

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№3, 2017

Электронный журнал,

рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Теория обыкновенных дифференциальных  
уравнений

## СУБОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВОЗМУЩЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ<sup>1</sup>

А.А. Рогоза

Московский государственный технический университет им. Н.Э.

Баумана, Калужский филиал. 248000, Россия, г. Калуга, ул.

Баженова, д. 2. e-mail: [Aemaeth\\_eternity@mail.ru](mailto:Aemaeth_eternity@mail.ru)

### Аннотация

В настоящей статье построен новый проекционный метод решения класса сингулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, в том числе в условиях возмущенного интегрального оператора, что актуально для задач робастного управления в математической теории управления. Проведено исследование свойств этого метода и разработан алгоритм его численной реализации. В частности построена модификация проекционного метода Галеркина, предназначенного для решения сингулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с возмущенным оператором и использующего пространство кусочно-линейных функций в качестве аппроксимирующего пространства. Получены оценки погрешностей этого метода для уравнений с сингулярными ядрами и гладкими правыми частями уравнения, принадлежащими следующим пространствам: весовым лебеговым пространствам, пространству непрерывных функций, пространству Соболева. Разработан эффективный алгоритм численной реализации рассматриваемого проекционного метода, ориентированного в первую очередь на применение ЭВМ. Проведена серия

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Калужской области (грант № 14-41-03071).

вычислительных экспериментов для оценки качества предложенного проекционного метода и его реализация. В рамках этого пункта решаемой задачей является: задача синтеза робастного регулятора в условиях параметрических неопределенностей на основе вероятностных методов.

**Ключевые слова:** сингулярное интегральное уравнение второго рода с возмущенным оператором, метод Галеркина, финитные функции, вероятностные методы, оценка степени робастности.

### **Abstract**

In this article we constructed a new projection method for solving a class of singular Fredholm integral equations of the second kind including the disturbed integral operator, which is important for tasks of robust control in mathematical control theory. We also studied the properties of this method and designed the algorithm of its numerical implementation. In particular a modification of the Galerkin projection method for solving singular integral equations of Fredholm of the second kind with perturbed operator and piecewise linear functions as the approximating space has been constructed. The resulting estimation errors of this method for equations with a singular smooth kernels and right parts belonging to weight Lebesgue spaces, space of continuous functions, and Sobolev space have been obtained. The effective algorithm for numerical realization of the projection method is designed. We performed a series of computational experiments to assess the quality of the proposed projection method. In the context of this point the problem to be solved is the based on probabilistic methods synthesis of robust controller under parametric uncertainty.

**Keywords:** singular integral equation of the second kind with perturbed operator, Galerkin method, finite functions, probabilistic methods to assess the degree of robustness.

### **1. Введение**

Интегральные уравнения возникают при математическом описании различного рода процессов в науке: механике, физике, математической теории управления и др. Теория интегральных уравнений активно развивалась с конца XIX столетия, причем одновременно начали развиваться и численные методы. Интенсивно теория численного решения интегральных уравнений начала развиваться в 50-х годах прошлого столетия.

Одним из основных подходов к численному решению операторных уравнений во второй половине XX века являются проекционные методы. Наиболее популярным, из которых, является метод Галеркина. Наибольшее развитие к настоящему времени получили методы решения интегральных уравнений с «хорошими ядрами» и правыми частями.

Сингулярные интегральные уравнения находят важные применения при описании разнообразных физических процессов в энергетике, а так же в математической теории управления. Построение и исследование эффективных приближенных методов решения сингулярных интегральных уравнений является

важной и актуальной областью вычислительной математики. Построению и исследованию свойств проекционных методов решения этого класса уравнений, посвящена настоящая работа.

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение с возмущенным оператором

$$x(t) = \varpi \int_0^T [K(t-\tau) + \Delta K(t-\tau)] x(\tau) d\tau + f(\tau), \tau \in J = [0, T].$$

Несмотря на кажущуюся простоту при численном решении данного уравнения возникают существенные трудности [4] (в статье рассмотрено слабо сингулярное интегральное уравнение в отсутствие возмущения в ядре  $-\Delta K(t-\tau) \equiv 0$ , тем не менее, отражены основные трудности решения уравнения (1) на примере интегрального уравнения переноса излучения, которое относится к рассматриваемому классу уравнения (1)), особенно в случае  $T \ll 1$  и  $\varpi \approx 1$ . В последнее десятилетие различным численным и асимптотическим методам решения рассматриваемого уравнения при  $\Delta K(t-\tau) \equiv 0$  было посвящено значительное число работ [5] – [19]. Однако в случае возмущенного интегрального оператора, работ на порядок меньше. Следует отметить, что уравнение рассматриваемого класса особенно актуально в математической теории управления, в задачах управления в условиях параметрических неопределенностей [1].

Решению данного уравнения и вопросам практического применения в математической теории управления посвящена данная работа.

## 2. Постановка задачи, применяемый метод.

*Постановка задачи.*

Рассмотрим слабо сингулярное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с возмущенным интегральным оператором

$$x(t) = \varpi \int_0^T [K(t-\tau) + \Delta K(t-\tau)] x(\tau) d\tau + f(\tau), \tau \in J = [0, T]. \quad (1)$$

Предполагается, что ядро  $K(t-\tau)$ , а так же возмущение ядра  $\Delta K(t-\tau)$  является функцией заданной на  $R^+ = (0, +\infty)$ , причем  $K(0^+), \Delta K(0^+) = +\infty$  (уравнение сингулярно) и  $K, \Delta K \in L_r(R^+)$  для всех  $r \in [1, +\infty)$  (последнее означает слабую сингулярность); кроме того,  $\|K(t-\tau)\|_{L_1(R^+)} < \delta$ . Параметр  $\varpi \in (0, 1)$  фиксирован.

Так же наложим требование, что функция  $f(\tau)$  не обязательно должна быть гладкой. Предполагается, что  $f \in L_p(J), 1 \leq p \leq \infty$  либо  $f \in C(\bar{J})$  или  $f \in W_p^1(J), 1 \leq p \leq \infty$ .

*Применяемый метод.*

Введем некоторые обозначения и приведем ряд свойств уравнения (1). Через  $\bar{p}$ , при  $p \in [1, +\infty]$ , обозначим сопряженный по Гёльдеру показатель, такой, что выполняется условие

$$1/p + 1/\bar{p} = 1. \quad (2)$$

Обозначим:

$$(f, g) = \int_0^T f(\tau) g(\tau) d\tau, \quad (3)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{1-\varpi}, \gamma_1 = \frac{\varpi}{1-\varpi}, \gamma_2 = \frac{\varpi^2}{1-\varpi}, \quad (4)$$

$$E_r = \|K(\cdot) + \Delta K(\cdot)\|_{L_r(R)} = 2^{1/r} \|K(\cdot) + \Delta K(\cdot)\|_{L_r(R^+)}, \quad 1 \leq r < \infty. \quad (5)$$

Введем интегральные операторы:

$$(\mathbf{T}x)(t) = \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in J, \quad (6)$$

$$(\Delta \mathbf{T}x)(t) = \int_0^t \Delta K(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad t \in J, \quad (7)$$

тогда уравнение (1) можно переписать в операторной форме с учетом введённых обозначений:

$$x = \varpi(\mathbf{T}x + \Delta \mathbf{T}x) + f. \quad (8)$$

Известно, что  $\mathbf{T}, \Delta \mathbf{T}: L_p(J) \rightarrow L_q(J)$  для всех  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$  таких, что  $1/s = 1 - 1/p + 1/q > 0$ , причем

$$\|\mathbf{T}\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)}, \|\Delta \mathbf{T}\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)} \leq E_s. \quad (9)$$

Кроме того,  $\mathbf{T}, \Delta \mathbf{T}: L_p(J) \rightarrow C(\bar{J})$  для всех  $1 \leq p \leq +\infty$ , причем

$$\|\mathbf{T}\|_{L_p(J) \rightarrow C(\bar{J})}, \|\Delta \mathbf{T}\|_{L_p(J) \rightarrow C(\bar{J})} \leq E_p^-. \quad (10)$$

Учитывая введенное предположение  $\|K(t-\tau)\|_{L_1(R^+)}, \|\Delta K(t-\tau)\|_{L_1(R^+)} < \delta$  следует, что  $\|\mathbf{T}\|_{L_p(J) \rightarrow L_p(J)}, \|\Delta \mathbf{T}\|_{L_p(J) \rightarrow L_p(J)} \leq E_1, 1 \leq p \leq +\infty$ . Из последнего следует, что в силу принципа сжимающих отображений для всех  $f \in L_p(J), p \in [1, +\infty]$  уравнение (8) имеет единственное решение  $x \in L_p(J)$ , которое удовлетворяет оценке  $\|x\|_{L_p(J)} \leq \gamma_0 \|f\|_{L_p(J)}$ . В противном случае, если  $f \in C(\bar{J})$ , то  $x \in C(\bar{J})$  и справедлива оценка  $\|x\|_{C(\bar{J})} \leq \gamma_0 \|f\|_{C(\bar{J})}$ .

Если  $\mathbf{T}, \Delta \mathbf{T}: W_p^1(J) \rightarrow W_p^1(J)$  для всех  $1 \leq p \leq +\infty$ , причем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\mathbf{T}x(\tau) + \Delta\mathbf{T}x(\tau)) &= \mathbf{T} \frac{d}{d\tau}x(\tau) + K(\tau)x(0) - K^*(\tau)x(T) + \\ &+ \Delta\mathbf{T} \frac{d}{d\tau}x(\tau) + \Delta K(\tau)x(0) - \Delta K^*(\tau)x(T), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $K^*(\tau) = K(T - \tau)$ ,  $\Delta K^*(\tau) = \Delta K(T - \tau)$ , из последнего

$$\left\| \frac{d}{d\tau} \mathbf{T}x \right\|_{L_q(J)} \leq E_s \left\| \frac{d}{d\tau} x \right\|_{L_p(J)} + E_q \|x\|_{C(\bar{J})}. \quad (12)$$

Если  $f \in W_p^1(J)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , то решение уравнения (8) принадлежит пространству  $W_p^1(J)$ , причем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}x &= \varpi \mathbf{T} \frac{d}{d\tau}x + \varpi Kx(0) - \varpi K^*x(T) + \\ &+ \varpi \Delta \mathbf{T} \frac{d}{d\tau}x + \varpi \Delta Kx(0) - \varpi \Delta K^*x(T) + \frac{d}{d\tau}f, \end{aligned} \quad (13)$$

из которого следует оценка

$$\left\| \frac{d}{d\tau}x \right\|_{L_p(J)} \leq \gamma_0 \left( \left\| \frac{d}{d\tau}f \right\|_{L_p(J)} + E_p \gamma_1 \|f\|_{C(\bar{J})} \right). \quad (14)$$

Подводя итог, из приведенных оценок и равенства (13) можно заключить, что  $\left| \frac{d}{d\tau}x(\tau) \right| \rightarrow +\infty$ ,  $\tau \rightarrow 0$  и при  $\tau \rightarrow T$ . Это приводит к тому, что решение уравнения (8) в точках  $\tau=0$  и  $\tau=T$  составляет одну из проблем численного решения подобного класса уравнений.

Пусть  $B = L_p(J)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  или  $B = C(\bar{J})$ , через  $P_l$  – обозначим линейный оператор, действующий из  $B$  в конечномерное пространство  $B_l \subset B$ , такой, что  $\|P_l\|_{B \rightarrow B} \leq 1$ . Рассмотрим метод галеркинского типа решения уравнения (8) с возмущенным оператором, в котором приближенное решение  $x_l \in B_l$ , определяется как решение операторного уравнения

$$x_l(t) \cong P_l[x_l] \equiv P_l[\varpi(\mathbf{T}x_l + \Delta\mathbf{T}x_l)] + P_l[f]. \quad (15)$$

В случае, когда  $P_l$  – оператор проектирования, (15) означает равенство нулю проекции невязки  $P_l[r_l]$ ,  $r_l = x_l - \varpi(\mathbf{T}x_l + \Delta\mathbf{T}x_l) - f$  на конечномерное подпространство  $B_l$ . Учитывая, что

$$\|\varpi P_l[(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})]\|_{B \rightarrow B} \leq \varpi \|P_l\|_{B \rightarrow B} \|\mathbf{T}\|_{B \rightarrow B} \|\Delta\mathbf{T}\|_{B \rightarrow B} \leq \varpi < 1, \quad (16)$$

то оператор  $(\mathbf{I} - \varpi P_l[(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})]): B \rightarrow B$ , где  $\mathbf{I}$  – тождественный оператор, непрерывно обратим, причем справедлива оценка

$$\|\mathbf{I} - \varpi P_l[(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})]\|_{B \rightarrow B} \leq \gamma_0 = \frac{1}{1 - \varpi}, \quad (17)$$

а решение уравнения (15) изолировано в некоторой метрике пространства  $B_l$   $x_l \in B_l$  при любом  $f \in B$ . Отметим, что для численной реализации метода галеркинских типа достаточно иметь метод решения конечномерной задачи (15).

Пусть  $x$  – решение задачи (8),  $x_l$  – приближенное решение, полученное на основе метода Галеркина решения операторного уравнения (15), введем следующее обозначение:

$$\varepsilon_l = x_l - x, \quad (18)$$

погрешность рассматриваемого метода. Справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Предположим, что  $f \in B$ , тогда

$$\|\varepsilon_l\|_B \leq \gamma_0 \|(\mathbf{I} - P_l)x\|_B. \quad (19)$$

**Доказательство.** Применим к операторному уравнению (8) оператор ортогонального проектирования  $P_l$ , получим

$$x_l(t) \cong P_l[x] \equiv \varpi P_l[(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})x] + P_l[f]. \quad (20)$$

Из равенства (15) вычтем равенство (20), имеем

$$(\mathbf{I} - \varpi P_l[(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})])\varepsilon_l = -(\mathbf{I} - P_l)x, \quad (21)$$

Из последнего, с учетом (17), следует оценка (19).

### 3. Метод проекционного типа решения операторного уравнения с возмущенным оператором: пространство финитных функций, оценки погрешностей

В данном параграфе рассматривается метод проекционного типа, использующего специальные финитные базисные функции, его применение к решению линейных операторных уравнений с возмущенным оператором в гильбертовых пространствах. В качестве базиса рассматривается два вида финитных функций: кусочно постоянные функции и кусочно линейные функции.

#### 3.1. Метод проекционного типа решения операторного уравнения в пространстве кусочно постоянных функций.

Пусть на отрезке  $J = [0, T] \subset R$ , ведена произвольная неравномерная сетка  $J_h$  с узлами

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = T, \quad (22)$$

положим  $h_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $h_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$ , разбив тем самым  $J = [0, T]$  на  $n$  подобластей  $J_i = (\tau_{i-1}, \tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  (конечных элементов). Зададим на каждом  $(\tau_{i-1}, \tau_i)$  характеристическую функцию

$$\varphi_i^h(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \notin (\tau_{i-1}, \tau_i), \\ 1, & \tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i). \end{cases} \quad (23)$$

Набор таких функций  $\{\varphi_i^h\}$  принимается в качестве базисных при решении задачи (15). Введем следующее обозначение:  $\tilde{P}_h$  – оператор проектирования на пространство кусочно постоянных функций, через  $\tilde{B}_h(J)$  обозначим пространство элементами которого являются кусочно-постоянные функции вида

$$f(\tau) = \sum_{j=1}^n f_{j-1/2} \varphi_{j-1/2}^h(\tau), \quad (24)$$

где  $\varphi_{j-1/2}^h(\tau)$  – характеристическая функция носитель, принадлежащая интервалу  $\varphi_{j-1/2}^h(\tau) \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$ . Оператор проектирования  $\tilde{P}_h : L_p(J) \rightarrow \tilde{B}_h(J)$  определяется следующей формулой

$$(\tilde{P}_h \psi)(\tau) = \tilde{P}_h \psi_{i-1/2} = h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \psi(t) dt, \quad \tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (25)$$

Оператор  $\tilde{P}_h$  является оператором ортогонального проектирования из  $\tilde{P}_h : L_2(J) \rightarrow \tilde{B}_h(J)$ .

Рассмотрим классический метод Галеркина, в котором приближенное решение  $\psi_h \in \tilde{B}_h(J)$  является решение конечномерной задачи

$$\psi_h \cong P_h[\psi_h] \equiv P_h[\varpi(\mathbf{T}\psi_h + \Delta\mathbf{T}\psi_h)] + P_h[f]. \quad (26)$$

В работе [16] оценки погрешностей получены при следующих предположениях:

$$\Delta\mathbf{T} \equiv 0, \quad (27)$$

в этом случае операторное уравнение (15) примет вид

$$\psi_h \cong P_h[\psi_h] \equiv P_h[\varpi\mathbf{T}\psi_h] + P_h[f], \quad (28)$$

и в предположении о свойстве ядра  $K(t - \tau)$ :

$$K(t - \tau) \in W_r^1(\delta, +\infty) \quad \forall \delta > 0 \text{ и } r \in [1, +\infty), \quad (29)$$

$$\frac{d}{d\tau} K(\tau) = o(\tau^{-1}K(\tau)), \quad \tau \rightarrow 0. \quad (30)$$

Из (29) следует, что  $K \in C(R^+)$ . Выражение (30) означает, что с учетом того, что производная определена лишь почти всюду на  $R^+$ , то

$$\alpha(\delta) = \text{ess sup}_{\tau \in (0, \delta)} |\tau(d/d\tau)K(\tau)/K(\tau)| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0^+. \quad (31)$$

Функция ядра  $K \in L_r(R)$ ,  $r \in [1, +\infty)$ , то на основании [16],  $K(\tau) = o(\tau^{-\varepsilon})$ , при  $\tau \rightarrow 0^+$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ . Из предположения (29), так же следует, что

$$\int_0^\delta K^r(\tau) d\tau \square \delta K^r(\delta), \quad \delta \rightarrow 0^+, \quad \forall r \geq 1. \quad (32)$$

В самом деле, интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^{\delta} K^r(\tau) d\tau \square \delta K^r(\delta) - r \int_0^{\delta} \tau K^{r-1}(\tau) \frac{d}{d\tau} K(\tau) d\tau \leq \delta K^r(\delta) + r\alpha(\delta) \int_0^{\delta} K^r(\tau) d\tau. \quad (33)$$

Откуда следует

$$\delta K^r(\delta) \leq \int_0^{\delta} K^r(\tau) d\tau \leq \frac{1}{1+r\alpha(\delta)} \delta K^r(\delta), \quad (34)$$

что подтверждает свойство (32). Откажемся от предположений (29) и (30), будем предполагать выполнение следующих свойств ядра  $K$  уравнения (1):

- 1).  $K$  является функцией заданной на  $K \in R^+$ .
- 2).  $K \in L_r(R^+)$ ,  $\forall r[1, +\infty)$ ; кроме того  $\|K\|_{L_1(R^+)}$  – ограничена.
- 3).  $\forall r \geq 1$  справедливо свойство (32).

Введем интегральный модуль непрерывности ядра  $K$

$$\omega_r(K, \eta) = \sup_{0 \leq \delta \leq \eta} \|K(\square+\delta) + \Delta K(\square+\delta) - K(\square) - \Delta K(\square)\|_{L_r(R)}, 1 \leq r < \infty. \quad (35)$$

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.** Пусть выполнены предположения 1) – 3), тогда справедливы оценки

$$\omega_r(K, \eta) \leq 2^{1/r} \|K + \Delta K\|_{L_r(0, \eta/2)}, \quad (36)$$

$$\omega_r(K, \eta) \leq \eta^{1/r} (K(\eta/2) + \Delta K(\eta/2))(1 + o(1)), \eta \rightarrow 0^+. \quad (37)$$

**Доказательство.** Рассмотрим выражение (35)

$$\begin{aligned} & \|K(\square+\delta) + \Delta K(\square+\delta) - K(\square) - \Delta K(\square)\|_{L_r(R)}^r = \\ & = \int_0^{\infty} |K(\tau + \delta/2) + \Delta K(\tau + \delta/2) - K(\tau - \delta/2) - \Delta K(\tau - \delta/2)|^r d\tau = \\ & = \int_0^{\delta/2} [K(\delta/2 - \tau) + \Delta K(\delta/2 - \tau) - K(\tau + \delta/2) - \Delta K(\tau + \delta/2)]^r d\tau + \\ & + \int_{\delta/2}^{\infty} [K(\tau - \delta/2) + \Delta K(\tau - \delta/2) - K(\tau + \delta/2) - \Delta K(\tau + \delta/2)]^r d\tau. \end{aligned}$$

Из теории неравенств известно:

$$(a - b)^r \leq a^r - b^r, \quad (38)$$

которое справедливо для всех  $0 \leq b \leq a$ , получим

$$\begin{aligned} & \|K(\square+\delta) + \Delta K(\square+\delta) - K(\square) - \Delta K(\square)\|_{L_r(R)}^r \leq \\ & \leq \int_0^{\delta/2} (K(\delta/2 - \tau) + \Delta K(\delta/2 - \tau))^r d\tau - \int_0^{\delta/2} (K(\tau + \delta/2) + \Delta K(\tau + \delta/2))^r d\tau + \\ & + \int_{\delta/2}^{\infty} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau - \int_{\delta/2}^{\infty} (K(\tau + \delta) + \Delta K(\tau + \delta))^r d\tau = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\delta/2} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau - \int_{\delta/2}^{\delta} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau + \int_0^{\delta} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau = \\
 &= 2 \int_0^{\delta/2} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau.
 \end{aligned}$$

Из последнего следует

$$\omega_r(K, \eta) = \sup_{0 \leq \delta \leq \eta} \|K(\square + \delta) + \Delta K(\square + \delta) - K(\square) - \Delta K(\square)\|_{L_r(R)} \leq 2^{1/r} \|K + \Delta K\|_{L_r(0, \eta/2)}.$$

При выполнении свойства 3), справедливо

$$\|K + \Delta K\|_{L_r(0, \eta/2)} \square (\eta/2)^{1/r} (K(\eta/2) + \Delta K(\eta/2)), \quad \eta \rightarrow 0.$$

Следовательно, справедлива оценка (37). Лемма доказана.

