ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2011
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Определяющие моды и почти периодические интегралы для коциклов

И. В. Ермаков, Ю. Н. Калинин, Ф. Райтманн

[1] Математико-механический факультет,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Рассматриваются коциклы общего вида на произвольном метрическом пространстве. Вводится понятие определяющих мод для коциклов на гильбертовом пространстве и доказывается теорема о существовании конечного числа определяющих мод для таких коциклов. Приводится доказательство существования B-pullback аттрактора в задаче микроволнового нагрева материала. Вводится понятие почти периодического интеграла для коцикла и доказывается существование такого интеграла для одного класса коциклов.

Введение

Настоящая работа посвящена некоторым вопросам развития теории коциклов, в частности, порожденных системами уравнений в частных производных. Одна из таких систем уравнений описывает задачу микроволнового нагрева. Исходя из известных результатов для процессов, строятся элементы теории определяющих функционалов и почти периодических интегралов для коциклов.

Приведем краткий обзор содержания работы. В §1 дается краткое введение в теорию коциклов, включая понятие глобального B-pullback аттрактора. §2 рассматривается система микроволнового нагрева, состоящая из уравнений Максвелла и уравнения теплопроводности. Строится

[1]Работа выполнена при поддержке Немецко-российского междисциплинарного научного центра (G-RISC) и Германской службы академических обменов (DAAD).

соответствующий коцикл, доказывается его диссипативность и существование B-pullback аттрактора. В §3 вводится класс определяющих функционалов для коциклов. Приводится теорема о существовании определяющих мод как частного случая определяющих функционалов для коциклов. В §4 вводится понятие почти периодического интеграла для коцикла, обобщающее соответствующее понятие для процесса. В §5 изучается существование такого интеграла для одного класса коциклов.

1 Элементы теории коциклов

Понятие коцикла является обобщением понятия динамической системы. Введем основные понятия теории коциклов, которые будут использоваться далее ([11]).

Пусть (Q, d) - метрическое пространство, называемое базисным пространством. Пара $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (Q, d))$, где $\tau^t : Q \to Q$, для любого $t \in \mathbb{R}$, называется *базисным потоком*, если

$$\begin{aligned} &\tau^0 = id_Q, \\ &\tau^t \circ \tau^s = \tau^{t+s}\ \forall t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть (M, ρ) - другое метрическое пространство, которое назовем фазовым пространством.

Определение 1 *Пара $(\{\varphi^t(q,\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+, q\in Q}, (M, \rho))$, где $\varphi^t(q,\cdot) : M \to M$ для любых $t \in \mathbb{R}_+, q \in Q$, называется коциклом над базисным потоком $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (Q, d))$, если*

$$\begin{aligned} &\varphi^0(q,\cdot) = id_M\ \forall q \in Q, \\ &\varphi^{t+s}(q,\cdot) = \varphi^t(\tau^s(q), \varphi^s(q,\cdot))\ \forall q \in Q,\ \forall t, s \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{2}$$

Для краткости коцикл $(\{\varphi^t(q,\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+, q\in Q}, (M, \rho))$ над базисным потоком $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (Q, d))$ будем обозначать (φ, τ).

Определим пространство $W = Q \times M$ и семейство отображений $S^t : W \to W$, $t \in \mathbb{R}_+$, действующих по правилу $S^t(q, u) = (\tau^t(q), \varphi^t(q, u))$. Динамическая система $(\{S^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, W)$ называется *косым произведением.*

Неавтономным множеством будем называть $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q\in Q}$- отображение $Q \to 2^M$. Неавтономное множество называется *ограниченным (замкнутым, компактным)*, если для любого $q \in Q$ множество $Z(q)$ ограничено (замкнуто, компактно) в M.

Ограниченное неавтономное множество $\hat{Z}$ называется *глобально B-pullback поглощающим* множеством для коцикла (φ, τ), если для любого $q \in M$ и любого ограниченного множества $B \subset M$ существует $T = T(q, B)$ такое, что $\varphi^t(\tau^{-t}(q, B)) \subset Z(q)$ для $t \geq T$.

Неавтономное множество $\hat{Z}$ называется *глобально B-pullback притягивающим*, если для любого ограниченного множества $B \subset M$, любого $q \in Q$

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(\varphi^t(\tau^{-t}(q), B), Z(q)) = 0,$$

где dist -полурасстояние по Хаусдорфу в (M, ρ).

Неавтономное множество $\hat{Z}$ называется *инвариантным*, если для любых $q \in Q$ и $t \geq 0$ выполняется равенство $\varphi^t(q, Z(q)) = Z(\tau^t(q))$.

Определение 2 *Неавтономное множество называется глобальным B-pullback аттрактором для коцикла (φ, τ), если оно компактно, инвариантно и является глобальным B-pullback притягивающим.*

Для доказательства существования B-pullback аттрактора мы будем использовать следующий результат (теорему Клоедена-Шмальфуза).

Теорема 1 ([11]) *Пусть коцикл (φ, τ) имеет компактное глобальное B-pullback поглощающе множество $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q \in Q}$. Тогда (φ, τ) имеет единственный глобальный B-pullback аттрактор $\hat{A} = \{A(q)\}_{q \in Q}$, где для любого $q \in Q$*

$$A(q) = \cap_{t \in \mathbb{R}_+} \cup_{s \geq t, s \in \mathbb{R}_+} \overline{\varphi^s(\tau^{-s}(q), Z(\tau^{-s}(q))}.$$

2 Существование B-pullback аттрактора для задачи нагрева

Процесс микроволнового нагрева материала включает в себя механизм нагрева материала джоулевым теплом под действием микроволн. Он описывается с помощью парной системы из уравнений Максвелла и уравнения теплопроводности. Мы приводим задачу сразу для одномерного случая. Вывод одномерного случая приведен в [13]. Задача интенсивно изучалась в работах [16], [5], [13], [14].

Пусть задана начально-краевая задача

$$\begin{array}{ll} w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta) w_t = 0, & 0 < x < 1, \;\; t > 0 \\ \theta_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta) w_t^2, & 0 < x < 1, \;\; t > 0 \end{array} \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\begin{array}{ll} w\,(0,t) = f_1(t), w\,(1,t) = f_2(t), & t > 0 \\ \theta\,(0,t) = \theta\,(1,t) = 0, & t > 0 \end{array} \tag{4}$$

и начальными условиями

$$w\,(x,0) = w_0\,(x)\,, w_t\,(x,0) = w_1\,(x)\,, \theta\,(x,0) = \theta_0\,(x)\,, \quad 0 < x < 1 \tag{5}$$

Физический смысл величин такой: θ - температура, w - интеграл по времени от ненулевой компоненты электрического поля, σ - электропроводность, f_1, f_2 - внешние возмущения электромагнитного поля.

Предполагаем, что

(A1.1) σ локально липшицева на $(0, +\infty)$;

(A1.2) Существуют константы $0 < \sigma_0 \leq \sigma_1$ такие, что $\sigma_0 \leq \sigma(z) \leq \sigma_1$ для любого $z > 0$;

(A1.3) σ монотонно убывает.

(A2) $w_0 \in L^2(0,1), w_1 \in L^2(0,1), \theta_0 \in L^2(0,1), \theta_0 \geq 0$ почти везде на $(0,1)$.

(A3) f_1, f_2 принадлежат классу $C^2(\mathbb{R})$ и существует константа C такая, что функции $|f_1'|\,, |f_2'|\,, |f_1''|\,, |f_2''|$ ограничены на $\mathbb{R}$ константой C.

Мы будем использовать слабые решения, то есть решения, удовлетворяющими уравнению в смысле интегрального тождества. Определение слабых решений дано в [13]. Здесь мы приводим теорему существования слабого решения, модифицированную для одномерного случая.

Теорема 2 ([13]) *Существует глобальное слабое решение* $(w(x,t), \theta(x,t))$ *задачи (3)-(5), причем* $w \in C([0,T]; L^2(0,1))$, $\theta \in L^2(0,T; H^1(0,1)) \cap C([0,T]; L^2(0,1))$ *для любого* $T > 0$.

Предполагаем, что слабое решение единственно.

