

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 4, 2009

Электронный журнал,

рег. № П2375 от 07.03.97

ISSN 1817-2172

<http://www.neva.ru/journal>

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal/>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

## Стохастическая чувствительность равновесий и циклов дискретных нелинейных динамических систем

**Башкирцева И.А.**

Россия, 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,

Уральский государственный университет,

Математико-механический факультет

доцент, канд. физ.-мат. наук

email: [irina.bashkirtseva@usu.ru](mailto:irina.bashkirtseva@usu.ru)

**Ряшко Л.Б.**

Россия, 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,

Уральский государственный университет,

Математико-механический факультет

профессор, доктор физ.-мат. наук

email: [lev.ryashko@usu.ru](mailto:lev.ryashko@usu.ru)

**Цветков И.Н.**

Россия, 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,

Уральский государственный университет,

Математико-механический факультет

аспирант

email: [itsvet@e1.ru](mailto:itsvet@e1.ru)

### Аннотация

Для регулярных аттракторов (равновесий и циклов) многомерных дискретных систем исследуется чувствительность к случайным возмущениям. Анализ стохастической чувствительности осуществляется с использованием

систем первого приближения. Вводится конструкция функции стохастической чувствительности. При помощи этой функции аппроксимируется стационарная плотность распределения случайных состояний стохастического аттрактора. Демонстрируется соответствие теоретических результатов с данными численного эксперимента для системы Эно. Выявлена закономерность роста чувствительности циклов системы при переходе к хаосу через каскады бифуркаций удвоения периода.

## **Введение**

В литературе часто встречаются утверждение об аналогии между переходами динамических систем от движений одного типа к движениям другого типа (например, от состояния равновесия к периодическому движению) и известными в статистической физике фазовыми переходами второго рода [1, 2]. Идея такой аналогии ведет свое начало от работы Г. Хакена [3] и в дальнейшем развита Ю. Л. Климонтовичем [4]. Эта аналогия оказалась весьма полезной, так как позволяет использовать методы теории фазовых переходов, например методы скэйлинга и ренормализационной группы [5]–[7].

Регулярные аттракторы (равновесия и циклы) динамических систем, задаваемых детерминированными дискретными отображениями, являются классическими и наиболее изученными объектами современной теории устойчивости [8]. Прежде всего следует отметить исследования переходов от порядка к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода в соответствии с законом Фейгенбаума [9]–[14]. Анализ устойчивости периодических орбит данных систем и оценки показателей Ляпунова приведены в работах [15]–[18].

В настоящее время внимание исследователей привлекает изучение реакций таких систем на внешние аддитивные и внутренние параметрические случайные возмущения. Большое число работ посвящено исследованию как переходных процессов так и установившихся режимов - стохастических аттракторов [19]–[21]. В работах [22]–[26] показано влияние внешних возмущений на показатели Ляпунова, и на интенсивность сплошного спектра цикла. Анализу скэйлинга в цепи удвоения периода циклов, при переходе к хаосу, для стохастически возмущенных дискретных динамических систем посвящены работы [27]–[29].

Полное вероятностное описание случайных состояний системы требует построения функции плотности распределения. Изменение вероятностного

распределения во времени задается соответствующим дискретным функциональным уравнением, решение которого даже в одномерном случае связано с большими сложностями. Здесь, наряду с известными проблемами численного решения, возникает необходимость в знании закона распределения действующих случайных возмущений. Такая подробная вероятностная информация как правило недоступна. Для случая малых шумов, когда случайные состояния стохастических аттракторов локализуются вблизи соответствующих детерминированных, отклонения случайно возмущенных траекторий от невозмущенных детерминированных решений можно описать линейными приближениями. Для систем с непрерывным временем, задаваемых стохастическими дифференциальными уравнениями, такой подход реализован на основе теории квазипотенциала с последующей аппроксимацией с помощью функции стохастической чувствительности [30]–[32].

Данная работа посвящена распространению аналогичного подхода на дискретные динамические системы.

В п.1 вводится понятие стохастической чувствительности равновесия. Стохастическая чувствительность характеризуется матрицей, для нахождения которой получено уравнение. Детально рассмотрен скалярный и двумерный случай. В п.2 исследуется чувствительность стохастически возмущенного цикла. В данном случае стохастическая чувствительность характеризуется матричной функцией, заданной на элементах цикла. Используя функцию стохастической чувствительности, строится приближение плотности распределения стохастического цикла. В п.3 возможности метода функций стохастической чувствительности демонстрируются на примере анализа стохастических аттракторов двумерного отображения Эно. Детально исследована стохастическая чувствительность равновесий и циклов в зонах структурной устойчивости. Показано, что при переходе от порядка к хаосу в цепи бифуркаций удвоения периода показатель стохастической чувствительности растет как геометрическая прогрессия.

## 1. Стохастическое равновесие

Рассмотрим систему

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (1)$$

где  $x$  –  $n$ -вектор,  $f(x)$  – достаточно гладкая функция. Предполагается, что равновесие  $x_t \equiv \bar{x}$  является экспоненциально устойчивым.

Пусть  $x_t^\varepsilon$  – решение (1) с начальным условием

$$x_0^\varepsilon = \bar{x} + \varepsilon v_0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – скаляр,  $v_0$  –  $n$ -вектор. Произведение  $z_0 = \varepsilon v_0$  задает малое начальное отклонение от равновесия  $\bar{x}$  в направлении  $v_0$ . Рассмотрим отклонения  $z_t^\varepsilon = x_t^\varepsilon - \bar{x}$  состояний  $x_t^\varepsilon$  системы (1) от равновесия  $\bar{x}$  в последующие моменты времени и отношение

$$v_t^\varepsilon = \frac{z_t^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}}{\varepsilon}.$$

При малых  $\varepsilon$  чувствительность равновесия  $\bar{x}$  системы (1) к возмущению начальных данных (2) определяется величиной

$$v_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_t^\varepsilon = \frac{d}{d\varepsilon} x_t^\varepsilon|_{\varepsilon=0}.$$

Для  $v_t$  справедлива линейная система (уравнение в вариациях)

$$v_{t+1} = Fv_t, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$$

Неравенство  $\rho(F) < 1$  ( $\rho(F)$  – спектральный радиус матрицы  $F$ ) является необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости равновесия  $\bar{x}$ . Для экспоненциально устойчивого равновесия  $\bar{x}$  при любом  $v_0$  имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_t = 0.$$