Введем следующее обозначение

$$\begin{aligned}
 \widehat{\omega}_r(K, \Delta K, J_h) &= \sup_{0 < t < T} \omega_r(K(\square - t) + \Delta K(\square - t); J_h), \\
 \omega_r(K(\square - t) + \Delta K(\square - t); J_h) &= \\
 &= \left[ \sum_{i=1}^n h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |K(\tau - t) + \Delta K(\tau - t) - K(\bar{\tau} - t) - \Delta K(\bar{\tau} - t)|^r d\bar{\tau} d\tau \right]^{1/r}
 \end{aligned}$$

Справедлива лемма.

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия 1) и 2) тогда справедлива оценка

$$\widehat{\omega}_r(K, \Delta K, J_h) \leq 8^{1/r} \|K(\square - t) + \Delta K(\square - t)\|_{L_r(0, h_{\max}/2)}. \quad (39)$$

Пусть так же справедливы предположения 1)-3), тогда справедлива оценка

$$\widehat{\omega}_r(K, \Delta K, J_h) \leq 4^{1/r} h_{\max}^{1/r} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))(1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \quad (40)$$

**Доказательство.** Введем разбиение отрезка  $J = [0, T] \subset R$  и положим  $t \in [0, T]$ ,  $t_i = \tau_i - t$ , причем  $t_i - t_{i-1} = h_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , тогда

$$\omega_r(K(\square - t), \Delta K(\square - t), J_h)^r = \sum_{i=1}^n \text{Int}_i^h(t),$$

где

$$\text{Int}_i^h(t) = h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |K(\tau) + \Delta K(\tau) - K(\bar{\tau}) - \Delta K(\bar{\tau})|^r d\tau d\bar{\tau}.$$

Введем следующее обозначение:  $l, j$  – минимальное и максимальное из тех значений  $i$ , для которых справедливо  $[t_{i-1}, t_i] \cap (-h_{\max}/2, h_{\max}/2)$ . Тогда

$$\omega_r(K(\square - t), \Delta K(\square - t), J_h)^r = \sum_{i=1}^{l-1} \text{Int}_i^h(t) + \sum_{i=l}^j \text{Int}_i^h(t) + \sum_{i=j+1}^n \text{Int}_i^h(t).$$

Пусть  $j+1 \leq i \leq n$ . Тогда учитывая монотонность ядра  $K(\square - t)$  и неравенство (38), получим

$$\begin{aligned} \text{Int}_i^h(t) &\leq h_i \left( K(t_{i-1}) - K(t_i) + \Delta K(t_{i-1}) - \Delta K(t_i) \right)^r \leq \\ &\leq h_{\max} \left[ \left( K(t_{i-1}) + \Delta K(t_{i-1}) \right)^r - \left( K(t_i) + \Delta K(t_i) \right)^r \right]. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \sum_{i=j+1}^n \text{Int}_i^h(t) &\leq h_{\max} \sum_{i=j+1}^n \left[ \left( K(t_{i-1}) + \Delta K(t_{i-1}) \right)^r - \left( K(t_i) + \Delta K(t_i) \right)^r \right] \leq \\ &\leq h_{\max} \left( K(t_j) + \Delta K(t_j) \right)^r. \end{aligned} \tag{41}$$

Аналогично

$$\sum_{i=1}^{l-1} \text{Int}_i^h(t) \leq h_{\max} \left( K(t_{l-1}) + \Delta K(t_{l-1}) \right)^r. \tag{42}$$

Выберем значение  $i$  таково, что интервалы  $[t_{i-1}, t_i]$  и  $(-h_{\max}/2, h_{\max}/2)$  пересекаются:  $[t_{i-1}, t_i] \cap (-h_{\max}/2, h_{\max}/2)$ . Если  $[t_{i-1}, t_i] \subset (-h_{\max}/2, h_{\max}/2)$ , то

$$\begin{aligned} \text{Int}_i^h(t) &\leq h_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[ \left( K(\tau) + \Delta K(\tau) \right)^r + \left( K(\bar{\tau}) + \Delta K(\bar{\tau}) \right)^r \right] d\tau d\bar{\tau} = \\ &= 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left( K(\tau) + \Delta K(\tau) \right)^r d\tau. \end{aligned}$$

При условии равенства значений  $i = j$  справедливо  $-h_{\max}/2 < t_{j-1} < h_{\max}/2 < t_j$ , то

$$\begin{aligned} \text{Int}_j^h(t) &\leq h_j^{-1} \left\{ \int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2} \int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2} \left[ \left( K(\tau) + \Delta K(\tau) \right) - \left( K(\bar{\tau}) + \Delta K(\bar{\tau}) \right) \right]^r d\tau d\bar{\tau} + \right. \\ &+ 2 \int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2} \left( \int_{h_{\max}/2}^{t_j} \left( K(\tau) + \Delta K(\tau) - K(\bar{\tau}) - \Delta K(\bar{\tau}) \right)^r d\bar{\tau} \right) d\tau + \\ &+ \left. \int_{h_{\max}/2}^{t_j} \int_{h_{\max}/2}^{t_j} \left[ \left( K(\tau) + \Delta K(\tau) \right) - \left( K(\bar{\tau}) + \Delta K(\bar{\tau}) \right) \right]^r d\tau d\bar{\tau} \right\} \leq \\ &\leq h_j^{-1} \left\{ \int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2} \int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2} \left[ \left( K(\tau) + \Delta K(\tau) \right)^r + \left( K(\bar{\tau}) + \Delta K(\bar{\tau}) \right)^r \right] d\tau d\bar{\tau} + \right. \\ &+ 2 \int_{t_{j-1}}^{h_{\max}/2} \left( \int_{h_{\max}/2}^{t_j} \left( \left( K(\tau) + \Delta K(\tau) \right)^r - \left( K(t_j) - \Delta K(t_j) \right)^r \right) d\bar{\tau} \right) d\tau + \\ &+ \left. \int_{h_{\max}/2}^{t_j} \int_{h_{\max}/2}^{t_j} \left[ \left( K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2) \right)^r - \left( K(t_j) + \Delta K(t_j) \right)^r \right] d\tau d\bar{\tau} \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= h_j^{-1} \left\{ 2 \left( h_{\max} / 2 - t_{j-1} \right) \int_{t_{j-1}}^{h_{\max} / 2} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau + \right. \\
 &+ 2 \left( t_j - h_{\max} / 2 \right) \int_{t_{j-1}}^{h_{\max} / 2} \left[ (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r - (K(t_j) + \Delta K(t_j))^r \right] d\tau + \\
 &+ 2 \left( t_j - h_{\max} / 2 \right)^2 \left[ (K(h_{\max} / 2) + \Delta K(h_{\max} / 2))^r - (K(t_j) + \Delta K(t_j))^r \right] \left. \right\} \leq \\
 &= 2 \int_{t_{j-1}}^{h_{\max} / 2} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau + \\
 &+ h_{\max} \left[ (K(h_{\max} / 2) + \Delta K(h_{\max} / 2))^r - (K(t_j) + \Delta K(t_j))^r \right].
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 \text{Int}_l^h(t) &\leq 2 \int_{-h_{\max} / 2}^{\tau_l} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau + \\
 &+ h_{\max} \left[ (K(h_{\max} / 2) + \Delta K(h_{\max} / 2))^r - (K(t_l) + \Delta K(t_l))^r \right].
 \end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=l}^j \text{Int}_i^h(t) &\leq 2 \int_{-h_{\max} / 2}^{h_{\max} / 2} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau + \\
 &+ h_{\max} \left[ (K(h_{\max} / 2) + \Delta K(h_{\max} / 2))^r - (K(t_l) + \Delta K(t_l))^r \right] + \quad (43) \\
 &+ h_{\max} \left[ (K(h_{\max} / 2) + \Delta K(h_{\max} / 2))^r - (K(t_j) + \Delta K(t_j))^r \right].
 \end{aligned}$$

Складывая оценки (41) – (43), получим неравенство

$$\begin{aligned}
 \widehat{\omega}_r(K, \Delta K, J_h) &= \sup_{0 < t < T} \omega_r(K(\square-t) + \Delta K(\square-t); J_h) \leq \\
 &\leq \left[ 4 \int_0^{h_{\max} / 2} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau + 2 h_{\max} (K(h_{\max} / 2) + \Delta K(h_{\max} / 2))^r \right]^{1/r}.
 \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$2 h_{\max} (K(h_{\max} / 2) + \Delta K(h_{\max} / 2))^r \leq 4 \int_0^{h_{\max} / 2} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau,$$

приходим к оценке (39).

При выполнении условия 3) имеем

$$\|K + \Delta K\|_{L_r(0, h_{\max} / 2)} \square (h_{\max} / 2)^{1/r} (K(h_{\max} / 2) + \Delta K(h_{\max} / 2)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \quad (44)$$

Последнееподтверждаетоценку (40). Лемма доказана.

**Лемма 4.** Для  $\forall r \geq 1$  справедлива оценка

$$\left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(K + \Delta K) \right\|_{L_r(J)} \leq 4^{1/r} \left\| (K + \Delta K) \right\|_{L_r(0, h_{\max}/2)}, \quad (45)$$

привыполнении свойства (44), оценка

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(K + \Delta K) \right\|_{L_r(J)} &\leq \\ &\leq 2^{1/r} h_{\max}^{1/r} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))(1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (46)$$

**Доказательство.** Справедливо

$$\left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(K + \Delta K) \right\|_{L_r(J)} \leq \omega_r(K, \Delta K; J_h)^r = \sum_{i=1}^n \text{Int}_i^h,$$

где

$$\text{Int}_i^h(t) = h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |K(\tau) + \Delta K(\tau) - K(\bar{\tau}) - \Delta K(\bar{\tau})|^r d\tau d\bar{\tau}.$$

Пусть  $j = \max i$  для которых справедливо, что интервалы  $[t_{i-1}, t_i]$  и  $(0, h_{\max}/2)$  пересекаются:  $[t_{i-1}, t_i] \cap (0, h_{\max}/2)$ . Тогда по аналогии с доказательством леммы 3, получим

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(K + \Delta K) \right\|_{L_r(J)}^r &\leq \sum_{i=1}^j \text{Int}_i^h + \sum_{i=j+1}^n \text{Int}_i^h \leq \\ &\leq 2 \int_0^{h_{\max}/2} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau + h_{\max}/2 (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))^r \leq \\ &\leq 4 \int_0^{h_{\max}/2} (K(\tau) + \Delta K(\tau))^r d\tau. \end{aligned} \quad (47)$$

Из последнего следует оценка (45). Оценка (46) доказывается аналогично. Лемма доказана.

**Лемма 5.** При выполнении предположений 1), 2) и справедливости неравенств  $1 \leq p \leq q \leq \infty, 1/s = 1 - 1/p + 1/q > 0$ , справедливы оценки

$$\left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)} \leq 2^{1/s+1/q} \left\| (K + \Delta K) \right\|_{L_s(0, h_{\max}/2)}, \quad (48)$$

$$\left\| (\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)} \leq 2^{3/s-1/q} \left\| (K + \Delta K) \right\|_{L_s(0, h_{\max}/2)}, \quad (49)$$

$$\left\| (\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)} \leq 2^{2+3/s} \left\| (K + \Delta K) \right\|_{L_r(0, h_{\max}/2)}^2, \quad (50)$$

где  $r = 2(1 + 1/s)^{-1} \in [1, 2]$ , оценка (50) верна при  $p = 1, q = \infty$ . При выполнении предположении 1) – 3) справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)} \leq \\ & \leq 2^{1/s+1/q} h_{\max}^{1/s} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))(1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)} \leq \\ & \leq 2^{1/s-1/q} h_{\max}^{1/s} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))(1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)} \leq \\ & \leq 2^{1+2/s} h_{\max}^{1+1/s} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))^2 (1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (53)$$

**Доказательство.** Пусть для правой части уравнения (1) выполняется условие  $f \in L_p(J)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . При  $\tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$  имеем

$$\begin{aligned} & \left| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) f(\tau) \right|^p = \\ & = \left| \int_0^T \left[ K(\tau-t) + \Delta K(\tau-t) - h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (K(\bar{\tau}-t) + \Delta K(\bar{\tau}-t)) d\bar{\tau} \right] f(t) dt \right|^p = \\ & \leq \left| \int_0^T h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [K(\tau-t) + \Delta K(\tau-t) - K(\bar{\tau}-t) - \Delta K(\bar{\tau}-t)] d\bar{\tau} f(t) dt \right|^p \leq \\ & \leq \left| \int_0^T \left( h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |K(\tau-t) + \Delta K(\tau-t) - K(\bar{\tau}-t) - \Delta K(\bar{\tau}-t)|^s d\bar{\tau} \right)^{1/s} |f(t)| dt \right|^p \leq \\ & \leq \left| \int_0^T \left[ h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |K(\tau-t) + \Delta K(\tau-t) - K(\bar{\tau}-t) - \Delta K(\bar{\tau}-t)| d\bar{\tau} dt \right]^{p-1} \times \right. \\ & \times \left. \int_0^T \left[ h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |K(\tau-t) + \Delta K(\tau-t) - K(\bar{\tau}-t) - \Delta K(\bar{\tau}-t)|^s d\bar{\tau} \right]^{p/q} |f(t)|^p dt \right| \leq \\ & \leq \omega_s(K, \Delta K, h_{\max})^{s(p-1)} \times \\ & \times \left\{ \int_0^T \left[ h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |K(\tau-t) + \Delta K(\tau-t) - K(\bar{\tau}-t) - \Delta K(\bar{\tau}-t)|^s d\bar{\tau} \right]^{p/q} |f(t)|^p dt \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

Применяя к (54) обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})f \right\|_{L_q(J)}^p = \left\| \left| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})f \right|^p \right\|_{L_{q/p}(J)} \leq \\ & \leq \omega_s(K, \Delta K, h_{\max})^{s(p-1)} \times \\ & \times \int_0^T \left[ \sum_{i=0}^n h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |K(\tau-t) + \Delta K(\tau-t) - K(\bar{\tau}-t) - \Delta K(\bar{\tau}-t)|^s d\bar{\tau}d\tau \right]^{p/q} |f(t)|^p dt \leq \\ & \leq \omega_s(K, \Delta K, h_{\max})^{s(p-1)} \widehat{\omega}_s(K, \Delta K, J_h)^{sp/q} \|f\|_{L_q(J)}^p. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства при  $1 \leq p < \infty$  следует оценка

$$\left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)}^p \leq \omega_s(K, \Delta K, h_{\max})^{1-s/q} \widehat{\omega}_s(K, \Delta K, J_h)^{s/q}. \quad (55)$$

При  $p = q = \infty$ ,  $\tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \left| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})f(\tau) \right| \leq \\ & \leq h_i^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left[ \int_0^T |K(\tau-t) + \Delta K(\tau-t) - K(\bar{\tau}-t) - \Delta K(\bar{\tau}-t)| dt \right] d\bar{\tau} \|f\|_{L_\infty(J)} \leq \\ & \leq \omega_1(K, \Delta K, h_{\max}) \|f\|_{L_\infty(J)}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})f \right\|_{L_\infty(J)} \leq \omega_1(K, \Delta K, h_{\max}) \|f\|_{L_\infty(J)}.$$

Применяя неравенства (36) и (39) к оценке правой части неравенства (55), приходим к оценке (48).

Учитывая, что  $(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)$  сопряженный оператор к оператору  $(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})$ , с учетом  $1/s = 1 - 1/\bar{p} + 1/\bar{q}$ ,  $s/q = 1 - s/\bar{p}$ , имеем

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)} = \left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_{\bar{q}}(J) \rightarrow L_{\bar{p}}(J)} \leq \\ & \leq \omega_s(K, \Delta K, h_{\max})^{s/q} \widehat{\omega}_s(K, \Delta K, J_h)^{1-s/q} \leq 2^{3/s-1/q} \left\| (K + \Delta K) \right\|_{L_s(0, h_{\max}/2)}. \end{aligned}$$

Пусть  $\mu$  удовлетворяет условию  $2/\mu = 1/p + 1/q$ . Учитывая, что  $\mathbf{I} - \tilde{P}_h = (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)^2$ , получим

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)} = \\ & = \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_q(J)} \leq \\ & \leq \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h) \right\|_{L_\mu(J) \rightarrow L_q(J)} \left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_\mu(J)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \omega_r(K, \Delta K, h_{\max})^{1-r/q} \widehat{\omega}_s(K, \Delta K, J_h)^{r/q} \omega_r(K, \Delta K, h_{\max})^{r/\mu} \widehat{\omega}_s(K, \Delta K, J_h)^{1-r/\mu} = \\ &= \omega_r(K, \Delta K, h_{\max})^r \widehat{\omega}_r(K, \Delta K, J_h)^{2-r} \leq 2^{2+3/s} \|(K + \Delta K)\|_{L_r(0, h_{\max}/2)}. \end{aligned}$$

Оценки (51) – (53) следуют из оценок (48) – (50) с учетом свойства (55). Лемма доказана.

### 3.2. Метод проекционного типа решения операторного уравнения в пространстве кусочно линейных функций.

Введем на  $J = [0, T] \subset R$  сетку  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{l-1} < \tau_l = T$ ,  $h_{i+1/2} = (h_i + h_{i-1})/2$ ,  $h = \max h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  считая  $h_0 = 0$ ,  $h_{n+1} = 0$  и поставим в соответствие каждому узлу сетки функцию

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i^h(\tau) &= \begin{cases} (\tau_i - \tau_{i-1})/h_i, & \tau \in (\tau_{i-1}, \tau_i), \\ (\tau_{i+1} - \tau_i)/h_i, & \tau \in (\tau_i, \tau_{i+1}), \\ 0, & \tau \notin (\tau_{i-1}, \tau_{i+1}), \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1; \\ \bar{\varphi}_0^h(\tau) &= \begin{cases} (\tau_1 - \tau)/h_1, & t \in (\tau_0, \tau_1), \\ 0, & \tau \notin (\tau_0, \tau_1), \end{cases} \quad \bar{\varphi}_n^h(\tau) = \begin{cases} (\tau_n - \tau_{n-1})/h_n, & t \in (t_{n-1}, t_n), \\ 0, & t \notin (t_{n-1}, t_n). \end{cases} \end{aligned} \quad (56)$$

Очевидно, что эти функции линейно независимы и каждая из них отлична от нуля лишь в интервале длиной порядка  $2h$ . Линейную оболочку  $\{\bar{\varphi}_i^h\}$  обозначим через  $H_n = \text{span}\langle \bar{\varphi}_0^h \quad \bar{\varphi}_1^h \quad \dots \quad \bar{\varphi}_n^h \rangle$ . Функции  $H_n$  являются непрерывными кусочнолинейными функциями, обладающими суммируемой с любой конечной степенью первой производной.

Через  $\bar{B}_h(J)$  обозначим пространство кусочно линейных функций, элементами которого являются функции вида (56), тогда справедливо

$$f(\tau) = \sum_{i=0}^n f(\tau_i) \bar{\varphi}_i^h(\tau) \in H_n, \quad (57)$$

где  $\bar{\varphi}_i^h(\tau)$  – кусочно линейные функции.

Через  $\bar{P}_h$  обозначим оператор, ставящий в соответствие функции  $f(\tau) \in L_p(J)$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ , ее проекцию на линейную оболочку  $H_n$ , определенную в виде

$$(\bar{P}_h f)(\tau) = \sum_{i=0}^n \bar{P}_h f(\tau_i) \bar{\varphi}_i^h(\tau) \in H_n, \quad (58)$$

на пространство кусочно линейных функций  $\bar{B}_h(J)$ ,  $\bar{P}_h : L_p(J) \rightarrow \bar{B}_h(J)$ . Проекция (58) определяется как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$(\bar{P}_h f, \bar{\varphi}_i^h)(\tau) = (f, \bar{\varphi}_i^h), \quad 0 \leq i \leq n. \quad (59)$$

Значение  $(\bar{P}_h f)(\tau_j)$ ,  $0 \leq j \leq n$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$\sum_{j=0}^n (\bar{\varphi}_i^h, \bar{\varphi}_j^h) (\bar{P}_h f)(\tau_j) = (f, \bar{\varphi}_i^h), \quad 0 \leq i \leq n, \quad (60)$$

причем оператор проектирования  $\bar{P}_h$  определен корректно, поскольку матрица в СЛАУ (60) является трехдиагональной, обладающая свойством диагонального преобладания [20]. Видно, что выполняется свойство  $(\bar{P}_h)^2 = \bar{P}_h$ , последнее означает, что  $\bar{P}_h$  является оператором проектирования.

Отметим, что операторы  $\bar{P}_h$  и  $(\mathbf{I} - \bar{P}_h)$ ,  $\forall 1 \leq p \leq \infty$ , обладают свойством самосопряженности, а именно:

$$(\bar{P}_h f, g)(\tau) = (f, \bar{P}_h g)(\tau), \quad \forall f \in L_p(J), \quad \forall g \in L_{\bar{p}}(J), \quad (61)$$

$$((\mathbf{I} - \bar{P}_h) f, g)(\tau) = (f, (\mathbf{I} - \bar{P}_h) g)(\tau), \quad \forall f \in L_p(J), \quad \forall g \in L_{\bar{p}}(J). \quad (62)$$

Последнее доказывается элементарно. Рассмотрим два равенства

$$(\bar{P}_h f - f, \bar{P}_h g)(\tau) = 0,$$

$$(\bar{P}_h g - g, \bar{P}_h f)(\tau) = 0,$$

вычитая второе из первого, приходим к (61) и, как следствие, к (62).

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 6.** При выполнении предположений 1) – 3), справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{I} - \bar{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\|_{L_p(J) \rightarrow L_2(J)} \leq \\ & \leq 2^{3-1/p} h_{\max}^{3/2-1/p} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))(1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)\|_{L_2(J) \rightarrow L_2(J)} \leq \\ & \leq 2^{5/2} h_{\max} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))(1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\|_{L_p(J) \rightarrow L_2(J)} \leq \\ & \leq 2^{9/2-1/p} h_{\max}^{5/2-1/p} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))^2 (1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (65)$$

**Доказательство.** Поскольку оператор  $\bar{P}_h$  является так же оператором ортогонального проектирования в пространстве  $L_2(J)$ , справедливо следующее

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{I} - \bar{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\|_{L_p(J) \rightarrow L_2(J)} \leq \\ & \leq 2^{3-1/p} h_{\max}^{3/2-1/p} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))(1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (66)$$

В самом деле, на основании оценки (37), получим оценку

$$\begin{aligned} \omega_r(K, \Delta K, 2h_{\max}) & \leq (2h_{\max})^{1/r} (K(h_{\max}) + \Delta K(h_{\max}))(1 + o(1)) \leq \\ & \leq 2^{1/r} h_{\max}^{1/r} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))(1 + o(1)) \end{aligned}$$



из последнего приходим к оценке (66) и, следовательно, к (63).