Сведем задачу к задаче с однородными краевыми условиями. Обозначим $f(x,t) = f_1(t)(1-x) + f_2(t)x$ и введем замену $W(x,t) = w(x,t) - f(x,t)$. Получим систему

$$\begin{array}{ll} W_{tt} - W_{xx} + \sigma(\theta)W_t = f_{tt} - \sigma(\theta)f_t, & 0 < x < 1, \;\; t > 0 \\ \theta_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta)(W_t + f_t)^2, & 0 < x < 1, \;\; t > 0 \end{array} \tag{6}$$

с начальными и граничными условиями

$$W(0,t) = W(1,t) = 0, \quad \theta\,(0,t) = \theta\,(1,t) = 0, \quad t > 0 \tag{7}$$

$$
\begin{array}{ll}
W(x,0) = W_0(x) = w_0(x) - f(x,0), & 0 < x < 1 \\
W_t(x,0) = W_1(x) = w_1(x) - f_t(x,0), & 0 < x < 1 \\
\theta\,(x,0) = \theta_0\,(x)\,, & 0 < x < 1.
\end{array} \tag{8}
$$

Вместо предположения (A2) делаем предположение (A2'):

(A2') $W_0 \in H_0^1(0,1), W_1 \in L^2(0,1), \theta_0 \in L^2(0,1), \theta_0 \geq 0$ почти везде на $(0,1)$.

Введем коцикл, соответствующий задаче (6)-(8). Определим пространство $M = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times (L^2(0,1) \cap \{\theta : \theta \geq 0\})$ с нормой

$$
\|(w,v,\theta)\|_M^2 = \|w_x\|_{L^2(0,1)}^2 + \|v\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\theta\|_{L^1(0,1)}^2.
$$

В нашей ситуации $Q = \mathbb{R}$, $\tau^t(s) = t + s$, $\varphi^t(s,u_0) = u(t+s,s,u_0)$, где $u(t,s,u_0) = (W(\cdot,t), V(\cdot,t), \theta(\cdot,t))$- решение (6)-(8) такое, что $u(s,s,u_0) = u_0 = (W_0, V_0, \theta_0)$. Существование и единственность слабого решения задачи позволяют нам сделать следующее утверждение.

Теорема 3 *Система (6)-(8) порождает коцикл* $\left(\{\varphi^t(s,\cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+, s\in\mathbb{R}}, (M, \|\cdot\|_M)\right)$ *над базисным потоком* $\left(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, \mathbb{R}\right)$.

Ограниченность решения доказывалась в [9] с помощью функции Ляпунова

$$
\Phi\,(W,V,\theta) = \int_0^1 \left(W_x^2 + 2\lambda WV + V^2 + a\theta^2\right) dx,
$$

для которой получена оценка

$$
\frac{d}{dt}\Phi\,(t) \leq -C_1\Phi\,(t) + C_2,
$$

где $\Phi(t) = \Phi\,(W(\cdot,t), V(\cdot,t), \theta(\cdot,t))$.

Но предположения, сделанные там, фактически требуют априорной оценки $\|u\|_{L^\infty} < C$. Мы докажем ограниченность решения другим методом. Для волнового уравнения с возмущением оставим метод функции Ляпунова, для уравнения типа теплопроводности применим теорию из [1].

Рассмотрим отдельно волновое уравнение

$$
W_{tt} - W_{xx} + \sigma(x,t)W_t = f_{tt} - \sigma(x,t)f_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > s \tag{9}
$$

с граничными условиями

$$
W(0,t) = W(1,t) = 0, \quad t > s \tag{10}
$$

и начальными условиями

$$W(x,s) = W_0, W_t(x,s) = W_1, \quad 0 < x < 1 \tag{11}$$

где $s \in \mathbb{R}$ произвольное. Сделаем предположения, следующие из предположений (A1)-(A3):

(A1.2*) существуют константы $0 < \sigma_0 \le \sigma_1$ такие, что $\sigma_0 \le \sigma(x,t) \le \sigma_1$ для любых $x \in (0,1), t \ge 0$.

(A2*) $W_0 \in H_0^1(0,1), W_1 \in L^2(0,1)$.

(A3*) Функция f C^1 - гладкая по x, C^2 - гладкая по t и существует константа $C > 0$ такая, что $|f_t| < C$, $|f_{xt}| < C$, $|f_{tt}| < C$ для любых $x \in (0,1), t \in \mathbb{R}$.

При сделанных предположениях задача (9) имеет единственное решение $(W(\cdot,t), V(\cdot,t)) \in M_1 = H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ ([15]).

Запишем уравнение (9) в виде системы

$$\begin{aligned} W_t &= V - f_t, \\ V_t &= W_{xx} - \sigma(x,t)V \end{aligned} \tag{12}$$

и запишем начальные и граничные условия

$$W(0,t) = W(1,t) = 0, \quad t > s \tag{13}$$

$$W(x,s) = W_0, V(x,s) = V_0, \quad 0 < x < 1 \tag{14}$$

Рассмотрим функционал на M_1

$$\Psi(W,V) = \|W_x\|^2 + 2\lambda(W,V) + \|V\|^2,$$

где $\lambda > 0$ -параметр, который будет выбран позднее. Норма и скалярное произведение здесь и далее рассматриваются в $L^2(0,1)$.

Обозначим для краткости $\Psi(t) = \Psi\left(W(\cdot,t), V(\cdot,t)\right)$. Найдем производную $\Psi(t)$ в силу системы (12). При этом все тождества и оценки, куда входит $\Psi(t)$, справедливы для почти всех $t \ge s$:

$$\frac{d}{dt}\Psi\left(t\right) = -2(\lambda\left\|W_x\right\|^2 + \lambda\sigma(W,V) + (\sigma-\lambda)\left\|V\right\|^2 + (f_{xt}, W_x) + \lambda(f_t, W))$$

Для любых $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, используя неравенство Коши, получаем соотношения

$$(W_x, f_{xt}) \ge -\frac{\varepsilon_1}{2}\left\|W_x\right\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|f_{xt}\right\|^2, \tag{15}$$

$$(f_t, V) \geq -\frac{\varepsilon_2}{2}\left\|V\right\|^2 - \frac{1}{2\varepsilon_2}\left\|f_t\right\|^2. \tag{16}$$

Отсюда получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\Psi\left(t\right) \leq -2((\lambda - \frac{\varepsilon_1}{2})\left\|W_x\right\|^2 + \lambda\sigma(W,V) + (\sigma - \lambda - \frac{\varepsilon_2}{2})\left\|V\right\|^2).$$

Возьмем $\lambda = \frac{\sigma_0}{2}$. При подходящих $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ в оценках (15), (16) существует $\delta > 0$ такое, что

$$\frac{d}{dt}\Psi\left(t\right) \leq -\delta\Psi\left(t\right) + C_1,$$

где $C_1 = \frac{1}{2\varepsilon_1}\left\|f_{xt}\right\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2}\left\|f_t\right\|^2 > 0$. Получаем оценку

$$\Psi(t) \leq e^{-\delta(t-s)}\Psi(s) + C_2,$$

где $\delta > 0$ и $C_2 > 0$, для любых t, s таких, что $t \geq s$.

Интерпретируем этот результат так. Пусть $(W(x,t;s), V(x,t;s))$ - решение начально-краевой задачи (12), (13), (14) с начальным временем s. Тогда для любого $t > 0$ существуют $T > 0$, $C > 0$ такие, что $\Psi\left(W(\cdot,t;s), V(\cdot,t;s)\right) < C$ для любого $s \leq t - T$. Такая интерпретация будет использоваться для доказательства B-pullback поглощающего множества коцикла, порожденного задачей (6)-(8).

Перейдем теперь к второму уравнению (6) типа теплопроводности. Приведем сначала некоторые результаты из [1]. В указанной работе исследуются ограниченность и почти-периодичность по времени решений вариационных неравенств. Приведенное ниже эволюционное уравнение (17) является частным случаем вариационного неравенства.