Рассмотрим стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t, \quad (3)$$

полученную добавлением в (1) малых случайных возмущений. Здесь  $\sigma(x)$  –  $n \times m$ -матрица,  $\xi_t$  –  $m$ -мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами

$$E\xi_t = 0, \quad E\xi_t \xi_t^\top = I, \quad E\xi_t \xi_k = 0 \quad (t \neq k),$$

$I$  – единичная  $m \times m$ -матрица,  $\varepsilon$  – интенсивность шума. Пусть  $x_t^\varepsilon$  – решение (3) с начальным условием (2). Здесь переменная  $v_t$  характеризует чувствительность равновесия  $\bar{x}$  к возмущению как начальных условий (2), так и правых частей системы (3). Для  $v_t$  справедлива система

$$v_{t+1} = Fv_t + S\xi_t, \quad S = \sigma(\bar{x}). \quad (4)$$

Динамика первых двух моментов  $m_t = Ev_t$ ,  $V_t = Ev_t v_t^\top$  решения  $v_t$  системы (4) задается уравнениями

$$m_{t+1} = Fm_t, \quad (5)$$

$$V_{t+1} = FV_t F^\top + Q, \quad Q = SS^\top. \quad (6)$$

Рассмотрим наряду с (4) уравнение

$$W = FW F^\top + Q. \quad (7)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\rho(F) < 1$ . Тогда

а) уравнение (7) имеет единственное решение  $W$ ;

б) при любых  $m_0$  и  $V_0$  решения  $m_t$  и  $V_t$  систем (5),(6) стабилизируются:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_t = W; \quad (8)$$

в) система (4) имеет стационарно распределенное решение  $\bar{v}_t$ :

$$E\bar{v}_t = 0, \quad E\bar{v}_t\bar{v}_t^\top = W; \quad (9)$$

г) любое решение  $v_t$  системы (4) сходится в среднем квадратичном к  $\bar{v}_t$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\|v_t - \bar{v}_t\|^2 = 0. \quad (10)$$

**Доказательство.** Для доказательства а) и б) представим уравнения (6) и (7) в виде

$$V_{t+1} = \mathcal{F}(V_t) + Q, \quad W = \mathcal{F}(W) + Q,$$

где  $\mathcal{F}(V) = FVF^\top$ . Поскольку  $\rho(\mathcal{F}) = \rho^2(F) < 1$ , то система (7) имеет единственное решение  $W$  и выполняются (8).

Для доказательства в) рассмотрим случайный вектор  $\bar{v}_0$  с параметрами:  $E\bar{v}_0 = 0, E\bar{v}_0\bar{v}_0^\top = W$ . Тогда из (5) – (8) для решения  $\bar{v}_t$  системы (4) с начальным вектором  $\bar{v}_0$  следуют требуемые соотношения (9).

Для доказательства г) рассмотрим  $y_t = v_t - \bar{v}_t$ , где  $v_t$  - произвольное решение системы (4). Для  $Y_t = E y_t y_t^\top$  справедлива система  $Y_{t+1} = \mathcal{F}(Y_t)$ . В условиях  $\rho(\mathcal{F}) < 1$  имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t = 0$ , откуда, с учетом  $E\|v_t - \bar{v}_t\|^2 = \text{tr}(Y_t)$ , следует (10). Теорема доказана.

Матрица  $W$  характеризует реакцию системы (3) на малые случайные возмущения. При малом  $\varepsilon$  в системе (3) вокруг устойчивого равновесия  $\bar{x}$  формируется устойчивое стационарное распределение состояний  $\bar{x}_t^\varepsilon$ . При этом

$$W = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W^\varepsilon, \quad W^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \text{cov}(\bar{x}_t^\varepsilon, \bar{x}_t^\varepsilon). \quad (11)$$

В силу (11), при малых  $\varepsilon$  для оценки разброса состояний  $\bar{x}_t^\varepsilon$  вокруг  $\bar{x}$  можно использовать приближенное равенство

$$\text{cov}(\bar{x}_t^\varepsilon, \bar{x}_t^\varepsilon) \approx \varepsilon^2 W.$$

Матрица  $\varepsilon^2 W$  является первым приближением ковариационной матрицы  $\text{cov}(\bar{x}_t^\varepsilon, \bar{x}_t^\varepsilon)$ . Связывая в системе (3) величину входа ( $\varepsilon^2$ ) и выхода ( $\varepsilon^2 W$ ), матрица  $W$  играет роль коэффициента стохастической чувствительности равновесия  $\bar{x}$ .

Матрица  $W$  является решением линейного уравнения (7) и может быть получена как предел (8) последовательности, формируемой итерационным процессом (6). Отыскание  $W^\varepsilon$  является гораздо более сложной задачей. В общем случае оценить  $W^\varepsilon$  удастся лишь с помощью эмпирической ковариации случайных состояний нелинейной системы (3), получаемых прямым численным моделированием.

Замечание 1. В случае невырожденных шумов ( $\text{rank}(S) = n$ ) матрица  $W$  является положительно определенной. При  $\text{rank}(S) < n$  матрица  $W$  может оказаться вырожденной. Необходимым и достаточным условием невырожденности  $W$  является полная управляемость пары  $(F, S)$  [33].

### Скалярный случай

В случае  $n = 1$  коэффициент стохастической чувствительности является скалярной величиной и имеет вид

$$w = \frac{q}{1 - a^2} \geq q,$$

где  $a = f'(\bar{x})$ ,  $q = \sigma^2(\bar{x})$ . Отметим, что в данном случае необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости равновесия  $\bar{x}$  является неравенство  $|f'(\bar{x})| < 1$ .

При  $f'(\bar{x}) = 0$  стохастическая чувствительность равновесия  $\bar{x}$  является минимально возможной:  $w = q$ . При приближении  $|f'(\bar{x})|$  к единице, величина  $w$  неограниченно возрастает.

### Двумерный случай

При  $n = 2$  матрица стохастической чувствительности  $W$  имеет собственные значения  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0$  и соответствующие собственные векторы  $w_1, w_2$ . Значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются удобными скалярными характеристиками стохастической чувствительности и задают величины разброса случайных состояний системы (3) в направлении  $w_1$  и  $w_2$ . Действительно, для проекций  $u_i = (\bar{x}_t^\varepsilon, w_i)$  стационарно распределенных случайных состояний  $\bar{x}_t^\varepsilon$  системы (3) на векторы  $w_i$  имеем  $\text{Eu}_i^2 = \varepsilon^2 \lambda_i$ .