Оператор  $(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \bar{P}_h)$  сопряженный оператор к оператору  $(\mathbf{I} - \bar{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})$ , тогда из доказанной оценки следует справедливость оценки (64):

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h) \right\|_{L_2(J) \rightarrow L_2(J)} = \left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_2(J) \rightarrow L_2(J)} \leq \\ & \leq 2^{5/2} h_{\max} \left( K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2) \right) (1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $(\mathbf{I} - \bar{P}_h)^2 = (\mathbf{I} - \bar{P}_h)$ , в силу ортогональности оператора проектирования  $\bar{P}_h$ , получим

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_2(J)} = \\ & \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_2(J)} \leq \\ & \leq \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h) \right\|_{L_2(J) \rightarrow L_2(J)} \left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) \right\|_{L_p(J) \rightarrow L_2(J)} \leq \\ & \leq 2^{9/2-1/p} h_{\max}^{5/2-1/p} \left( K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2) \right)^2 (1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Лемма 7.** Пусть выполнены предположения 1) – 3), а та же известно, что функция  $\psi \in W_p^1(J)$ ,  $1 \leq p \leq 2$ , тогда справедливы оценки

$$\left\| (\mathbf{I} - \bar{P}_h)\psi(\tau) \right\|_{L_2(J)} \leq 2^{1/p-3/2} \left\| \frac{d}{d\tau}\psi(\tau) \right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{3/2-1/p}, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)\psi(\tau) \right\|_{L_2(J)} \leq \\ & \leq 2^{1+1/p} \left\| \frac{d}{d\tau}\psi(\tau) \right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{5/2-1/p} \left( K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2) \right) (1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\left\| (\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\psi(\tau) \right\|_{L_2(J)} \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{d}{d\tau}(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\psi(\tau) \right\|_{L_2(J)} h_{\max}, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \tilde{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\psi(\tau) \right\|_{L_2(J)} \leq \\ & \leq 2^{3/2} \left\| \frac{d}{d\tau}(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\psi(\tau) \right\|_{L_2(J)} h_{\max}^2 \left( K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2) \right) (1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (70)$$

**Доказательство.** Пусть функции  $\bar{\varphi}_i^h$ ,  $0 \leq i \leq n$  кусочно линейный интерполянт функции  $\psi(\tau)$ , причем  $\bar{\varphi}_i^h \in \bar{B}_h(J)$ . Функции  $\bar{\varphi}_i^h$  совпадают с  $\psi(\tau)$  в узлах сетки  $J_h$  отрезка  $J = [0, T] \subset R$ . Пусть, так же,  $\tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ , тогда для погрешности интерполяции справедливо выражение

$$\psi(\tau) - \bar{\varphi}^h(\tau) = -\frac{\tau - \tau_{i-1}}{h_i} \int_{\tau}^{\tau_i} \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) d\xi + \frac{\tau_i - \tau}{h_i} \int_{\tau}^{\tau_i} \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) d\xi.$$

Последнее можно переписать в виде

$$\psi(\tau) - \bar{\varphi}^h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_i} G_i(\tau, \xi) \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) d\xi, \quad (71)$$

где

$$G_i(\tau, \xi) = \frac{1}{h_i} \begin{cases} \tau_{i-1} - \tau, & \tau_{i-1} \leq \tau < \xi \leq \tau_i, \\ \tau_i - \tau, & \tau_{i-1} \leq \xi < \tau \leq \tau_i. \end{cases}$$

Применяя, к последнему, обобщенное неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} \|\psi(\tau) - \bar{\varphi}^h(\tau)\|_{L_2(\tau_{i-1}, \tau_i)} &\leq \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|G_i(\tau, \xi)\|_{L_2(\tau_{i-1}, \tau_i)} \left| \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) \right| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \frac{d}{d\tau} \psi(\tau) \right\|_{L_2(\tau_{i-1}, \tau_i)} \sqrt{h_i}. \end{aligned}$$

Или, что аналогично

$$\|\psi(\tau) - \bar{\varphi}^h(\tau)\|_{L_2(J)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{i=1}^n \left\| \frac{d}{d\tau} \psi(\tau) \right\|_{L_2(\tau_{i-1}, \tau_i)}^2 \right]^{1/2} h_{\max}^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \frac{d}{d\tau} \psi(\tau) \right\|_{L_2(J)} h_{\max}^{1/2}.$$

Из (71) и неравенства Коши – Буняковского следует, что

$$\begin{aligned} \|\psi(\tau) - \bar{\varphi}^h(\tau)\|_{L_2(\tau_{i-1}, \tau_i)}^2 &\leq \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left[ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |G_i(\tau, \xi)| d\xi \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |G_i(\tau, \xi)| \left| \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) \right|^2 d\xi \right] d\tau = \\ &= \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left[ \frac{2}{h_i} (\tau - \tau_{i-1})(\tau_i - \tau) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |G_i(\tau, \xi)| \left| \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) \right|^2 d\xi \right] d\tau = \\ &= \frac{2}{h_i} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left[ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\tau - \tau_{i-1})(\tau_i - \tau) |G_i(\tau, \xi)| d\tau \right] \left| \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} &\frac{2}{h_i} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\tau - \tau_{i-1})(\tau_i - \tau) |G_i(\tau, \xi)| d\tau = \\ &= \frac{2}{h_i^2} \left[ \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\tau - \tau_{i-1})(\tau_i - \tau)^2 d\tau + \int_{\xi}^{\tau_i} (\tau - \tau_{i-1})^2 (\tau_i - \tau) d\tau \right] \leq \frac{1}{4} h_i^2 \end{aligned}$$

получим

$$\|\psi(\tau) - \bar{\varphi}^h(\tau)\|_{L_2(J)}^2 \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{d}{d\tau} \psi(\tau) \right\|_{L_2(J)}^2 h_{\max}.$$

Применяя теорему Рисса – Торина [66], имеем

$$\|\psi(\tau) - \bar{\varphi}^h(\tau)\|_{L_2(J)} \leq 2^{1/p-3/2} \left\| \frac{d}{d\tau} \psi(\tau) \right\|_{L_p(J)} h_{\max}^{3/2-1/p}, \quad 2 \leq p \leq 2.$$

Так как  $\|(\mathbf{I} - \bar{P}_h)\psi(\tau)\|_{L_2(J)} \leq \|\psi(\tau) - \bar{\varphi}^h(\tau)\|_{L_2(J)}$ , получаем оценку (67).

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \bar{P}_h)\psi(\tau)\|_{L_p(J) \rightarrow L_2(J)} &= \|(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \bar{P}_h)(\mathbf{I} - \bar{P}_h)\psi(\tau)\|_{L_p(J) \rightarrow L_2(J)} \leq \\ &\leq \|(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \bar{P}_h)\|_{L_2(J) \rightarrow L_2(J)} \|(\mathbf{I} - \bar{P}_h)\psi(\tau)\|_{L_p(J) \rightarrow L_2(J)}, \end{aligned}$$

и применяя оценки (64) и (65), получаем оценку (68). Оценки (69) и (70) получаются из оценок (67) и (68) при замене  $\psi(\tau)$  на  $(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\psi(\tau)$ .

Лемма доказана.

#### 4. Метод Галеркина решения сингулярноинтегрального уравнения Фредгольма второго рода с возмущенным оператором и оценки погрешностей

Пусть оператор ортогонального проектирования  $P_l = \bar{P}_h$ , тогда классический метод Галеркина (15) имеет вид

$$x_h(t) \cong \bar{P}_h[x_h] \equiv \bar{P}_h[\varpi(\mathbf{T}x_h + \Delta\mathbf{T}x_h)] + \bar{P}_h[f]. \quad (72)$$

Установим оценки погрешности метода (72). Обозначение погрешности метода Галеркина в пространстве кусочно линейных функций определяется аналогично, введённой погрешности в параграфе 2, т. е.

$$\bar{\varepsilon}_h = x_h - x. \quad (73)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема1.** Пусть выполнено предположение  $f \in L_p(J), 1 \leq p < 2$ , тогда

$$\begin{aligned} \|\bar{\varepsilon}_h\|_{L_2(J)} &\leq \\ &\leq 2^{9/2-1/p} \gamma_2 \|\psi\|_{L_p(J)} h_{\max}^{5/2-1/p} (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))(1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (74)$$

При выполнении условия  $f \in L_p(J), p = 2$ , справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\bar{\varepsilon}_h\|_{L_2(J)} &\leq \\ &\leq 2^4 \gamma_2 \|\psi\|_{L_2(J)} h_{\max}^2 (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2))^2 (1 + o(1)), \quad h_{\max} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (75)$$

**Доказательство.** На основании леммы 1, справедлива оценка

$$\|\bar{\varepsilon}_h\|_{L_2(J)} \leq \gamma_2 \|(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})(\mathbf{I} - \bar{P}_h)(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})\psi(\tau)\|_{L_2(J)}. \quad (76)$$

Оценка (74) следует из оценки (76), после применения неравенств (63) и (65). Оценка (75) следует из неравенства (76) и оценок (63) – (65).

Теорема доказана.

**Теорема2.** Пусть выполнено предположение  $f \in W_p^1(J), 1 \leq p < 2$ , тогда

$$\begin{aligned} & \|\bar{\varepsilon}_h\|_{L_2(J)} \leq \\ & \leq 2^{3/2} \gamma_2 \left\| \frac{d}{d} (\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}) \psi(\tau) \right\|_{L_2(J)} h_{\max}^2 (K(h_{\max}/2) + \Delta K(h_{\max}/2)) (1 + o(1)), \quad (77) \\ & h_{\max} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Доказательство основано на применении оценок (74) и (75), а так же (67) – (70).

### 5. Численная реализация метода Галеркина решения сингулярноинтегрального уравнения Фредгольма второго рода с возмущенным оператором в пространстве кусочно постоянных функций

Рассмотрим операторное уравнение (26) в пространстве кусочно постоянных функций с оператором проектирования  $\tilde{P}_h$ :

$$x_h \cong \tilde{P}_h[x_h] \equiv \tilde{P}_h[\varpi(\mathbf{T}x_h + \Delta \mathbf{T}x_h)] + \tilde{P}_h[f]. \quad (78)$$

Ранее было определено, что решение имеет вид

$$x_h(\tau) = \sum_{j=1}^n x_j \phi_{j-1/2}^h(\tau),$$

где  $\phi_{j-1/2}^h(\tau)$  – базисная функция принадлежащая интервалу  $\phi_{j-1/2}^h(\tau) \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$ , тогда система алгебраических уравнений по методу Галеркина

$$h^{-1}((\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T})x_h, \phi_{i-1/2}^h)_{L_2(J)} = h^{-1}(f, \phi_{i-1/2}^h)_{L_2(J)}, \quad 1 \leq i \leq n$$

в матричной форме принимает вид

$$\mathbf{C}^{x_h} = \varpi(\mathbf{\Lambda} + \Delta \mathbf{\Lambda}) \mathbf{C}^{x_h} + \mathbf{C}^f, \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{x_h} &= (c_1^{x_h} \quad c_2^{x_h} \quad \dots \quad c_n^{x_h})^T, \\ \mathbf{C}^f &= (c_1^f \quad c_2^f \quad \dots \quad c_n^f)^T, \quad c_i^f = h^{-1} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f(\tau) d\tau, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Матрицы  $\mathbf{\Lambda}$  и  $\Delta \mathbf{\Lambda}$ , представляющие собой конечномерный вариант интегрального оператора в уравнении (1), имеют вид

$$\mathbf{\Lambda} = [\Lambda]_{i,j=1}^n = h^{-1} (\Lambda \phi_{j-1/2}^h, \phi_{i-1/2}^h)_{L_2(J)} = \frac{1}{2h} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} K(t - \tau) dt d\tau = \lambda_{|j-i|},$$

причем

$$\lambda_0 = \int_0^T K(s) \bar{\phi}_0^h(s) ds, \quad \lambda_k = \frac{1}{2} \int_0^T K(s) \bar{\phi}_k^h(s) ds, \quad 1 \leq k < n,$$

где  $\bar{\varphi}_0^h(s)$  – кусочно линейные функции;  $\bar{\varphi}_k^h(s) = 1 - |s/h - k|$  при  $s \in (\tau_k - h, \tau_k + h)$  и  $\bar{\varphi}_k^h(s) = 0$  при  $s \notin (\tau_k - h, \tau_k + h)$ . Аналогично для матрицы  $\Delta\Lambda$ , имеем

$$\Delta\Lambda = [\Delta\Lambda]_{i,j=1}^n = h^{-1} \left( \Delta\Lambda \varphi_{j-1/2}^h, \varphi_{i-1/2}^h \right)_{L_2(J)} = \frac{1}{2h} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Delta K(t - \tau) dt d\tau = \Delta\lambda_{|j-i|}.$$

Из последнего видно, что матрицы  $\Lambda$  и  $\Delta\Lambda$  являются симметричными и теплицевыми.

Введем следующее обозначение:  $\Delta\mathbf{A}_n = \mathbf{I}_n - \varpi(\Lambda + \Delta\Lambda)$ , где  $\mathbf{I}_n$  – единичная матрица размерности  $\dim\{\mathbf{I}_n\} = n \times n$ , тогда систему (79), с учетом введенного обозначения, можно переписать в виде

$$\Delta\mathbf{A}_n \mathbf{C}^{x_h} = \mathbf{C}^f. \quad (80)$$

Матрица  $\Delta\mathbf{A}_n$  – симметрична и теплицева. Учитывая, что

$$\|\mathbf{C}^{x_h}\|^2 = \|x_h\|_{L_2(J)}^2, \quad (\Delta\mathbf{A}_n \mathbf{C}^{x_h}, \mathbf{C}^{x_h}) = \|x_h\|_{L_2(J)}^2 - \varpi((\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})x_h, x_h)_{L_2(J)}, \quad (81)$$

то с учетом неравенств (14) следует, что

$$(1 - \varpi) \|\mathbf{C}^{x_h}\|^2 \leq (\Delta\mathbf{A}_n \mathbf{C}^{x_h}, \mathbf{C}^{x_h}) \leq \|\mathbf{C}^{x_h}\|^2, \quad \forall \mathbf{C}^{x_h} \in R^n. \quad (82)$$

## 6. Численная реализация метода Галеркина решения сингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с возмущенным оператором в пространстве кусочно линейных функций

Операторное уравнение (26) в пространстве кусочно линейных функций с оператором проектирования  $\bar{P}_h$  имеет вид:

$$x_h \cong \bar{P}_h[x_h] \equiv \bar{P}_h[\varpi(\mathbf{T}x_h + \Delta\mathbf{T}x_h)] + \bar{P}_h[f], \quad (83)$$

решение  $x_h$  определено в виде

$$x_h(\tau) = \sum_{j=0}^n x_j \bar{\varphi}_j^h(\tau),$$

где  $\bar{\varphi}_j^h(\tau)$  – кусочно линейные базисные функции, а  $x_j = x^h(\tau_j)$ . Равенство (83) удовлетворяет требованию ортогональности в  $L_2(J)$  невязки

$$r_h = \varpi(\mathbf{T}x_h + \Delta\mathbf{T}x_h) + f - x^h \quad (84)$$

пространству кусочно линейных функций  $\bar{B}_h(J)$ , это требование эквивалентно следующей системе алгебраических уравнений по методу Галеркина

$$(x_h, \bar{\varphi}_i^h)_{L_2(J)} = \varpi((\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})x_h, \bar{\varphi}_i^h)_{L_2(J)} + (f, \bar{\varphi}_i^h)_{L_2(J)}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad (85)$$

которую в более компактной форме можно переписать в виде

$$\widehat{\mathbf{T}}\mathbf{C}^{x_h} = \varpi(\widehat{\mathbf{\Lambda}} + \Delta\widehat{\mathbf{\Lambda}})\mathbf{C}^{x_h} + \mathbf{C}^f, \quad (86)$$

где  $\widehat{\mathbf{T}}$ ,  $\widehat{\mathbf{\Lambda}}$  и  $\Delta\widehat{\mathbf{\Lambda}}$  – квадратные матрицы размерности  $\dim\{\widehat{\mathbf{T}}\} = n \times n$ ,  $\dim\{\widehat{\mathbf{\Lambda}}\} = n \times n$  и  $\dim\{\Delta\widehat{\mathbf{\Lambda}}\} = n \times n$ , элементы которых определяются по формулам

$$\begin{aligned} [\widehat{t}_{ij}]_{i,j=0}^n &= \left[ h^{-1}(\overline{\varphi}_j^h, \overline{\varphi}_i^h)_{L_2(J)} \right]_{i,j=0}^n, \quad [\widehat{\lambda}_{ij}]_{i,j=0}^n = \left[ h^{-1}(\mathbf{T}\overline{\varphi}_j^h, \overline{\varphi}_i^h)_{L_2(J)} \right]_{i,j=0}^n, \\ [\Delta\widehat{\lambda}_{ij}]_{i,j=0}^n &= \left[ h^{-1}(\Delta\mathbf{T}\overline{\varphi}_j^h, \overline{\varphi}_i^h)_{L_2(J)} \right]_{i,j=0}^n, \end{aligned} \quad (87)$$

вектора  $\mathbf{C}^{x_h}$  и  $\mathbf{C}^f$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{N}}^{x_h} &= (c_0^{x_h} \quad c_1^{x_h} \quad \dots \quad c_n^{x_h})^T, \\ \tilde{\mathbf{N}}^f &= (c_0^f \quad c_1^f \quad \dots \quad c_n^f)^T, \quad c_i^f = h^{-1}(f, \overline{\varphi}_i^h)_{L_2(J)}, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

В базисе кусочно линейных функций матрица  $\widehat{\mathbf{T}}$  симметрична, трехдиагональна и имеет вид:

$$\widehat{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2/3 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\widehat{\mathbf{\Lambda}}$  и  $\Delta\widehat{\mathbf{\Lambda}}$ , представляющие собой конечномерную аппроксимацию операторов  $\mathbf{T}$  и  $\Delta\mathbf{T}$ , так же симметричны и определяются из выражений

$$\widehat{\lambda}_{ij} = \frac{1}{2h} \int_0^T \int_0^T K(t-\tau) \overline{\varphi}_j^h(\tau) \overline{\varphi}_i^h(t) dt d\tau, \quad \Delta\widehat{\lambda}_{ij} = \frac{1}{2h} \int_0^T \int_0^T \Delta K(t-\tau) \overline{\varphi}_j^h(\tau) \overline{\varphi}_i^h(t) dt d\tau. \quad (88)$$

При  $i=0$ ,  $0 \leq j \leq n$  последние формулы для конечномерных операторов  $\widehat{\mathbf{\Lambda}}$  и  $\Delta\widehat{\mathbf{\Lambda}}$  принимают вид

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_{0j} = \chi_j &= \frac{1}{2h} \int_0^T \left[ \int_0^h K(t-\tau) \overline{\varphi}_0^h(t) dt \right] \overline{\varphi}_j^h(\tau) d\tau, \\ \Delta\widehat{\lambda}_{0j} = \Delta\chi_j &= \frac{1}{2h} \int_0^T \left[ \int_0^h \Delta K(t-\tau) \overline{\varphi}_0^h(t) dt \right] \overline{\varphi}_j^h(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (89)$$

а при  $j=n$ ,  $0 \leq i \leq n$  с учетом замены переменных  $s = T - t$ ,  $\bar{s} = T - \tau$  – вид

$$\widehat{\lambda}_{in} = \chi_{n-i} = \frac{1}{2h} \int_0^T \left[ \int_0^h K(s - \bar{s}) \overline{\varphi}_0^h(\bar{s}) d\bar{s} \right] \overline{\varphi}_{n-i}^h(s) ds, \tag{90}$$

$$\Delta \widehat{\lambda}_{in} = \Delta \chi_{n-i} = \frac{1}{2h} \int_0^T \left[ \int_0^h \Delta K(s - \bar{s}) \overline{\varphi}_0^h(\bar{s}) d\bar{s} \right] \overline{\varphi}_{n-i}^h(s) ds.$$

Пусть  $1 \leq i \leq j < n$ . С учетом замены  $s = t - t_i$ ,  $\bar{s} = \bar{\tau} - \tau_i$ , (88) приводятся к виду

$$\widehat{\lambda}_{ij} = \beta_{j-i} = \frac{1}{2h} \int_{\tau_{j-i-1}}^{\tau_{j-i+1}} \left[ \int_{-h}^h K(s - \bar{s}) \overline{\varphi}_0^h(\bar{s}) d\bar{s} \right] \overline{\varphi}_{j-i}^h(s) ds, \tag{91}$$

$$\Delta \widehat{\lambda}_{ij} = \Delta \beta_{j-i} = \frac{1}{2h} \int_{\tau_{j-i-1}}^{\tau_{j-i+1}} \left[ \int_{-h}^h \Delta K(s - \bar{s}) \overline{\varphi}_0^h(\bar{s}) d\bar{s} \right] \overline{\varphi}_{j-i}^h(s) ds.$$