Пусть имеется тройка пространств $E \subset H \subset E'$, где $(E, \|\|_E)$ - рефлексивное банахово пространство, H - гильбертово пространство, E'- пространство, сопряженное к E, E непрерывно и плотно вложено в H. Далее, пусть $A(t) : E \to E'$ - семейство монотонных операторов и $F : \mathbb{R} \to E'$ -измеримое отображение . Напомним, что оператор $A(t) : E \to E'$ называется монотонным, если выполняется неравенство

$$(A(t)u - A(t)v, u - v) \geq 0, \ \forall u, v \in E.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ - скобка двойственности на $E \times E'$, совпадающая на $E \times E$ с ограничением на это пространство скалярного произведения из H. Рассматриваем эволюционное уравнение

$$\dot{y} + A(t)y = F(t). \tag{17}$$

Нам также понадобится более сильное свойство, чем свойство монотонности. Допустим, что существует $\alpha > 0$ такое, что

$$(A(t)u - A(t)v, u - v) \geq \alpha \left\| u - v \right\|^2 \ \forall u, v \in E. \tag{18}$$

Определим пространства функций $C_b(\mathbb{R}, E)$ - множество непрерывных функций $\xi : \mathbb{R} \to E$, для которых конечна величина $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\xi(t)\|_E$ и $BS^p(\mathbb{R}, E), 1 \leq p < \infty$ - подпространство в $L^p_{loc}(\mathbb{R}, E)$, состоящее из функций с конечной нормой

$$\|\xi\|_{S^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \|\xi(s)\|_E^p \, ds \right).$$

Рассмотрим теперь уравнение типа теплопроводности в виде

$$\theta_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta) g(x, t).$$

Предполагаем, что $g(x, t) \geq 0$, измерима и равномерно ограничено по t. В частности, у нас $g(x, t) = (W_t(x, t) + f_t(x, t))^2$. Для σ действуют предположения (A1.1)-(A1.3). Представим σ в виде $\sigma(\theta) = \sigma_0 + \tilde{\sigma}(\theta)$, где σ_0 из предположения (A1.2). Мы имеем краевую задачу

$$\theta_t - \theta_{xx} - \tilde{\sigma}(\theta) g(x, t) = \sigma_0 g(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > s \tag{19}$$

$$\theta\left(0, t\right) = \theta\left(1, t\right) = 0, \quad t > s \tag{20}$$

$$\theta\left(x, s\right) = \theta_0\left(x\right), \quad 0 < x < 1. \tag{21}$$

Начально-краевая задача (19)-(21) порождает эволюционное уравнение (17), где $A(t)y = -y_{xx} - g(x, t)\tilde{\sigma}(y)$ для $y \in E$ и $F(t) = \sigma_0 g(\cdot, t)$.

В нашей ситуации $E = H^1_0(0, 1)$ и $H = L^2(0, 1)$. Проверим условие (18). Пусть $\eta, \vartheta \in H^1_0(0, 1)$, $\zeta = \eta - \vartheta$. Тогда имеем

$$(A(t)\eta - A(t)\vartheta, \eta - \vartheta) = (-\zeta_{xx}, \zeta) + (g(\cdot, t)(\tilde{\sigma}(\vartheta) - \tilde{\sigma}(\eta)), \zeta) =$$

$$= (\zeta_x, \zeta_x) + (g(\cdot, t)(\tilde{\sigma}(\vartheta) - \tilde{\sigma}(\eta)), \zeta) \geq \|\zeta\|^2.$$

Используется неравенство Пуанкаре и предположение о монотонном убывании σ.

Применяя теорему 2.2 ([1]) (учитывая другие условия, которые мы здесь не приводим), заключаем, что уравнение (17) имеет единственное решение $y \in BS^2(\mathbb{R}, H^1_0(0, 1)) \cap C_b(\mathbb{R}, L^2(0, 1))$. В терминах уравнения (19) это означает, что существует константа C такая, что $\|\theta(\cdot, t; s)\| \leq C$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$ таких, что $s \leq t$.

Кроме того, по предложению 2.2 ([1]) мы имеем оценку

$$\|\theta_1(\cdot,t;s)-\theta_2(\cdot,t;s)\| \le e^{-c(t-s)}\|\theta_{01}-\theta_{02}\|, \tag{22}$$

где $\theta_i(x,t;s)$ - решение (19) с начальными данными θ_{0i} и начальным временем s.

Покажем теперь, что константа C не зависит от начальных данных. Действительно, имеется представление

$$\theta(x,t;s)=\int_0^1 G(x,y;t,0)\theta_0(y)dy+\int_s^t\int_0^1 G(x,y;t,r)g(y,r)drdy,$$

где $G(x,y;t,r)$ - функция Грина уравнения теплопроводности с граничными условиями Дирихле. От начальной температуры зависит только первый член, для него имеется оценка с некоторой константой C

$$\|G(x,y;t,0)\| \le \frac{C}{\sqrt{t-s}},$$

то есть вклад начальных данных стремится к нулю.

Мы можем устремлять начальное время к $-\infty$, что соответствует сдвигу времени в члене $g(x,t)$.

Предложение 1 *Пусть $\theta(\cdot,t;s)$ - решение задачи (19)-(21). Существует константа C такая, что для любого t и любого $s\le t$ справедливо неравенство $\|\theta(\cdot,t;s)\|\le C$, где C не зависит от θ_0.*

Из полученных выше равномерной ограниченности по t решений волнового уравнения и уравнения теплопроводности очевидно следует существование глобально B-pullback поглощающего множества коцикла (φ,τ).

Теорема 4 *Коцикл (φ,τ), порожденный задачей $(6)-(8)$, имеет глобально B-pullback поглощающее множество.*

Применяя Теорему 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 5 *Коцикл (φ,τ), порожденный задачей $(6)-(8)$, имеет глобальный B-pullback аттрактор.*

3 Определяющие функционалы для коциклов

В изучении асимптотических свойств бесконечномерных динамических систем важным является вопрос нахождения функционалов от решений, однозначно определяющих асимптотику системы. Для динамических систем эта теория хорошо развита ([2]). Первые важные результаты были получены для уравнений Навье-Стокса ([4]). Существование конечной системы определяющих функционалов для бесконечномерной системы означает физически, что динамика системы асимптотически конечномерна. Если система имеет глобальный аттрактор, то нахождение определяющих функционалов можно рассматривать как апроксимацию аттрактора. Вообще говоря, существование конечной системы определяющих функционалов является результатом, независимым от конечномерности аттрактора. Есть несколько различающиеся варианты определений понятия определяющих функционалов ([10]). Сначала мы приведем одно из них для случая динамических систем. В [2] оно формулируется для эволюционных систем, порожденных автономными уравнениями с частными производными.

Пусть $(\{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (E, \|\cdot\|))$ -динамическая система на банаховом пространстве $(E, \|\cdot\|)$.

Определение 3 ([2]) *Множество $\{l_j\}_{j=1}^N$ линейных непрерывных функционалов на E называется множеством асимптотически определяющих функционалов для динамической системы $(\{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (E, \|\cdot\|))$, если для любых $u_1, u_2 \in E$ из условия*

$$\lim_{t\to+\infty} \left|l_j(\phi^t(u_1)) - l_j(\phi^t(u_2))\right| = 0,\ j = 1, ..., N$$

следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} \left\|\phi^t(u_1) - \phi^t(u_2)\right\| = 0.$$

Введем определяющие моды, являющиеся важным частным случаем определяющих функционалов.

Определение 4 *Определяющими модами для динамической системы $(\{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (H, (\cdot,\cdot)))$ на гильбертовом пространстве $(H, (\cdot,\cdot))$ называются определяющие функционалы $l_j(\cdot) = (\cdot, e_j)$, где $\{e_j\}_1^N$ - некоторые элементы H.*

Существование конечного числа определяющих мод означает, что асимптотика системы однозначно определяется проекцией на некоторое конечномерное подпространство. Другими распространенными примерами определяющих функционалов являются определяющие узлы и определяющие элементы объема ([8]).

Перейдем теперь к введению определяющих функционалов для коциклов. В работе [12] рассматриваются определяющие функционалы для процессов, то есть для частного случая коциклов. Мы обобщим это понятие на коциклы. Пусть имеется коцикл $(\{\varphi^t(q,\cdot)\}_{q\in Q, t\in\mathbb{R}_+}, (M, \|\cdot\|))$ над базисным потоком $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (Q,d))$.

