ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№1, 2012
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Дифференциальные уравнения
в частных производных

О понятии эллиптичности для полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

ПРОКОФЬЕВА С.И., ЯКУНИНА Г.В.

Россия, 190005, Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д.4,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет», кафедра Математики

Введение

В начале 80-х годов в теории дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка появилось новое направление, называемое теорией полностью нелинейных уравнений. В таких уравнениях присутствует нелинейная зависимость от первых и вторых производных решения. Если главная часть уравнения определяется оператором F, зависящем только от вторых производных решения, т.е. $F[u]=F(u_{xx})$, то уравнение называется гессиановским.

Оператор F называется эллиптическим на функции $u\in C^2(\Omega)$, если выполняется неравенство

$$\frac{\partial F(u_{xx})}{\partial u_{ij}}\xi^i\xi^j>0,\quad x\in\Omega,\quad \xi\in R^n,\quad |\xi|=1.$$

В отличие от линейных гессиановские уравнения не сохраняют эллиптичность на всех функциях из пространства C^2. Поэтому вопрос о классической разрешимости этих уравнений ставится на более узком множестве допустимых функций, а именно в конусе положительной монотонности функции $F(S)$ относительно матрицы S.

Данная работа посвящена проблеме классической разрешимости задачи Дирихле для m-гессиановских уравнений $tr_m u_{xx} = f$, где $tr_m u_{xx}$ – сумма всех главных миноров порядка m матрицы u_{xx}. При $m = 1$ это уравнение Пуассона, а при $m = n$ – уравнение Монжа-Ампера. Проблема классической разрешимости таких уравнений впервые рассматривалась в работе Н.М. Ивочкиной [2] в случае выпуклой области и нулевого граничного условия, а для более общего случая – в работе Л. Каффарелли, Л. Ниренберга и Д. Спрука [4].

В предлагаемой работе показано, что конус монотонности является естественным множеством разрешимости и единственности задачи Дирихле для таких уравнений. Построен пример уравнений, которые эллиптичны в конусе, а также эллиптичны на множестве, не принадлежащем конусу. Это уравнение имеет решение как в конусе, так и вне конуса, и эти решения различны. В конусе монотонности хорошо работают известные методы в теории линейных и квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. Вне конуса эти методы не работают. Именно поэтому в работе Н.М. Ивочкиной [1] эти конусы названы конусами устойчивости.

Постановка задачи и полученные результаты

Рассмотрим пространство $Sym(n)$ симметричных матриц размера $n \times n$. Выберем и зафиксируем целое число m с условием $1 \le m \le n$. Обозначим символом $tr_m S$ сумму всех главных миноров порядка m матрицы $S \in Sym(n)$. В частности, $tr_1 S = trS$, $tr_n S = \det S$.

Рассмотрим функцию

$$F_m(S) = \left(\frac{tr_m S}{C_n^m} \right)^{\frac{1}{m}}$$

и матричный конус

$$K_m = \{ S \in Sym(n) : F_i(S) > 0, \; i = 1,2,\ldots,m \}.$$

Положим $\Omega \subset R^n$, $u \in C^2(\Omega)$. Введем оператор, порожденный функцией F_m

$$F_m[u] = F_m(u_{xx}),$$

который называется m-гессиановским оператором. При $m = 1$ это оператор Лапласа, при $m = n$ – Монжа-Ампера. Поскольку m-гессиановское уравнение не является тотально эллиптическим, теория его разрешимости связана с множеством m-допустимых функций.

Определение. Функция $u \in C^2(\Omega)$ называется m-допустимой в области Ω, если $u_{xx}(x) \in K_m$, $x \in \Omega$.