Из последнего следует, что  $\widehat{\lambda}_{ij}$  принимают постоянные значения равные  $\beta_k$  для всех  $\forall 1 \leq i \leq j < n$ , таких что  $j - i = k$ , аналогично и для  $\Delta \widehat{\lambda}_{ij}$ . Таким образом, матрицы  $\widehat{\Lambda}$  и  $\Delta \widehat{\Lambda}$  имеют вид:

$$\widehat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \chi_0 & \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_{n-1} & \chi_n \\ \chi_1 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-2} & \chi_{n-1} \\ \chi_2 & \beta_1 & \beta_0 & \dots & \beta_{n-3} & \chi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \chi_{n-1} & \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \dots & \beta_0 & \chi_1 \\ \chi_n & \chi_{n-1} & \chi_{n-2} & \dots & \chi_1 & \chi_0 \end{pmatrix}, \tag{92}$$

$$\Delta \widehat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Delta \chi_0 & \Delta \chi_1 & \Delta \chi_2 & \dots & \Delta \chi_{n-1} & \Delta \chi_n \\ \Delta \chi_1 & \Delta \beta_0 & \Delta \beta_1 & \dots & \Delta \beta_{n-2} & \Delta \chi_{n-1} \\ \Delta \chi_2 & \Delta \beta_1 & \Delta \beta_0 & \dots & \Delta \beta_{n-3} & \Delta \chi_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Delta \chi_{n-1} & \Delta \beta_{n-2} & \Delta \beta_{n-3} & \dots & \Delta \beta_0 & \Delta \chi_1 \\ \Delta \chi_n & \Delta \chi_{n-1} & \Delta \chi_{n-2} & \dots & \Delta \chi_1 & \Delta \chi_0 \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Выражения для коэффициентов  $\chi_k, \beta_k, \Delta \chi_k$  и  $\Delta \beta_k$  матриц (92) и (93), с учетом формул

$$K_k(t) = -K'_{k+1}(t), \quad \Delta K_k(t) = -\Delta K'_{k+1}(t),$$

и интегрирования по частям имеют следующий вид:

$$\beta_0 = \frac{2}{3} K_2(0) - \frac{2}{h^2} K_4(0) + \frac{1}{h^3} [3K_5(0) - 4K_5(h) + K_5(2h)],$$

$$\beta_1 = \frac{1}{6} K_2(0) + \frac{1}{h^2} K_4(0) + \frac{1}{2h^3} [-4K_5(0) + 7K_5(h) - 4K_5(2h) + K_5(3h)],$$

$$\beta_k = \frac{1}{2h^3} [K_5(\tau_{k-2}) - 4K_5(\tau_{k-1}) + 6K_5(\tau_k) - 4K_5(\tau_{k+1}) + K_5(\tau_{k+2})], \quad 2 \leq k < n - 1,$$

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{1}{3}K_2(0) - \frac{1}{2h}K_3(0) - \frac{1}{h^2}K_4(h) + \frac{1}{h^3}[K_5(0) - K_5(h)], \\ \chi_1 &= \frac{1}{6}K_2(0) + \frac{1}{2h^2}[K_4(0) + 2K_4(h) - K_4(2h)] + \\ &+ \frac{1}{2h^3}[-3K_5(0) + 4K_5(h) - K_5(2h)] + \frac{1}{h^3}[K_5(0) - K_5(2h)], \\ \chi_k &= -\frac{1}{2h^2}[K_4(\tau_{k-1}) - 2K_4(\tau_k) + K_4(\tau_{k+1})] + \\ &+ \frac{1}{2h^3}[K_5(\tau_{k-2}) - 3K_5(\tau_{k-1}) + 3K_5(\tau_k) - K_5(\tau_{k+1})], \quad 2 \leq k < n, \\ \chi_n &= \frac{1}{2h}K_3(\tau_n) - \frac{1}{h^2}[K_4(\tau_{n-1}) - K_4(\tau_n)] + \frac{1}{2h^3}[K_5(\tau_{n-3}) - 2K_5(\tau_{n-2}) + K_5(\tau_{n-1})]. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения имеют место быть и для коэффициентов  $\Delta\chi_k$  и  $\Delta\beta_k$  матрицы (93), например:

$$\Delta\beta_0 = \frac{2}{3}\Delta K_2(0) - \frac{2}{h^2}\Delta K_4(0) + \frac{1}{h^3}[3\Delta K_5(0) - 4\Delta K_5(h) + \Delta K_5(2h)].$$

Введем следующее обозначение  $\Delta\hat{\mathbf{A}}_n = \hat{\mathbf{T}} - \varpi(\hat{\mathbf{\Lambda}} + \Delta\hat{\mathbf{\Lambda}})$ , тогда систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (86), с учетом введённого обозначения, можно переписать в векторно – матричной форме

$$\Delta\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{C}^{x_h} = \mathbf{C}^f. \quad (94)$$

Матрица  $\Delta\hat{\mathbf{A}}_n$  – симметрична.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} (1 - \varpi)\|x_h\|_{L_2(J)}^2 &\leq (x_h - \varpi(\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T})x_h, x_h) = \\ &= (\Delta\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{C}^{x_h}, \mathbf{C}^{x_h})_{R^n} \leq \|x_h\|_{L_2(J)}^2, \quad \forall \mathbf{C}^{x_h} \in R^n. \end{aligned} \quad (95)$$

Откуда следует, что матрица  $\Delta\hat{\mathbf{A}}_n$  – положительно определенная.

## 7. Субоптимальное решение проблемы наименьших квадратов со статистической неопределенностью

В этом параграфе рассматривается применение метода наименьших квадратов для решения задачи минимизации невязки, к которой сводится целевая функция

$$\|\Delta\hat{\mathbf{A}}_n \mathbf{C}^{x_h} - \mathbf{C}^f\| \rightarrow \min_{\mathbf{C}^{x_h}}$$

в задаче решения алгебраической системы уравнений (94), в условиях действия параметрической неопределенности. Используется вероятностный подход и определяется вероятное, близкое к оптимальному решение путем минимизации среднего невязки. Сходимость конечных выборок оценивается с помощью статистических методов обучения. Показано, что если построить аппроксимацию математического ожидания с помощью конечного числа  $N$  образцов, то минимум этого приближения, с высокой степенью вероятности, есть  $\varepsilon$ -субоптимальное



решение рассматриваемой задачи. Кроме того, это приближенное решение определяется численно с помощью рекурсивного алгоритма.

### 7.1. Проблема минимизации целевой функции в условиях параметрической неопределенности

Положим, что известен дифференциальный закон распределения  $f_{\theta}(\delta)$  и, в соответствии с ним, случайным образом выбираются параметры  $\delta^k \in \theta$ , где  $\theta = \{\Delta\delta \in \mathbf{R}^N : \delta_{\min} \leq \Delta\delta \leq \delta_{\max}\}$  – множество неопределенности параметров  $\delta^k$ ,  $\delta_{\min}, \delta_{\max}$  – границы множества  $\theta$ , т. е. генерируется выборка  $\delta^1, \delta^2, \dots, \delta^N$  из  $N$  независимых случайных величин, имеющих плотность распределения  $f_{\theta}(\delta)$ .

Аналитическое решение задачи (94) сводится к решению семейства систем векторно-матричных уравнений, порожденных параметрической неопределенностью. Поиск решения последней проводится сведением ее к задаче субоптимизации, представляющей собой частный случай векторной оптимизации, в которой функционал качества является уже не просто выпуклым, но и квадратичным.

**Определение 1.** [3] Векторная оптимизация — комплекс методов решения задач математического программирования, в которых критерий оптимальности представляет собой вектор, компонентами которого являются, в свою очередь, несводимые друг к другу скалярные критерии оптимальности динамических подсистем, входящих в данную систему.

Есть разные подходы к векторным задачам оптимизации, так или иначе связанные с нахождением некоторого компромисса между целями подсистем и, следовательно, между рассматриваемыми критериями. Критерии ранжируют по важности, выделяют один из них в качестве главного (тогда уровни остальных фиксируются как дополнительные ограничения).

**Определение 2.** [3] Оптимизация по одному из критериев называется субоптимизацией.

Таким образом, задача решения СЛАУ (94) сводится к нахождению решения выпуклой оптимизационной задачи, для решения которой предлагается использовать метод наименьших квадратов (МНК). В данном параграфе рассматривается регуляризованный метод МНК, дающий субоптимальное решение при параметрической неопределенности.

В стандартной постановке решением задачи МНК является нахождение решения – вектора  $\mathbf{p}^*$  операторного уравнения

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{y}, \quad (96)$$

такого, что квадрат евклидовой нормы невязки

$$\|\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2 \quad (97)$$

СЛАУ (обычно переопределенных) принимает минимальное значение. Однако в рассматриваемом случае оператор  $\mathbf{A}$  в (96) является возмущенным. Выражение (94) весьма просто представить в операторной форме (96):

$$\begin{aligned} C^{x_i}(\mathbf{p}) &= C^{x_h}; \mathbf{A}(\delta_i, \mathbf{p}) = \Delta \widehat{\mathbf{A}}_i; C^y = C^f; \\ C^{x_i}(\mathbf{p}) &= (\mathbf{A}(\delta_i, \mathbf{p}))^{-1} C^y \rightarrow \mathbf{A}(\delta) \mathbf{p} = \mathbf{y}, \end{aligned} \quad (98)$$

где матрица  $\mathbf{A}(\delta)$  известна неточно. Эта неопределенность в данных может быть учтена, предполагая, что  $\mathbf{A}(\delta)$  – в общем случае нелинейные функции вектора неопределенных вещественных параметров  $\mathbf{A}(\delta) \in \mathbf{R}^{m,n}$ ,  $\delta = [\delta_1 \ \dots \ \delta_N]^T$ , где предполагается, что неопределенный параметр принадлежит заданному ограниченному множеству  $\theta \subset R^N$ .

Для решения проблемы наименьших квадратов в случае неопределенности возможны два основных подхода [1, 2, 3, 35].

**1. Детерминированный подход** – учитывающий наиболее неблагоприятный случай, ищется минимаксное решение. Пусть

$$I(\mathbf{p}, \delta) = \|\mathbf{A}(\delta) \mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2, \quad (99)$$

тогда робастное решение проблемы наименьших квадратов есть такое решение, которое минимизирует невязку в наиболее неблагоприятном случае при неопределенностях, т.е.

$$\mathbf{p}_{\text{нс}}^* = \arg \min_{\mathbf{p}} \max_{\delta \in \theta} I(\mathbf{p}, \delta). \quad (100)$$

Подход, основанный на решении в наиболее неблагоприятном случае, обсуждается, например, в [1, 2, 3, 27, 29, 32-35] и тесно связан с регуляризацией Тихонова [40].

**2. Вероятностный подход** – допускающий стохастическую природу неопределенности. В этом случае предполагается, что на множестве  $\theta$  задана плотность вероятности  $f_{\theta}(\delta)$ , и ищется решение, минимизирующее математическое ожидание невязки (97)

$$\varphi(\mathbf{p}) = M[I(\mathbf{p}, \delta)] = M\left[\|\mathbf{A}(\delta) \mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2\right], \quad (101)$$

где  $M$  – оператор математического ожидания.

Следует отметить, что обе задачи вычислительно трудоемки. В [31] показано, что детерминированная проблема в общем случае  $NP$  – сложная. Когда неопределенность входит в данные в допустимых пределах, можно вычислить субоптимальное решение, которое минимизирует верхнюю границу на оптимальной невязке в худшем случае. В [41, 42] решение с меньшей вычислительной сложностью получено для случая простой аддитивной неопределенности. Однако неизвестен точный эффективный метод решения для общего структурированного нелинейного случая. Аналогично, в вероятностной постановке (99) даже простая оценка целевой функции для фиксированного  $\mathbf{p}$  может быть вычислительно чрезмерно высока, т.к. она требует вычисления многомерного интеграла.

Излагаемые ниже положения позволяют получить субоптимальное решение проблемы наименьших квадратов с параметрической неопределенностью, основанное на вероятностном подходе.

## 7.2. Метод наименьших квадратов: основные теоретические положения

Пусть задана функция  $g(\delta): \Theta \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\delta_i \in \mathbf{Q}$  и плотность вероятности  $f_\delta(\delta)$ . Оператор математического ожидания на  $g(\delta)$  определяется как

$$M_\delta [g(\delta)] = \int_{\delta \in \Theta} g(\delta) f_\delta(\delta) d\delta. \quad (102)$$

Пусть имеются  $N$  независимых одинаково распределенных реализаций случайной величины  $\delta^1, \dots, \delta^N$ , распределенных согласно плотности вероятности  $f_\delta(\delta)$ . Тогда оператор математического ожидания, действующий на  $g(\delta)$  определяется в виде

$$M_\delta [g(\delta)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n g(\delta^i). \quad (103)$$

Рассмотрим следующую функцию

$$\phi(\mathbf{p}) = M_\delta [I(\mathbf{p}, \delta)] = M_\delta [\|\mathbf{A}(\delta)\mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2]. \quad (104)$$

Пусть  $\Theta \subset \mathbf{R}^l$  – ограниченное множество. Кроме того, обозначим за  $\mathbf{p}^*$  решение, доставляющее минимум функции  $\phi(x)$ , т.е.

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n} \phi(\mathbf{p}). \quad (105)$$

Предположим наличие априорной информации – решение  $\mathbf{p}^*$ , которое локализовано в шаре  $P \subset \mathbf{R}^n$  с центром в точке  $p_0$  и радиусом  $R < \infty$ :

$$P = \{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{p} - p_0\|_2 \leq R\} \quad (106)$$

и при указанном условии определим достигаемый минимум через

$$\phi^* = \min_{\mathbf{p} \in P} \phi(\mathbf{p}). \quad (107)$$

Пусть  $I^*(\delta) = \min_{\mathbf{p} \in P} I(\mathbf{p}, \delta)$  и предположим, что изменение функции  $I^*(\delta)$  ограничено постоянной  $V > 0$ , т.е.

$$I(\mathbf{p}, \delta) - I^*(\delta) \leq V, \quad \forall \mathbf{p} \in P, \quad \forall \delta \in \Delta. \quad (108)$$

Выражение (108) значит, что отклонение математического ожидания также ограничено постоянной  $V$ , т.е.

$$\phi(\mathbf{p}) - \phi^* \leq V, \quad \forall \mathbf{p} \in P. \quad (109)$$

**Замечание 1.** В данном случае только предполагается, что существует такая постоянная  $V > 0$ , что выражения (107) и (109) справедливы, но нет необходимости знать его численное значение.

## 7.3. Аналитическое решение МНК в случае аффинной неопределенности

Существует тесная связь между аффинной неопределенностью и параметрической, фактически первая является частным случаем второй. Поэтому

в этом параграфе, что бы пояснить МНК со стохастической неопределенностью (МНКСН), рассмотрим частный случай, когда неопределенный параметр входит в данные линейно (аффинно).

Представим матрицу  $\mathbf{A}$  системы уравнений (98) в виде

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i \mathbf{A}_i \quad (110)$$

Предположим далее, что  $f_{\theta}(\boldsymbol{\delta}) = f_{\theta}(\delta_1), f_{\theta}(\delta_2), \dots, f_{\theta}(\delta_N)$  и  $M[\boldsymbol{\delta}] = 0$ , т.е. параметры  $\delta_i$  – центрированные независимые случайные величины. Следовательно, требуется знание только их дисперсий  $\delta_i^2 = M[\delta_i^2]$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Тогда стандартное вычисление ведет к следующему выражению для математического ожидания функции  $I(\mathbf{p}, \boldsymbol{\delta}) = \|\mathbf{A}(\boldsymbol{\delta})\mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2$ , которое имеет вид

$$\varphi(\mathbf{p}) = M[I(\mathbf{p}, \boldsymbol{\delta})] = \|\mathbf{A}_0\mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2 + \mathbf{p}^T \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{p}, \quad (111)$$

где

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^l \sigma_i^2 \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i. \quad (112)$$

Целевая функция (111) имеет форму регуляризованного МНК. Решение, минимизирующее функцию, легко вычисляется в конечной форме, что показано в теореме 3.

**Теорема 3.** Пусть  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^N \delta_i \mathbf{A}_i$ , где  $\mathbf{A}_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $i = 0, \dots, N$  – заданные матрицы,  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  – независимые случайные параметры неопределенности, имеющие нулевое математическое ожидание и заданную дисперсию  $\delta_i^2$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$ . Тогда минимум целевой функции

$$\phi(\mathbf{p}) = M_{\delta} \left[ \|\mathbf{A}(\boldsymbol{\delta})\mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2 \right] \quad (113)$$

находится при решении модифицированных нормальных уравнений

$$\left( \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{Q}} \right) \mathbf{p} = \mathbf{A}_0^T \mathbf{y}, \quad (114)$$

где  $\tilde{\mathbf{Q}}$  определено формулой (112). Минимизирующее решение всегда существует. В частности, когда  $\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{Q}} \succ \mathbf{0}$ , решение единственным образом определяется выражением

$$\mathbf{p}^* = \left( \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{Q}} \right)^{-1} \mathbf{A}_0^T \mathbf{y}. \quad (115)$$

**Доказательство.** Дифференцируя по  $\mathbf{p}$  выпуклую квадратичную целевую функцию (113), условие оптимальности первого порядка сразу приводит к (115). Единственное утверждение, которое нужно доказать, это то, что решение  $\mathbf{p}^*$  системы уравнений (111) всегда существует. Очевидно, что (111) имеет решение

тогда и только тогда когда  $\mathbf{A}_0^T \mathbf{y} \in \text{span}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{Q}})$ , на основании того, что  $\text{span}(\mathbf{A}_0^T) \subseteq \text{span}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{Q}})$ .

Как показано в [32] линейная оболочка  $\text{span}(\mathbf{A}_0^T) = \text{span}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0)$ , разрешимость (20) выполняется, в случае если выполнено условие  $\text{span}(\mathbf{A}_0^T) \subseteq \text{span}(\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{Q}})$ . В свою очередь, это условие эквивалентно

$$\ker(\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}) \subseteq \ker(\mathbf{A}_0^T). \quad (116)$$

Последнее доказывается следующим образом:

$$\forall \mathbf{p} \in \ker(\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}): \mathbf{p}^T (\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}) \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{p} = 0.$$

В виду того, что оба слагаемых в этой сумме не могут быть отрицательными, должно выполняться равенство  $\mathbf{p}^T \mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0 \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{p} = 0$ , что подразумевает  $\mathbf{p} \in \ker(\mathbf{A}_0^T \mathbf{A}_0)$ .

Теорема доказана.

Следует отметить, что этот результат может быть легко обобщен на случай, когда предположение о независимости случайных величин  $\delta_i$  отсутствует, а  $\mathbf{y}$  также считается неопределенным.

**Замечание 2.** В теореме 1.  $\text{span}(X)$  обозначает линейную оболочку столбцов матрицы  $X$ ,  $\ker(X)$  обозначает ядро матрицы  $X$ .

#### 7.4. Основанный на теории обучения подход для минимизации математического ожидания. Оценка степени робастности системы.

Минимизация математического ожидания функции  $\phi(\mathbf{p})$  в общем случае задача вычислительно сложная (действительно, как уже отмечалось, даже оценка  $\phi(\mathbf{p})$  для фиксированного  $\mathbf{p}$  может быть чрезмерно сложной), поэтому решение в данном случае будем искать в два этапа:

1. Этап - вычисление эмпирического математического ожидания;
2. Этап - определение минимума эмпирического математического ожидания.

На этапе 2 важно разрешить вопрос о сходимости минимума эмпирического математического ожидания к минимуму истинного неизвестного математического ожидания в некотором вероятностном смысле. Некоторые асимптотические результаты сходимости доступны в литературе по стохастической оптимизации [34, 37, 38] в основе, которых, лежит центральная предельная теорема. [41]

Приведенные ниже результаты получены с использованием положений теории статистического обучения, полученные В.Н. Вапником и А.Я. Червоненкисом [41], основные результаты которой будут использоваться для получения результатов асимптотической сходимости и конечного размера выборки  $N$ . Этот подход основан на законе равномерной сходимости эмпирических математических ожиданий к их математическим ожиданиям.

Пусть имеется выборка  $N$  независимых одинаково распределенных чисел  $\delta^1, \dots, \delta^N$ , сгенерированных случайным образом согласно дифференциальному закону распределения  $f_\delta(\delta)$ , и вычислено эмпирическое среднее:

$$\hat{\phi}(\mathbf{p}) = \hat{M}_N[f(\mathbf{p}, \delta)]. \quad (117)$$

Обозначим через  $\hat{\mathbf{p}}_N$  значение, доставляющее минимум эмпирическому среднему

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n} \hat{\phi}(\mathbf{p}). \quad (118)$$

Важно количественно оценить, как близко  $\phi(\hat{\mathbf{p}}_N)$  к действительному неизвестному минимуму  $\phi(\mathbf{p}^*)$ . С этой целью, отметим, во-первых, что для  $x$ , принимающих значения из множества  $\mathcal{P}$ ,  $f(x, \cdot)$  формирует семейство  $F$  измеримых функций аргумента  $\delta$ :

$$F = \{f(\mathbf{p}, \delta) : \mathbf{p} \in \mathcal{P}\}, f(\mathbf{p}, \delta) = \|\mathbf{A}(\delta)\mathbf{p} - \mathbf{y}\|^2. \quad (119)$$

Для этого необходимо ограничить (в вероятностном смысле) относительное отклонение между действительным и эмпирическим математическим ожиданием  $|\mathbf{M}_\delta[f(\cdot, \delta)] - \hat{\mathbf{M}}[f(\cdot, \delta)]|/V$  для всех  $f(\cdot, \delta)$ , принадлежащих семейству  $F$ . Другими словами, для заданной относительной ошибки  $\varepsilon \in (0, 1)$ , потребуем выполнение условия

$$P \sup_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} \left\{ \frac{|\phi(\mathbf{p}) - \hat{\phi}(\mathbf{p})|}{V} \right\} > \varepsilon \leq \alpha(N); \alpha(N) \rightarrow 0, N \rightarrow \infty. \quad (120)$$

Следует отметить, что равномерность границы (120) по отношению к  $\mathbf{p}$  играет определяющую роль, так как  $\mathbf{p}$  не фиксировано: равномерная «близость»  $\phi(\mathbf{p})$  и  $\hat{\phi}(\mathbf{p})$  – свойство, которое позволяет выполнять минимизацию функции  $\hat{\phi}(\mathbf{p})$  вместо  $\phi(\mathbf{p})$ . Выражение (120) обычно называется свойством равномерной сходимости эмпирического математического ожидания [41]. Фундаментальный результат теории обучения гласит, что свойство равномерной сходимости эмпирического математического ожидания справедливо для класса функций  $F$ , когда определенная мера сложности класса, называемая  $P$  – размерностью  $P - \dim(F)$ , ограничена. Кроме того, это свойство сохраняет в силе независимость закона распределения данных.

Следующая лемма показывает, что рассматриваемый класс функций действительно имеет конечную  $P$  – размерность, и дает оценку верхней границы  $P - \dim(F)$ .