Определение 5 *Множество $\{l_j\}_{j=1}^N$ линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве $(M, \|\cdot\|)$ называется множеством pullback- асимптотически определяющих функционалов для коцикла $(\{\varphi^t(q,\cdot)\}_{q\in Q, t\in\mathbb{R}_+}, (M, \|\cdot\|))$ над базисным потоком $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}}, (Q,d))$, если из условия*

$$\lim_{t\to+\infty} \left| l_j(\varphi^t(\tau^{-t}(q), u_1)) - l_j(\varphi^t(\tau^{-t}(q), u_2)) \right| = 0$$

для любых $q \in Q$, $u_1, u_2 \in M$, $j = 1, .., N$ следует

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| \varphi^t(\tau^{-t}(q), u_1) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), u_2) \right\| = 0.$$

Пусть (φ, τ) - коцикл с гильбертовым фазовым пространством H, P - проектор из H на некоторое конечномерное подпространство в H, $I - P$ -проектор на его ортогональное дополнение. Предположим, что

(H1) Неавтономное множество $\{Z(q)\}_{q\in Q}$ положительно инвариантно для (φ, τ), то есть для любых $s \geq 0, q \in Q$ справедливо включение $\varphi^s(q, Z(q)) \subset Z(\tau^s)(q)$.

(H2) Для любого $q \in Q$ существует $\delta = \delta(q) \in (0,1)$ такое, что для любых $s \geq 1, u, v \in Z(\tau^{-s}(q))$

$$\left\| (I-P)(\varphi^1(\tau^{-s}(q), u) - \varphi^1(\tau^{-s}(q), v)) \right\| \leq \delta(q) \left\| u - v \right\|.$$

Далее, пусть $a_1, a_2 : Q \to H$ - отображения такие, что $a_i(q) \in Z(q)$ для любого $q \in Q$. Сделаем предположение

(H3) Для любых $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$ существует натуральное $L = L(\varepsilon)$ такое, что для любого $q \in Q$

$$\delta(q)^{2L} \left\| \varphi^{t-L}(q, a_1(q)) - \varphi^{t-L}(q, a_2(q)) \right\|^2 < \varepsilon,$$

где $\delta(q)$ берется из предположения (H2), причем $L(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Заметим, что если коцикл (φ, τ) имеет глобальный B-pullback аттрактор $\{A(q)\}_{q\in Q}$, то $A(q) \subset Z(q)$ для любого $q \in Q$.

Следующая теорема является обобщением теоремы 14 из [12] на случай коцикла.

Теорема 6 *Пусть выполнены предположения (H1)-(H3) и существует* $\beta > 0$ *такое, что для любого* $q \in Q$

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| P(\varphi^t(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_2(q))) \right\| \leq \beta.$$

Тогда

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_2(q)) \right\| \leq \beta. \tag{23}$$

Доказательство. Очевидно, что для любых $t \geq 0$, $q \in Q$

$$\begin{gathered} \left\| \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_2(q)) \right\|^2 = \\ \left\| P(\varphi^t(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_2(q))) \right\|^2 + \\ + \left\| (I-P)(\varphi^t(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_2(q))) \right\|^2 . \end{gathered} \tag{24}$$

Используя предположение(H2) и представляя отображение коцикла как композицию двух отображений, с учетом (24) получим

$$\begin{gathered} \left\| P(\varphi^t(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_2(q))) \right\|^2 + \\ + \left\| (I-P)(\varphi^t(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_2(q))) \right\|^2 \leq \\ \left\| P(\varphi^t(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_2(q))) \right\|^2 + \\ \delta^2(q) \left\| P(\varphi^{t-1}(q, a_1(q)) - \varphi^{t-1}(q, a_1(q))) \right\|^2 + \\ + \delta^2(q) \left\| (I-P)(\varphi^{t-1}(q, a_1(q)) - \varphi^{t-1}(q, a_1(q))) \right\|^2 . \end{gathered} \tag{25}$$

Через конечное число L таких шагов, используя (H2) и (25), мы получим

$$\begin{gathered} \left\| \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), a_2(q)) \right\|^2 \leq \\ \sum_{i=0}^{L} \delta(q)^{2i} \left\| P(\varphi^{t-i}(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^{t-i}(\tau^{-t}(q), a_2(q))) \right\|^2 + \\ \delta(q)^{2L} \left\| \varphi^{t-L}(q, a_1(q)) - \varphi^{t-L}(q, a_2(q)) \right\|^2 \end{gathered} \tag{26}$$

Для $\varepsilon > 0$ выберем L по предположению (H3). Кроме того, существует $t_0(L)$ такое, что для $t \geq t_0(L)$

$$\sum_{i=0}^{L} \delta(q)^{2i} \left\| P(\varphi^{t-i}(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^{t-i}(\tau^{-t}(q), a_2(q))) \right\|^2 +$$

$$+\delta(q)^{2L} \left\| \varphi^{t-L}(q, a_1(q)) - \varphi^{t-L}(q, a_2(q)) \right\|^2 \leq \beta + 2\varepsilon. \tag{27}$$

Объединяя (26) и (27), получаем оценку

$$\left\| \varphi^{t}(\tau^{-t}(q), a_1(q)) - \varphi^{t}(\tau^{-t}(q), a_2(q)) \right\|^2 \leq \beta + 2\varepsilon.$$

При $t \to \infty$ число L может быть выбрано сколь угодно большим и по предположению (H3) ε при этом можно сделать сколь угодно малым. Отсюда получаем заключение теоремы.□

Приведенное ниже следствие Теоремы 6 дает условие существования конечного числа определяющих мод для коцикла (φ, τ).

Следствие 1 *Пусть существует* $\beta > 0$ *такое, что для любых* $q \in Q, u, v \in H$

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| P(\varphi^t(\tau^{-t}(q), u) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), v)) \right\| \leq \beta.$$

Тогда

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| \varphi^t(\tau^{-t}(q), u) - \varphi^t(\tau^{-t}(q), v) \right\| \leq \beta.$$

Доказательство. Для некоторого $L > 0$ существует $q = q(u, v, L) \in Q$ такое, что $\varphi^{t-L}(q, u), \varphi^{t-L}(q, v) \in Z(\tau^{-L}(q))$. Применим Теорему 6 для $a_1(q) = \varphi^{t-L}(q, u), a_2(q) = \varphi^{t-L}(q, v)$. □

Мы приводим другую версию этой теоремы, приспособленную для задачи нагрева. Пусть имеется коцикл (φ, τ) с фазовым пространством $M = M_1 \times M_2$, где M_1 гильбертово, а M_2 - банахово пространство, вообще говоря, не обязательно гильбертово. Отображение φ имеет вид $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, то есть $\varphi_1 : \mathbb{R}_+ \times Q \times M_1 \times M_2 \to M_1$, $\varphi_2 : \mathbb{R}_+ \times Q \times M_1 \times M_2 \to M_2$.

Теорема 7 *Пусть выполнены предположения (H1) для коцикла* (φ, τ), *где* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, *и предположения (H2) и (H3) для семейства отображений* $\{\varphi_1^t(q, \cdot)\}_{t \in \mathbb{R}_+, q \in Q}$. *Пусть также выполняется оценка*

$$\left\| \varphi_2^t(\tau^{-t}(q), v_1, u_1) - \varphi_2^t(\tau^{-t}(q), v_2, u_2) \right\|_{M_2} \leq e^{-ct} \left\| u_1 - u_2 \right\|_{M_2}$$

с некоторой константой $c > 0$ *для любых* $t > 0$, $u_2, u_1 \in M_2$, $v_2, v_1 \in M_1$. *Тогда результат Теоремы 6 справедлив для коцикла* (φ, τ).

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 6 для компоненты φ_1 отображения φ, при этом для компоненты φ_2 аналог свойства (23) выполнен автоматически.□

4 Устойчивые интегралы для коцикла

В последних двух параграфах мы изучим условия существования почти-периодического интеграла для коцикла. Мы используем подход, который подробно был описан в [6] для процессов. В ходе доказательства мы обобщим основные понятия на язык коциклов и приведём аналог теоремы, которая гарантирует существование почти-периодического интеграла.

Здесь и далее предполагаем, что $(M, \|\cdot\|)$ - линейное, полное метрическое пространство. Напомним, что (φ, τ) обозначает, в зависимости от контекста, коцикл $(\{\varphi^t(q, \cdot)\}_{t\in\mathbb{R}_+, q\in Q}, (M, \|\cdot\|))$ над базисным потоком $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (Q, d))$. Предполагаем следующее свойство:

(C) Коцикл (φ, τ) непрерывен в области определения.