### Плотность распределения.

Для многомерного случайного вектора  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  плотность нормально-

го распределения вычисляется по формуле:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - m)^T C^{-1}(x - m)\right), \quad (12)$$

где  $m = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$  - вектор математических ожиданий,  $C = (Cov_{ij})$  - ковариационная матрица.

В случае малых шумов плотность распределения системы (1) вокруг точки покоя  $\bar{x}$  может быть аппроксимирована нормальным распределением:

$$p(x) = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{(2\pi)^n \det W}} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}(x - \bar{x})^T W^{-1}(x - \bar{x})\right), \quad (13)$$

где  $W$  - коэффициент стохастической чувствительности.

## 2. Стохастический цикл

Будем рассматривать случай, когда система (1) имеет  $k$ -цикл  $\Gamma$  - множество точек  $\Gamma = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ , связанных соотношениями:

$$f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1.$$

Считаем, что последовательность  $\bar{x}_t$  определена при всех  $t$  с условием периодичности  $\bar{x}_{t+k} = \bar{x}_t$ . Предполагается, что цикл  $\Gamma$  является  $\mathcal{E}$ -устойчивым.

**Определение 1.** Цикл  $\Gamma$  называется экспоненциально устойчивым в окрестности  $U$  ( $\mathcal{E}$ -устойчивым), если при некоторых  $K > 0$ ,  $0 < q < 1$  для всех  $x_1 \in U$  при любых  $t$  выполняется неравенство

$$\|\Delta(x_t)\| \leq Kq^t \|\Delta(x_1)\|,$$

Здесь

$$\Delta(x) = x - \gamma(x), \quad \gamma(x) = \underset{y \in \Gamma}{\operatorname{argmin}} \|x - y\|,$$

$\|\cdot\|$  - евклидова норма,  $\gamma(x)$  - ближайшая к  $x$  точка цикла  $\Gamma$ , а  $\Delta(x)$  - вектор отклонения  $x$  от  $\Gamma$ . Предполагается, что для системы (1) окрестность  $U$  инвариантна.

Пусть  $x_t^\varepsilon$  - решение (1) с начальным условием  $x_1 = \bar{x}_1 + \varepsilon v_1$ . Произведение  $z_1^\varepsilon = \varepsilon v_1$  задает малое отклонение состояния  $x_1$  от точки  $\bar{x}_1$  цикла  $\Gamma$  в направлении  $v_1$ . Рассмотрим отклонения  $z_t^\varepsilon = x_t^\varepsilon - \bar{x}_t$  состояний  $x_t^\varepsilon$  системы (1) от цикла  $\Gamma$  в последующие моменты времени. Пусть  $v_t^\varepsilon = \frac{z_t^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}_t}{\varepsilon}$ . При малых  $\varepsilon$  чувствительность цикла к возмущению начальных данных определяется величиной

$$v_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_t^\varepsilon = \frac{d}{d\varepsilon} x_t^\varepsilon|_{\varepsilon=0}.$$

Для  $v_t$  справедлива система

$$v_{t+1} = F_t v_t, \quad F_t = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_t)$$

с  $k$ -периодическими матрицами  $F_t$ :  $F_{t+k} = F_t$ .

Матрица монодромии  $B = F_k \cdot \dots \cdot F_2 \cdot F_1$  задает подпоследовательность  $v_1, v_{k+1}, \dots, v_{lk+1}, \dots$  уравнением

$$v_{(l+1)k+1} = B v_{lk+1}.$$

При этом  $v_{lk+1} = B^l v_1$ .

Необходимым и достаточным условием Э-устойчивости цикла является неравенство  $\rho(B) < 1$ . При этом  $\lim_{l \rightarrow \infty} v_{lk+1} = 0$  независимо от выбора  $v_1$ . Величина  $\rho(B)$  показывает, во сколько раз приближается решение  $x_t^\varepsilon$  к циклу  $\Gamma$  за один оборот.

Рассмотрим динамику  $v_t$  в присутствии случайных возмущений, когда состояние  $x_t^\varepsilon$  формируется стохастической системой (3).

В этом случае имеем

$$v_{t+1} = F_t v_t + S_t \xi_t, \quad S_t = \sigma(\bar{x}_t). \quad (14)$$

Динамика первых двух моментов  $m_t = E v_t$ ,  $V_t = E v_t v_t^\top$  решения  $v_t$  системы (14) задается уравнениями

$$m_{t+1} = F_t m_t, \quad (15)$$

$$V_{t+1} = F_t V_t F_t^\top + Q_t, \quad Q_t = S_t S_t^\top. \quad (16)$$

Последовательные  $k$  итераций систем (15)-(16) с учетом периодичности матриц  $F_t$  и  $Q_t$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} m_{lk+2} &= F_1 m_{lk+1} \\ m_{lk+3} &= F_2 m_{lk+2} \\ &\dots \\ m_{lk+k+1} &= F_k m_{lk+k} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} V_{lk+2} &= F_1 V_{lk+1} F_1^\top + Q_1, \\ V_{lk+3} &= F_2 V_{lk+2} F_2^\top + Q_2, \\ &\dots \\ V_{lk+k+1} &= F_k V_{lk+k} F_k^\top + Q_k. \end{aligned} \quad (18)$$



Из (17), (18) следуют явные соотношения, связывающие  $m_{(l+1)k+1}$  с  $m_{lk+1}$  и  $V_{(l+1)k+1}$  с  $V_{lk+1}$ :

$$m_{(l+1)k+1} = Bm_{lk+1} \quad (19)$$

$$V_{(l+1)k+1} = BV_{lk+1}B^\top + Q, \quad (20)$$

где

$$B = F_k \cdot \dots \cdot F_2 F_1, \quad Q = Q_k + F_k Q_{k-1} F_k^\top + \dots + F_k \cdot \dots \cdot F_2 Q_1 F_2^\top \cdot \dots \cdot F_k^\top$$

являются постоянными матрицами.

