

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2013

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Стохастические дифференциальные уравнения

## Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей\*

Т. А. Аверина

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
Новосибирский государственный университет, [ata@osmf.sccc.ru](mailto:ata@osmf.sccc.ru)

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт, [rkoffice@mail.ru](mailto:rkoffice@mail.ru)

**Аннотация.** Рассматриваются два метода решения задачи анализа стохастических систем с разрывами траекторий, образующими пуассоновский поток событий: метод статистического моделирования и спектральный метод. В работе изложены алгоритмы решения задачи анализа, основанные на методе статистического моделирования и спектральной форме математического описания систем управления. Сравнение и эффективность методов демонстрируются на решении модельных и прикладных задач.

**Ключевые слова:** задача анализа, импульсные воздействия, метод статистических испытаний, пуассоновская мера, пуассоновский поток событий, спектральный метод, стохастическая система, уравнение Колмогорова – Феллера.

### Введение

Для описания математических моделей различных явлений, например, процессов в технических системах (управление движущимися объектами, радиолокационные, навигационные и измерительные системы, электрические цепи с импульсными источниками), в экономических задачах (описание динамики курсов акций и макроэкономических показателей), в математической биологии и медицине (управление биомассой, действие лекарственных препаратов) широкое применение нашли стохастические дифференциальные уравнения с пуассоновской составляющей [7, 20, 32, 33, 36–39]. Такие модели называют стохастическими системами с импульсными воздействиями, а также системами со случайным периодом квантования. Наличие импульсных воздействий приводит к тому, что в

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00282-а, 12-01-00490-а и 12-08-00892-а).

случайные моменты времени вектор состояния системы получает случайные приращения, образующие пуассоновский поток событий.

В работе приводятся известные формы математического описания стохастических систем рассматриваемого класса и разработанные авторами методы и алгоритмы приближенного анализа — нахождения вероятностных характеристик вектора состояния системы.

Один из предлагаемых методов — метод статистического моделирования, который состоит в моделировании решений стохастических дифференциальных уравнения и вычислении статистических оценок искомых вероятностных характеристик решения.

Другой метод — спектральный, основанный на приближенном решении интегро-дифференциального уравнения в частных производных, описывающего эволюцию плотности вероятности вектора состояния (уравнение Колмогорова – Феллера [7, 33]), с помощью представления искомой плотности вероятности в виде функционального ряда по подходящему базису.

Преимущества предлагаемых подходов состоят в простоте реализации и универсальности, а именно возможности решения задачи анализа для линейных и нелинейных, одномерных и многомерных моделей стохастических систем, для различных законов распределения величин приращений вектора состояния. Апробация предлагаемых алгоритмов проводилась на модельных и прикладных задачах. Как показали расчеты, во всех примерах получены достаточно точные оценки различных вероятностных характеристик.

### Стохастические дифференциальные уравнения с пуассоновской составляющей

Многие математические модели технических и экономических систем, учитывающие воздействие шума, описываются стохастическими дифференциальными уравнениями с пуассоновской составляющей [7, 12, 13, 20, 21, 32, 33, 36–39]. Рассмотрим различные варианты описания таких моделей.

Пусть  $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$  — основное вероятностное пространство;  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  — неубывающий поток полных  $\sigma$ -подалгебр  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ ;  $(\Theta, \mathfrak{B}_\Theta)$  — измеримое пространство;  $\mathfrak{B}_\Theta$  и  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$  —  $\sigma$ -алгебры борелевских множеств на  $\Theta$  и  $\mathbb{R}_+$  соответственно.

Приведем необходимые определения [14]. Говорят, что на пространстве  $\Theta \times \mathbb{R}_+$  определена пуассоновская мера  $\nu$ , если

- а) на измеримом пространстве  $(\Theta, \mathfrak{B}_\Theta)$  задана некоторая конечная мера  $\Pi$ ;
- б) для всякого  $B \in \mathfrak{B}_\Theta$  процесс

$$\nu_t(B) = \nu(B \times [0, t])$$

является однородным пуассоновским процессом с параметром  $\Pi(B)$ , согласованным с  $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ , т.е. при  $\Delta t > 0$

$$\begin{aligned} P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 1) &= \Pi(B)\Delta t + o(\Delta t), \\ P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 0) &= 1 - \Pi(B)\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \tag{1}$$

и, кроме того, при всех  $t$  величина  $\nu_t(B)$  измерима относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{F}_t$ , а приращения  $\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B)$  при  $\Delta t > 0$  не зависят от  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{F}_t$ ;

в) если множества  $B_1, \dots, B_n, n = 1, 2, \dots$ , из  $\mathfrak{B}_\Theta$  попарно не пересекаются, то процессы  $\{\nu_t(B_n)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  независимы в совокупности;

г) если множества  $C_1, \dots, C_n, n = 1, 2, \dots$ , из  $\mathfrak{B}_\Theta \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$  попарно не пересекаются, то почти наверное

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n).$$

Пуассоновская мера  $\nu$  однозначно определяется своей характеристической мерой  $\Pi$ .

Моментом остановки относительно потока  $\{\mathfrak{S}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  называется такая неотрицательная случайная величина  $\tau$  со значениями в  $\mathbb{R}_+$ , что событие  $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{S}_t$  для всех  $t \in \mathbb{R}_+$ .

Для пуассоновской случайной меры  $\nu$  существуют последовательности моментов остановки  $\tau_k$  и  $\mathfrak{S}_{\tau_k}$ -измеримых величин  $\theta_k \in \Theta$  таких, что [9]

$$\nu(C) = \sum_k I_{\{(\theta_k, \tau_k) \in C\}}, \quad C \in \mathfrak{B}_\Theta \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+},$$

где  $I_{\{\cdot\}}$  — индикаторная функция.

В более общем случае процесс  $\nu_t(B)$  может быть неоднородным, тогда условие (1) следует переписать в виде

$$P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 1) = \Pi(B, t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 0) = 1 - \Pi(B, t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Далее, не ограничивая общности, будем полагать, что  $t \in [t_0, T]$ . Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  заданы:

а) поток  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathfrak{S}_t\}_{t \in [t_0, T]}$ ;

б)  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс  $w(t)$ , согласованный с  $\{\mathfrak{S}_t\}_{t \in [t_0, T]}$ , приращения которого  $w(t + \Delta t) - w(t)$  при  $\Delta t > 0$  не зависят от  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{S}_t$ ;

в)  $\mathfrak{S}_0$ -измеримый  $m$ -мерный случайный вектор  $y_0$ , независимый с  $w(t)$ , причем  $\langle |y_0|^2 \rangle < \infty$  (здесь и далее  $\langle \cdot \rangle$  означает математическое ожидание).