Обозначим через Co множество всех коциклов на M над базисным потоком $(\{\tau^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, (Q, d))$. Для $q \in Q$ и $\varphi \in Co$ определим сдвиг $\sigma^s\varphi$ коцикла (φ, τ) как

$$\sigma^s\varphi(t, q, u) := \varphi^t(\tau^s(q), u), \; t, s \in \mathbb{R}_+, u \in M, q \in Q,$$

и множество

$$\gamma_\sigma(\varphi) = \bigcup_{s\in\mathbb{R}_+} \sigma^s\varphi.$$

Очевидно, что $\gamma_\sigma(\varphi) \subset Co$.

Обозначим через $H_\sigma(\varphi)$ все функции $\psi : \mathbb{R}_+ \times Q \times M \to M$ такие, что для некоторой последовательности $\{k_n\} \subset R$, $\{\sigma^{k_n}\varphi\}$ сходится к ψ поточечно на $\mathbb{R}_+ \times Q \times M$ так что $\lim_{n\to\infty}(\sigma^{k_n}\varphi)(t, q, u) = \psi^t(q, u)$, $(t, q, u) \in \mathbb{R}_+ \times Q \times M$.

Множество $H_\sigma(\varphi)$ рассматривается как топологическое пространство и называется оболочкой коцикла (φ, τ).

Рассмотрим коцикл (φ, τ) с фазовым пространством M удовлетворяющий условию

$$H_\sigma(\varphi) \subset Co.$$

Не трудно видеть, что множество $H_\sigma(\varphi)$ инвариантно относительно сдвига σ^s, $s \in \mathbb{R}_+$. Предположим, что $H_\sigma(\varphi)$ секвенциально компактно.

Пусть $\omega_\sigma(\varphi)$ обозначает $\omega-$предельное множество коцикла (φ,τ) относительно сдвига σ^s.

Определение 6 *Неавтономное множество $\hat{Z}=\{Z(q)\}_{q\in Q}$ называется интегралом для коцикла (φ,τ), если оно инвариантно для (φ,τ) и является непрерывным отображением $Z:Q\to M$.*

Далее предполагаем что существует интеграл Z на Q коцикла (φ,τ) такой, что множество $\hat{Z}=\{Z(q):q\in Q\}$ относительно компактно в M.

Из свойства непрерывности косого произведения (C) вытекает, что

$$S^t(\tau^s(q),Z(\tau^s(q)))=(\tau^t(\tau^s(q)),\varphi^t(\tau^s(q),Z(\tau^s(q))))=(\tau^{s+t}(q),Z(\tau^{s+t}(q)))$$

стремится к $(\tau^s(q),Z(\tau^s(q)))$ при $t\to 0+$ равномерно относительно $s\in\mathbb{R}_+, q\in Q$; следовательно интеграл Z на Q должен быть равномерно непрерывен. Используя теорему Арцела-Асколи и секвенциальную компактность $H_\sigma(\varphi)$, получим, что для любой последовательности $\{k_n^{'}\}\subset\mathbb{R}_+$, существуют подпоследовательность $\{k_n\}\subset\mathbb{R}_+$, $\psi\in H_\sigma(\varphi)$ и функция $Y:Q\to M$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^{k_n}\varphi=\psi$$

и

$$\lim_{n\to\infty}Z(\tau^{(\cdot)+k_n}(q))=Y(\tau^{(\cdot)}(q))$$

равномерно на любом компакте в Q. В этом случае будем писать $(Z^{k_n},\sigma^{k_n}\varphi)\to(Y,\psi)$ компактно на Q.

Обозначим через $\Omega(Z,\varphi)$ множество всех (Y,ψ) таких, что $(Z^{k_n},\sigma^{k_n}\varphi)\to(Y,\psi)$ компактно на Q для некоторой последовательности $\{k_n\}\subset\mathbb{R}_+$ такой что $k_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

Включение $(Y,\psi)\in\Omega(Z,\varphi)$ мы будем записывать также в виде $Y\in\omega_\psi(Z)$.

В этом случае, Y - интеграл для коцикла ψ, то есть удовлетворяет условию

$$\psi^t(q,Y(q))=Y(\tau^t(q)),\ t\in\mathbb{R}_+, q\in Q.$$

Введём множество $\mathcal{O}_\varepsilon(u_0)=\{u\in M:\|u-u_0\|<\varepsilon\}$, для любых $u_0\in M$ и $\varepsilon>0$.

Определение 7 *Интеграл $Z:Q\to M$ коцикла (φ,τ) называется*

1. *равномерно устойчивым относительно $q \in Q$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что*

$$\varphi^t(q, \mathcal{O}_\delta(Z(q))) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(Z(\tau^t(q))),\ t \in \mathbb{R}_+, q \in Q.$$

2. *равномерно асимптотически устойчивым относительно $q \in Q$, если оно равномерно устойчиво и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 > 0$ такое что*

$$\varphi^t(q, \mathcal{O}_{\delta_0}(Z(q))) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(Z(\tau^t(q))),\ t \geq t_0, q \in Q.$$

5 Почти-периодические интегралы для почти-периодических коциклов

Определение 8 *Коцикл $\varphi : \mathbb{R}_+ \times Q \times M \to M$, будем называть почти-периодическим, если $\varphi^t(q, u)$ почти-периодический по q, где (t, u) из произвольного ограниченного множества.*

Пусть (φ, τ) почти-периодический коцикл с фазовым пространством M.

По обобщённой теореме Бохнера $\omega_\sigma(\varphi) = H_\sigma(\varphi)$ - минимальное множество.

Кроме того, для любого $\psi \in H_\sigma(\varphi)$ существует последовательность $\{k_n\} \subset \mathbb{R}_+$ такая, что $\varphi^t(\tau^{k_n}(q), u) \to \psi^t(q, u)$ при $n \to \infty$ равномерно по $q \in Q$, (t, u) из произвольного ограниченного множества в $\mathbb{R}_+ \times M$.

Рассмотрим метрику ϱ на $H_\sigma(\varphi)$ определённую формулой

$$\varrho(\psi, \tilde{\psi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varrho_n(\psi, \tilde{\psi})}{1 + \varrho_n(\psi, \tilde{\psi})},$$

где $\varrho_n(\psi, \tilde{\psi}) = \sup\{\|\psi^t(q, u) - \tilde{\psi}^t(q, u)\| : 0 \leq t \leq n, q \in Q, \|u - u_0\| \leq n\}$, и u_0 - фиксированный элемент из M. Тогда $\psi \in H_\sigma(\varphi)$ означает, что $\rho(\sigma^{k_n}\varphi, \psi) \to 0$ при $n \to \infty$, для некоторой последовательности $\{k_n\} \subset \mathbb{R}_+$.

Определение 9 *Интеграл Z на Q называется асимптотически почти-периодическим если он является суммой непрерывной почти-периодической функции $Z_1(q)$ и непрерывной функции $Z_2(q)$ определённой на Q которая стремится к нулю*

$$Z(q) = Z_1(q) + Z_2(q).$$

Пусть Z - интеграл на Q такой, что множество $\hat{Z} = \{Z(q) : q \in Q\}$ относительно компактно в M. Для случая $Q = \mathbb{R}$ известно ([7]), что интеграл Z является асимптотически почти-периодическим тогда и только тогда, когда выполнено следующее свойство:

(L) Для любой последовательности $\{k_n^{'}\}$ такой, что $k_n^{'} \to \infty$, существует подпоследовательность $\{k_n\}$, для которой $Z(\tau^{k_n}(q))$ сходится равномерно на Q.

Сейчас для интеграла Z на Q почти-периодического коцикла (φ, τ) рассмотрим следующее свойство:

(A) Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для некоторого $q_0 \in Q$, верно $Y(\tau^t(q_0)) \in \mathcal{O}_\varepsilon(Z(\tau^{h+t}(q_0)))$ для всех $t \geq 0$ при условии, что $(Y, \psi) \in \Omega(Z, \varphi)$, $Y(q_0) \in \mathcal{O}_{\delta(\varepsilon)}(Z(\tau^h(q_0)))$ и $\varrho(\sigma^h\varphi, \psi) < \delta(\varepsilon)$, для некоторого $h \geq 0$.