**Лемма 8.** ( $P - \dim(F)$ ). Рассмотрим семейство функций  $F$ , определенное в (28), тогда  $P - \dim(F) \leq 9n$ .

**Доказательство.** Пусть  $M = \sup_{\mathbf{p} \in P, \delta \in \theta} f(\mathbf{p}, \delta)$ . Определим семейство двоичных функций  $\bar{F}$ , элементами которых являются функции вида:

$$\bar{f}(\mathbf{p}, \delta, c) = \begin{cases} \text{if } f(x, \delta) \geq c; \bar{f}(\mathbf{p}, \delta, c) = 1, \\ \text{else } \bar{f}(\mathbf{p}, \delta, c) = 0, \end{cases} \quad (121)$$

где  $c \in [0, M]$ . Тогда из леммы 10.1 в [42, с. 135] следует, что

$$P - \dim(F) = VC - \dim(\bar{F}), \quad (122)$$

где  $VC - \dim(\bar{F})$  обозначает размерность Вапника-Червоненкиса класса  $\bar{F}$ .

Заметим, что функции в  $\bar{F}$  квадратичные по вектору параметров  $\mathbf{p} \in P$ , поэтому граница на  $VC$ -измерение может быть получена из [33] в виде:

$$VC - \dim(\bar{F}) \leq 2n \log_2(8e) < 9n. \quad (123)$$

Подставив (122) в (123) получим

$$P - \dim(F) = VC - \dim(\bar{F}) \leq 2n \log_2(8e) < 9n, \quad (124)$$

откуда следует  $P - \dim(F) < 9n$ , что и требовалось доказать.

Важным является вопрос о размерности выборки  $N$ . Выше изложенные теоремы необходимы для установления верхней границы размерности выборки  $N$ , необходимой для достижения удовлетворительной оценки минимума  $\phi(\mathbf{p})$ . Справедлива

**Теорема 4.** Пусть  $\alpha, \varepsilon \in (0, 1)$  и

$$N \geq \frac{128}{\varepsilon^2} \left[ \ln \frac{8}{\alpha} + 9n \left( \ln \frac{32e}{\varepsilon} + \ln \ln \frac{32e}{\varepsilon} \right) \right]. \quad (125)$$

Пусть  $p^*$  – доставляет минимум  $\phi(\mathbf{p})$ ,  $\hat{\mathbf{p}}_N$  – минимум эмпирического математического ожидания  $\hat{\phi}(\mathbf{p})$ . Тогда, если  $\hat{\mathbf{p}}_N \in X$ , то с вероятностью не менее  $(1 - \alpha)$  выполняется условие

$$\left( \hat{\phi}(\hat{\mathbf{p}}_N) - \phi(\mathbf{p}^*) \right) / V \leq \varepsilon, \quad (126)$$

т.е.  $\hat{\mathbf{p}}_N$  есть  $\varepsilon$ -субоптимальное решение с высокой вероятностью  $(1 - \alpha)$ .

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, введем в рассмотрение следующее определение.

**Определение 3.** Решение  $\hat{\mathbf{p}}_N$ , при котором выполняется условие (125), называется  $(1 - \alpha)$ -вероятным около  $\varepsilon$ -близким решением, доставляющим минимум функции  $\phi(\mathbf{p})$  в относительном масштабе  $V$ .

Теперь вернемся к доказательству теоремы 2.

**Доказательство.** Рассмотрим семейство функции  $G$ , генерируемой функцией

$$g(\mathbf{p}, \delta) = \frac{f(\mathbf{p}, \delta) - f^*(\delta)}{V}, \quad (127)$$

где  $\mathbf{p}$  принимает значения из множества  $P$ . Семейство  $G$  – простое масштабирование  $F$ . Оно отображает  $\Delta$  на отрезок  $[0,1]$ , поэтому в множестве  $P$  – размерности  $G$  и  $F$  совпадают. Пусть

$$\phi_g(\mathbf{p}) = M_\delta[g(\mathbf{p}, \delta)] = \frac{\phi(\mathbf{p}) - K}{V} \quad (128)$$

и

$$\hat{\phi}_g(\mathbf{p}) = \hat{M}_N[g(\mathbf{p}, \delta)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n g(\mathbf{p}, \delta^{(i)}) = \frac{\hat{\phi}(\mathbf{p}) - \hat{K}}{V}, \quad (129)$$

где

$$\hat{K} = M_\delta[f^*(\delta)], \quad \hat{K} = \hat{M}_N[f^*(\delta)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n f^*(\delta^i). \quad (130)$$

Заметим, что  $\hat{\mathbf{p}}$  не только минимум  $\hat{\phi}(\mathbf{p})$ , но также и  $\hat{\phi}_g(\mathbf{p})$ . Поэтому теорема 2 в [42, с. 98] гарантирует, что для  $\alpha, \varepsilon \in (0,1)$  неравенство

$$P \sup |M_\delta[g(\delta)] - \hat{M}_N[g(\delta)]| > \nu \leq \alpha \quad (131)$$

выполняется независимо от распределения  $\delta$  при

$$N \geq \frac{32}{\nu^2} \left[ \ln \frac{8}{\alpha} + P - \dim(G) \left( \ln \frac{16e}{\nu} + \ln \ln \frac{16e}{\nu} \right) \right]. \quad (132)$$

Применяя теорему 2 [42, с. 98] при  $\nu = \varepsilon/2$  и с учетом ограничения

$$P - \dim(G) = P - \dim(F) \leq 9n,$$

полученного в лемме 1, следует, что для  $p \in P$  с вероятностью не меньше  $(1 - \alpha)$  выполняется неравенство

$$|\phi_g(\mathbf{p}) - \hat{\phi}_g(\mathbf{p})| \leq \varepsilon/2. \quad (133)$$

Из (42) при замене  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$  получим двойное неравенство

$$\phi_g(\mathbf{p}^*) \geq \hat{\phi}_g(\mathbf{p}^*) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \hat{\phi}_g(\hat{\mathbf{p}}_N) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (134)$$

где последнее справедливо, т.к.  $\hat{\mathbf{p}}_N$  – минимум функции  $\hat{\phi}_g$ . Из (133), заменяя

$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}_N$ , получим  $\hat{\phi}_g(\hat{\mathbf{p}}_N) \geq \phi_g(\hat{\mathbf{p}}_N) - \frac{\varepsilon}{2}$ , что при подстановке в (134) дает

$$\phi_g(\mathbf{p}^*) \geq \hat{\phi}_g(\mathbf{p}^*) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \phi_g(\hat{\mathbf{p}}_N) - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \geq \phi_g(\hat{\mathbf{p}}_N) - \varepsilon \Rightarrow \phi_g(\mathbf{p}^*) \geq \phi_g(\hat{\mathbf{p}}_N) - \varepsilon.$$

Из последнего неравенства с учетом (43) следует, что  $\hat{\phi}(\hat{\mathbf{p}}_N) - \phi(\mathbf{p}^*) \leq \varepsilon V$ , что и требовалось доказать.

**Замечание 3.** Точность приближенного решения  $\hat{\mathbf{p}}_N$  выражается относительно множителя отклонения  $V$ . Последняя оценка качества зависит выбора априорного множества  $P$ . Очевидно, что оно неубывающее по отношению к радиусу шара  $R$ . Это отражает тот факт, что чем лучше априори



локализовать решение, тем лучше оценка, которую в дальнейшем можно получить по относительной точности, с которой решение будет вычислено с помощью рассматриваемого алгоритма.

### 7.5. Численный алгоритм субоптимального решения задачи минимизации МНК

Обратим внимание на то, что целевая функция  $\hat{\varphi}(\mathbf{p})$  имеет вид квадратичной формы:

$$\hat{\varphi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\| \mathbf{A}(\delta^k) \mathbf{p} - \mathbf{y} \right\|^2 = \frac{1}{N} \left\| \bar{\mathbf{A}} \mathbf{p} - \mathbf{y} \right\|^2, \quad (135)$$

где  $\bar{\mathbf{A}} = \left[ \mathbf{A}(\delta^1) \quad \mathbf{A}(\delta^2) \quad \dots \quad \mathbf{A}(\delta^N) \right]^T$ . Следовательно, точное решение, доставляющее минимум  $\hat{\varphi}(\mathbf{p})$ , может быть вычислено по формуле

$$\hat{\mathbf{p}}_N = \bar{\mathbf{A}}^\dagger \mathbf{y}, \quad (136)$$

где  $\bar{\mathbf{A}}^\dagger$  – псевдообратная матрица Мура-Пенроуза для матрицы  $\bar{\mathbf{A}}$ . Заметим, что, так как  $\bar{\mathbf{A}}$  – функция  $\delta^k$ ,  $k=1, \dots, N$ , то решение  $\hat{\mathbf{p}}_N$  представляет собой случайную величину, закон распределения которой определен на пространстве, формируемом прямым произведением  $\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\theta} \times \dots \times \boldsymbol{\theta}$  ( $N$  раз). Решение  $\hat{\mathbf{p}}_N$  может быть также определено как результат на  $N$ -ой итерации рекурсивной формы МНК. Как это будет показано ниже.

Пусть матрица  $\mathbf{A}(\delta^1)$  полного ранга, тогда согласно теореме 3 точное решение доставляющее минимум эмпирическому среднему итеративно вычисляется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{p}}_{k+1} = \hat{\mathbf{p}}_k + \mathbf{K}_{k+1}^{-1} \mathbf{A}^T(\delta^{(k+1)}) \left( \mathbf{y} - \mathbf{A}(\delta^{(k+1)}) \hat{\mathbf{p}}_k \right), \quad (137)$$

где

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{K}_k + \mathbf{A}^T(\delta^{(k+1)}) \mathbf{A}(\delta^{(k+1)}). \quad (138)$$

Начальные условия для итерационного процесса (137) и (138) при  $k=1, \dots, N$  нулевые:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{p}}_0 = \mathbf{0}, \quad k = 0. \quad (139)$$

Таким образом, алгоритм решения имеет вид:

1. Для заданного априори множества  $P$  фиксируются желаемые вероятностные показатели качества  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  и определяется теоретическое ограничение для  $N$ .
2. Вычисляется  $\hat{\mathbf{p}}_N$ . Для его вычисления необходимо сформировать случайную выборку  $\delta^k$ ,  $k=1, \dots, N$  согласно закону распределения  $f_\theta(\delta)$  (см. замечание 3.).
3. Если  $\hat{\mathbf{p}}_N \in P$ , тогда с вероятностью более, чем  $(1 - \alpha)$  это решение будет  $\varepsilon$ -субоптимальным минимумом функции  $\hat{\varphi}(\mathbf{p})$  в относительном масштабе  $V$ .

**Замечание 4.** Для реализации предлагаемого метода возможны две типичные ситуации.

1. Известен закон распределения  $f_{\delta}(\delta)$  и функциональная зависимость  $\mathbf{A}(\delta)$ . В этом случае можно генерировать соответствующие случайные выборки  $\delta^k, k=1, \dots, N$ , используя стандартные процедуры генерации случайных величин, изложенных в [29]. При этом вероятностные оценки в теореме 4 явно связаны с вероятностной мерой  $f_{\delta}$ .
2. Неопределенность, входящая в возмущенные матрицы  $\mathbf{A}(\delta^k)$ , доступна как наблюдаемые данные. Тогда в теореме 2 результаты выполняются независимо от плотности вероятности, и, следовательно, они также могут быть применены в случае, когда мера  $f_{\delta}$  существует, но неизвестна. В этом случае  $\hat{\mathbf{p}}_N$  вычисляется непосредственно для матриц  $\mathbf{A}(\delta^k)$ , на  $k$ -м элементе выборки при  $k=1, \dots, N$ , и результаты теоремы 2 справедливы по отношению к неизвестной мере вероятности  $f_{\delta}$ .

### 7.6. Численный пример

В этом параграфе рассматривается применение разработанных методов для системы с параметрической неопределенностью. В частности, поясним предложенный подход на численном примере и проведем анализ качества полученных результатов. Также рассмотрим применение численного метода МНК в решение задачи синтеза регулятора (параграф 9), его особенности: точность, сравнение с другими оптимизационными методами, простоту программной реализации.

#### 7.6.1. Применение метода МНК для системы с аффинной неопределенностью

Рассмотрим численный пример линейной неопределенности матрицы  $\mathbf{A}$  системы уравнений (96). [27] Найдем точное решение данной задачи и сравним полученный результат с решением этой задачи численным методом в соответствии с положениями, приведенными в параграфах 7.4 и 7.5. Пусть

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^3 \delta_i \mathbf{A}_i; \mathbf{y}^T = (0 \quad 2 \quad 1 \quad 3), \quad (140)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 5,2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и пусть  $\delta_i \in \delta \subset \theta$  – центрированные случайные величины, распределенные по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением  $\sigma_1 = 0,067, \sigma_2 = 0,1,$

$\sigma_3 = 0,2$ , соответственно. В данном случае точное решение по теореме 2.1 единственно и равно  $\mathbf{p}^* = (-2,352 \quad -2,076 \quad 2,481)^T$ .

Стандартное решение МНК невозмущенной системы, т.е. при  $\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{A}_0$  имеет вид

$$\mathbf{p}_{\text{МНК}} = (-10 \quad -9,728 \quad 9,983)^T, \quad (141)$$

являющееся «далеким» от  $\mathbf{p}^*$ , поскольку норма  $\|\mathbf{p}_{\text{МНК}} - \mathbf{p}^*\| = 13,166$ .

Для поиска численного субоптимального решения зададим  $\varepsilon = 0,1$  и  $(1 - \alpha) = 0,999$ . В соответствии с приведенными положениями число элементов выборки должно составить  $N \geq 3115043$  элемента. Уже при  $N = 2000$  итераций численный алгоритм дает следующий результат

$$\hat{\mathbf{p}} = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)^T = (-2,372 \quad -2,081 \quad 2,501)^T. \quad (142)$$

Рис. 1 показывает первые  $N = 2000$  итераций алгоритма, который приводит к окончательному решению.

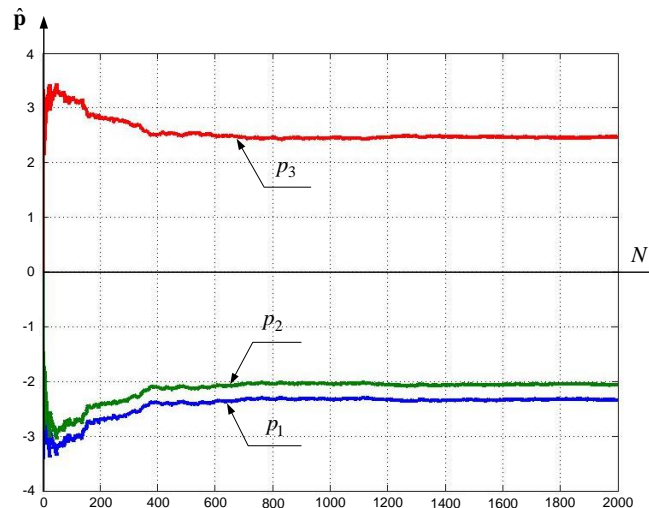


Рис. 1. Графики решения системы уравнений (140).

Как видно из графиков, представленных на рис. 1. приемлемое решение системы уравнений (140) с аффинной неопределенностью, достигнуто при меньшем значении  $N$ .

## 8. Циркулянтно предобусловленный метод сопряженных градиентов

Рассмотрим еще один метод решения системы алгебраических уравнений с интервальными параметрами вида (80) или (94) в вероятностной постановке с использованием метода сопряженных градиентов.

### 8.1. Метод сопряженных градиентов

Метод сопряженных градиентов (МСГ) является эффективным итерационным методом решения систем алгебраических уравнений вида:

$$\Delta \hat{\mathbf{A}}_n^i \mathbf{C}^{x_h} = \mathbf{C}^f, \quad (143)$$

где  $\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i = \widehat{\mathbf{T}} - \varpi(\widehat{\mathbf{A}} + \Delta\widehat{\mathbf{A}}_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , при каждом фиксированном  $i$ ,  $N$  – размерность выборки (число СЛАУ) согласно вероятностной постановке, рассмотренной выше.

Напомним МСГ. Введем следующие обозначения:  $\bar{\mathbf{C}}^{x_h}$  – решение СЛАУ (143),  $\mathbf{C}_0^{x_h}$  – начальное приближение к решению  $\bar{\mathbf{C}}^{x_h}$ ,  $\mathbf{C}_0^r = \mathbf{C}^f - \Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i \mathbf{C}_0^{x_h}$  – начальное приближение невязки, причем  $\mathbf{C}_0^p = \mathbf{C}_0^r$ . Все последующие приближения  $\mathbf{C}_{k+1}^{x_h}$  вычисляются рекуррентно по формулам:

$$\mathbf{C}_{k+1}^{x_h} = \mathbf{C}_k^{x_h} + \alpha_k \mathbf{C}_k^p, \quad \alpha_k = \frac{\|\mathbf{C}_k^r\|^2}{(\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i \mathbf{C}_k^p, \mathbf{C}_k^p)}, \quad (144)$$

$$\mathbf{C}_{k+1}^r = \mathbf{C}_k^r - \alpha_k \Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i \mathbf{C}_k^p, \quad (145)$$

$$\mathbf{C}_{k+1}^p = \mathbf{C}_{k+1}^r + \beta_k \mathbf{C}_k^p, \quad \beta_k = \frac{\|\mathbf{C}_{k+1}^r\|^2}{\|\mathbf{C}_k^r\|^2}. \quad (146)$$

Для МСГ справедлива оценка погрешности вида:

$$\left\| \mathbf{C}_n^{x_h} - \bar{\mathbf{C}}^{x_h} \right\|_{\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i|_{i=1,N}} \leq \frac{2\rho^n}{1 + \rho^{2n}} \left\| \mathbf{C}_0^{x_h} - \bar{\mathbf{C}}^{x_h} \right\|_{\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i|_{i=1,N}}, \quad (147)$$

где

$$\rho = \left( \sqrt{\text{cond}_2(\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i)} - 1 \right) / \left( \sqrt{\text{cond}_2(\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i)} + 1 \right),$$

$$\text{cond}_2(\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i) = \lambda_{\max}(\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i) / \lambda_{\min}(\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i) -$$

число обусловленности матрицы  $\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i$ .

## 8.2. Предобусловленный метод сопряженных градиентов

В практических задачах часто возникает ситуация, когда число обусловленности матрицы  $\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i$  в (143) много больше единицы:

$$\text{cond}_2(\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i) \gg 1. \quad (148)$$

В этом случае в оценке (147), величина  $\rho \approx 1 - 2/\sqrt{\text{cond}_2(\Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i)}$ , определяющая скорость сходимости метода МСГ, близка к единице, поэтому скорость сходимости может оказаться неудовлетворительной. Тогда, для увеличения скорости сходимости итерационного метода, прибегают к процедуре предобусловливания – заменяют систему (143), эквивалентной системой вида:

$$\mathbf{C}_n^{-1} \Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i \mathbf{C}_n^{x_h} = \mathbf{C}_n^{-1} \mathbf{C}^f, \quad (149)$$

где  $\mathbf{C}_n^{-1}$  некоторая матрица (условия накладываемые на эту матрицу, будут рассмотрены ниже). Эта матрица называется предобусловливателем.

Пусть  $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_n^T > 0$ . Для того чтобы применить предобусловливатель к системе (149), матрица  $\mathbf{C}_n^{-1} \Delta\widehat{\mathbf{A}}_n^i$  должна быть самосопряженной. Предположим, что матрица  $\mathbf{C}_n$  представима в виде  $\mathbf{C}_n = \mathbf{V}_n^T \mathbf{V}_n$ , где  $\mathbf{V}_n$  – невырожденная квадратная

матрица размерности  $\dim\{\mathbf{B}_n\} = n \times n$ . Умножим слева и справа систему (149) на матрицу  $\mathbf{B}_n$ , тогда получим

$$\left(\mathbf{B}_n^T\right)^{-1} \Delta \widehat{\mathbf{A}}_n^i \mathbf{B}_n^{-1} \mathbf{B}_n \mathbf{C}^{x_h} = \left(\mathbf{B}_n^T\right)^{-1} \mathbf{C}^f. \quad (150)$$

Введем следующие обозначения, через  $\mathbf{C}^x = \mathbf{B}_n \mathbf{C}^{x_h}$ ,  $\Delta \mathbf{A}_n^i = \left(\mathbf{B}_n^T\right)^{-1} \Delta \widehat{\mathbf{A}}_n^i \mathbf{B}_n^{-1}$ ,  $\widehat{\mathbf{C}}^f = \left(\mathbf{B}_n^T\right)^{-1} \mathbf{C}^f$ , с учетом введенных обозначений имеем

$$\Delta \mathbf{A}_n^i \widetilde{\mathbf{N}}^x = \widehat{\mathbf{C}}^f. \quad (151)$$

Видно, что  $\Delta \mathbf{A}_n^i = \left(\Delta \mathbf{A}_n^i\right)^T > 0$ . Применим для решения системы (150) МСГ (144) – (147). Пусть  $\mathbf{C}_0^x$  – начальное приближение к решению,  $\mathbf{C}_0^s = \widehat{\mathbf{C}}^f - \Delta \mathbf{A}_n^i \mathbf{C}_0^x$  – начальное приближение невязки, причем  $\mathbf{C}_0^q = \mathbf{C}_0^s$ . Все последующие приближения  $\mathbf{C}_{k+1}^x$  и невязки  $\mathbf{C}_{k+1}^s$  при  $k \geq 0$  вычисляются рекуррентно по формулам:

$$\mathbf{C}_{k+1}^x = \mathbf{C}_k^x + \alpha_k \mathbf{C}_k^q, \quad \alpha_k = \left\| \mathbf{C}_k^s \right\|^2 / \left( \Delta \mathbf{A}_n^i \mathbf{C}_k^q, \mathbf{C}_k^q \right), \quad (152)$$

$$\mathbf{C}_{k+1}^s = \mathbf{C}_k^s - \alpha_k \Delta \mathbf{A}_n^i \widetilde{\mathbf{N}}_k^q, \quad (153)$$

$$\mathbf{C}_{k+1}^q = \mathbf{C}_{k+1}^s + \beta_k \mathbf{C}_k^q, \quad \beta_k = \left\| \mathbf{C}_{k+1}^s \right\|^2 / \left\| \mathbf{C}_k^s \right\|^2. \quad (154)$$

На основе обозначений:  $\mathbf{C}_k^x = \mathbf{B}_n \mathbf{C}_k^{x_h}$ ,  $\mathbf{C}_k^s = \left(\mathbf{B}_n^T\right)^{-1} \mathbf{C}_k^r$ ,  $\mathbf{C}_k^q = \mathbf{B}_n \mathbf{C}_k^p$ , приходим к предобусловленному методу сопряженных градиентов (ПМСГ):

$$\mathbf{C}_0^r = \mathbf{C}^f - \Delta \widehat{\mathbf{A}}_n^i \mathbf{C}_0^{x_h}, \quad \mathbf{C}_0^s = c^{-1} \mathbf{C}_0^r, \quad \mathbf{C}_0^p = \mathbf{B}_n^{-1} \mathbf{C}_0^s, \quad (155)$$

$$\mathbf{C}_{k+1}^x = \mathbf{C}_k^x + \alpha_k \mathbf{C}_k^p, \quad \alpha_k = \left\| \mathbf{C}_k^s \right\|^2 / \left( \Delta \mathbf{A}_n^i \mathbf{C}_k^p, \mathbf{C}_k^p \right), \quad (156)$$

$$\mathbf{C}_{k+1}^r = \mathbf{C}_k^r - \alpha_k \Delta \mathbf{A}_n^i \mathbf{C}_k^p, \quad (157)$$

$$\mathbf{C}_{k+1}^s = \left(\mathbf{B}_n^T\right)^{-1} \mathbf{C}_{k+1}^r, \quad \mathbf{C}_{k+1}^z = \mathbf{B}_n^{-1} \mathbf{C}_{k+1}^s, \quad (158)$$

$$\mathbf{C}_{k+1}^p = \mathbf{C}_{k+1}^z + \beta_k \mathbf{C}_k^p, \quad \beta_k = \left\| \mathbf{C}_{k+1}^s \right\|^2 / \left\| \mathbf{C}_k^s \right\|^2. \quad (159)$$

Основные вычислительные затраты в методе МСГ, связаны с умножением матрицы  $\Delta \mathbf{A}_n^i$  на вектор  $\mathbf{C}_k^p$  в (157). Необходимо так же учитывать затраты на построение предобусловливателя  $\mathbf{C}_n$ . Обычно на основе оценки (147) предобусловливатель выбирают т.о. чтобы  $\text{cond}_2\left(\Delta \widehat{\mathbf{A}}_n^i\right) \square \text{cond}_2\left(\Delta \mathbf{A}_n^i\right)$ . Однако наличие у МСГ свойства сверхлинейной сходимости приводит к тому, что предобусловливатель может быть выбран т.о. чтобы основная часть спектра матрицы  $\Delta \widehat{\mathbf{A}}_n^i$  оказалась кластеризованной вблизи единицы, а остальная часть собственных чисел оказалась отделена от единицы.