Задача Коши для стохастического дифференциального уравнения с пуассоновской составляющей формулируется следующим образом [14]: найти  $m$ -мерный случайный процесс  $y(t)$  ( $y \in \mathbb{R}^m$  — вектор состояния стохастической системы), согласованный с потоком  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathfrak{S}_t\}$ , имеющий стохастический дифференциал

$$dy(t) = f(t, y(t))dt + \sum_{j=1}^s \sigma_{\cdot j}(t, y(t))dw_j(t) + \int_{\Theta} c(t, y(t^-), \theta)\nu(d\theta \times dt), \quad y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

где  $w_j(t)$  — независимые стандартные винеровские процессы, образующие процесс  $w(t)$ ;  $\nu$  — пуассоновская мера на  $\Theta \times [t_0, T]$  с характеристической мерой  $\Pi$ , заданной неотрицательной функцией  $\pi(\theta, t, y): \Theta \times [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ ;  $f(t, y): [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  и  $c(t, y, \theta): [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^m$  —  $m$ -мерные вектор-функции;  $\sigma(t, y): [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times s}$  — матричная функция  $m \times s$ ;  $\sigma_{\cdot j}(t, y)$  —  $j$ -й столбец матрицы  $\sigma(t, y)$ ;  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  — случайный вектор начальных значений.

Существует интегральная форма записи задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения с пуассоновской составляющей

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau))dw_j(\tau) + \int_{t_0}^t \int_{\Theta} c(\tau, y(\tau^-), \theta)\nu(d\theta \times d\tau). \quad (3)$$

Так как решением уравнений (2) и (3) является непрерывный справа процесс без разрывов второго рода,  $y(t^-)$  обозначает значение решения в точке  $t$  слева.

Если стохастический интеграл по винеровскому процессу  $w(t)$  в (3) понимается в смысле Ито, то уравнения (2) и (3) являются стохастическими дифференциальными уравнениями в смысле Ито, если стохастический интеграл по винеровскому процессу  $w(t)$  в (3) понимается в смысле Стратоновича, то и уравнения (2) и (3) — это уравнения в смысле Стратоновича.

Связь между интегралами Ито и Стратоновича выражается формулой

$$\int_{t_0}^t \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau)) dw_j(\tau) = \int_{t_0}^t \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau)) \circ dw_j(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^m \frac{\partial \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau))}{\partial y_k} \sigma_{kj}(\tau, y(\tau)) d\tau,$$

в которой

$$\int_{t_0}^t \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau)) \circ dw_j(\tau)$$

обозначает интеграл Стратоновича. Поэтому уравнения (2) и (3) в смысле Ито соответствуют следующим уравнениям в смысле Стратоновича:

$$dy(t) = a(t, y(t))dt + \sum_{j=1}^s \sigma_{\cdot j}(t, y(t)) \circ dw_j(t) + \int_{\Theta} c(t, y(t^-), \theta) \nu(d\theta \times dt), \quad y(t_0) = y_0,$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t a(\tau, y(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau)) \circ dw_j(\tau) + \int_{t_0}^t \int_{\Theta} c(\tau, y(\tau^-), \theta) \nu(d\theta \times d\tau),$$

где

$$a_i(t, y) = f_i(t, y) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^m \frac{\partial \sigma_{ij}(t, y)}{\partial y_k} \sigma_{kj}(t, y).$$

Таким образом, всегда возможен переход от уравнения в смысле Ито к уравнению в смысле Стратоновича и наоборот. Отметим, что в случае, если матрица  $\sigma(t, y)$  не зависит от  $y$ , уравнение в смысле Ито и соответствующее ему уравнение в смысле Стратоновича совпадают.

Характеристическая мера  $\Pi$ , задающая пуассоновскую случайную меру  $\nu$ , определяется через функцию  $\pi(\theta, t, y)$  следующим образом:

$$\Pi(B, t, y(t^-)) = \int_B \pi(\theta, t, y(t^-)) d\theta, \quad B \in \Theta.$$

Заметим, что здесь условие (1), определяющее меру  $\nu$ , задается в виде

$$\begin{aligned} P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 1 \mid y(t^-) = y) &= \Pi(B, t, y) \Delta t + o(\Delta t), \\ P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 0 \mid y(t^-) = y) &= 1 - \Pi(B, t, y) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Если же  $\Pi(B, t, y) = \Pi(B)$ , т.е. в случае, когда  $\nu_t(B)$  — однородный пуассоновский процесс, не зависящий от  $y(t)$ , то и  $\pi(\theta, t, y) = \pi(\theta)$ . Разумеется, возможны варианты, когда  $\Pi(B, t, y) = \Pi(B, t)$  или  $\Pi(B, t, y) = \Pi(B, y)$ .

Стохастический интеграл по пуассоновской мере  $\nu$

$$\int_{t_0}^t \int_{\Theta} c(\tau, y(\tau^-), \theta) \nu(d\theta \times d\tau) = \sum_{\tau_k < t} c(\tau_k, y(\tau_k^-), \theta_k),$$

если

$$\sum_k |c(\tau_k, y(\tau_k^-), \theta_k)| < \infty,$$

как функция верхнего предела представляет собой случайный процесс, который изменяется скачком в случайные моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$  на случайные значения  $c(\tau_1, y(\tau_1^-), \theta_1), \dots, c(\tau_k, y(\tau_k^-), \theta_k), \dots$ . Распределение моментов скачков  $\tau_k$  и величин  $\theta_k$  определяются характеристической мерой  $\Pi$ .

Если в уравнениях (2) и (3) отсутствует пуассоновская составляющая ( $c(t, y, \theta) \equiv 0$ ), то процесс  $y(t)$  называется *диффузионным*. Если отсутствует гауссовская составляющая ( $\sigma(t, y) \equiv 0$ ), то процесс  $y(t)$  называется *скачкообразным*.

При условии, что все элементы функции  $f(t, y)$  в (2) дифференцируемы, а все элементы матрицы  $\sigma(t, y)$  дважды дифференцируемы по  $y$ , то для процесса  $y$ , удовлетворяющего уравнению (2), переходная функция  $p(t, y | t_0, y_0)$  как функция  $t$  и  $y$  удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова [20]:

$$\frac{\partial p(t, y | t_0, y_0)}{\partial t} = \mathcal{K}p(t, y | t_0, y_0) \tag{4}$$

с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow t_0} p(t, y | t_0, y_0) = \delta(y - y_0),$$

где  $\delta(y)$  — дельта-функция.

Оператор  $\mathcal{K}$  определяется выражением  $\mathcal{K} = \mathcal{A} + \mathcal{M}$ , в котором

$$\begin{aligned} \mathcal{A}p(y) &= - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial y_i} [f_i(t, y)p(y)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [g_{ij}(t, y)p(y)], \\ \mathcal{M}p(y) &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\Theta} p(z) (\delta(y - z - c(t, z, \theta)) - \delta(y - z)) \pi(\theta, t, z) d\theta dz, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $g_{ij}(t, y)$  — элементы матрицы диффузии  $g(t, y) = \sigma(t, y)\sigma^T(t, y)$ . Операторы  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{M}$  называют *прямыми производящими операторами* процесса  $y(t)$ .