Теорема 8 *Предположим, что Z - интеграл на Q почти-периодического коцикла (φ, τ) такой, что множество $\hat{Z} = \{Z(q) : q \in Q\}$ относительно компактно в M. Тогда Z асимптотически почти-периодической тогда и только тогда, когда выполнено Свойство (A).*

Доказательство. Предположим, что для $Z(q)$ выполнено Свойство (A) и пусть $\{t_n^{'}\}$ последовательность, такая что $t_n^{'} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Тогда существует подпоследовательность $\{t_n\}$ и пара $(Y, \psi) \in \Omega(Z, \varphi)$ такие, что $(Z^{t_n}, \sigma^{t_n}\varphi) \to (Y, \psi)$ компактно на Q.

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $n_0(\varepsilon) > 0$ такое, что если $n > n_0(\varepsilon)$, $q_0 \in Q$ тогда $Y(q_0) \in \mathcal{O}_{\delta(\varepsilon)}(Z(\tau^{t_n}(q_0)))$ и $\varrho(\sigma^{t_n}\varphi, \psi) < \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon)$ из Свойства (A).

Откуда следует, что

$$Y(\tau^t(q_0)) \in \mathcal{O}_\varepsilon(Z(\tau^{t+t_n}(q_0))),\ t \geq 0.$$

Таким образом Z удовлетворяет Свойству (L) и значит асимптотически почти-периодический.

Предположим сейчас, что Z - интеграл, но Свойство (A) не выполняется. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательности $(Y^n, \psi^n) \in \Omega(Z, \varphi)$, $h_n \geq 0$ и $t_n \geq 0$ такие, что для некоторого $q_0 \in Q$ выполнено следующее

$$Y^n(\tau^{t_n}(q_0)) \in \partial\mathcal{O}_\varepsilon(Z(\tau^{t_n+h_n}(q_0))), \tag{28}$$

$$Y^n(q_0) \in \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(Z(\tau^{h_n}(q_0))), \tag{29}$$

$$\varrho(\psi^n, \sigma^{h_n}\varphi) < \frac{1}{n}, \tag{30}$$

где $\partial\mathcal{O}_\varepsilon$ граница $\mathcal{O}_\varepsilon$.

Мы можем предположить, что для функции $Y(q)$

$$\|Y^n(q_0) - Y(q_0)\| \to 0 \tag{31}$$

равномерно на Q при $n \to \infty$, потому что $Y^n \in \Omega(Z)$ и $Z(q)$ асимптотически почти-периодические.

Покажем, что $h_n \to \infty$. Пусть это не так. Тогда можно предположить, что существует $h \geq 0, h_n \to h$ при $n \to \infty$. Тогда из неравенства треугольника получим, что

$$\varrho(\sigma^h\varphi, \psi^n) \leq \varrho(\sigma^h\varphi, \sigma^{h_n}\varphi) + \varrho(\sigma^{h_n}\varphi, \psi^n),$$

и из (30) имеем $\varrho(\sigma^h\varphi, \psi^n) \to 0$, при $n \to \infty$.

Здесь заметим, что $\varphi^t(\tau^{s+h}(q_0), Y(\tau^s(q_0))) = Y(\tau^{t+s}(q_0))$, потому что

$$\varphi^t(\tau^{s+h}(q_0), Y(\tau^s(q_0))) = (\sigma^h\varphi)(t, \tau^s(q_0), Y(\tau^s(q_0)))$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\psi^n)^t(\tau^s(q_0), Y^n(\tau^s(q_0))) = \lim_{n\to\infty} Y^n(\tau^{t+s}(q_0)).$$

Поскольку

$$\|Z(\tau^h(q_0)) - Y(q_0)\| \leq$$
$$\|Z(\tau^h(q_0)) - Z(\tau^{h_n}(q_0))\| + \|Z(\tau^{h_n}(q_0)) - Y^n(q_0)\| + \|Y^n(q_0) - Y(q_0)\|$$

и

$$\|Z(\tau^h(q_0)) - Z(\tau^{h_n}(q_0))\| \to 0$$

при $n \to \infty$, то опираясь на (29) и (31) получим, что $\|Z(\tau^h(q_0)) - Y(q_0)\| = 0$.

Тогда

$$Z(\tau^{t+h}(q_0)) = \varphi^t(\tau^h(q_0), Z(\tau^h(q_0))) = \varphi^t(\tau^h(q_0), Y(q_0)) = Y(\tau^t(q_0))$$

для $t \in \mathbb{R}_+$. В частности,

$$\|Z(\tau^{t_n+h}(q_0)) - Y(\tau^{t_n}(q_0))\| = 0 \tag{32}$$

для любого натурального n.

С другой стороны для достаточно больших n мы воспользуемся (28), (31) и равномерной непрерывностью $Z(p)$ на Q, чтобы показать

$$\|Z(\tau^{t_n+h}(q_0)) - Y(\tau^{t_n}(q_0))\| \geq$$

$$\|Z(\tau^{t_n+h_n}(q_0)) - Y^n(\tau^{t_n}(q_0))\|$$
$$-\|Z(\tau^{t_n+h_n}(q_0)) - Z(\tau^{t_n+h}(q_0))\|$$
$$-\|Y^n(\tau^{t_n}(q_0)) - Y(\tau^{t_n}(q_0))\|$$
$$\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} > 0.$$

Получили противоречие (32).

Исходя из свойств секвенциальной компактности оболочки $H_\sigma(\varphi)$ и асимптотической почти-периодичности функции $Z(q)$ мы можем предположить, что

$$(Z^{h_n}, \sigma^{h_n}\varphi) \to (\tilde{Y}, \psi) \tag{33}$$

компактно на Q для некоторых $(\tilde{Y}, \psi) \in \Omega(Z, \varphi)$. Поскольку для некоторого $q_0 \in Q$

$$\|\tilde{Y}(q_0) - Y(q_0)\| \leq$$
$$\|\tilde{Y}(q_0) - Z(\tau^{h_n}(q_0))\| + \|Z(\tau^{h_n}(q_0)) - Y^n(q_0)\| + \|Y^n(q_0) - Y(q_0)\|,$$

то из (29), (31) и (33) следует, что $\tilde{Y}(q_0) = Y(q_0)$. Следовательно, используя (30),(31) и (33), имеем для любых $t \in \mathbb{R}_+$

$$\tilde{Y}(\tau^t(q_0)) = \psi^t(q_0, \tilde{Y}(q_0)) = \psi^t(q_0, Y(q_0)) =$$
$$\lim_{n\to\infty} (\sigma^{t_n}\varphi)(t, q_0, Y^n(q_0)) = \lim_{n\to\infty} \psi^n(q_0, Y^n(q_0)) =$$
$$\lim_{n\to\infty} Y^n(\tau^t(q_0)) = Y(\tau^t(q_0)).$$

Таким образом, для любых $t \in \mathbb{R}_+$ мы имеем неравенство

$$\|Z(\tau^{h_n+t}(q_0)) - Y^n(\tau^t(q_0))\| \leq$$
$$\|Z(\tau^{h_n+t}(q_0)) - \tilde{Y}(\tau^t(q_0))\| + \|Y^n(\tau^t(q_0) - Y(\tau^t(q_0))\| < \varepsilon$$

при достаточно больших n, что противоречит (28). Теорема доказана. $\square$

Теорема 9 *Если интеграл Z на Q почти-периодического коцикла (φ, τ) асимптотически почти-периодический, то существует почти-периодический интеграл коцикла (φ, τ).*

Доказательство. Так как (φ, τ) почти-периодический коцикл, то существует последовательность $\{t_n\}, t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такая, что $(\sigma^{t_n}\varphi)(t, q, u) \to \varphi^t(q, u)$ равномерно относительно $q \in Q$ и (t, u) из произвольного ограниченного множества. Интеграл $Z(q) = Z_1(q) + Z_2(q)$, где $Z_1(q)$ - почти-периодический и $Z_2(\tau^t(q_0)) \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, мы можем предположить, что $Z_1(\tau^{t+t_n}(q_0)) \to Z_1^*(\tau^t(q_0))$ при $n \to \infty$ равномерно по $q \in Q$, где Z_1^* почти-периодическая. Поэтому $(Z_1^*, \varphi) \in \Omega(Z, \varphi)$, Z_1^* - почти-периодический интеграл коцикла (φ, τ). $\square$

