Sem. Note, vol. 39, Tokyo Univ. (1979).

8. K. Sawada. Extended f-orbits are approximated by orbits, Nagoya Math. J., vol. 79, 33-45 (1980).

9. Д. В. Аносов. Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем. Тр. 5-й межд. конф. по нелин. колеб., Киев, т. 2, с. 39-45 (1969).

10. R. Bowen. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. Lecture Notes in Math., vol. 470, Springer-Verlag (1975).

11. S. Yu. Pilyugin. The Space of Dynamical Systems with the C^0-Topology. Lecture Notes in Math., vol.1571, Springer-Verlag (1994).

12. S. Yu. Pilyugin. Shadowing in structurally stable flows, J. Diff. Equat., vol. 140, 238-265 (1997).

13. S. Yu. Pilyugin. Sets of dynamical systems with various limit shadowing properties, J. Dyn. Diff. Equat., vol. 19, 747-775 (2007).

14. K. Sakai. Pseudo orbit tracing property and strong transversality of diffeomorphisms of closed manifolds, Osaka J. Math., vol. 31, 373-386 (1994).

15. S. Yu. Pilyugin, A. A. Rodionova, and K. Sakai. Orbital and weak shadowing properties, Discr. Cont. Dyn. Syst., vol. 9, 287-308 (2003).

16. О. Б. Пламеневская. Слабое отслеживание в двумерных диффеоморфизмах, Мат. Заметки, т. 65, 477-480 (1999).

17. K. Sakai. Diffeomorphisms with weak shadowing. Fund. Math., vol. 168, 53-75 (2001).

18. A. V. Osipov, S. Yu. Pilyugin, and S. B. Tikhomirov. Periodic shadowing and Ω-stability, Regular & Chaotic Dyn., vol. 15, 404-417 (2010).

19. K. Lee and K. Sakai. Structural stability of vector fields with shadowing, J. Diff. Equat., vol. 232, 303-313 (2007).

20. С. Б. Тихомиров. Внутренности множеств векторных полей со свойствами отслеживания, соответствующими некоторым классам репараметризаций, Вестн. СПбГУ, сер. 1, вып. 4, 90-97 (2008).

21. S. Yu. Pilyugin and S. B. Tikhomirov. Vector fields with the oriented shadowing property, J. Diff. Equat., vol. 248, 1345-1375 (2010).

22. S. Yu. Pilyugin. Variational shadowing, Discr. Cont. Dyn. Syst., ser. B, vol.14, 733-737 (2010).

23. S. Yu. Pilyugin and S. B. Tikhomirov. Lipschitz shadowing implies structural stability, Nonlinearity, vol. 23, 2509-2515 (2010).

24. K. J. Palmer, S. Yu. Pilyugin, and S. B. Tikhomirov. Lipschitz shadowing and structural stability of flows (submitted).

25. F. Abdenur and L. J. Diaz. Pseudo-orbit shadowing in the C^1 topology, Discr. Contin. Dyn. Syst., vol. 7, 223-245 (2003).

26. S. B. Tikhomirov. Hölder shadowing and structural stability (submitted).

27. K. Yano. Generic homeomorphisms of S^1 have the pseudo-orbit shadowing property, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A Math., vol. 34, 51-55 (1987).

28. K. Odani. Generic homeomorphisms have the pseudo-orbit shadowing property, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 110, 281-284 (1990).

29. J. Munkres. Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms, Ann. Math., vol. 72, 521-554 (1960).

30. S. Yu. Pilyugin and O. B. Plamenevskaya. Shadowing is generic, Topology and Its Appl., vol. 97, 253-266 (1999).

31. R. Kirby and L. C. Siebenmann. Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations. Princeton Univ. Press (1977).

32. G.-C. Yuan and J. A. Yorke. An open set of maps for which every point is absolutely nonshadowable, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 128, 909-918 (2000).

33. C. Bonatti, L. J. Diaz, and G. Turcat. Pas de “shadowing lemma"pour les dynamiques partiellement hyperboliques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math., vol. 330, 587-692 (2000).

34. R. Mañé. Contributions to stability conjecture, Topology, vol. 17, 383-396 (1978).

35. S. Yu. Pilyugin, K. Sakai, and O. A. Tarakanov. Transversality properties and C^1-open sets of diffeomorphisms with weak shadowing, Discr. Cont. Dyn. Syst., vol. 16, 871-882 (2006).

36. А. В. Осипов. Неплотность орбитального свойства отслеживания относительно C^1 топологии, Алгебра и Анализ, т. 22, 127-163 (2010).

37. А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко. Некоторые свойства косых про-

изведений над подковой и соленоидом, Труды Мат. Ин-та им В. А. Стеклова, т. 231, 96-118 (2000).

38. S. Crovisier. Periodic points and chain-transitive sets of C^1-diffeomorphisms, Publ. Math. IHES, vol. 104, 87-141 (2006).

39. S. Yu. Pilyugin and K. Sakai. C^0 transversality and shadowing properties, Proc. Steklov Math. Inst., vol. 256, 290-305 (2007).

40. S. Yu. Pilyugin and S. B. Tikhomirov. Shadowing in actions of some Abelian groups, Fund. Math., vol. 179, 83-96 (2003).

41. S. Yu. Pilyugin and J. Rieger. Shadowing and inverse shadowing in set-valued dynamical systems. Contractive case, Topol. Meth. Nonlin. Anal., vol. 32, 139-150 (2008).

42. S. Yu. Pilyugin and J. Rieger. Shadowing and inverse shadowing in set-valued dynamical systems. Hyperbolic case, Topol. Meth. Nonlin. Anal., vol. 32, 151-164 (2008).

43. С. Ю. Пилюгин, Я. Ригер. Общие условия гиперболичности для многозначных отображений. Зап. Научн. Семин. ПОМИ, т. 372, 172-186 (2009).