*Обратные производящие операторы*  $\mathcal{K}^*$ ,  $\mathcal{A}^*$ ,  $\mathcal{M}^*$  процесса  $y(t)$  имеют вид  $\mathcal{K}^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{M}^*$ , где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*p(y) &= \sum_{i=1}^m f_i(t, y) \frac{\partial p(y)}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(t, y) \frac{\partial^2 p(y)}{\partial y_i \partial y_j}, \\ \mathcal{M}^*p(y) &= \int_{\Theta} (p(y + c(t, y, \theta)) - p(y)) \pi(\theta, t, y) d\theta. \end{aligned}$$

С помощью непосредственной проверки можно показать, что прямые и обратные операторы сопряжены между собой, т.е. для произвольной области  $V$  пространства  $\mathbb{R}^m$ , в которой элементы функции  $f(t, y)$  дифференцируемы, элементы матрицы  $\sigma(t, y)$  дважды дифференцируемы по координатам вектора  $y$ , справедливо следующее равенство [20]:

$$\int_V u(y) \mathcal{K}v(y) dy = \int_V v(y) \mathcal{K}^*u(y) dy,$$

где  $u(y)$  и  $v(y)$  — произвольные скалярные функции, из которых хотя бы одна вместе со своими первыми производными равна нулю на границе области  $V$ .

Приведенные выше условия вносят слишком много ограничений при решении прикладных задач. Вопросы, связанные с ослаблением условий, рассмотрены, например, в [8], а решение уравнения (4) можно понимать в обобщенном смысле [28] как элемент пространства  $L_1([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)$ ,  $L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)$  или  $W_2^{1,1}([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)$  при фиксированных  $t_0$  и  $y_0$ .

Во многих инженерных задачах модели, учитывающие воздействие шума, описываются стохастическими дифференциальными уравнениями с пуассоновской составляющей в другой записи. Так, в работах [21, 33] рассматривается задача Коши для стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dy(t) = f(t, y(t))dt + \sigma(t, y(t))dw(t) + dq(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (6)$$

где наряду с уже введенными обозначениями  $q(t)$  — общий (обобщенный, составной) пуассоновский процесс, заданный в форме

$$q(t) = \sum_{k=1}^{p(t)} \theta_k.$$

Здесь  $p(t)$  — пуассоновский процесс,  $\theta_k$  — независимые случайные величины из  $\mathbb{R}^m$ , распределение которых задано плотностью вероятности  $\psi(\tau_k, \theta)$ , т.е. вектор состояния  $y$  получает случайные приращения в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , образующие пуассоновский поток событий:

$$y(\tau_k) = y(\tau_k^-) + \theta_k.$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности  $\psi(\tau_k, y | z)$ , характеризующая распределение  $y(\tau_k)$  при условии  $y(\tau_k^-) = z$ . В частном случае  $\psi(\tau_k, y | z) = \psi(\tau_k, y - z)$ . Пуассоновский поток событий и, следовательно, пуассоновский процесс  $p(t)$  определяется интенсивностью  $\lambda(t, y)$ :

$$\begin{aligned} P(p(t + \Delta t) - p(t) = 1 | y(t^-) = y) &= \lambda(t, y)\Delta t + o(\Delta t), \\ P(p(t + \Delta t) - p(t) = 0 | y(t^-) = y) &= 1 - \lambda(t, y)\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Математическая модель стохастических систем с разрывами траекторий, образующими пуассоновский поток событий, вида (6), может быть представлена как (2), если

$$\begin{aligned} \Theta \subseteq \mathbb{R}^m, \quad p(t) = \nu_t(\Theta), \quad \pi(\theta, t, z) &= \lambda(t, z)\psi(t, z + \theta | z), \\ \Pi(\Theta, t, y) &= \lambda(t, y), \quad c(t, y, \theta) = \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Если в модели (2) функция  $c(t, y, \theta)$  задана иначе, нежели в (7), то в модели (6) это можно учесть, например, с помощью введения дополнительного коэффициента при слагаемом  $dq(t)$  — функции переменных  $t$  и  $y$ , или с помощью переопределения плотности вероятности  $\psi(t, y | z)$ .

Пуассоновская составляющая  $dq(t)$  может быть формально записана в виде [7, 33]

$$dq(t) = \sum_k \theta_k \delta(t - \tau_k) dt,$$

где  $\delta(t)$  — асимметричная дельта-функция. Существуют и другие формы записи математической модели систем с разрывами траекторий, образующими пуассоновский поток событий [37, 40], но далее они не используются.

Если задана плотность вероятности  $\varphi_0(y)$  случайного вектора начальных значений  $y_0$ , то плотность вероятности  $\varphi(t, y)$  вектора состояния (в случае, если такая плотность существует) удовлетворяет уравнению Колмогорова – Феллера — интегро-дифференциальному уравнению в частных производных, следующему из (4) с учетом (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial y_i} [f_i(t, y) \varphi(t, y)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [g_{ij}(t, y) \varphi(t, y)] - \\ & - \lambda(t, y) \varphi(t, y) + \int_{\mathbb{R}^m} \lambda(t, z) \psi(t, y | z) \varphi(t, z) dz, \quad \varphi(t_0, y) = \varphi_0(y). \end{aligned} \quad (8)$$

Решение уравнения (8), как и уравнения (4), можно понимать в обобщенном смысле.

Задача анализа стохастических систем с разрывами траекторий заключается в нахождении вероятностных характеристик вектора состояния (плотности вероятности, моментных характеристик) в соответствии с заданной математической моделью.

### Статистический алгоритм численного решения стохастических систем с разрывами траекторий

Статистический алгоритм численного решения стохастических систем с разрывами траекторий должен в себя включать: моделирование моментов разрыва траекторий, моделирование величины скачка, а также вычисление между скачками численного решения стохастического дифференциального уравнения с непрерывными траекториями.

В работах [1, 2, 5] рассмотрены алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских полей, которые могут быть применены для моделирования пуассоновской случайной меры. Сравнение разных алгоритмов моделирования пуассоновской меры проведено в работе [1].

Опишем статистический алгоритм моделирования стохастических систем с разрывами траекторий.

В рассматриваемом случае распределение моментов разрыва траекторий определяется интенсивностью  $\lambda(t, y)$  пуассоновского процесса  $p(t)$ . Так как интенсивности зависят от времени, то моделирование моментов смены структуры будет осуществляться по методу «максимального сечения» [1, 10, 16]. Применение этого метода требует выполнения условий  $\lambda(t, y) \leq \bar{\lambda} = \text{const}$ , на всем интервале интегрирования  $[t_0, T]$ .