Лемма 1 *Пусть $T > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\|Z(\tau^s(q_0)) - Z_1(q_0)\| < \delta(\varepsilon)$ и $\varrho(\sigma^s\varphi, \psi) < \delta(\varepsilon)$ вытекает, что выполняется $Z_1(\tau^t(q_0)) \in \mathcal{O}_\varepsilon(Z(\tau^{s+t}(q_0)))$ для $t \in [0, T]$, $q_0 \in Q, s \in \mathbb{R}_+$ и $(Z_1, \psi) \in \Omega(Z, \varphi)$.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда, для некоторого $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\{s_n\}$, $s_n \in \mathbb{R}_+$, $\{h_n\}$, $0 < h_n < T$, и $(Z_1^n, v^n) \in \Omega(Z, \varphi)$ такие, что

$$\varrho(\sigma^{s_n}\varphi, \psi^n) < \frac{1}{n}$$

$$Z_1^n(q_0) \in \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(Z(\tau^{s_n}(q_0)))$$

$$Z_1^n(\tau^t(q_0)) \in \mathcal{O}_\varepsilon(Z(\tau^{s_n+t}(q_0))),\ t \in [0, h_n)$$

и

$$Z_1^n(\tau^{h_n}(q_0)) \in \partial\mathcal{O}_\varepsilon(Z(\tau^{s_n+h_n}(q_0))).$$

Так как $h_n \in [0, T]$, мы также можем предположить, что $h_n \to h \in [0, T]$ при $n \to \infty$. В силу того, что $\Omega(Z, \varphi)$ компактно, мы можем предположить, что

$$(Z_1^n, \psi^n) \to (Z_1, \psi) \in \Omega(Z, \varphi)$$

и

$$(Z^{s_n}, \sigma^{s_n}\varphi) \to (\tilde{Y}, \psi) \in \Omega(Z, \varphi)$$

при $n \to \infty$, соответственно. Тогда $Z_1(\tau^h(q_0)) \in \partial\mathcal{O}_\varepsilon(\tilde{Y}(\tau^h(q_0)))$.

С другой стороны, так как $Z_1(q_0) = \tilde{Y}(q_0)$, мы имеем $Z_1(\tau^t(q_0)) = \tilde{Y}(\tau^t(q_0))$ на Q (2). Получим противоречие. $\square$

Лемма 2 *Предположим, что (φ, τ) почти-периодический коцикл на M. Если интеграл Z на Q равномерно асимптотически устойчивый, тогда он равномерно асимптотически устойчивый в $\omega_\sigma(\varphi)$.*

Доказательство. Пусть $h_k \to \infty$ при $k \to \infty$ и $(Z^{h_k}, \sigma^{t_k}\varphi) \to (Y, \psi) \in \Omega(Z, \varphi)$ компактно на Q.

Пусть $m \in \mathbb{R}_+$ фиксировано.

Если k достаточно большое, то для некоторого $q_0 \in Q$ выполняется

$$Y(\tau^m(q_0)) \in \mathcal{O}_{\delta(\varepsilon/2)/2}(Z(\tau^{h_k+m}(q_0))).$$

Пусть $Z' \in \mathcal{O}_{\delta(\varepsilon/2)/2}(Y(\tau^m(q_0)))$. Тогда верно

$$(\sigma^{\tau_k}\varphi)(t, \tau^m(q_0), Z') = \varphi^t(\tau^{h_k+m}(q_0), Z') \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(Z(\tau^{t+h_k+m}(q_0)))$$

для любого $t > m$, $q_0 \in Q$ вследствие того, что $Z' \in \mathcal{O}_{\delta(\varepsilon/2)}(Z(\tau^{h_k+m}(q_0)))$.

Так как
$$(\sigma^{h_k}\varphi)(t, \tau^m(q_0), Z') \to \psi^t(\tau^m(q_0), Z')$$
и
$$Z(\tau^{t+h_k+m}(q_0)) \to Y(\tau^{t+m}(q_0)),$$
мы получим, что
$$\psi^t(\tau^m(q_0), Z') \in \overline{\mathcal{O}_{\varepsilon/2}(Z'(\tau^{t+m}(q_0)))}$$
для любого $t \geq m$. Следовательно $Y(q)$ равномерно устойчивый.

Сейчас мы покажем, что $Y(\tau^m(q_0))$ асимптотически равномерно устойчивый.

Пусть
$$Z' \in \mathcal{O}_{\delta_0/2}(Y(\tau^m(q_0)))$$
и
$$Y(\tau^m(q_0)) \in \mathcal{O}_{\delta_0/2}(Z(\tau^{h_k+m}(q_0))).$$

Так как $Z(q)$ - асимптотически равномерно устойчивый, мы имеем
$$\varphi^t(\tau^{h_k+m}(q_0), Z') \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(Z(\tau^{t+h_k+m}(q_0))$$
для $t \geq t_0(\varepsilon/2)$, в силу того, что $Z' \in \mathcal{O}_{\delta_0}(Z(\tau^{h_k+m}(q_0))$. Следовательно,
$$\psi^t(\tau^m(q_0), Z') \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(Y(\tau^{t+m}(q_0))$$
для $t \geq t_0(\varepsilon/2)$.$\Box$

Теорема 10 *Предположим, что (φ, τ) почти-периодический коцикл на M, и пусть Z интеграл на Q, такой что множество $\hat{Z} = \{Z(q)\}_{q\in Q}$ относительно компактно в M. Если интеграл Z равномерно асимптотически устойчивый, тогда выполнено Свойство (A). Следовательно он асимптотически почти-периодический.*

Доказательство. Предположим, что для $Z(q)$ не выполняется Свойство (A). Тогда существуют последовательности $\{t_n\}, t_n \geq 0, \{r_n\}, r_n > 0, (Z_1^n, \psi^n) \in \Omega(Z, \varphi)$ и константы $\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta_0/2$ такие, что
$$Z_1^n(q_0) \in \mathcal{O}_{\frac{1}{n}}(Z(\tau^{t_n}(q_0))),\ \varrho(\psi^n, \sigma^{t_n}\varphi) < \frac{1}{n} \tag{34}$$
и
$$Z_1^n(\tau^{r_n}(q_0)) \in \partial\mathcal{O}_{\delta_1}(Z(\tau^{t_n+r_n}(q_0))),$$

$$Z_1^n(\tau^t(q_0)) \in \mathcal{O}_{\delta_1}(Z(\tau^{t+t_n}(q_0))), \tag{35}$$

на $[0, r_n)$, где δ_0 из определения асимптотически равномерно устойчивого интеграла Z. Из Леммы 2 следует, что Z асимптотически равномерно устойчивый в $\omega_\sigma(\varphi)$. Пусть $\delta(\cdot)$ из определения равномерно устойчивого интеграла Z в $\omega_\sigma(\varphi)$.

Существует последовательность $\{\xi_n\}, 0 < \xi_n < r_n$ такая, что

$$Z_1^n(\tau^{\xi_n}(q_0)) \in \partial\mathcal{O}_{\delta(\delta_1/2)/2}(Z(\tau^{t_n+\xi_n}(q_0))) \tag{36}$$

и

$$Z_1^n(\tau^t(q_0)) \in \overline{\mathcal{O}_{\delta_1} Z(\tau^{t+t_n}(q_0))} \setminus \mathcal{O}_{\delta(\delta_1/2)/2}(Z(\tau^{t+t_n}(q_0))), \tag{37}$$

на $[\xi_n, r_n]$, для достаточно больших n, если выполнены (34) и (35).