### Теорема 2.

Пусть  $\rho(B) < 1$ . Тогда

а) уравнение (16) имеет единственное  $k$ -периодическое решение  $W_t$ :  $W_{t+k} = W_t$ , где  $W_1$  – единственное решение уравнения

$$W = BWB^\top + Q, \quad (21)$$

а  $W_2, W_3, \dots, W_k$  находятся рекуррентно

$$W_{t+1} = F_t W_t F_t^\top + Q_t, \quad t = 1, \dots, k-1; \quad (22)$$

б) при любых  $m_1$  и  $V_1$  решения  $m_t$  и  $V_t$  систем (15), (16) стабилизируются:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (V_t - W_t) = 0; \quad (23)$$

в) система (14) имеет  $k$ -периодическое решение  $\bar{v}_t$ :

$$E\bar{v}_t = 0, \quad E\bar{v}_t \bar{v}_t^\top = W_t; \quad (24)$$

г) любое решение  $v_t$  системы (14) сходится в среднем квадратичном к  $\bar{v}_t$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E\|v_t - \bar{v}_t\|^2 = 0. \quad (25)$$

**Доказательство.** Докажем а). При  $\rho(B) < 1$  по теореме 1 система (21) имеет единственное решение. Обозначим его через  $W_1$ . Из (22) найдем  $W_2, W_3, \dots, W_k$  и продолжим по периодичности:  $W_{t+k} = W_t$ .

Пусть  $V_t$  – решение (16) с начальным условием  $V_1 = W_1$ . Из (22) и (18) следует  $V_2 = W_2, \dots, V_k = W_k$ . Из (20) (при  $l = 0$ ) и (21) следует, что  $V_{k+1} = BV_1 B^\top + Q = BW_1 B^\top + Q = W_1$ . Справедливость равенства  $V_t = W_t$  для  $t = k+2, k+3, \dots$  следует из (22) и (18). Единственность  $k$ -периодического

решения  $W_t$  системы (16) следует из того, что соответствующая однородная система имеет лишь тривиальное решение.

Докажем б). При  $\rho(B) < 1$  из (17) и (19) следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = 0$ . Рассмотрим  $\Delta_t = V_t - W_t$ . Из (18) и (20) следует, что

$$\Delta_{(l+1)k+1} = B\Delta_{lk+1}B^\top, \quad \Delta_{lk+i+1} = F_i\Delta_{lk+i}F_i^\top. \quad (26)$$

В условиях  $\rho(B) < 1$  из (26) следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_t = 0$ . Таким образом, соотношения (23) доказаны.

Докажем в). Пусть  $\bar{v}_1$  – некоррелированный с  $\xi_1, \xi_2, \dots$  случайный вектор, имеющий  $E\bar{v}_1 = 0$ ,  $E\bar{v}_1\bar{v}_1^\top = W_1$ . Рассмотрим последовательность  $\bar{v}_t$ , элементы которой для  $t = 2, 3, \dots$  формируются системой (14). Из (15), (18) и (20) следует, что  $E\bar{v}_t = 0$ ,  $E\bar{v}_t\bar{v}_t^\top = W_t$ . Таким образом, соотношения (24) доказаны.

Докажем г). Рассмотрим  $z_t = v_t - \bar{v}_t$ . Для  $z_t$  и  $Z_t = E(\bar{z}_t\bar{z}_t^\top)$  справедливы рекуррентные соотношения

$$z_{t+1} = F_t z_t, \quad Z_{t+1} = F_t Z_t F_t^\top.$$

При  $\rho(B) < 1$  имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} Z_t = 0$  и  $E\|v_t - \bar{v}_t\|^2 = E\|z_t\|^2 = \text{tr}(Z_t)$ . Следовательно, справедливо (25). Теорема 2 доказана.

Условие  $\rho(B) < 1$  гарантирует у системы (3) при малых шумах существование стационарно распределенного решения. Матрицы  $\varepsilon^2 W_t$ , где  $W_t$  определены в пункте а) теоремы 2, являются первым приближением ковариации этого стационарно распределенного решения в окрестности точки  $\bar{x}_t$  цикла  $\Gamma$ .

Матричная  $k$ -периодическая функция  $W_t$ , значения которой  $W_1, \dots, W_k$  характеризуют реакцию точек  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$  цикла  $\Gamma$  на малые случайные воздействия системы (3), будем называть *функцией стохастической чувствительности цикла*.

### Алгоритм построения функции стохастической чувствительности

1. Для элементов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$  цикла  $\Gamma$  системы (3) по формулам

$$F_t = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_t), \quad S_t = \sigma(\bar{x}_t), \quad Q_t = S_t S_t^\top$$

найти

$$F_1, \dots, F_k, \quad Q_1, \dots, Q_n,$$

$$B = F_k \cdot \dots \cdot F_1, \quad Q = Q_k + F_k Q_{k-1} F_k^\top + \dots + F_k \cdot \dots \cdot F_2 Q_1 F_2^\top \cdot \dots \cdot F_k^\top$$

2. Из уравнения (14) найти решение – матрицу  $W_1$ .

3. По рекуррентным формулам (15) найти  $W_2, \dots, W_k$ .

#### Характеристики чувствительности

Цикл  $\Gamma$  состоит из точек  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ , и для каждой точки  $x_i$  найдем функцию стохастической чувствительности согласно вышеописанному алгоритму. Для каждой матрицы  $W_i$  найдем их максимальные собственные числа  $\lambda^{k,i}$ . Величины  $m = \min_{i=1, \dots, k} \lambda^{k,i}$ ,  $M = \max_{i=1, \dots, k} \lambda^{k,i}$  характеризуют диапазон изменения стохастической чувствительности состояний  $k$ -цикла. Их отношение  $\frac{M}{m}$  может служить показателем неравномерности стохастической чувствительности цикла. Величину  $M$  удобно использовать в качестве характеристики стохастической чувствительности аттрактора в целом. Будем называть ее показателем стохастической чувствительности.

#### Плотность распределения.

В случае когда система (1) имеет  $k$ -цикл  $\Gamma$  с состояниями  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$  будем аппроксимировать плотность стохастического цикла в виде комбинации нормальных распределений:

$$p(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\varepsilon \sqrt{(2\pi)^n \det W_i}} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} (x - \bar{x}_i)^\top W_i^{-1} (x - \bar{x}_i)\right), \quad (27)$$

где  $W_i$  значения функции чувствительности в точках цикла.