Статистический алгоритм моделирования траекторий случайного процесса  $y(t)$  для стохастических систем с разрывами траекторий

- 0)  $k := 0$ ;  $stop := 0$ ;  $\tau_k := 0$ ; моделируем  $y_k$  согласно заданному  $y_0$ ;
- 1) моделируем возможный момент разрыва траекторий  $\tau_{k+1} = \tau_k + \xi$ , где  $\xi$  — случайная величина с плотностью

$$p_\xi(x) = \bar{\lambda} e^{-\bar{\lambda}x},$$

по формуле  $\xi = -\ln \alpha / \bar{\lambda}$ , где  $\alpha$  — равномерно распределенная на интервале  $(0, 1)$  случайная величина; если  $\tau_{k+1} > T$ , то  $\tau_{k+1} := T$  и  $stop := 1$ ;

2) решаем стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито

$$y(t) = y(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau + \int_{\tau_k}^t \sigma(\tau, y(\tau)) dw(\tau) \quad (9)$$

или эквивалентное стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Стратоновича

$$y(t) = y(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t a(\tau, y(\tau)) d\tau + \int_{\tau_k}^t \sigma(\tau, y(\tau)) \circ dw(\tau) \quad (10)$$

на интервале  $[\tau_k, \tau_{k+1}]$  соответствующим численным методом [34] с шагом  $h$  и находим  $y_{k+1}$  — решение системы в момент  $\tau_{k+1}$ ; если  $stop = 1$ , то процесс моделирования завершается;

- 3) проверяем условие разрыва: если  $\alpha_1 \leq \lambda(\tau_{k+1}, y_{k+1})/\bar{\lambda}$ , где  $\alpha_1$  — равномерно распределенная на интервале  $(0, 1)$  случайная величина, то переходим к п. 4; иначе переходим к п. 5;
- 4) моделируем случайную величину  $y$  согласно плотности  $\psi(t, y | y_{k+1})$  и полагаем  $y_{k+1} := y$ ; или моделируем величину скачка  $\theta_{k+1}$  согласно плотности  $\psi(t, \theta)$  и полагаем  $y_{k+1} := y_{k+1} + \theta_{k+1}$ ;
- 5) если  $\tau_{k+1} \neq T$ , то  $k := k + 1$  и переходим к п. 1, иначе процесс моделирования завершается.

#### Замечания.

1. Пункт 3 в алгоритме будет отсутствовать, если интенсивность  $\lambda$  постоянна, так как проверяемое условие будет всегда истинно.
2. Выбор численного метода решения конкретного стохастического дифференциального уравнения или систем таких уравнений и шага интегрирования  $h$  определяются видом этой системы и требуемой точностью вычисления вероятностных характеристик выходных процессов.
3. Сетка по времени  $\{t_k\}$  является суперпозицией равномерной сетки с шагом  $h$  и моментов разрыва.
4. Метод «максимального сечения» предполагает моделирование времени  $\bar{\tau}$ , через которое произойдет разрыв траектории, по следующему правилу:

$$\bar{\tau} = \zeta_N, \quad N = \min \left\{ n : \alpha_n \leq \frac{\lambda(\bar{t} + \zeta_n)}{\bar{\lambda}} \right\}, \quad \zeta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k,$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью  $p_\xi(x)$  (см. п. 1 алгоритма);  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  — последовательность независимых равномерно распределенных на интервале  $(0, 1)$  случайных величин;  $\bar{t}$  — начальный момент времени или предыдущий момент разрыва.

Вместо описанного подхода можно использовать более экономичный *модифицированный метод «максимального сечения»*, согласно которому

$$N = \min \left\{ n : 1 - \alpha > \prod_{i=1}^n \left( 1 - \frac{\lambda(\bar{t} + \zeta_i)}{\bar{\lambda}} \right) \right\},$$

где  $\alpha$  — равномерно распределенная на интервале  $(0, 1)$  случайная величина [5].

Использование модифицированного метода «максимального сечения» сокращает время моделирования неоднородного пуассоновского процесса (последовательности моментов разрывов) примерно на 10% и снижает конструктивную размерность алгоритма, связанную с многомерной равномерностью используемых псевдослучайных чисел [2, 29].

**Определение.** Численный метод *сходится* на решении задачи Коши для (10) с порядком  $p$  в среднеквадратическом смысле, если

$$\max_{1 \leq k \leq K} \langle |y(t_k) - y_k|^2 \mid y(t_0) = y_0 \rangle = O(h^p), \quad h \rightarrow 0,$$

где  $y_k$  — численное решение в момент времени  $t_k$ ,  $t_k = t_0 + kh$ ,  $h$  — постоянный шаг интегрирования,  $t_K = T$ .

**Определение.** Численный метод *слабо сходится* на решении задачи Коши для (10) с порядком  $p$ , если для любой достаточно гладкой функции  $f(y)$

$$\max_{1 \leq k \leq K} |\langle f(y(t_k)) \mid y(t_0) = y_0 \rangle - \langle f(y_k) \mid y(t_0) = y_0 \rangle| = O(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

Существует много численных методов решения задачи Коши для стохастических дифференциальных уравнений. В работе [4] для численного решения уравнения (10) в смысле Стратоновича построено семейство численных методов. При численных расчетах использовался устойчивый метода из этого семейства:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + \left( I - \frac{h}{2} \frac{\partial a(t_n, y_n)}{\partial y} \right)^{-1} \frac{h}{2} (a(t_n, y_n) + a(t_n, y_{n+1}^p)) + \\ + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_n, y_{n+1}^p) + \sigma(t_n, y_n)) \zeta_n, \quad y_{n+1}^p = y_n + \sqrt{h} \sigma(t_n, y_n) \zeta_n, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $y_n$  — значение приближенного решения уравнения (10) в узле сетки по времени  $\{t_n\}$ ;  $I$  — единичная матрица  $m \times m$ ;  $h = t_{n+1} - t_n$  — шаг интегрирования в узле  $t_{n+1}$ ,  $\zeta_n = [\zeta_{1n} \dots \zeta_{sn}]^T$  — вектор независимых между собой случайных величин, имеющих нормальное распределение с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Сетка  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n_T} = T$  на отрезке  $[t_0, T]$  строится для каждой траектории численного решения и включает все моменты скачков.

Нормальные случайные величины  $\zeta_{jn}$  с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями моделировались по формуле

$$\zeta_{jn} = \sqrt{-2 \ln \beta_1} \cos(2\pi\beta_2), \quad j = 1, \dots, s.$$

Для моделирования  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  — равномерных на интервале  $(0, 1)$  случайных величин (различных для всех  $j$ ) — использовался датчик псевдослучайных чисел RAND [10].

Этот метод имеет первый порядок среднеквадратической и слабой сходимости для произвольных систем стохастических дифференциальных уравнений и второй порядок — в случае систем со скалярным шумом ( $s = 1$ ) или когда  $\sigma(t, y)$  не зависит от  $y$  [34].

Для линейных систем с аддитивным шумом метод является *асимптотически несмещенным с любым шагом  $h$* .