Предположим, что существует подпоследовательность $\{\xi_n\}$, которую мы так же обозначим через $\{\xi_n\}$, такая, что ξ_n сходится к некоторому $\xi \in \mathbb{R}_+$. Из (34) следует, что существует $n_0 > 0$ такое, что $n \geq n_0$, $\xi + 1 \geq \xi_n \geq 0$ и

$$Z_1^n(\tau^t(q_0)) \in \mathcal{O}_{\delta(\delta_1/2)/4}(Z(\tau^{t+t_n}(q_0)))$$

для $t \in [0, \xi + 1]$ в силу Леммы 1. Получим противоречие с (36). Следовательно, $\xi_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Пусть $\zeta_n = r_n - \xi_n$ и пусть $\zeta_n \to \infty$. Обозначим $s_n = \xi_n + (\zeta_n/2)$. Из (34) и компактности $\Omega(Z, \varphi)$ мы можем предположить, что $((Z_1^n)^{s_n}, \sigma^{s_n}\psi^n)$ и $(Z^{t_n+s_n}, \sigma^{t_n+s_n}\varphi)$ стремятся к некоторым (Z_1^n, ψ), $(\tilde{Y}, \psi) \in \Omega(Z, \varphi)$ компактно на Q при $n \to \infty$, соответственно.

Для любого фиксированного $t > 0$ можно выбрать $n_1 > 0$ такое, что для произвольного $n \geq n_1, r_n - s_n = \zeta_n/2 > t$ в силу того, что $\zeta_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому для $n \geq n_1$ мы имеем $\xi_n < t + s_n < r_n$ и, используя (37), получим

$$Z_1^n(\tau^{t+s_n}(q_0)) \notin \mathcal{O}_{\delta(\delta_1/2)/2}(Z(\tau^{t+t_n+s_n}(q_0))). \tag{38}$$

Существует $n_2 \geq n_1$ такое, что для каждого $n \geq n_2$

$$\begin{aligned} Z_1^n(\tau^{t+s_n}(q_0)) &\in \overline{\mathcal{O}_{\delta(\delta_1/2)/8}(Z(\tau^{t+t_n}(q_0)))}, \\ \tilde{Y}(\tau^t(q_0)) &\in \overline{\mathcal{O}_{\delta(\delta_1/2)/8}(Z(\tau^{t+t_n+s_n}(q_0)))}. \end{aligned} \tag{39}$$

Далее из (38) и (39) следует, что для каждого $n \geq n_2$,

$$\|Z_1(\tau^t(q_0)) - \tilde{Y}(\tau^t(q_0))\| \geq \|\phi_1^n(\tau^{t+s_n}(q_0)) - Z(\tau^{t+t_n+s_n}(q_0))\|$$

$$-\|Z(\tau^{t+t_n+s_n}(q_0)) - \tilde{Y}(\tau^t(q_0))\| - \|\phi_1^n(\tau^{t+s_n}(q_0)) - Z_1(\tau^t(q_0))\| \geq \delta(\delta_1/2)/4. \quad (40)$$

Однако, в силу того, что $\tilde{Y}(q_0) \in \mathcal{O}_{\delta_0/2}(Z_1(q_0))$, и равномерной асимптотической устойчивости $Z(q)$ следует, что $\|Z_1(\tau^t(q_0)) - \tilde{Y}(\tau^t(q_0))\| \to 0$ при $t \to \infty$ что противоречит (40).

Сейчас мы можем предположить, что ζ_n сходится к некоторому $\zeta \in \mathbb{R}_+$ при $n \to \infty$, и что $0 \leq \zeta_n \leq \zeta + 1$ для всех n. Более того, мы можем предположить, что $((\phi_1^n)^{\xi_n}, \sigma^{\xi_n}\psi^n)$ и $(Z^{t_n+\xi_n}, \sigma^{t_n+\xi_n}\varphi)$ стремятся к некоторым $(Y, \tilde{\psi})$, $(\tilde{Z}, \tilde{\psi}) \in \Omega(Z, \varphi)$ при $n \to \infty$, соответственно.

В силу того, что $\|Y(q_0) - \tilde{Z}(q_0)\| = \delta(\delta_1/2)/2$ (следует из (36)), мы имеем $Y(\tau^\zeta(q_0)) \in \mathcal{O}_{\delta_1/2}(\tilde{Z}(\tau^\zeta(q_0)))$.

Однако, мы получим противоречие (35), потому что

$$\begin{gathered}
\|Y(\tau^t(q_0)) - \tilde{Z}(\tau^t(q_0))\| \geq \\
\|Z(\tau^{t_n+r_n}(q_0)) - \phi_1^n(\tau^{r_n}(q_0))\| - \|Y(\tau^t(q_0)) - \phi_1^n(\tau^{\xi_n+p}(q_0))\| \\
-\|\phi_1^n(\tau^{\xi_n+\zeta_n}(q_0)) - \phi_1^n(\tau^{\xi_n+p}(q_0))\| - \|\phi_1^n(\tau^{\xi_n+\zeta_n}(q_0) - \phi_1^n(\tau^{r_n}(q_0))\| \\
-\|Z(\tau^{t_n+r_n}(q_0)) - \tilde{Z}(\tau^{\zeta_n}(q_0))\| - \|\tilde{Z}(\tau^{\zeta_n}(q_0)) - \tilde{Z}(\tau^t(q_0))\| \\
\geq \delta_1/2
\end{gathered}$$

для всех достаточно больших n. Таким образом, для интеграла Z должно выполняется Свойство (A).□

Список литературы

[1] Панков, А.А., Ограниченность и почти-периодичность по времени решений эволюционных вариационных неравенств, *Известия АН СССР. Серия Математическая*, 1982, том 46, выпуск 2, стр. 314–346.

[2] Чуешов, И.Д., Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 4(322), стр. 77–124.

[3] Chueshov, I., Order-Preserving Skew-Product Flows and Nonautonomous Parabolic Systems, *Acta Applicandae Mathematicae*, 2001, vol. 65, pp. 185-205.

[4] Foias, C., Temam, R., Determination of the Solutions of the Navier-Stokes Equations by a Set of Nodal Values, *Mathematics of Computation*, 1984, vol. 43, pp. 117-133.

[5] Glassey, R., Yin, H.-M., On Maxwell's Equations with a Temperature Effect, II, *Communications in Mathematical Physics*, 1998, vol. 194, pp. 343-358.

[6] Hino, Y. and Murakami, S., Almost Periodic Processes and the Existence of Almost Periodic Solutions, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 1998, no. 3, pp. 1-19.

[7] Hino, Y., Murakami, S. and Yoshizawa, T., Stability and Existence of Almost Periodic Solutions for Abstract Functional Differential Equations with Infinite Delay, *Tohoku Mathematical J.*, 1997, vol. 49, pp. 133-147.

[8] Jones, D. and Titi, E., Upper Bounds on the Number of Determining Modes, Nodes, and Volume Elements for the Navier- Stokes Equations, *Indiana University Mathematics Journal*, 1993, vol. 42, no. 3, pp. 875-887.

[9] Kalinin, Y., Reitmann, V., Yumaguzin, N., Asymptotic Behaviour of Maxwell's Equation in One-Space Dimension With Thermal Effect, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 2011, vol. 16, no. 2, pp. 343-353.

[10] Kantz, H., Reitmann, V., Determining Functionals for Bifurcations on a Finite-Time Interval in Variational Inequalities, *In: Proceedings of the International Conference on Differential Equations, EQUADIFF, Hasselt-Belgium, 2003, Preprint Series DFG-SPP 1114*, 2003, pp. 1-16.

[11] Kloeden, P., Schmalfuss, B., Nonautonomous Systems, Cocycle Attractors and Variable Time-Step Discretization, *Numerical Algorithms*, 1997, vol. 14, pp. 141-152.

[12] Langa, J.A., Asymptotically Finite Dimensional Pullback Behaviour of Non-autonomous PDEs, *Archiv der Mathematik*, 2003, vol. 80, pp. 525-535.

[13] Manoranjan, V.S., Yin, H.-M., Showalter, R., On Two-Phase Stefan Problem Arising from a Microwave Heating Process, *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 2006, vol. 15, no. 4, pp. 1155-1168.

[14] Morgan, J., Yin, H.-M., On Maxwell's System with a Thermal Effect, *Discrete and Dynamical Systems Series B*, 2001, vol. 1, no. 4, pp. 485-494.

[15] Temam, R., *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, New York, 1993.

[16] Yin, H.-M., On Maxwell's Equations in an Electromagnetic Field with the Temperature Effect, *SIAM J. on Mathematical Analysis*, 1998, vol. 29, pp. 637-651.