### 8.3. Циркулянтно предобусловленный метод сопряженных градиентов

Поскольку матрица  $\Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i$  в (149) теплицева, применим в качестве предобусловливателя циркулянтные матрицы, впервые предложенные для подобного типа систем и метода МСГ, в 1986 году Strang [22] и Olkin [23]

Пусть  $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}_n^T > 0$  – циркулянтный предобусловливатель. На основе разложения  $\mathbf{C}_n = (1/n)\mathbf{F}_n^T \mathbf{D}_n \mathbf{F}_n$  предобусловливатель можно представить в виде  $\mathbf{C}_n = \mathbf{V}_n^T \mathbf{V}_n$ , где  $\mathbf{V}_n = (1/\sqrt{n})\mathbf{D}_n^{1/2} \mathbf{F}_n$ . Метод МСГ с таким предобусловливателем и есть циркулянтно предобусловленный метод сопряженных градиентов (ЦПМСГ).

В [24] установлена сверхлинейная сходимость этого метода и дано теоретическое обоснование этого явления. Оказалось, что основную роль в явлении быстрой сверхлинейной сходимости этого метода играет кластеризация собственных значений предобусловленной матрицы вблизи 1. Отметим, что на каждой итерации этого метода необходимо умножать матрицу  $\Delta\mathbf{A}_n^i$  на вектор  $\mathbf{C}_k^p$  и вычислять  $\mathbf{C}_{k+1}^z = (1/n)\mathbf{F}_n^T \mathbf{D}_n \mathbf{F}_n \tilde{\mathbf{N}}_{k+1}^r$ , т.о. что затраты на одну итерацию составляют  $O(n \log_2 n)$  арифметических операций [22] – [24].

**Определение 3.** [24] Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $N_\varepsilon(\Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i)$  – число собственных значений матрицы  $\Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i$ , удовлетворяющих неравенству  $|\lambda_j(\Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i) - 1| > \varepsilon$ . Говорят, что собственные значения семейства матриц  $\{\Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i\}$ , при каждом фиксированном  $i$ , кластеризуются вблизи 1, если для всех  $\varepsilon > 0$  и всех матриц  $\Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i$  из рассматриваемого семейства справедлива оценка  $N_\varepsilon(\Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i) \leq \bar{N}_\varepsilon$  с постоянной  $\bar{N}_\varepsilon$ , не зависящей от  $\Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i$ .

В случае кластеризации собственных значений вблизи единицы ЦПМСГ справедлива оценка [24]

$$\left\| \mathbf{C}_k^{x_h} - \bar{\mathbf{C}}^{x_h} \right\|_{\Delta\tilde{\mathbf{A}}_n^i|_{i=1, N}} \leq c(\varepsilon) \varepsilon^k \left\| \mathbf{C}_0^{x_h} - \bar{\mathbf{C}}^{x_h} \right\|_{\Delta\tilde{\mathbf{A}}_n^i|_{i=1, N}}, \quad (160)$$

где  $\Delta\tilde{\mathbf{A}}_n^i = \mathbf{C}_n^{-1/2} \Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i \mathbf{C}_n^{-1/2}$ .

Циркулянтный предобусловливатель  $\mathbf{C}_n$ , предложенный Стренгом в [22], определяется по виду матрицы  $\Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i$  в виде:  $c_k = a_k$ ,  $0 \leq k < n/2$ ,  $c_k = \text{Re } a_k$  для  $k = n/2$  и  $c_k = a_{k-n}$ , для  $n/2 < k < n$ . Свойство предобусловливателя Стренга состоит в том, что он минимизирует нормы:  $\left\| \mathbf{C}_n - \Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i \right\|_1$  или  $\left\| \mathbf{C}_n - \Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i \right\|_\infty$  в классе самосопряженных циркулянтных матриц. Позднее было предложено большое число других циркулянтных предобусловливателей. Например, циркулянтный предобусловливатель Чена, который определяется формулой

$$c_k = \frac{n-k}{n} a_k + \frac{k}{n} a_{n-k}, \quad 0 \leq k < n$$

минимизирует норму Фробениуса  $\left\| \mathbf{C}_n - \Delta\hat{\mathbf{A}}_n^i \right\|_F$ .

**8.4. Применение метода ЦПМСГ к решению СЛАУ с матрицей вида**

$$\Delta \widehat{\mathbf{A}}_n^i = \widehat{\mathbf{T}} - \varpi(\widehat{\mathbf{\Lambda}} + \Delta \widehat{\mathbf{\Lambda}}_i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad \text{Кластеризация} \quad \text{собственных}$$

**значений.**

Рассмотрим применение метода ЦПМСГ к решению СЛАУ (94), когда  $\Delta \widehat{\mathbf{A}}_n^i = \widehat{\mathbf{T}} - \varpi(\widehat{\mathbf{\Lambda}} + \Delta \widehat{\mathbf{\Lambda}}_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Для этого необходимо провести разокаймливание матрицы  $\Delta \widehat{\mathbf{A}}_n^i$ .

Под разокаймливанием матрицы  $\Delta \widehat{\mathbf{A}}_n^i$  будем понимать удаление из нее первой и последних строк, а также первого и последнего столбцов. Отметим, что после применения операции разокаймливания к указанной матрице, получается самосопряженная положительно определенная теплицева матрица вида

$$\Delta \widehat{\mathbf{A}}_{n-1}^i = \widehat{\mathbf{T}}_{n-1} - \varpi(\widehat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1} + \Delta \widehat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1}^i), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (161)$$

где в матрице  $\Delta \widehat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1}^i$  проведена перемена местами индексов  $i$  и  $n-1$ , для удобства читателя, матрицы  $\widehat{\mathbf{T}}_{n-1}$ ,  $\widehat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1}$  и  $\Delta \widehat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1}^i$  имеют вид:

$$\widehat{\mathbf{T}}_{n-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 0 & \dots & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \dots & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1} = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{n-2} \\ \beta_1 & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-3} \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \dots & \beta_{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n-2} & \beta_{n-3} & \beta_{n-4} & \dots & \beta_0 \end{pmatrix}, \quad \Delta \widehat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1}^i = \begin{pmatrix} \beta_0^i & \beta_1^i & \beta_2^i & \dots & \beta_{n-2}^i \\ \beta_1^i & \beta_0^i & \beta_1^i & \dots & \beta_{n-3}^i \\ \beta_2^i & \beta_1^i & \beta_0^i & \dots & \beta_{n-4}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n-2}^i & \beta_{n-3}^i & \beta_{n-4}^i & \dots & \beta_0^i \end{pmatrix},$$

последние матрицы также положительно определенные и теплицевы.

Представим вектор неизвестных коэффициентов Фурье  $\mathbf{C}^{x_h}$  в СЛАУ (86) виде:

$\bar{\mathbf{C}}^{x_h} = (c_1^{x_h} \quad c_2^{x_h} \quad \dots \quad c_{n-1}^{x_h})^T$ , тогда последнюю систему можно переписать следующим образом:

$$(1/3 - \varpi\chi_0) c_0^{x_h} + (\mathbf{v}, \bar{\mathbf{C}}^{x_h})_{R^{n-1}} + \chi_n c_n^{x_h} = c_0^f, \quad (162)$$

$$c_0^{x_h} \mathbf{v} + \Delta \widehat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \bar{\mathbf{C}}^{x_h} + c_n^{x_h} \mathbf{w} = \bar{\mathbf{C}}^f, \quad (163)$$

$$\chi_n c_0^{x_h} + (\mathbf{w}, \mathbf{v})_{R^{n-1}} + (1/3 - \varpi\chi_0) c_n^{x_h} = c_n^f, \quad (164)$$

где

$$\mathbf{v} = (1/6 - \varpi\chi_1, -\varpi\chi_2, \dots, -\varpi\chi_{n-1})^T, \quad \mathbf{w} = (-\varpi\chi_{n-1}, \dots, -\varpi\chi_2, 1/6 - \varpi\chi_1)^T,$$

$$\bar{\mathbf{C}}^f = \left( c_1^f \quad c_2^f \quad \dots \quad c_{n-1}^f \right)^T.$$

Из (163) следует, что

$$\bar{\mathbf{C}}^{x_h} = \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right)^{-1} \bar{\mathbf{C}}^f - c_0^{x_h} \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right)^{-1} \mathbf{v} - c_n^{x_h} \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right)^{-1} \mathbf{w}. \quad (165)$$

Подставим выражение (165) в (162) и (164), получим систему линейных уравнений относительно  $c_0^{x_h}$  и  $c_n^{x_h}$ :

$$\begin{aligned} & \left( 1/3 - \varpi \chi_0 - \left( \mathbf{v}, \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right)^{-1} \mathbf{v} \right)_{R^{n-1}} \right) c_0^{x_h} + \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{C}}^{x_h} + \\ & + \left( \chi_n - \left( \mathbf{v}, \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right)^{-1} \mathbf{w} \right)_{R^{n-1}} \right) c_n^{x_h} = c_0^f - \left( \mathbf{v}, \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right)^{-1} \bar{\mathbf{C}}^f \right)_{R^{n-1}}, \end{aligned} \quad (166)$$

$$\begin{aligned} & \left( \chi_n - \left( \mathbf{w}, \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right)^{-1} \mathbf{v} \right)_{R^{n-1}} \right) c_0^{x_h} + \left( 1/3 - \varpi \chi_0 - \left( \mathbf{w}, \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right)^{-1} \mathbf{w} \right)_{R^{n-1}} \right) c_n^{x_h} = \\ & = c_n^f - \left( \mathbf{w}, \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right)^{-1} \bar{\mathbf{C}}^f \right)_{R^{n-1}}. \end{aligned} \quad (167)$$

Таким образом, этапы решения системы (162) – (164) следующие:

1. Вычисление произведений матрицы  $\left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right)^{-1}$  на вектора  $\bar{\mathbf{C}}^f$  и  $\mathbf{v}$ .
2. Решение системы уравнений (166) и (167).
3. Вычисление  $\bar{\mathbf{C}}^{x_h}$  по формуле (165).

Видно, что основные вычислительные ресурсы ЭВМ используются при выполнении первого этапа, последнее связано с необходимостью решать систему с треплицевой матрицей вида  $\Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i$ .

Пусть  $\Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i = \hat{\mathbf{T}}_{n-1} - \varpi \left( \hat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1} + \Delta \hat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1}^i \right)$  (см. формулу (161)). Из оценки (95) видно, что

$$\begin{aligned} (1 - \varpi) \|x_h\|_{L_2(J)}^2 & \leq \left( x_h - \varpi \left( \hat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1} + \Delta \hat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1}^i \right) x_h, x_h \right)_{L_2(J)} = \\ & = \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \mathbf{C}^{x_h}, \mathbf{C}^{x_h} \right)_{R^{n+1}} \leq \|x_h\|_{L_2(J)}^2, \quad \forall \mathbf{C}^{x_h} \in R^{n+1}, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (168)$$

где решение  $x_h$  определено в виде

$$x_h(\tau) = \sum_{j=0}^n x_j \bar{\Phi}_j^h(\tau).$$

Из последнего следует, что

$$1 - \varpi \leq \lambda_{\min} \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right) \leq \lambda_{\max} \left( \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right) \leq 1, \quad i = \overline{1, N}. \quad (169)$$

К решению системы  $\Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \bar{\mathbf{C}}^{x_h} = \bar{\mathbf{C}}^f$  применим метод ЦПМСГ с преобусловливателем циркулянтного типа Г. Чена вида:

$$\mathbf{C}_{n-1} = \bar{\mathbf{T}}_{n-1} - \varpi \bar{\mathbf{\Lambda}}_{n-1}, \quad (170)$$



где  $\bar{\mathbf{T}}_{n-1}, \bar{\mathbf{\Lambda}}_{n-1}$  – циркулянтные матрицы, у которых первые столбцы определяются по формулам  $(2/3 \ \bar{t}_1 \ \dots \ \bar{t}_{n-2})^T, (\beta_0 \ \bar{\beta}_1 \ \dots \ \bar{\beta}_{n-2})^T$ , где  $\bar{t}_1 = \bar{t}_{n-2} = \frac{n-2}{6(n-1)}$ ,

$\bar{t}_k = 0$  для  $1 < k < n-2$ ,  $\bar{\beta}_k = \frac{n-1-k}{n-1} \beta_k + \frac{k}{n-1} \beta_{n-1-k}$  для  $1 \leq k < n-1$ . При чем для

предобусловливателя Т. Чена должны быть справедливы неравенства [85]:

$$\lambda_{\min}(\Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i) \leq \lambda_{\min}(\mathbf{C}_{n-1}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{C}_{n-1}) \leq \lambda_{\max}(\Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i).$$

Поэтому из (171) следуют оценки

$$1 - \varpi \leq \lambda_{\min}(\mathbf{C}_{n-1}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{C}_n) \leq 1, \left\| (\mathbf{C}_n)^{-1} \right\|_2 < 1/(1 - \varpi). \quad (171)$$

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 9.** Для системы  $\Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \tilde{\mathbf{N}}^{x_h} = \bar{\mathbf{C}}^f, i = 1, N$  с предобусловливателем Т.Чена (170) справедлива оценка

$$\left\| \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i - \mathbf{C}_{n-1} \right\|_F \leq \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2 \int_0^\infty K^2(t) t dt + \int_0^h K^2(t) dt \right)^{1/2}. \quad (172)$$

**Доказательство.** Видно, что

$$\left\| \hat{\mathbf{T}}_{n-1} - \bar{\mathbf{T}}_{n-1} \right\|_F^2 = \frac{2(n-2)}{36(n-1)^2} + \frac{2(n-2)^2}{36(n-1)^2} < \frac{1}{18}. \quad (173)$$

Учитывая, что  $\beta_k - \bar{\beta}_k = \frac{k}{n-1}(\beta_k - \beta_{n-1-k}), \beta_{n-1-k} - \bar{\beta}_{n-1-k} = \frac{n-1-k}{n-1}(\beta_{n-1-k} - \beta_k)$ , то

$$\begin{aligned} \left\| \hat{\mathbf{\Lambda}}_{n-1} - \bar{\mathbf{\Lambda}}_{n-1} \right\|_F^2 &= \sum_{k=1}^{n-2} (n-1-k)(\beta_k - \bar{\beta}_k)^2 + \sum_{k=1}^{n-2} k(\beta_{n-1-k} - \bar{\beta}_{n-1-k})^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k(n-1-k)}{n-1} (\beta_k - \beta_{n-1-k})^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{n-2} k \beta_k^2. \end{aligned} \quad (174)$$

Отметим, что при  $1 \leq k < n-1$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} 2k\beta_k^2 &= \frac{\tau_k}{2h^3} \left( \int_0^T \int_{-h}^h K(s-s') \bar{\varphi}_0^h(s) ds \right) \left[ \bar{\varphi}_0^h(s') ds' \right] \leq \\ &= \frac{\tau_k}{2h^3} \int_0^T \int_{-h}^h (\bar{\varphi}_0^h(s))^2 ds \left[ \bar{\varphi}_0^h(s') ds' \right] \int_0^T \int_{-h}^h K^2(s-s') ds \left[ \bar{\varphi}_0^h(s') ds' \right] \leq \\ &= \frac{\tau_k}{3h} \int_{-h}^h \left[ \int_0^T K^2(s-s') \bar{\varphi}_0^h(s') ds' \right] ds. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\sum_{k=1}^\infty \tau_k \bar{\varphi}_k^h(s') \equiv s', s' \geq 0$ , так как последняя функция является линейной интерполяцией функции  $y(s') = s'$ , имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{\Lambda}_{n-1} - \bar{\Lambda}_{n-1}\|_F^2 &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} k (\beta_k)^2 \leq \frac{1}{3h} \int_{-h}^h \left[ \int_0^T K^2(s-s') \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \bar{\Phi}_k^h(s') ds' \right] ds \leq \\ &\leq \frac{1}{3h} \int_{-h}^h \left[ \int_0^{\infty} K^2(s-s') s' ds' \right] ds = \frac{1}{3h} \int_0^h \left[ \int_{-s}^{\infty} K^2(t) t dt + \int_{-s}^{\infty} K^2(t) t ds \right] ds + \\ &\quad + \frac{1}{3h} \int_0^h \left[ \int_s^{\infty} K^2(t) t dt + \int_s^{\infty} K^2(t) dt (-s) \right] ds = \\ &= \frac{1}{3h} \left( 2 \int_0^h \left[ \int_s^{\infty} K^2(t) t dt + \int_0^s K^2(t) dt s \right] ds \right) \leq \frac{1}{3} \left( 2 \int_s^{\infty} K^2(t) t dt + h \int_0^h K^2(t) dt \right). \end{aligned}$$

Из оценок (159) и (160) следует, что

$$\begin{aligned} \|\Delta \widehat{\mathbf{A}}_{n-1}^i - \mathbf{C}_{n-1}\|_F &\leq \|\widehat{\mathbf{T}}_{n-1} - \bar{\mathbf{T}}_{n-1}\|_F + \|\widehat{\Lambda}_{n-1} - \bar{\Lambda}_{n-1}\|_F \leq \\ &\leq \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2 \int_0^{\infty} K^2(t) t dt + \int_0^h K^2(t) dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Покажем, что собственные значения матриц  $\Delta \tilde{\mathbf{A}}_{n-1}^i$  кластеризуются вблизи единицы. Справедлива теорема.

**Теорема 5.** Для СЛАУ с матрицей  $\Delta \tilde{\mathbf{A}}_{n-1}^i$  справедлива оценка

$$N_{\varepsilon}(\Delta \tilde{\mathbf{A}}_{n-1}^i) \leq \frac{N_h^2}{\varepsilon^2 (1 - \varpi)^2}, \tag{175}$$

где  $N_h$  определяется выражением:  $N_h = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2 \int_0^{\infty} K^2(t) t dt + \int_0^h K^2(t) dt \right)^{1/2}$ .

**Доказательство.** Представим матрицу  $\mathbf{C}_{n-1}$  в виде разложения матриц  $\mathbf{C}_{n-1} = (1/(n-1)) \mathbf{F}_{n-1}^T \mathbf{D}_{n-1} \mathbf{F}_{n-1}$ , где  $\mathbf{C}_{n-1}$  – циркулянтная матрица, у которой первый столбец имеет вид:  $c_{n-1} = (c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-2})^T$ ,  $\mathbf{F}_{n-1}$  – матрица Фурье размерности  $\dim\{\mathbf{F}_{n-1}\} = (n-1) \times (n-1)$ ,  $\mathbf{D}_{n-1}$  – диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы  $\tilde{\mathbf{N}}_{n-1}$ . Тогда матрица  $\Delta \tilde{\mathbf{A}}_{n-1}^i$  имеет вид

$$\Delta \tilde{\mathbf{A}}_{n-1}^i = \frac{1}{n-1} (\mathbf{D}_{n-1})^{-1/2} \mathbf{F}_{n-1} \Delta \widehat{\mathbf{A}}_{n-1}^i \mathbf{F}_{n-1}^T (\mathbf{D}_{n-1})^{-1/2} = \mathbf{I}_{n-1} + \mathbf{V}_{n-1},$$

где  $\mathbf{V}_{n-1} = \frac{1}{n-1} (\mathbf{D}_{n-1})^{-1/2} \mathbf{F}_{n-1} (\Delta \widehat{\mathbf{A}}_{n-1}^i - \tilde{\mathbf{N}}_{n-1}) \mathbf{F}_{n-1}^T (\mathbf{D}_{n-1})^{-1/2}$ , а  $\mathbf{I}_{n-1}$  – единичная матрица соответствующей размерности. Справедливо, что

$$\|(\mathbf{D}_{n-1})^{-1/2}\|_2 = \|\mathbf{C}_{n-1}^{-1}\|_2 \leq \frac{1}{1 - \varpi},$$

то из последнего следует

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_{n-1}\|_F &\leq \frac{1}{n-1} \left\| (\mathbf{D}_{n-1})^{-1/2} \right\|_2 \left\| \mathbf{F}_{n-1} \right\|_2 \left\| \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i - \tilde{\mathbf{N}}_{n-1} \right\|_F \left\| \mathbf{F}_{n-1}^T \right\|_2 \left\| (\mathbf{D}_{n-1})^{-1/2} \right\|_2 = \\ &= \left\| (\mathbf{D}_{n-1})^{-1/2} \right\|_2 \left\| \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i - \tilde{\mathbf{N}}_{n-1} \right\|_F \leq \frac{1}{1-\varpi} \left\| \Delta \hat{\mathbf{A}}_{n-1}^i - \mathbf{C}_{n-1} \right\|_F \leq \frac{N_h}{1-\varpi}. \end{aligned}$$

На основании последней приведенной оценки и теоремы Виланда-Хофмана [88] имеем

$$\varepsilon^2 N_\varepsilon \left( \Delta \tilde{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left( \lambda_k \left( \Delta \tilde{\mathbf{A}}_{n-1}^i \right) - 1 \right)^2 \leq \left\| \mathbf{V}_{n-1} \right\|_F^2 \leq \frac{N_h^2}{(1-\varpi)^2}.$$

Теорема доказана.