При вычислении вероятностных характеристик выходных процессов будем использовать следующие обозначения:  $N$  — общее число моделируемых траекторий (объем выборки),  $h$  — шаг численного метода,  $h_g$  — шаг гистограммы,  $n_g$  — число узлов гистограммы.

Погрешность оценки вероятностных характеристик решения складывается из ошибки численного метода решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения и статистической ошибки. Аналогично работе [6] можно показать, что если используемый численный метод решения стохастических дифференциальных уравнений имеет  $p$ -й порядок слабой сходимости, то при вычислении функционалов от решения условно оптимальным является число испытаний, вычисленное по формуле

$$N = O(h^{-2p}),$$

а при вычислении гистограммы — по формуле

$$n_g = O(N^{1/3}), \quad N = O(h^{-3p}).$$

В разделе численных экспериментов рассмотрены две задачи с известными аналитическими решениями и две задачи их радиотехники, описывающие воздействие импульсов на электрические цепи. При решении методом статистического моделирования оценки функционалов от решения и гистограммы вычислялись одновременно. Оптимальными параметрами для получения наилучшей оценки гистограммы при объеме выборки  $N = 10^6$  являются  $h = 10^{-2}$ ,  $n_g = 10^2$ . Дальнейшее уменьшение шага гистограммы или шага численного метода точность вычисления гистограммы не увеличивает. Приводимые в таблицах результаты численных экспериментов подтверждают сделанные предположения и даже демонстрируют более высокую точность вычисления известных вероятностных характеристик решения тестовых примеров.

### Спектральный метод анализа стохастических систем с разрывами траекторий

Спектральный метод анализа стохастических систем базируется на применении спектральной формы математического описания систем управления [30]. В основе этого подхода лежит представление функций их спектральными характеристиками — упорядоченными совокупностями коэффициентов разложения в ряды по подходящей системе ортонормированных или биортонормированных функций. Применение спектральной формы математического описания позволяет перейти от операторных уравнений для искомых функций (в данном случае интегро-дифференциального уравнения (8)) к алгебраическим (для коэффициентов разложения), которые представляются в матричной форме, причем специфика задач и формирования систем ортонормированных функций приводит к необходимости использовать базовый математический аппарат теории многомерных матриц, который в достаточном объеме изложен в [18, 19]. Там же содержатся определения спектральных характеристик и спектральных преобразований, их свойства.

Для применения спектральной формы математического описания удобнее использовать операторную форму записи уравнения (8):

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, y) - \mathcal{L}\varphi(t, y) + \mathcal{H}\varphi(t, y), \quad \varphi(t_0, y) = \varphi_0(y), \quad (12)$$

где линейные операторы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{H}$  определяются выражениями

$$\mathcal{A}\varphi(t, y) = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial y_i} [f_i(t, y)\varphi(t, y)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [g_{ij}(t, y)\varphi(t, y)],$$

$$\mathcal{L}\varphi(t, y) = \lambda(t, y)\varphi(t, y), \quad \mathcal{H}\varphi(t, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda(t, z)\psi(t, y | z)\varphi(t, z) dz.$$

Оператор  $\mathcal{A}$  называют оператором Фоккера–Планка–Колмогорова,  $\mathcal{L}$  — оператор умножения на функцию  $\lambda(t, y)$ ,  $\mathcal{H}$  — оператор Фредгольма с ядром  $\lambda(t, z)\psi(t, y | z)$ . Заметим, что  $-\mathcal{L} + \mathcal{H} = \mathcal{M}$  при выполнении условий (7) (оператор  $\mathcal{M}$  определен в (5)).

Пусть  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$  — ортонормированный базис пространства  $L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)$ , причем функции  $e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)$  порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$  и  $\{p(i_1, \dots, i_m, y)\}_{i_1, \dots, i_m=0}^\infty$  пространств  $L_2([t_0, T])$  и  $L_2(\mathbb{R}^m)$  соответственно, т.е.

$$e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y) = q(i_0, t) \cdot p(i_1, \dots, i_m, y), \quad i_0, i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots$$

Напомним [17–19], что спектральной характеристикой функции  $z(t, y)$ , определенной относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ , называется  $(m + 1)$ -мерная бесконечная матрица  $Z(m + 1, 0)$  с элементами

$$\begin{aligned} z_{i_0 i_1 \dots i_m} &= (e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y), z(t, y))_{L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)} = \\ &= \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^m} e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y) z(t, y) dt dy, \quad i_0, i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

т.е.  $z_{i_0 i_1 \dots i_m}$  — коэффициенты разложения функции  $z(t, y)$  в ряд по функциям базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ , обозначение:  $\mathbb{S}[z(t, y)] = Z(m + 1, 0)$ . Спектральная характеристика плотности вероятности называется *обобщенной характеристической функцией*.

Применяя спектральное преобразование  $\mathbb{S}$  (отображение, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику) к левой и правой частям уравнения (12), получаем

$$\mathbb{S} \left[ \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, y) = \varphi_0(y)} \right] = \mathbb{S}[\mathcal{A}\varphi(t, y)] - \mathbb{S}[\mathcal{L}\varphi(t, y)] + \mathbb{S}[\mathcal{H}\varphi(t, y)],$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \left[ \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, y) = \varphi_0(y)} \right] &= - \sum_{i=1}^m \mathbb{S} \left[ \frac{\partial}{\partial y_i} [f_i(t, y) \varphi(t, y)] \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m \mathbb{S} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [g_{ij}(t, y) \varphi(t, y)] \right] - \\ &- \mathbb{S} \left[ \lambda(t, y) \varphi(t, y) \right] + \mathbb{S} \left[ \int_{\mathbb{R}^m} \lambda(t, z) \psi(t, y | z) \varphi(t, z) dz \right]. \end{aligned}$$

Согласно свойствам спектрального преобразования функций и линейных операторов имеем

$$\mathbb{S} \left[ \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, y) = \varphi_0(y)} \right] = P(m + 1, m + 1) \cdot \Phi(m + 1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(m, 0),$$

где

$$P(m + 1, m + 1) = \mathcal{P}(m + 1, m + 1) + (q(1, 0; t_0) \cdot q^T(1, 0; t_0)) \otimes E(m, m).$$

В этих соотношениях  $\mathcal{P}(m + 1, m + 1)$  — спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени [19], определенная относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ ;  $\Phi(m + 1, 0)$  — спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi(t, y)$  вектора состояния  $y$  (обобщенная характеристическая функция), опреде-

ленная относительно той же базисной системы;  $E(m, m)$  —  $2m$ -мерная единичная матрица;  $q(1, 0; t_0)$  — матрица-столбец значений функций базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$  при  $t = t_0$ :

$$q(1, 0; t_0) = [q(0, t_0) \quad q(1, t_0) \quad q(2, t_0) \quad \dots]^T.$$

Через  $\Phi_0(m, 0)$  обозначена спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi_0(y)$  начального состояния  $y_0$ , определенная относительно базисной системы  $\{p(i_1, \dots, i_m, y)\}_{i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ . Это означает, что  $\Phi_0(m, 0)$  —  $m$ -мерная бесконечная матрица с элементами

$$\begin{aligned} \varphi_{0 i_1 \dots i_m} &= (p(i_1, \dots, i_m, y), \varphi_0(y))_{L_2(\mathbb{R}^m)} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} p(i_1, \dots, i_m, y) \varphi_0(y) dy, \quad i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Далее,

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}\varphi(t, y)] = A(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0),$$

$$\mathbb{S}[\mathcal{L}\varphi(t, y)] = \Lambda(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0), \quad \mathbb{S}[\mathcal{H}\varphi(t, y)] = H(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0),$$

где  $A(m+1, m+1)$ ,  $\Lambda(m+1, m+1)$  и  $H(m+1, m+1)$  — спектральные характеристики линейных операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{H}$  соответственно.