### 3. Отображение Эно

Рассмотрим стохастическую систему Эно

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - \mu x_t^2 - 0.5y_t + \varepsilon\xi_{1,t} \\ y_{t+1} &= x_t + \varepsilon\xi_{2,t} \end{aligned} \quad (28)$$

где  $\xi_{1,t}, \xi_{2,t}$  последовательности независимых случайных величин,  $E\xi_{1,t} = E\xi_{2,t} = 0$ ;  $E\xi_{1,t}^2 = E\xi_{2,t}^2 = 1$ ;  $E\xi_{1,t}\xi_{2,t} = 0$ , а  $\varepsilon$  интенсивность шумов.

При отсутствии случайных возмущений ( $\varepsilon = 0$ ) детерминированная модель (28) имеет на интервале  $1 \leq \mu \leq 2.5$  различные типы динамики. Зоны порядка чередуются с зонами хаоса (рис.1). На интервале  $I = (1, \mu_\infty)$ , где наблюдаются бифуркации удвоения периода, можно выделить зоны структурной устойчивости с постоянной кратностью циклов, разделенные точками бифуркаций - интервалы  $I_0, I_1, \dots$ . Для системы (28) имеем  $I_0 \approx (1, 1.68)$ ,  $I_1 \approx (1.68, 2.31)$ ,  $I_2 \approx (2.31, 2.41)$  и т.д. При этом на  $I_0$  имеем одну точку покоя  $\bar{x}_{0,1}(\mu) = \bar{y}_{0,1}(\mu) = \frac{\sqrt{9+16\mu}-3}{4\mu}$ , на  $I_1$  имеем 2-цикл с состояниями

$$\bar{x}_{1,1}(\mu) = \frac{3 + \sqrt{16\mu - 27}}{4\mu};$$

$$\bar{y}_{1,1}(\mu) = \frac{3 - \sqrt{16\mu - 27}}{4\mu},$$

$$\bar{x}_{1,2}(\mu) = \bar{y}_{1,1}(\mu);$$

$$\bar{y}_{1,2}(\mu) = \bar{x}_{1,1}(\mu)$$

Под воздействием случайных возмущений траектории покидают аттрактор детерминированной системы (28), формируя вокруг него стохастический аттрактор с соответствующим стационарным вероятностным распределением. В присутствии шума тонкая структура детерминированного аттрактора размывается (рис. 2). Как видно из рисунка 2, разброс случайных состояний неоднороден. При изменении параметра  $\mu$  на интервале структурной устойчивости, дисперсия заметно меняется, резко возрастая вблизи точек бифуркации. На интервале  $I_1$  наблюдается различие в разбросе случайных состояний вокруг точек  $\bar{x}_{1,1}(\mu), \bar{x}_{1,2}(\mu)$ , соответствующих детерминированному 2-циклу: нижняя ветка размывается сильнее верхней. Детальную картину указанных особенностей зависимости разброса траекторий для различных точек аттрактора от параметра  $\mu$  дает функция стохастической чувствительности. На каждом интервале структурной устойчивости  $I_n$  определен набор матричных функций  $W_{n,i}(\mu)$  ( $i = 1, \dots, 2^n$ ), где  $W_{n,i}(\mu)$  задает стохастическую