### 9. Математическое моделирование на тестовом примере

Продемонстрируем применение изложенной методики. Система автоматического управления технологическим процессом имеет следующую передаточную функцию [1]:

$$W(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (176)$$

где  $b_0 = 1,22 p_4$ ,  $b_1 = 1,22 p_3$ ,  $b_2 = 1,22 p_2$ ,  $b_3 = 1,22 p_1$ ,  $a_0 = 1,22 p_4$ ,  $a_1 = 1,22 p_3$ ,  $a_2 = 1 + 1,22 p_2$ ,  $a_3 = 5 + 1,22 p_1$ ,  $a_4 = 9$ ,  $a_5 = 7,4$ ,  $a_6 = 2,25$ ;  $p_1, p_2, p_3, p_4$  — настраиваемые параметры регулятора.

Переходная характеристика скорректированной системы должна удовлетворять условиям:  $T_y \leq (15 - 25) c$ ,  $\sigma \leq 20\%$ .

Выберем в качестве эталонной переходной характеристики реакцию аperiodического звена на единичное входное воздействие:

$$x_3(t) = 1 - e^{(-1/3)t}, \quad y_3(t) = 1(t). \quad (177)$$

На  $[0, T]$  вводится сетка  $t_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, l$ ,  $h = 1/l$ , и функции вида

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} \frac{t - t_{i-1}}{h}, & t \in (t_{i-1}, t_i), \\ \frac{t_{i+1} - t}{h}, & t \in (t_i, t_{i+1}), \\ 0, & t \notin (t_{i-1}, t_{i+1}), \end{cases} \quad i = 1, \dots, l-1, \quad (178)$$

которые применяются в качестве базисных. Переход от передаточной функции к эквивалентному дифференциальному уравнению, вполне очевиден и основан на применении обратного преобразования Лапласа. В приложениях 1 – 3 приведена процедура перехода от дифференциального уравнения к эквивалентному интегральному уравнению 2 – го рода, а так же сведение исходной бесконечномерной задачи к конечномерной, на основе техники матричных операторов, показан вывод матричного оператора эквивалентного интегральному оператору в базисе кусочно-линейных функций (178).

Получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров регулятора  $p_1, p_2, p_3, p_4$

$$\mathbf{A}\mathbf{p} \approx \mathbf{b}, \quad (179)$$

где

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1,22\mathbf{A}_и^3\mathbf{C}^{x_3} - 1,22\mathbf{A}_и^3\mathbf{C}^y \\ 1,22\mathbf{A}_и^4\mathbf{C}^{x_3} - 1,22\mathbf{A}_и^4\mathbf{C}^y \\ 1,22\mathbf{A}_и^5\mathbf{C}^{x_3} - 1,22\mathbf{A}_и^5\mathbf{C}^y \\ 1,22\mathbf{A}_и^6\mathbf{C}^{x_3} - 1,22\mathbf{A}_и^6\mathbf{C}^y \end{bmatrix}; \mathbf{p} = (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4)^T; \quad (180)$$

$$\mathbf{b} = -\left(2,25\mathbf{I} + 7,4\mathbf{A}_и + 9\mathbf{A}_и^2 + 5\mathbf{A}_и^3 + \mathbf{A}_и^4\right)\mathbf{C}^{x_3}, \quad (181)$$

$\mathbf{A}$  — известная матрица;  $\mathbf{b}$  — известный вектор;  $\mathbf{p}$  — вектор настраиваемых параметров;  $\mathbf{C}^{x_3}$  — сеточная характеристика эталонного сигнала (177); знак приближенного равенства в (179) объясняется тем, что на практике невозможно точно достичь соответствия эталонному процессу.

Расширим выражение (179) на случай, когда вектор  $\mathbf{b}$  точно неизвестен, т.е. имеется неопределенность в случае отклонения коэффициентов  $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  на  $\pm 10\%$  от их номинальных значений. В таком случае справедливо следующее

$$\mathbf{A}\mathbf{p} \approx \mathbf{b}(\delta), \quad (182)$$

где вектор  $\mathbf{b}(\delta_i)$  при  $i$ -м значении из выборки  $\delta_i \in \delta$ , где  $i = \overline{1, N}$ ,  $N$  — размерность выборки, имеет вид

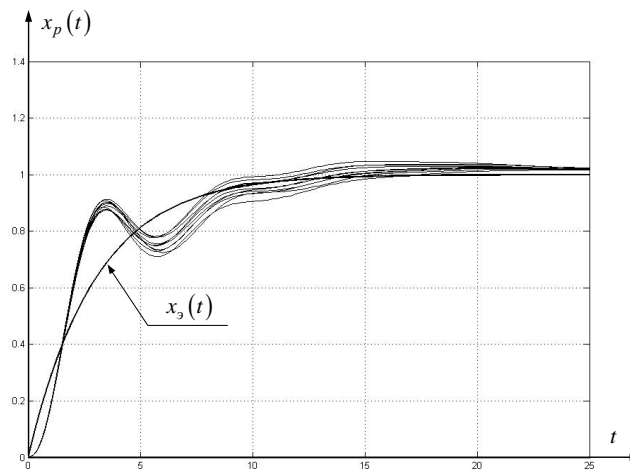
$$\mathbf{b}(\delta_i) = -\left((2,25 + \delta_i)\mathbf{I} + (7,4 + \delta_i)\mathbf{A}_и + (9 + \delta_i)\mathbf{A}_и^2 + (5 + \delta_i)\mathbf{A}_и^3 + (1 + \delta_i)\mathbf{A}_и^4\right)\mathbf{C}^{x_3}.$$

В соответствии с теоремой можно определить необходимое число  $N$  элементов выборки, обеспечивающее попадание в  $\varepsilon$ -окрестность минимума целевой функции  $I(\mathbf{p}, \delta)$  с вероятностью  $(1 - \alpha)$ ,  $\alpha, \varepsilon \in (0, 1)$ .

Заметим, что выражение (125) дает верхнюю оценку размерности выборки  $N$ , и в общем случае, является избыточной, поэтому ограничимся меньшим значением. Пусть  $N = 500$ . Число базисных функций 100. В результате реализации алгоритма получены следующие численные значения параметров регулятора:

$$p_1 = 3,445; p_2 = 1,251; p_3 = 0,272; p_4 = 0,001. \quad (183)$$

На рис. 2 изображены графики семейств переходных характеристик скорректированной системы.



**Рис. 2.** Графики эталонной переходной характеристики и семейства скорректированных переходных характеристик системы.

Таким образом, все семейство переходных процессов САУ в условиях действия параметрической неопределенности, удовлетворяет прямым показателям качества.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Рассмотрим вопросы перехода от линейного дифференциального уравнения с интервальными параметрами к эквивалентному интегральному уравнению второго рода с возмущенным оператором (1).

Пусть линейный элемент САУ постоянными параметрами описывается скалярным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка вида:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^f x^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j^r \varepsilon^{(j)}(t), \quad (\text{П1.1})$$

где все коэффициенты  $a_i^f, i = \overline{0, n-1}; b_j^r, j = \overline{0, m}$  представимы в виде;

$$a_i^f = a_i + \Delta a_i^f, \quad b_j^r = b_j + \Delta b_j^r, \quad f = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, N}, \quad (\text{П1.2})$$

$a_i$  и  $b_j$  – номинальные значения коэффициентов, а  $\Delta a_i^f$  и  $\Delta b_j^r$  – возможные отклонения от этих значений,  $a_n = 1; N$  – размерность выборки,  $y(t), x(t, \delta)$  – соответственно входной и выходной сигналы системы, зависящий от параметрической неопределенности  $\delta$ . В силу условия технической реализуемости системы управления, считаем  $n \geq m$ .

Рассмотрим вопрос перехода от дифференциального уравнения (П1.1) при нулевых начальных условиях к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$x(t) + \int_0^t K_x^f(t, \tau) x(\tau) d\tau = \int_0^t K_y^r(t, \tau) y(\tau) d\tau.$$

Интегрируя  $n$  раз левую и правую части уравнения (П.1), получим

$$\int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} x^{(n)}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n + \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n =$$

$$= \sum_{k=0}^m \int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} b_k^r y^{(k)}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

В силу нулевых начальных условий

$$\int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} x^{(n)}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = x(t).$$

Рассмотрим  $n$ -кратный интеграл

$$\int_0^t \dots \int_0^{\tau_{n-1}} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n = \int_0^t \dots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) (d\tau)^n =$$

$$= \int_0^t \dots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) (d\tau)^{n-1} d\tau.$$

Тогда, из последнего следует

$$\int_0^t \dots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) (d\tau)^{n-1} d\tau = \int_0^t \dots \int_0^{\tau} a_k^f x^{(k)}(\tau_n) d^{(n-1)} \left[ (t-\tau)^{n-1} \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau) d\tau.$$

Из последней зависимости можно получить соотношение

$$x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^m \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} b_k^r y^{(k)}(\tau) d\tau.$$

Интегралы в левой части последнего соотношения путем интегрирования по частям можно записать так:

$$\int_0^t (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau) d\tau = \int_0^t \underbrace{(t-\tau)^{n-1} a_k^f}_u \underbrace{d \left[ x^{(k-1)}(\tau) \right]}_{dv} =$$

$$= (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k-1)}(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t x^{(k-1)}(\tau) \left[ (t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]' d\tau =$$

$$= (-1) \int_0^t \underbrace{\left[ (t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]'}_u \underbrace{d \left[ x^{(k-2)}(\tau) \right]}_{dv} = (-1) \underbrace{\left[ (t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]'}_{=0} x^{(k-2)}(\tau) \Big|_0^t -$$

$$- (-1) \int_0^t x^{(k-2)}(\tau) \left[ (t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]'' d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^2 \int_0^t \underbrace{\left[ (t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]^n}_u \underbrace{d \left[ x^{(k-3)}(\tau) \right]}_{dv} = \dots = (-1)^{k-1} \int_0^t x'(\tau) \left[ (t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]^{(k-1)} d\tau = \\
 &= (-1)^{k-1} \underbrace{\left[ (t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]^{(k-1)} x(\tau) \Big|_0^t}_{=0} - (-1)^{k-1} \int_0^t x(\tau) \left[ (t-\tau)^{n-1} a_k^f \right]^{(k)} d\tau.
 \end{aligned}$$

Используя формулу Лейбница

$$\begin{aligned}
 \frac{d^v}{d\tau^v} \left[ a_k^f (t-\tau)^n \right] \Big|_{\tau=t} &= \sum_{l=0}^v C_v^l a_k^f \left[ (t-\tau)^n \right]^{(v-l)} = 0, \quad v \leq n-1; \\
 x^{(v)}(\tau) \Big|_{\tau=0} &= 0, \quad v = \overline{0, n-1},
 \end{aligned}$$

получим

$$\int_0^t (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau) d\tau = (-1)^k \int_0^t x(\tau) \frac{d^k}{d\tau^k} \left[ a_k^f (t-\tau)^{n-1} \right] d\tau$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} a_k^f x^{(k)}(\tau) d\tau = \int_0^t x(\tau) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[ a_k^f (t-\tau)^{n-1} \right] d\tau.$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} b_k^r y^{(k)}(\tau) d\tau = \int_0^t y(\tau) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[ b_k^r (t-\tau)^{n-1} \right] d\tau.$$

В последнем выражении переходя к пределу интегрирования  $[0, T]$ , получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода, эквивалентное ДУ (П1.1) которое имеет вид:

$$\begin{aligned}
 x(t) + \int_0^T \underbrace{\left\{ 1(t-\tau) \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(-1)^v}{(n-1)!} (a_v + \Delta a_v^f) \frac{d^v}{d\tau^v} (T-\tau)^{n-1} \right\}}_{K_x^f(T, \tau)} x(\tau) d\tau = \\
 = \int_0^T \underbrace{\left\{ 1(t-\tau) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n-1)!} (b_k + \Delta b_k^r) \frac{d^k}{d\tau^k} (T-\tau)^{n-1} \right\}}_{K_y^r(T, \tau)} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad f, r = \overline{1, N},
 \end{aligned} \tag{П1.3}$$

Получим аппроксимированную модель уравнения (П1.3), для этого разложим коэффициенты исходного интегрального уравнения (П1.3), сигналы  $y(t), x(t)$  по ортогональному базису  $\Phi(t)$ :

$$\Phi(t) = [\varphi_0(t) \quad \varphi_1(t) \quad \dots \quad \varphi_{l-1}(t)]^T; \tag{П1.4}$$

$$x(t) = \Phi^T(t) C^x; \quad \varepsilon(t) = \Phi^T(t) C^\varepsilon; \tag{П1.5}$$

$$K_x^f(t, \tau) = \Phi^T(t) \mathbf{A}_x^f \Phi^T(\tau); \quad (\text{П1.6})$$

$$K_y^r(t, \tau) = \Phi^T(t) \mathbf{B}_y^r \Phi^T(\tau); f, r = \overline{1, N}, \quad (\text{П1.7})$$

где  $\mathbf{A}_x^f$  и  $\mathbf{B}_y^r$ , с учетом (П1.3), представимы в виде

$$\mathbf{A}_x^f = \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x^f; \mathbf{B}_y^r = \mathbf{B}_y + \Delta \mathbf{B}_y^r; f, r = \overline{1, N};$$

$$\mathbf{A}_x^f = \underbrace{\left[ \int_0^T \int_0^t \bar{K}_x(T, \tau) \varphi_i(t) \varphi_j(\tau) dt d\tau \right]_{i,j=0}^{l-1}}_{\mathbf{A}_x} + \underbrace{\left[ \int_0^T \int_0^t \Delta K_x^f(T, \tau) \varphi_i(t) \varphi_j(\tau) dt d\tau \right]_{i,j=0}^{l-1}}_{\Delta \mathbf{A}_x^f}; \quad (\text{П1.8})$$

$$\mathbf{B}_y^r = \underbrace{\left[ \int_0^T \int_0^t \bar{K}_y(T, \tau) \varphi_i(t) \varphi_j(\tau) dt d\tau \right]_{i,j=0}^{l-1}}_{\mathbf{B}_y} + \underbrace{\left[ \int_0^T \int_0^t \Delta K_y^r(T, \tau) \varphi_i(t) \varphi_j(\tau) dt d\tau \right]_{i,j=0}^{l-1}}_{\Delta \mathbf{B}_y^r}. \quad (\text{П1.9})$$

$$\bar{K}_x(T, \tau) = 1(t - \tau) \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \bar{a}_v \frac{d^v}{d\tau^v} (T - \tau)^{n-1}; \quad (\text{П1.10})$$

$$\Delta K_x^f(T, \tau) = 1(t - \tau) \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \Delta a_v^f \frac{d^v}{d\tau^v} (T - \tau)^{n-1};$$

$$\bar{K}_y(T, \tau) = 1(t - \tau) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \bar{b}_k \frac{d^v}{d\tau^v} (T - \tau)^{n-1}; \quad (\text{П1.11})$$

$$\Delta K_y^r(T, \tau) = 1(t - \tau) \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \Delta b_k^r \frac{d^v}{d\tau^v} (T - \tau)^{n-1};$$

В соответствии с представлением (П1.4) – (П1.11), уравнение (П1.3) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi^T(t) \mathbf{C}^x + \Phi^T(t) \mathbf{A}_x^f \int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau \mathbf{C}^x = \\ = \Phi^T(t) \mathbf{B}_y^r \int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau \mathbf{C}^\varepsilon, f, r = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Тогда, в силу линейной независимости базисных функций, последнее уравнение равносильно матричному уравнению относительно спектральных характеристик входа и выхода системы (П.3)

$$\mathbf{C}^x + (\mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x^f) \mathbf{C}^x = (\mathbf{B}_y + \Delta \mathbf{B}_y^r) \mathbf{C}^\varepsilon, \quad (\text{П1.12})$$

где

$$\mathbf{C}^x = [c^{x_0} \quad c^{x_1} \quad \dots \quad c^{x_{l-1}}]^T, \mathbf{C}^\varepsilon = [c^{\varepsilon_0} \quad c^{\varepsilon_1} \quad \dots \quad c^{\varepsilon_{l-1}}]^T,$$



$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0,l-1} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1,l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l-1,0} & a_{l-1,1} & \dots & a_{l-1,l-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{A}_x^f \Big|_{f=1}^N = \begin{bmatrix} \Delta a_{00}^f & \Delta a_{01}^f & \dots & \Delta a_{0,l-1}^f \\ \Delta a_{10}^f & \Delta a_{11}^f & \dots & \Delta a_{1,l-1}^f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta a_{l-1,0}^f & \Delta a_{l-1,1}^f & \dots & \Delta a_{l-1,l-1}^f \end{bmatrix},$$

или, с учетом границ интервалов (П1.2)

$$\Delta \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \left[ \underline{a_{00}}, \overline{a_{00}} \right] & \left[ \underline{a_{01}}, \overline{a_{01}} \right] & \dots & \left[ \underline{a_{0,l-1}}, \overline{a_{0,l-1}} \right] \\ \left[ \underline{a_{10}}, \overline{a_{10}} \right] & \left[ \underline{a_{11}}, \overline{a_{11}} \right] & \dots & \left[ \underline{a_{1,l-1}}, \overline{a_{1,l-1}} \right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[ \underline{a_{l-1,0}}, \overline{a_{l-1,0}} \right] & \left[ \underline{a_{l-1,1}}, \overline{a_{l-1,1}} \right] & \dots & \left[ \underline{a_{l-1,l-1}}, \overline{a_{l-1,l-1}} \right] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0,l-1} \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1,l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l-1,0} & b_{l-1,1} & \dots & b_{l-1,l-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} \left[ \underline{b_{00}}, \overline{b_{00}} \right] & \left[ \underline{b_{01}}, \overline{b_{01}} \right] & \dots & \left[ \underline{b_{0,l-1}}, \overline{b_{0,l-1}} \right] \\ \left[ \underline{b_{10}}, \overline{b_{10}} \right] & \left[ \underline{b_{11}}, \overline{b_{11}} \right] & \dots & \left[ \underline{b_{1,l-1}}, \overline{b_{1,l-1}} \right] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[ \underline{b_{l-1,0}}, \overline{b_{l-1,0}} \right] & \left[ \underline{b_{l-1,1}}, \overline{b_{l-1,1}} \right] & \dots & \left[ \underline{b_{l-1,l-1}}, \overline{b_{l-1,l-1}} \right] \end{bmatrix}.$$

Перепишем (П1.12), в виде

$$\left( \mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x^f \right) \mathbf{C}^x = \left( \mathbf{B}_\varepsilon + \Delta \mathbf{B}_\varepsilon^r \right) \mathbf{C}^\varepsilon, \tag{П1.13}$$

или, учитывая обратимость матрицы  $\left( \mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x^f \right)$ ,

$$\mathbf{C}^x = \Delta \mathbf{A} \mathbf{C}^\varepsilon, \tag{П1.14}$$

где

$$\Delta \mathbf{A} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{A}_x + \Delta \mathbf{A}_x^f \right)^{-1} \left( \mathbf{B}_\varepsilon + \Delta \mathbf{B}_\varepsilon^r \right). \tag{П1.15}$$

Уравнение (П1.14) можно трактовать как линейное операторное уравнение 2-го рода в пространстве последовательностей размерности  $l$ , в частности в конечномерном подпространстве гильбертова пространства  $l^2$ . Эта трактовка важна в вопросах обоснования метода, а также в исследовании проекционного метода на сходимость и устойчивость.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Положим, что уравнение неизменяемой части (как известно, неизменяемой частью системы называют передаточную функцию объекта управления, сюда же входят: передаточная функция исполнительных элементов, усилительных устройств, измерительных систем и т.д.) системы с неопределенностью можно записать следующим образом

$$\sum_{i=1}^n a_i^k x^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j^r u^{(j)}(t), \quad k = \overline{1, N}, r = \overline{1, N}, \quad (\text{П2.1})$$

где коэффициенты исходной модели являются переменными, но представлены в виде

$$a_i^k = \bar{a}_i + \Delta a_i^k, \quad b_j^r = \bar{b}_j + \Delta b_j^r, \quad k = \overline{1, N}, r = \overline{1, N}, \quad (\text{П2.1})$$

$\bar{a}_i$  и  $\bar{b}_j$  – номинальные значения коэффициентов, а  $\Delta a_i^k$  и  $\Delta b_j^r$  – возможные отклонения от этих значений или параметрическая неопределенность. Следует отметить, что форма представления коэффициентов (П2.2) модели (П2.1) является наиболее простой для представления параметрических неопределенностей, поскольку как показывает практика, номинальные значения параметров  $\bar{a}_i$  и  $\bar{b}_j$  доступны инженеру на этапе конструкторских работ (являются расчетными), а границы изменения  $\Delta a_i^k$  и  $\Delta b_j^r$  расчетных параметров доступны после выпуска изделия, на этапе эксплуатации.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (П2.1)  $n$  – раз с учетом (П2.2):

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} a_i^k \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^{\tau_2}}_{n \text{ раз}} x^{(i)}(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_n = \sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^m b_j^r \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^{\tau_2}}_{n \text{ раз}} u^{(j)}(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad (\text{П2.3})$$

Поскольку справедлива зависимость

$$\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^{\tau_2}}_{n \text{ раз}} x^{(i)}(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_n = \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^{\tau_2}}_{(n-i) \text{ раз}} x(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{n-i}, \quad (\text{П2.4})$$

то последнее уравнение можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^n (\bar{a}_i + \Delta a_i^k) \int_0^t \dots \int_0^{\tau_2} x(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{n-i} =$$

(n-i)раз

$$= \sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^m (\bar{b}_j + \Delta b_j^r) \int_0^t \dots \int_0^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{n-j}.$$

(n-j)раз

(П2.5)

Пусть  $B[0, T]$  – некоторое банахово пространство функций с базисом, заданных на отрезке  $[0, T]$ , а

$$\Phi(t) = [\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_{p-1}]^T -$$

(П2.6)

столбец из  $p$  базисных функций в пространстве  $B[0, T]$ . Представим функции  $x(t)$  и  $u(t)$  в виде разложений по ортогональному базису (П2.6),  $\varphi_p(t)$ ,  $p = \overline{1, l}$  – элементы системы ортонормированных функций:

$$x(t) \cong \Phi^T(t) C^x; \quad u(t) \cong \Phi^T(t) C^u;$$

(П2.7)

где  $C^u$  и  $C^x$  – спектральные характеристики выхода  $x(t)$  и входа  $u(t)$ . В соответствии с этим представлением, уравнение (П2.5) запишется в виде

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^n (\bar{a}_i + \Delta a_i^k) \int_0^t \dots \int_0^{\tau_2} \Phi^T(\tau_1) C^x d\tau_1 \dots d\tau_{n-i} =$$

(n-i)раз

$$= \sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^m (\bar{b}_j + \Delta b_j^r) \int_0^t \dots \int_0^{\tau_2} \Phi^T(\tau_1) C^u d\tau_1 \dots d\tau_{n-j},$$

(n-j)раз

(П2.8)

или

$$\left( \sum_{i=0}^{n-1} (\bar{a}_i + \Delta a_i^k) \int_0^t \dots \int_0^{\tau_2} \Phi^T(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{n-i} \right) C^x =$$

(П2.9)

$$= \left( \sum_{j=0}^m (\bar{b}_j + \Delta b_j^r) \int_0^t \dots \int_0^{\tau_2} \Phi^T(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_{n-j} \right) C^u.$$

(n-j)раз

Учтем следующий факт.