Спектральная характеристика линейного оператора  $\mathcal{A}$  — это  $2(m+1)$ -мерная бесконечная матрица  $A(m+1, m+1)$ , элементы которой определяются соотношением

$$\begin{aligned} a_{i_0 i_1 \dots i_m j_0 j_1 \dots j_m} &= (e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y), \mathcal{A}e(j_0, j_1, \dots, j_m, t, y))_{L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)} = \\ &= \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^m} e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y) \mathcal{A}e(j_0, j_1, \dots, j_m, t, y) dt dy, \end{aligned} \quad (15)$$

$$i_0, i_1, \dots, i_m, j_0, j_1, \dots, j_m = 0, 1, 2, \dots$$

Спектральные характеристики  $\Lambda(m+1, m+1)$  и  $H(m+1, m+1)$  линейных операторов  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{H}$  определяются аналогично.

Одно из преимуществ спектральной формы математического описания систем управления состоит в развитом алгоритмическом обеспечении: явным и рекуррентным формулам для расчета спектральных характеристик линейных операторов, соответствующих элементарным звеньям систем управления, для различных базисных систем [18, 19, 22, 24, 26, 27, 30, 31]. Это операторы умножения, дифференцирования и интегрирования. Поэтому спектральную характеристику  $A(m+1, m+1)$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  целесообразно представлять следующим образом [19]:

$$\begin{aligned} A(m+1, m+1) &= - \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i(m+1, m+1) \cdot F_i(m+1, m+1) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \mathcal{P}_{ij}(m+1, m+1) \cdot G_{ij}(m+1, m+1), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\mathcal{P}_i(m+1, m+1)$  и  $\mathcal{P}_{ij}(m+1, m+1)$  — спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам  $y_i$  и  $y_j$ , а через  $F_i(m+1, m+1)$  и  $G_{ij}(m+1, m+1)$  обозначены спектральные характеристики операторов умножения на функции  $f_i(t, y)$  и  $g_{ij}(t, y)$  соответственно;  $i, j = 1, 2, \dots, m$ . Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} & P(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(m, 0) = \\ & = A(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0) - L(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0) + \\ & \quad + H(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0), \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$\begin{aligned} & (P(m+1, m+1) - A(m+1, m+1) + L(m+1, m+1) - \\ & - H(m+1, m+1)) \cdot \Phi(m+1, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(m, 0). \end{aligned}$$

Эти уравнения будем называть, как и в случае отсутствия пуассоновской составляющей, *уравнениями обобщенной характеристической функции* [17–19]. Они представляют собой матричную запись системы линейных неоднородных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются элементы  $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_m}$  матрицы  $\Phi(m+1, 0)$  — коэффициенты разложения плотности вероятности  $\varphi(t, y)$  в функциональный ряд по функциям базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ . Их решение записывается в форме

$$\begin{aligned} \Phi(m+1, 0) = & (P(m+1, m+1) - A(m+1, m+1) + \\ & + L(m+1, m+1) - H(m+1, m+1))^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(m, 0)). \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (16) это решение можно представить так:

$$\begin{aligned} \Phi(m+1, 0) = & \left( P(m+1, m+1) + \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i(m+1, m+1) \cdot F_i(m+1, m+1) - \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \mathcal{P}_{ij}(m+1, m+1) \cdot G_{ij}(m+1, m+1) + L(m+1, m+1) - \\ & \left. - H(m+1, m+1) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(m, 0)). \end{aligned}$$

Отметим, что более детальное представление для некоторых спектральных характеристик (используемое далее в примерах), входящих в уравнения обобщенной характеристической функции, изложено в [19].

После нахождения обобщенной характеристической функции  $\Phi(m+1, 0)$  плотность вероятности  $\varphi(t, y)$  вектора состояния может быть представлена в виде ряда

$$\varphi(t, y) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty \varphi_{i_0 i_1 \dots i_m} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y), \quad (t, y) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^m. \quad (19)$$

Представление решения задачи анализа стохастических систем с разрывами траекторий рядом (19) носит скорее теоретический характер. На практике получить всю совокупность коэффициентов разложения функции  $\varphi(t, y)$  в общем случае вряд ли возможно. Для этого требуется, чтобы многомерная матрица

$$P(m+1, m+1) - A(m+1, m+1) + L(m+1, m+1) - H(m+1, m+1)$$

или ее сечения и структура имели специальный вид [19], например, треугольный или ленточный. Поэтому далее будем говорить о приближенном решении задачи анализа, т.е.

о представлении решения в виде частичной суммы

$$\varphi(t, y) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \cdots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_m} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y), \quad (20)$$

где числа  $L_0, L_1, \dots, L_m$  — порядки усечения спектральных характеристик. Индексы в формулах (13)–(15) в этом случае принимают лишь конечное число значений:  $i_0, j_0 = 0, 1, \dots, L_0 - 1$ ;  $i_1, j_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1, \dots, i_m, j_m = 0, 1, \dots, L_m - 1$ ; все перечисленные спектральные характеристики будут конечными матрицами, а уравнение (17) — матричная запись системы конечного числа линейных алгебраических уравнений (число уравнений и число неизвестных:  $L = L_0 \cdot L_1 \cdots L_m$ ).