Множество m-допустимых функций образует конус

$$\mathrm{K}_m(\Omega) = \left\{u \in C^2(\Omega) : u_{xx} \in K_m,\ x \in \Omega\right\}.$$

Как показано в работе [1], конус $\mathrm{K}_m(\Omega)$ обладает следующими важными свойствами:

а) для функции $u \in \mathrm{K}_m$ выполнены неравенства

$$F_m[u] \le F_{m-1}[u] \le \ldots \le F_1[u] = \frac{\Delta u}{n};$$

б) оператор F_m эллиптичен в конусе K_m, причем

$$\frac{1}{c(n)}\left(\frac{\upsilon}{\mu}\right) \le \frac{\partial F_m[u]}{\partial u_{ij}}\xi^i\xi^j \le c(n)\left(\frac{\mu}{\upsilon}\right)^{m-1}, \quad \xi \in R^n, \quad |\xi| = 1,$$

если $F_m[u] \ge \upsilon > 0$, $F_1[u] \le \mu$ в Ω.

Рассмотрим оператор $F_5[u]$, $u \in C^2(\Omega)$ и положим $\Omega = B_1(0) \subset R^6$, $B_1(0)$ – шар единичного радиуса с центром в начале координат.

Поставим в области Ω задачу Дирихле

$$F_5[u] = f(\alpha), \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(\alpha, x). \tag{2}$$

Непосредственным вычислением доказывается, что функция

$$\omega^\alpha(x) = \frac{\alpha}{2}\left(x^1\right)^2 - \sum_{i=2}^{6}\left(x^i\right)^2$$

является решением задачи (1)-(2), если

$$f(\alpha) = \left(\frac{8}{3}(5\alpha - 2)\right)^{\frac{1}{5}},$$

$$\varphi(\alpha, x) = \left(x^1\right)^2\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) - 1.$$

Пусть $0.4 < \alpha < 0.5$. Оператор F_5 положительно эллиптичен на ω^α:

$$\frac{\partial F_5[\omega^\alpha]}{\partial \omega^\alpha_{ij}}\xi^i\xi^j \ge \upsilon^\alpha > 0, \quad \xi \in R^n, \quad |\xi| = 1,$$

где $\upsilon^\alpha = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{8}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \dfrac{1 - 2\alpha}{(5\alpha - 2)^{\frac{4}{5}}}$.

Кроме того,

$$F_4[\omega^\alpha] = \left(\frac{16}{3}(1 - \alpha)\right)^{\frac{1}{4}} > 0,$$

однако

$$F_3[\omega^\alpha] = \left(2(\alpha-2)\right)^{\frac{1}{3}} < 0$$

и, следовательно, $\omega^\alpha \notin \mathrm{K}_5$.

Потребуем теперь, чтобы решение задачи (1)-(2) попадало в конус K_5. Из работ Л. Каффарелли, Л. Ниренберга и Д. Спрука [4] следует однозначная разрешимость задачи (1)-(2) в конусе K_m.

Полное доказательство этой теоремы для *m*-гессиановских уравнений имеется в работе Н.В. Филимоненковой [3]. Сформулируем основной результат этой работы.

Теорема. Пусть $\partial\Omega \in C^{l+\alpha}$ – строго $(m-1)$-выпуклая поверхность, $\varphi \in C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$, $f \in C^{l-2+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $f \ge \upsilon > 0$ в $\overline{\Omega}$, $l \ge 4$, $0 < \alpha < 1$. Тогда существует единственное *m*-допустимое решение $u \in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи

$$F_m[u] = f \text{ в } \Omega,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Видим, что задача (1)-(2) имеет два различных решения, причем для каждого из этих решений уравнение эллиптично. Возможно, есть и другие решения. Но *m*-допустимое решение единственно.

Список литературы:

1. Ивочкина, Н.М. Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа-Ампера // Мат. сборник. – 1983. – Т. 122 (164), №2 (10). – С. 265-275.

2. Ивочкина, Н.М. Решение задачи Дирихле для некоторых уравнений типа Монжа-Ампера // Мат. сборник. – 1985. – Т. 128 (170), №3 (11). – С. 403-415.

3. Филимоненкова, Н.В. О классической разрешимости задачи Дирихле для невырожденных *m*-гессиановских уравнений // Проблемы математического анализа. – 2011. Вып. 60. – С. 89-110.

4. Caffarelly, L., Nirenberg, L., Spruck, J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian // Acta Math. – 1985. – Vol. 155. – P. 261-301.