Будем считать  $B$  произвольным банаховым пространством, удовлетворяющим естественному требованию: если  $y(t) \in B[0, T]$ , то более гладкая функция

$$x(t) = \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau \quad (\text{П2.10})$$

также лежит в пространстве  $B[0, T]$ . Если функция  $y(t) \in B[0, T]$ , то ее можно аппроксимировать с помощью разложения

$$y(t) \approx y_p(t) = \sum_{s=0}^{p-1} c_s^y \varphi_s(t) = \Phi^T(t) C^y, \quad (\text{П2.11})$$

где  $C^y = [c_0^y \ c_1^y \ \dots \ c_{p-1}^y]^T$  – столбец из коэффициентов разложения определяемые в виде

$$c_s^y = \int_0^T y_p(t) \varphi_s(t) dt, \quad s = \overline{0, p-1}.$$

— коэффициенты Фурье разложения по данному базису. В дальнейшем будем использовать конечномерные разложения сигнала  $y_p(t)$  по ортонормированному базису  $\{\varphi_s(t)\}_{s=0}^p$  конечномерного подпространства  $B^p[0, T] \subset B[0, T]$ . Напомним, что из того, что  $\Phi(t)$  – базис, вытекает сходимость разложений  $y_p(t)$  к  $y(t)$  в метрике пространства  $B^p[0, T] \subset B[0, T]$ .

Для интегрирования функций по разложению (П2.11) требуется находить разложения функций (П2.10). Поскольку

$$x_p(t) = \int_0^t y_p(\tau) d\tau = \int_0^T 1(t-\tau) y_p(\tau) d\tau, \quad (\text{П2.12})$$

где  $K(t, \tau) = 1(t-\tau)$  – функция Хэвисайда:

$$K(t, \tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad (\text{П2.13})$$

Интегральная форма описания (П2.12) позволяет воспользоваться аппаратом матричного представления интегральных ограниченных операторов в ортогональных базисах, то есть ввести проекционную форму описания системы относительно ортогонального базиса  $\Phi(t)$ . Для этого надо заменить в уравнении (П2.12) непрерывные вектор-функции на столбцы из коэффициентов их

разложений, а операторы, действующие в пространстве непрерывных вектор-функций, на соответствующие им матричные операторы. В этом случае для выражения (П2.12) справедливы равенства

$$x_p(t) = \sum_{s=0}^{p-1} c_s^x \varphi_s(t) = \Phi^T(t) \mathbf{C}^x; \quad y_p(t) = \sum_{s=0}^{p-1} c_s^y \varphi_s(t) = \Phi^T(t) \mathbf{C}^y; \quad (\text{П2.14})$$

$$K(t, \tau) = \Phi^T(t) \mathbf{A}_и \Phi(\tau),$$

где  $\mathbf{A}_и$  – матрица размера  $p \times p$ , элементы которой

$$a_{sz} = \int_0^T \int_0^t K(t, \tau) \varphi_s(t) \varphi_z(\tau) dt d\tau, \quad s, z = 0, \dots, p-1. \quad (\text{П2.15})$$

Тогда

$$\Phi^T(t) \mathbf{C}^x = \int_0^T \Phi^T(t) \mathbf{A}_и \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) \mathbf{C}^y d\tau; \quad (\text{П2.16})$$

$$\mathbf{C}^x = \mathbf{A}_и \left( \int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau \right) \mathbf{C}^y, \quad (\text{П2.17})$$

где

$$\int_0^T \Phi(\tau) \Phi^T(\tau) d\tau = \mathbf{I}_{p \times p}, \quad (\text{П2.18})$$

$\mathbf{I}_{p \times p}$  – единичная матрица, поэтому

$$\mathbf{C}^x = \mathbf{A}_и \mathbf{C}^y. \quad (\text{П2.19})$$

Тогда, на основании (П2.19) имеем

$$\int_0^t \dots \int_0^{\tau_2} \Phi(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_r = \left( \underbrace{\mathbf{A}_и \cdot \mathbf{A}_и \dots \mathbf{A}_и}_{l \text{ раз}} \right) \Phi(t) = \mathbf{A}_и^l \Phi(t), \quad (\text{П2.20})$$

$$\sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^n (\bar{a}_i + \Delta a_i^k) \Phi^T(t) \mathbf{A}_и^i \mathbf{C}^x = \sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^m (\bar{b}_j + \Delta b_j^r) \Phi^T(t) \mathbf{A}_и^j \mathbf{C}^u. \quad (\text{П2.21})$$

В силу линейной независимости базисных функций, система уравнений (П2.21) равносильна системе уравнений

$$\sum_{i=0}^n \bar{a}_i \mathbf{A}_и^i \mathbf{C}^x + \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^N \Delta a_i^k \mathbf{A}_и^i \mathbf{C}^x = \sum_{j=0}^m \bar{b}_j \mathbf{A}_и^j \mathbf{C}^u + \sum_{j=0}^m \sum_{r=1}^N \Delta b_j^r \mathbf{A}_и^j \mathbf{C}^u. \quad (\text{П2.22})$$

Последнее можно переписать в виде уравнения с матричными операторами общего вида для дифференциального уравнения (П2.1)

$$\left(\mathbf{A}_{\text{oy}}^x(\delta_{\text{ном}}) + \mathbf{A}_{\text{oy}}^x(\Delta\delta)\right)\mathbf{C}^x = \left(\mathbf{A}_{\text{oy}}^u(\delta_{\text{ном}}) + \mathbf{A}_{\text{oy}}^u(\Delta\delta)\right)\mathbf{C}^u, \quad (\text{П2.23})$$

где  $\Delta\delta$  характеризует неопределенность, т.е. факт отклонения от номинального значения  $\delta_{\text{ном}}$  параметров объекта управления, а матрицы  $\mathbf{A}_{\text{oy}}^x(\delta_{\text{ном}})$ ,  $\mathbf{A}_{\text{oy}}^x(\Delta\delta)$ ,  $\mathbf{A}_{\text{oy}}^u(\delta_{\text{ном}})$ ,  $\mathbf{A}_{\text{oy}}^u(\Delta\delta)$  имеют вид:

$$\mathbf{A}_{\text{oy}}^x(\delta_{\text{ном}}) = \sum_{i=0}^n \bar{a}_i \mathbf{A}_{\text{и}}^{n-i}; \quad \mathbf{A}_{\text{oy}}^x(\Delta\delta) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^n \Delta a_i^k \mathbf{A}_{\text{и}}^{n-i}; \quad (\text{П2.24})$$

$$\mathbf{A}_{\text{oy}}^u(\delta_{\text{ном}}) = \sum_{j=0}^m \bar{b}_j \mathbf{A}_{\text{и}}^{n-j}; \quad \mathbf{A}_{\text{oy}}^u(\Delta\delta) = \sum_{r=1}^N \sum_{j=0}^m \Delta b_j^r \mathbf{A}_{\text{и}}^{n-j}. \quad (\text{П2.25})$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

В (П2.22) входят матричные операторы интегрирования. Рассмотрим, как определяется матричный оператор интегрирования в базисе кусочно линейных функций.

Масштабирующая-функция для кусочно линейных функций может быть определена как решение уравнения:

$$\varphi(t) = \sqrt{h} \left( h_0 \varphi(ht) + h_1 \varphi(\sqrt{ht} - 1) \right), \quad h_0 = h_1 = 1/\sqrt{h}, \quad (\text{П3.1})$$

удовлетворяющая свойствам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1; \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t \notin [0, 1). \end{cases} \quad (\text{П3.2})$$

Рассмотрим матричный оператор интегрирования для масштабирующей функции с  $N$  уровнями разрешения, где  $l = N$ ,  $t_i = ih$ ,  $h = 1/N$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N$  – число узлов сетки.

Имеем

$$a_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(t, \tau) \varphi_{N,i}(t) \varphi_{N,j}(\tau) dt d\tau, \quad (\text{П3.3})$$

или, используя свойство кусочно линейных функций

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - \tau) \varphi\left(\frac{\tau - i}{h}\right) \varphi\left(\frac{\tau - j}{h}\right) dt d\tau. \quad (\text{П3.4})$$

Положим

$$\begin{cases} u = ht - i, \\ v = h\tau - j, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = h^{-1}(u + i), \\ \tau = h^{-1}(v + j). \end{cases} \quad (\text{П3.5})$$

В этом случае

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 1(u - v + i - j) \varphi(u) \varphi(v) du dv, \quad (\text{П3.6})$$

или, полагая  $u = t$ ,  $v = \tau$ , получаем, что

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - \tau + i - j) \varphi(\tau) dt d\tau. \quad (\text{ПЗ.7})$$

Разберем подробнее все случаи:

1.  $i - j \leq -1$ .

Функции  $\varphi(t), \varphi(\tau)$  не равны нулю только на отрезке  $[0, 1)$ , тогда

$$t + i - j < 0, \forall \tau \in [0, 1),$$

и, следовательно,  $1(t - \tau + i - j) = 0, \forall t \in [0, 1), \forall \tau \in [0, 1)$ , откуда получаем, что

$$a_{ij} = 0. \quad (\text{ПЗ.8})$$

2.  $i - j \geq 1$ , тогда  $t - \tau + i - j \geq 0$ , поэтому

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \frac{1}{h}. \quad (\text{ПЗ.9})$$

3.  $i = j$ , в этом случае

$$a_{ij} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - \tau) \varphi(\tau) dt d\tau.$$

Используя масштабное уравнение (ПЗ.1), получим

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k_1=0}^1 h_{k_1} \varphi(ht - k_1) \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - \tau) \sum_{k_2=0}^1 h_{k_2} \varphi(h\tau - k_2) dt d\tau = \\ &= \frac{1}{h} \sum_{k_1, k_2=0}^1 h_{k_1} h_{k_2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(ht - k_1) \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - \tau) \varphi(h\tau - k_2) dt d\tau \right]. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.10})$$

Выполним переход через промежуточные переменные:

$$\begin{cases} u = ht - k_1, \\ v = h\tau - k_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = h^{-1}(u + k_1), \\ \tau = h^{-1}(v + k_2), \end{cases} \quad (\text{ПЗ.11})$$

в этом случае (ПЗ.10), примет вид

$$a_{ij} = N \sum_{k_1, k_2=0}^1 h_{k_1} h_{k_2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) \int_{-\infty}^{+\infty} 1(u - v + i - j) \varphi(v) dt d\tau \right]. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Подставляя (ПЗ.8), (ПЗ.9) в (ПЗ.12), получим

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{1}{2N} (hh_0^2 a + h_0 h_1 + hh_1^2 a); \\ a = \frac{1}{2} a + \frac{1}{4N}, \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2N}. \quad (\text{ПЗ.13})$$

Матричный оператор интегрирования, в рассматриваемом базисе имеет вид:

$$\mathbf{A}_N = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1/2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{ПЗ.14})$$

## 10. Выводы

В статье рассмотрен метод Галеркина решения слабосингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с возмущенным оператором. Выжным примером рассматриваемого класса уравнений является широко используемое уравнение в математической теории управления, в задачах управления в условиях параметрических неопределенностей. В этом случае возмущение в ядре интегрального уравнения рассматривается как параметрическая неопределенность. В статье получены следующие результаты:

1. Для численного решения слабо сингулярного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с возмущенным оператором предложен вариант метода Галеркина использующего пространство кусочно линейных и кусочно постоянных функций.

2. Получены оценки погрешности предложенного метода в нормах пространств  $L_q(J)$  и  $C(\bar{J})$  для задач с правой частью  $f(\tau)$  гладкости функций из пространств  $L_p(J)$ ,  $C(\bar{J})$  и  $W_p^1(J)$ .

3. Предложены эффективные методы численной реализации указанного метода на основе МНК и ЦПМСГ. При применении ЦПМСГ доказан результат о кластеризации собственных значений предобусловленной матрицы, который дает основу для понимания явления сверхсходимости.

4. Рассмотрено применение предложенного метода в задаче синтеза робастного регулятора на тестовом примере.

Задача синтеза сведена к нахождению решения выпуклой оптимизационной задачи, для решения которой предлагается использовать МНК. В статье рассматривается регуляризованный метод МНК, дающий субоптимальное решение при параметрической неопределенности.

В статье используется вероятностный подход и определяется вероятное, близкое к оптимальному решение путем минимизации эмпирического среднего невязки. Сходимость конечных выборок оценивается с помощью статистических методов обучения. Показано, что если построить эмпирическую аппроксимацию математического ожидания с помощью конечного числа  $N$  элементов выборки, то минимум этого эмпирического приближения, с высокой степенью вероятности, есть  $\varepsilon$ -субоптимальное решение рассматриваемой задачи. Кроме того, это приближенное решение может быть эффективно определено численно с помощью рекурсивного алгоритма.

Особенностью предложенного метода является то, что исходная задача рассматривается полностью с детерминистической точки зрения.



## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Егупов Н.Д., Пупков К.А., Рогоза А.А., Трофимов М.А. Алгоритмическая теория систем управления, основанная на спектральных методах. В двух томах. Том 2. Матрично-вычислительные технологии на базе интегральных уравнений / Под ред. Матвеева В.А. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 464 с.
- [2] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Вероятностный подход к робастной устойчивости систем с запаздыванием. Автом. телемех. 1996, №12, 97-108 с.
- [3] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.
- [4] Rutily B., Chevallier L. Why is so difficult to solve the radiative transfer equation? // EAS Publications Series, 2006. Vol. 18, pp. 1-23.
- [5] Ahues M., Largillier A., Titaud O. The roles of a weak singularity and the grid uniformity in relative error bounds // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 2001. Vol. 22, 7-8, pp. 789-814.
- [6] Ahues M., d'Almeida F.D., Largillier A., Titaud O., Vasconcelos P. An L<sub>1</sub> rened projection approximate solution of the radiation transfer equation in stellar atmospheres // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, Vol. 140, 1-2, pp. 13-26.
- [7] Panasenko G., Rutily B., Titaud O. Asymptotic analysis of integral equations for a great interval and its application to stellar radiative transfer // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. Mecanique. 2002, Vol. 330, pp. 735-740.
- [8] Amosov A., Panasenko G., Rutily B. An approximate solution to the integral radiative transfer equation in an optically thick slab // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. Mecanique. 2003. Vol. 331, pp. 823-828.
- [9] Rutily B. Multiple scattering theory and integral equations // Integral Methods in Science and Engineering (C. Constanda, M. Ahues, and A. Largillier, eds.). Birkhauser, Boston, pp. 211-232, 2004.
- [10] Rutily B., Chevallier L. The nite Laplace transform for solving a weakly singular integral equation occurring in transfer theory // Journal of Integral Equations and Applications. 2004, Vol. 16, 4, pp. 389-409.
- [11] Ahues M., Amosov A., Largillier A., Titaud O. L<sub>p</sub> error estimates for projection approximations // Applied Mathematics Letters. 2005. Vol. 18, pp. 381-386.
- [12] Amosov A., Panasenko G. Asymptotic analysis and asymptotic domain decomposition for an integral equation of the radiative transfer type // J. Math. Pures Appl. 2005. Vol. 84, pp. 1813-1831.
- [13] d'Almeida F., Titaud O., Vasconcelos P. B. A numerical study of iterative renement schemes for weakly singular integral equations // Applied Mathematics Letters. 2005, Vol. 18, 5, pp. 571 - 576.

- [14] Amosov A., Panasenko G. An approximate solution to the integral radiativetransfer equation in an optically thick slab // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2007. Vol. 30, pp. 1593-1608.
- [15] Amosov A., Ahues M., Largillier A. Superconvergence of projection methods for weakly singular integral operators // *Integral Methods in Science and Engineering: Techniques and Applications* (Constanda C., Potapenko S. eds). Birkhauser, Boston. 2008, pp. 17.
- [16] Amosov A., Ahues M., Largillier A. Superconvergence of some projection approximations for weakly singular integral equations using general grids // *Siam Journal on Numerical Analysis*, 2009, Vol. 47, Issue 1, pp. 646-674.
- [17] Ahues M., d' Almeida F., Fernandes R. Piecewise constant Galerkin approximations of weakly singular integral equations // *Internat. J. Pure Appl. Math.* 2009. Vol. 55, 4, pp. 569-580.
- [18] Nunes A. L., Vasconcelos P.B., Ahues M. Error Bounds for Low-Rank Approximations of the First Exponential Integral Kernel // *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 2013. Vol. 34, 1, pp. 74 - 93.
- [19] d'Almeida F.D., Ahues M., Fernandes R. Errors and grids for projected weakly singular integral equations // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2013. Vol. 89, 2, pp. 203-213.
- [20] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 416 с.
- [21] Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. ЧМ.: Мир, 1980.
- [22] Strang G. A proposal for Toeplitz matrix calculations // *Stud. Appl. Math.* 1986. Vol. 74, P. 171 – 176.
- [23] Olkin J. Linear and Nonlinear Deconvolution Problems. Ph. D. thesis, Rice University, Houston. TX, 1986.
- [24] Chan R. and Strang G. Toeplitz equations by conjugate gradients with circulant preconditioner // *SIAM J. Sci. Comput.* 1989. Vol. 10, P. 104 – 119.
- [25] Tyrtshnikov E. Optimal and super-optimal circulant preconditioners // *SIAM J. Matrix Anal. Appls.* 1992 Vol. 13, P. 459-473.
- [26] Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Физматлит, 2007.
- [27] G Calafiore, F Dabbene. Probabilistic and Randomized Methods for Design under Uncertainty. Springer-Verlag London Limited 2006.
- [28] S. Chandrasekaran, G.H. Golub, M. Gu, and A.H. Sayed. Parameter estimation in the presence of bounded data uncertainties. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19:235–252, 1998.
- [29] L. El Ghaoui and H. Lebret. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 18:1035–1064, 1997.

- [30] J.L. Higle and S. Sen. On the convergence of algorithms with implications for stochastic and nondifferentiable optimization. *Mathematics of Operations Research*, 17:112–131, 1992.
- [31] H.A. Hindi and S.P. Boyd. Robust solutions to  $l_1$ ,  $l_2$ , and  $l_\infty$  uncertain linear approximation problems using convex optimization. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 6, 1998.
- [32] T. Kailath, A. Sayed, and B. Hassibi. *Linear Estimation*. Information and System Science. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [33] M. Karpinski and A.J. Macintyre. Polynomial bounds for VC dimension of sigmoidal neural networks. In *Proc. 27th ACM Symp. Thy. of Computing*, 1995.
- [34] A.J. King and R.T. Rockafellar. Asymptotic theory for solutions in statistical estimation and stochastic optimization. *Mathematics of Operations Research*, 18:148–162, 1993.
- [35] W.-K. Mak, D.P. Morton, and R.K. Wood. Monte-Carlo bounding techniques for determining solution quality in stochastic programs. *Mathematics of Operations Research*, 24:47–56, 1999.
- [36] A.H. Sayed, V.H. Nascimento, and S. Chandrasekaran. Estimation and control with bounded data uncertainties. *Linear Algebra and Applications*, 248:259–306, 1999.
- [37] A. Shapiro. Asimptotic properties of statistical estimators in stochastic programming. *Annals of Statistics*, 17:841–858, 1989.
- [38] A. Shapiro. Duality, optimality conditions, and perturbation analysis. In H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms, and Applications*, pages 68–92. Kluwer, Boston, USA, 2000.
- [39] R. Tempo, G. Calafiore, and F. Dabbene. *Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, London, 2004.
- [40] A. Tikhonov and V. Arsenin. *Solution to Ill-posed Problems*. Wiley, New York, 1977.
- [41] V.N. Vapnik. *Statistical Learning Theory*. Wiley, New York, 1998.
- [42] M. Vidyasagar. *A Theory of Learning and Generalization*. Springer-Verlag, London, 1997.
- [43] R.J.-B. Wets. Stochastic programming. In G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnoy Kan, and M.