По найденной спектральной характеристике  $\Phi(m+1, 0)$  могут быть определены маргинальные плотности вероятности (при  $m \geq 2$ ) и моментные характеристики вектора состояния с использованием свойств спектральных характеристик линейных функционалов [19, 23], при этом для определения маргинальных плотностей вероятности спектральным методом достаточно, чтобы функции базисной системы  $\{p(i_1, \dots, i_m, y)\}_{i_1, \dots, i_m=0}^\infty$  порождались всевозможными произведениями функций базисных систем  $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty, \dots, \{p_m(i_m, y_m)\}_{i_m=0}^\infty$  пространства  $L_2(\mathbb{R})$ , т.е.

$$p(i_1, \dots, i_m, y) = p_1(i_1, y_1) \cdots p_m(i_m, y_m), \quad i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots$$

### Алгоритм приближенного решения задачи анализа

стохастических систем с разрывами траекторий спектральным методом

1) выбрать базисные системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$  и  $\{p(i_1, \dots, i_m, y)\}_{i_1, \dots, i_m=0}^\infty$  (или базисные системы  $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty, \dots, \{p_m(i_m, y_m)\}_{i_m=0}^\infty$ ), сформировать систему функций  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ . Выбрать порядки усечения спектральных характеристик  $L_0, L_1, \dots, L_m$ ;

2) вычислить спектральные характеристики операторов дифференцирования по времени и координатам вектора состояния:  $\mathcal{P}(m+1, m+1)$ ,  $\mathcal{P}_i(m+1, m+1)$ ,  $\mathcal{P}_{ij}(m+1, m+1)$ , спектральные характеристики операторов умножения:  $F_i(m+1, m+1)$ ,  $G_{ij}(m+1, m+1)$ ,  $\Lambda(m+1, m+1)$ , спектральную характеристику  $H(m+1, m+1)$  оператора  $\mathcal{H}$ , спектральную характеристику  $\Phi_0(m, 0)$  плотности вероятности начального состояния  $y_0$ ; сформировать матрицу-столбец  $q(1, 0; t_0)$ , матрицу  $P(m+1, m+1)$ ;

3) найти решение (18) уравнения обобщенной характеристической функции;

4) представить плотность вероятности  $\varphi(t, y)$  в виде (20).

В качестве базисных систем  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty, \{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty, \dots, \{p_m(i_m, y_m)\}_{i_m=0}^\infty$  могут применяться подходящие для конкретных задач системы ортонормированных функций: полиномиальные, тригонометрические, кусочно-постоянные и др. [18, 19, 22, 24–27, 30, 31].

### Численное испытание алгоритмов

Рассмотрим примеры стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей, результаты их численного анализа и приближенные решения соответствующих уравнений Колмогорова – Феллера.

**Пример 1.** Задача Коши для скалярного стохастического дифференциального уравнения в смысле Стратоновича

$$y(t) = y_0 - \int_0^t \alpha y(\tau) d\tau + \int_0^t \sigma y(\tau) \circ dw(\tau) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(\theta) \nu(d\theta \times d\tau), \quad (21)$$

в котором  $t \in [0, T]$ ;  $\alpha > 0$ ,  $\sigma$  — числовые параметры,  $c(\theta)$  — некоторая функция.

Задача Коши (21) решалась методом (11) при следующих условиях:  $T = 5$ ,  $\alpha = 0.55$ ,  $\sigma = \sqrt{0.1}$ ,  $c(\theta) = 0.5\theta$ ,  $y_0$  — имеет нормальное распределение с параметрами  $m_0 = 1$ ,  $\sigma_0 = \sqrt{0.5}$  и задается соответствующей плотностью  $\varphi_0(y)$ . В качестве множества скачков рассматривалось одноточечное множество  $\{1\}$ . В этом случае пуассоновская случайная мера вырождается в пуассоновский процесс. Параметр пуассоновского процесса  $\lambda$  задавался равным трем, т.е.  $\pi(\theta) = 3\delta(\theta - 1)$ .

Математическое ожидание  $m(t)$  и второй начальный момент  $\mu(t)$  процесса  $y(t)$  для рассматриваемой модели можно представить в форме:

$$m(t) = \left( \langle y_0 \rangle - \frac{\lambda\Delta}{a} \right) e^{-at} + \frac{\lambda\Delta}{a}, \quad \mu(t) = (\langle y_0^2 \rangle - A - B) e^{(\sigma^2 - 2a)t} + A e^{-at} + B,$$

где

$$a = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}, \quad A = \frac{2\lambda\Delta}{a - \sigma^2} \left( \langle y_0 \rangle - \frac{\lambda\Delta}{a} \right), \quad B = \frac{\lambda\Delta^2}{2a - \sigma^2} \left( \frac{2\lambda}{a} + 1 \right), \quad \Delta = c(1) = 0.5,$$

а  $\langle y_0 \rangle$  и  $\langle y_0^2 \rangle$  — начальные моменты соответственно первого и второго порядка начального состояния. Эти соотношения, очевидно, справедливы при  $a \neq 0$ ,  $a \neq \sigma^2$ ,  $2a \neq \sigma^2$ .

При численном решении моделировалось  $N = 10^6$  траекторий. Сетка по времени представляет собой суперпозицию равномерной сетки с шагом  $h = 0.01$  и моментов скачков. Для оценивания плотности вероятности строилась гистограмма, результаты расчетов приведены рис. 1.

Далее приведем уравнение Колмогорова – Феллера, соответствующее уравнению (21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = & \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} [y\varphi(t, y)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [y^2\varphi(t, y)] - \lambda\varphi(t, y) + \\ & + \lambda \int_{\mathbb{R}} \psi(t, y - z)\varphi(t, z) dz, \quad \varphi(0, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(y-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}, \end{aligned}$$

где  $\psi(t, \Delta) = \delta(\Delta - 0.5)$  — дельта-функция, так как приращение состояния  $y$  в моменты скачков постоянно и равно  $c(1) = 0.5$ . Следовательно, уравнение, описывающее эволюцию плотности вероятности  $\varphi(t, y)$ , для этого примера имеет вид

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} [y\varphi(t, y)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [y^2\varphi(t, y)] - \lambda\varphi(t, y) + \lambda\varphi(t, y - 0.5),$$

т.е. является уравнением в частных производных с отклоняющимся аргументом (здесь оператор  $\mathcal{H}$  — оператор сдвига).

Выберем в качестве базисной системы  $\{e_{i_0, i_1}(t, y)\}_{i_0, i_1=0}^{\infty}$  пространства  $L_2([0, T] \times \mathbb{R})$  систему функций  $\{q(i_0, t)p(i_1, y)\}_{i_0, i_1=0}^{\infty}$ , где  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  и  $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$  — базисы пространств  $L_2([0, T])$  и  $L_2(\mathbb{R})$  соответственно, и запишем уравнение обобщенной характеристической функции:

$$(P(2, 2) - A(2, 2) + L(2, 2) - H(2, 2)) \cdot \Phi(2, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(1, 0),$$

в котором спектральная характеристика  $A(2, 2)$  представляется следующим образом:

$$A(2, 2) = \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot Y(2, 2) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \mathcal{P}_{11}(2, 2) \cdot Y^2(2, 2).$$

Соотношения для вычисления спектральной характеристики  $P(2, 2)$  оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент и спектральных характеристик  $\mathcal{P}_1(2, 2)$  и  $\mathcal{P}_{11}(2, 2)$  операторов дифференцирования первого и второго порядков по переменной  $y$ :

$$P(2, 2) = (\mathcal{P}_t(1, 1) + q(1, 0; 0) \cdot q^T(1, 0; 0)) \otimes E(1, 1),$$

$$\mathcal{P}_1(2, 2) = E(1, 1) \otimes \mathcal{P}(1, 1), \quad \mathcal{P}_{11}(2, 2) = E(1, 1) \otimes \mathcal{P}^2(1, 1).$$

Здесь  $\mathcal{P}_t(1, 1)$  — спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ ;  $q(1, 0; 0)$  — матрица-столбец значений функций базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  при  $t = 0$ :

$$q(1, 0; 0) = [q(0, 0) \quad q(1, 0) \quad q(2, 0) \quad \dots]^T;$$

$\mathcal{P}(1, 1)$  — спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы  $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ ;  $E(1, 1)$  — двумерная единичная матрица.