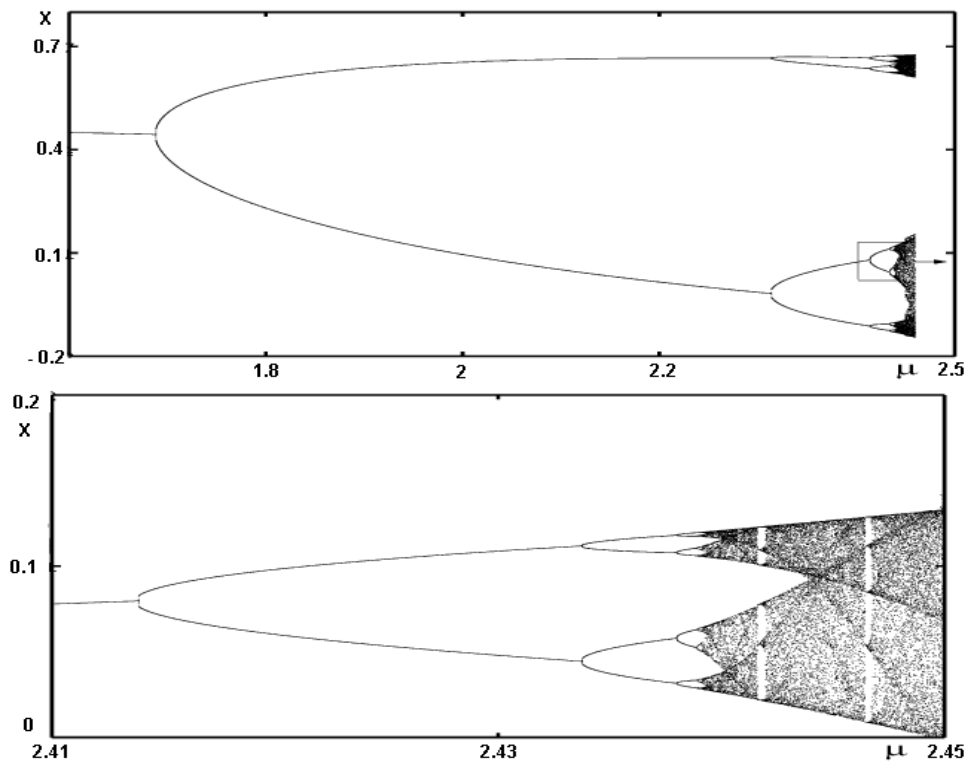


Рис. 1: Бифуркационная диаграмма детерминированного отображения Эно

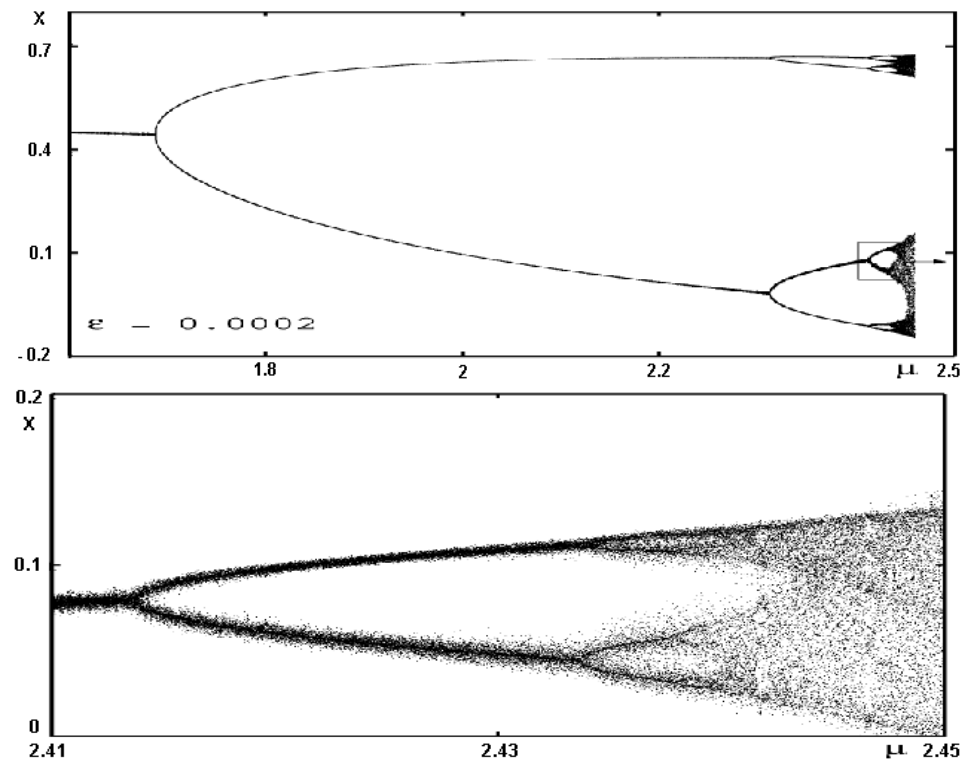


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма стохастического отображения Эно при  $\varepsilon = 0.0002$

чувствительность  $i$ -го состояния  $2^n$ -цикла при  $\mu \in I_n$ . Значения функции стохастической чувствительности на интервале  $I_n$  находится по рекуррентным формулам (15). Определим  $\lambda^{n,i}(\mu)$  - максимальные собственные числа матричных функций  $W_{n,i}(\mu)$ .

По данным прямого численного моделирования решений стохастической системы (28), для выборки случайных состояний разбросанных в окрестности точки  $(\bar{x}_{n,i}(\mu); \bar{y}_{n,i}(\mu))$  можно найти эмпирическую дисперсию  $D_{n,i}(\mu)$ .

Матрицы  $\bar{W}_{n,i}(\mu) = \frac{1}{\varepsilon^2} D_{n,i}(\mu)$  характеризуют стохастическую чувствительность аттракторов системы (28) при фиксированной интенсивности  $\varepsilon$  действующих шумов. На рисунке 3 сплошными линиями изображены максимальные собственные числа матрицы стохастической чувствительности  $W_{n,i}(\mu)$  на интервалах  $I_0, I_1, I_2, I_3$  и значения (звездочками), полученные прямым численным моделированием решений системы (28) при интенсивности  $\varepsilon = 0.0001$  и  $\varepsilon = 0.0005$  соответственно. Как видим теоретические кривые хорошо совпадают с эмпирическими данными, однако, с ростом кратности цикла и большей интенсивности возмущений эмпирические и теоретические результаты начинают расходиться, что говорит о росте чувствительности при увеличении кратности цикла.

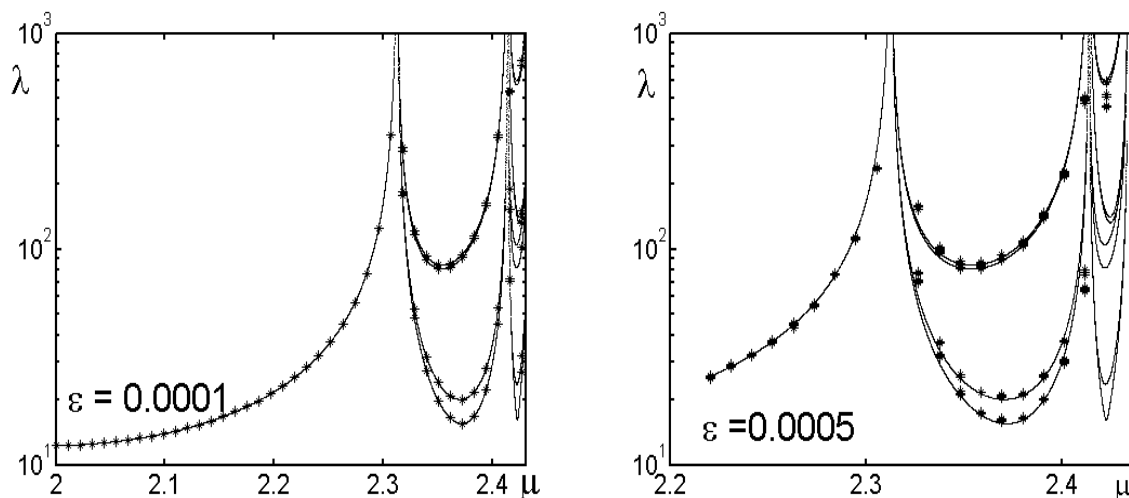


Рис. 3: Максимальные собственные числа матрицы чувствительности

Заметим, что в случае двуцикла  $\lambda^{1,1} = \lambda^{1,2}$ , это объясняется спецификой отображения Эно.

Рассмотрим на  $I$  функции  $m(\mu)$  и  $M(\mu)$ , задаваемые на каждом интер-

вале  $I_n$  соотношениями:

$$m(\mu) = \min_{i=1..2^n} \lambda^{n,i}(\mu), \quad M(\mu) = \max_{i=1..2^n} \lambda^{n,i}(\mu)$$

Их отношение  $K(\mu) = \frac{M(\mu)}{m(\mu)}$  для фиксированного  $\mu$  характеризует неравномерность стохастической чувствительности соответствующего аттрактора. Функцию  $M(\mu)$  удобно использовать в качестве характеристики стохастической чувствительности аттрактора в целом. Будем называть ее показателем стохастической чувствительности.

На каждом интервале  $I_n$  существует значение  $\mu_n$ , при котором показатель  $M(\mu)$  принимает наименьшее значение.

$$\mu_n = \underset{\mu \in I_n}{\operatorname{argmin}} M(\mu), \quad M_n = \min_{\mu \in I_n} M(\mu)$$

$$m_n = m(\mu_n), \quad K_n = \frac{M(\mu_n)}{m(\mu_n)}$$

Значения  $\mu_n, M_n$  для интервалов  $I_n$  структурной устойчивости системы (28) представлены в таблице.

$k$	$\mu_k$	$M_k$	$\eta_k = \frac{M_{k+1}}{M_k}$
0	0	2,6666	4,6064884
1	1,991770617	12,28396914	6,859056584
2	2,353956433	84,25643943	7,167912410
3	2,421835963	603,9427778	6,934666089
4	2,435418160	4188,141501	7,008964445
5	2,438353863	29354,53487	6,986589243
6	2,438981816	205088,0775	6,995322549
7	2,439116482	1434657,253	6,992768980
8	2,439145317	10032226,74	6,993846989
9	2,439151494	70163858,76	6,993479422
10	2,439152817	490689502,4	6,993603859
11	2,439153100	34316879970	6,993266136

Как видим в цепи бифуркаций удвоения периода стохастическая чувствительность циклов неограниченно возрастает. Для больших  $k$  последовательность  $M_k$  ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\eta$

$$\eta = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k \approx 6,993.$$

Вычислив матрицы чувствительности для точек цикла, можно построить плотность распределения стохастического цикла при заданном уровне шума. Плотность распределения дает полное наглядное представление пространственной неоднородности отклонений возмущенных траекторий от аттрактора для его различных точек. При  $\mu = 1.5$  детерминированная система Эно имеет равновесие  $\bar{x} = \bar{y} \approx 0.457$ . Значение коэффициента стохастической чувствительности находится по формуле (15)

$$W = \begin{pmatrix} 10.221 & -9.351 \\ -9.351 & 11.221 \end{pmatrix}$$

Тогда плотность стохастического равновесия задается в следующем виде:

$$p(x, y) \approx \frac{1}{32.798\varepsilon} \exp\left(-\frac{0.411x^2 - 0.69x + 0.686xy + 0.308 - 0.657y + 0.375y^2}{2\varepsilon^2}\right)$$

На рис. 4 представлено соответствие плотностей распределения для теоретических и эмпирических данных в случае стохастического равновесия системы Эно. Следует отметить достаточно хорошее соответствие результатов. В слу-

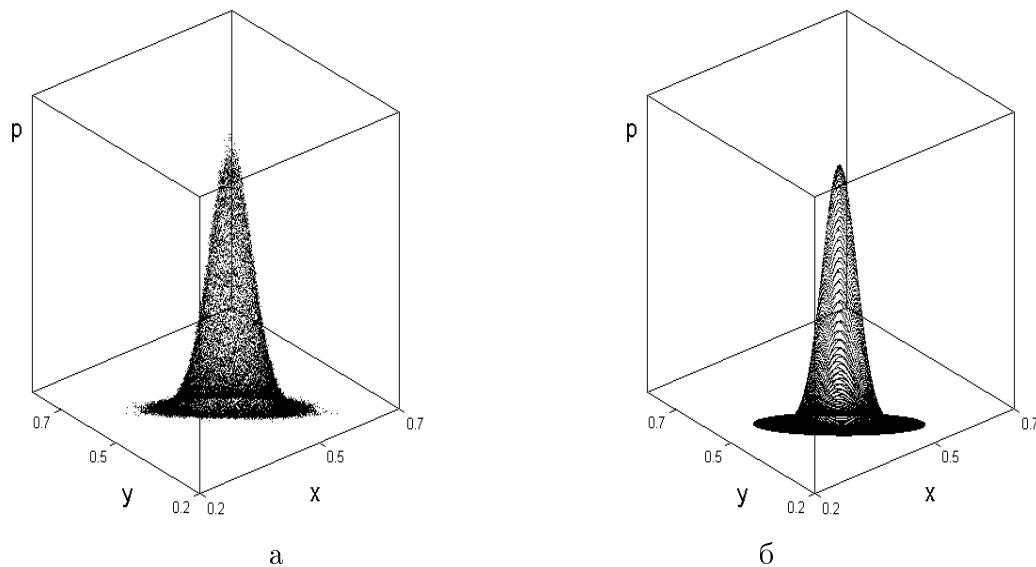


Рис. 4: Плотность распределения стохастического равновесия ( $\mu = 1.5$ ) системы Эно, при амплитуде шума  $\varepsilon = 0.01$ . а: эмпирические данные; б: теоретические данные.

чае когда при выбранном значении параметра  $\mu$  в системе (28) наблюдается стохастический цикл, аналогично находятся точки детерминированного цикла  $\bar{x}_i$ , затем вычисляются значения функции чувствительности. В результате получаем явную формулу для плотности распределения в зависимости от интенсивности внешнего шума. На рис. 5 представлено соответствие плотностей распределения для стохастического двуцикла.



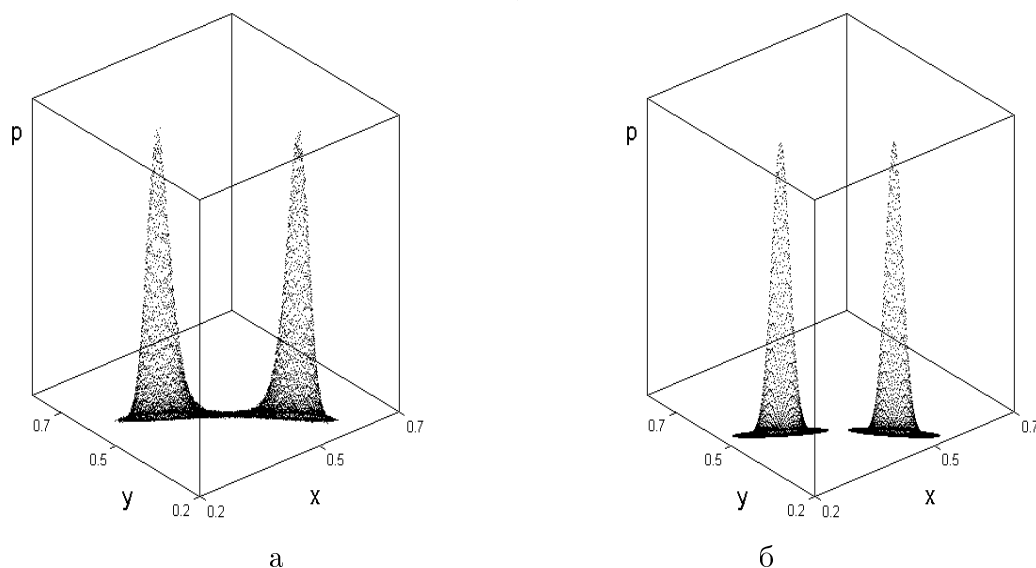


Рис. 5: Плотность распределения стохастического двуцикла ( $\mu = 1.72$ ) системы Эно, при амплитуде шума  $\varepsilon = 0.003$ . а: эмпирические данные; б: теоретические данные.

#### 4. Заключение

В данной статье были рассмотрены детерминированные и стохастические циклы двумерной системы Эно в зоне бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

Для исследования отклика циклов на малые случайные возмущения предлагается использовать функцию стохастической чувствительности. Получена явная формула вычисления функции чувствительности в каждой точке цикла детерминированной системы.

Для системы Эно со случайными возмущениями представлена стохастическая бифуркационная диаграмма, дающая общую картину чувствительности циклов системы к случайным возмущениям. Показано общее повышение чувствительности при переходе к хаосу. Точную количественную оценку влияние шума на предельные циклы детерминированной системы дает функция стохастической чувствительности. Данная функция позволяет сравнить между собой восприимчивость всех состояний цикла к случайным воздействиям и проследить изменения чувствительности как на интервале структурной устойчивости так и при переходе к циклам большей кратности. Для построения функции чувствительности использовался эмпирический подход, а также метод, основанный на использовании систем первого приближения. Следует отметить хорошее соответствие эмпирических данных и теоретических результатов.

Показано явное увеличение чувствительности циклов системы Эно к случайным возмущениям в цепи бифуркаций удвоения периода. Установлен показатель геометрического роста чувствительности стохастических циклов.

Используя введенную характеристику чувствительности, для системы Эно построены графики плотности распределения стохастических циклов произвольной кратности. Полученные плотности могут быть использованы для изучения явлений обратных стохастических бифуркаций – уменьшения кратности стохастического цикла при увеличении интенсивности внешнего возмущения.

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов федерального агентства по образованию 2.1.1/2571, РФФИ № 09-01-00026 и № 09-08-00048, федеральной целевой программы № 02.740.11.02.02*

## Список литературы

- [1] Полак Л.С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М.: Наука, 1983.
- [2] Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления. М.: Мир, 1973.
- [3] Haken H. Synergetics - a Field Beyond Irreversible Thermodynamics // Lect. Notes in Phys. Berlin: Springer, 1978. Vol. 84. P.140.
- [4] Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1983.
- [5] Синай Я. Г. Теория фазовых переходов. М.: Наука, 1980.
- [6] Вильсон К. Дж. Ренормализационная группа и критические явления. // УФН. 1983. Т. 141, вып. 2. С. 109.
- [7] Hu B. Intoduction to Real-Space Renormalizatin-Group Methods in Critical and Chaotic Phenomen // Phys. Rep. 1982. Vol. 91. No 5. P. 233.
- [8] Elaydi S. N. An Introduction to Difference Equations // Springer. 1999.
- [9] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
- [10] Feigenbaum M. J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol.19. No 1. P. 25.

- [11] *Feigenbaum M. J.* The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations // J. Stat. Phys. 1979. Vol.21. No 6. P. 669.
- [12] *Feigenbaum M. J.* The Transition to Aperiodic Behavior in Turbulent Systems // Comm. Math. Phys. 1980. Vol.77. No 1. P. 65.
- [13] *Hauser P. R., Tsallis C., Curado M. F.* Criticality of the Routes to Chaos of the  $1 - \alpha|x|^z$  Map // Phys. Rev. A. 1984. Vol.30. No 4. P. 2074.
- [14] *Derida. B., Gervois A.,Pomeau Y.* Universal Metric Properties of bifurcations of Endomorphisms // J. Phys. A. 1979. Vol. 12. No 3. P. 269.
- [15] *Пиковский А. С.* О стохастических свойствах простейшей модели стохастических автоколебаний // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1980. Т. 23 No 7. С. 883.
- [16] *Huberman B.A., Rudnick J.* Scaling Behavior of Chaotic Flows // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol.45. No 3. P. 154.
- [17] *Huberman B.A., Zisook A. B.* Power Spectra of Strange Attractors // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol.46. No 10. P. 624.
- [18] *Huberman B.A., Hirisch J. E., Scalapino D. J.* Theory of Intermittency // Phys. Rev. A. 1982. Vol.25. No 1. P. 519.
- [19] *Анищенко В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1,2. Саратов: Изд-во СГУ, 1986.
- [20] *Неймарк Ю.И.* О возникновении стохастичности в динамических системах // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1974. Т. 17 No 4. С. 602.
- [21] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
- [22] *Crutchfield J. P., Farmer J., Huberman B. A.* Fluctuation and Simple Chaotic Dynamics // Phys. Rep. 1982. Vol. 92. No 2. P. 45.
- [23] *Crutchfield J. P., Packard N. H.* Symbolic Dynamics of Noisy Chaos // Physica. D. 1983. Vol. 7D. No 1-3. P. 201.
- [24] *Gutierrez J., Iglesias A., Rodriguez M. A.* Logistic map driven by dichotomous noise // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 2507.

- [25] *Hall P., Wolf R. C. L.* Properties of invariant distributions and Lyapunov exponents for chaotic logistic maps // Journal of the Royal Statistical Society. 1995. Vol. 57. P. 439.
- [26] *Linz S. J., Lucke M.* Parametric modulation of instabilities of a nonlinear discrete system // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33. P. 2694.
- [27] *Кузнецов А.П., Капустина Ю.В.* Свойство скейлинга при переходе к хаосу в модельных отображениях с шумом // Изв. вузов Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т.8 No 6. С.78.
- [28] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Седова Ю.В.* О свойствах скейлинга при воздействии шума в отображении окружности с числом вращения, заданным золотым средним // Изв. вузов Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т.13 No 5,6. С.56.
- [29] *Crutchfield J. P., Nauenberg M., Rudnick J.* Scaling for external noise at the onset of chaos // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, No 14. P. 933.
- [30] *Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б., Стихин П.В.* Стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера при переходе к хаосу // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т.11 No 6. С.32.
- [31] *Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B.* Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // Dynamic systems and applications. 2002. Vol.11, No 2. P.293.
- [32] *Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Mathematics and Computers in Simulation. 2004, Vol. 66. P.55.
- [33] *Уонэм У.М.* Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.