Если обозначить через  $Y(1, 1)$  спектральную характеристику оператора умножения на переменную  $y$ , определенную относительно базисной системы  $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ , то спектральные характеристики  $Y(2, 2)$  и  $Y^2(2, 2)$  операторов умножения на величины  $y$  и  $y^2$  (операторов, рассматриваемых уже на пространстве функций времени и переменной  $y$ ) представляются в виде

$$Y(2, 2) = E(1, 1) \otimes Y(1, 1), \quad Y^2(2, 2) = E(1, 1) \otimes Y^2(1, 1).$$

Спектральные характеристики  $F(2, 2)$  и  $G(2, 2)$  операторов умножения на функции  $f(t, y)$  и  $g(t, y)$  соответственно (см. алгоритм приближенного решения задачи анализа стохастических систем с разрывами траекторий спектральным методом) определяются следующим образом:

$$F(2, 2) = -\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot Y(2, 2) \quad \left(f(t, y) = -\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)y\right),$$

$$G(2, 2) = \sigma^2 \cdot Y^2(2, 2) \quad (g(t, y) = \sigma^2 y^2).$$

Спектральная характеристика  $L(2, 2)$  оператора умножения на константу  $\lambda$  записывается в виде произведения

$$L(2, 2) = \lambda \cdot E(2, 2) = \lambda \cdot (E(1, 1) \otimes E(1, 1)),$$

где  $E(2, 2)$  — четырехмерная единичная матрица, а для спектральной характеристики  $H(2, 2)$  справедливо соотношение

$$H(2, 2) = \lambda \cdot (E(1, 1) \otimes H(1, 1)),$$

в котором  $H(1, 1)$  — спектральная характеристика оператора сдвига, задаваемого формулой

$$\mathcal{H}\varphi(y) = \varphi(y - 0.5)$$

и рассматриваемого как оператора на множестве функций одной переменной  $y$  (такой оператор соответствует звену чистого запаздывания [30]). Спектральная характеристика  $H(1, 1)$  определяется относительно системы функций  $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ .

Спектральная характеристика  $\Phi_0(1, 0)$  вычисляется по определению (14).

Получим решение уравнения обобщенной характеристической функции, выражая спектральную характеристику  $\Phi(2, 0)$ :

$$\Phi(2, 0) = (P(2, 2) - A(2, 2) + \Lambda(2, 2) - H(2, 2))^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)),$$

тогда плотность вероятности  $\varphi(t, y)$  определяется по формуле обращения

$$\varphi(t, y) = \mathbb{S}^{-1}[\Phi(2, 0)] = \sum_{i_0, i_1=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1} \cdot e(i_0, i_1, t, y), \quad (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R},$$

где  $\varphi_{i_0 i_1}$  — элементы обобщенной характеристической функции  $\Phi(2, 0)$ .

Используя спектральную форму математического описания можно записать выражения для спектральных характеристик математического ожидания и второго начального момента процесса  $y(t)$ :

$$M_1(1, 0) = (E(1, 1) \otimes Y_1(0, 1)), \quad M_2(1, 0) = (E(1, 1) \otimes Y_2(0, 1)),$$

в которых  $Y_1(0, 1)$  и  $Y_2(0, 1)$  — спектральные характеристики линейных функционалов [19, 23], ставящих в соответствие плотности вероятности  $\varphi(y)$  соответственно первый и второй начальные моменты. Спектральные характеристики  $Y_1(0, 1)$  и  $Y_2(0, 1)$  равны транспонированным спектральным характеристикам функций  $h_1(y) = y$  и  $h_2(y) = y^2$  (перечисленные спектральные характеристики определены относительно системы функций  $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ ). Тогда тогда плотность вероятности  $\varphi(t, y)$  определяется по формуле обращения

$$m(t) = \mathbb{S}^{-1}[M_1(1, 0)] = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i_0} \cdot q(i_0, t), \quad \mu(t) = \mathbb{S}^{-1}[M_2(1, 0)] = \sum_{i_0=0}^{\infty} \mu_{i_0} \cdot q(i_0, t), \quad t \in [0, T],$$

где  $m_{i_0}$  и  $\mu_{i_0}$  — элементы спектральных характеристик  $M_1(1, 0)$  и  $M_2(1, 0)$  соответственно.

При решении спектральным методом в качестве базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  были выбраны полиномы Лежандра [18, 19, 27, 30, 31], а в качестве базисной системы  $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$  — функции Эрмита с параметрами  $m = 2$  и  $D = 1$  [22], порядки усечения  $L_0 = L_1 = 48$ . Результаты вычислений приведены на рис. 1. Оценки математического ожидания  $m(t)$ , второго начального момента  $\mu(t)$  и дисперсии  $D(t)$  приведены на рис. 2.

Дополнительно были проведены расчеты методом статистического моделирования при другом объеме выборки  $N$  и шаге интегрирования  $h$ , а также спектральным методом при других порядках усечения  $L_0$  и  $L_1$ . Точность оценивалась посредством сравнения моментов. Использовались два варианта для сравнения аналитического решения  $\gamma_{\text{т}}(t)$  и соответствующего приближенного решения  $\gamma_{\text{п}}(t)$ :

$$J_1(\gamma) = \max_{t_0 \leq t \leq T} |\gamma_{\text{т}}(t) - \gamma_{\text{п}}(t)| \quad \text{и} \quad J_2(\gamma) = \left\{ \int_{t_0}^T |\gamma_{\text{т}}(t) - \gamma_{\text{п}}(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где в качестве функции  $\gamma(t)$  выступают функции  $m(t)$ ,  $\mu(t)$  или  $D(t)$ .

Наряду с оценкой точности нахождения вероятностных характеристик будем приводить время, затрачиваемое на решение задачи (для расчетов использовался ПК с процессором Intel Core 2 Quad Q9300 2.5ГГц). Погрешности вычисления математического ожидания  $m(t)$ , второго начального момента  $\mu(t)$  и дисперсии  $D(t)$  приведены в табл. 1 и 2 (через дробь даны значения для критериев  $J_1$  и  $J_2$  соответственно,  $t_{\text{сч}}$  — время счета). Формулы для математического ожидания и второго начального момента даны выше, а для расчета дисперсии применяется соотношение  $D(t) = \mu(t) - m^2(t)$ .

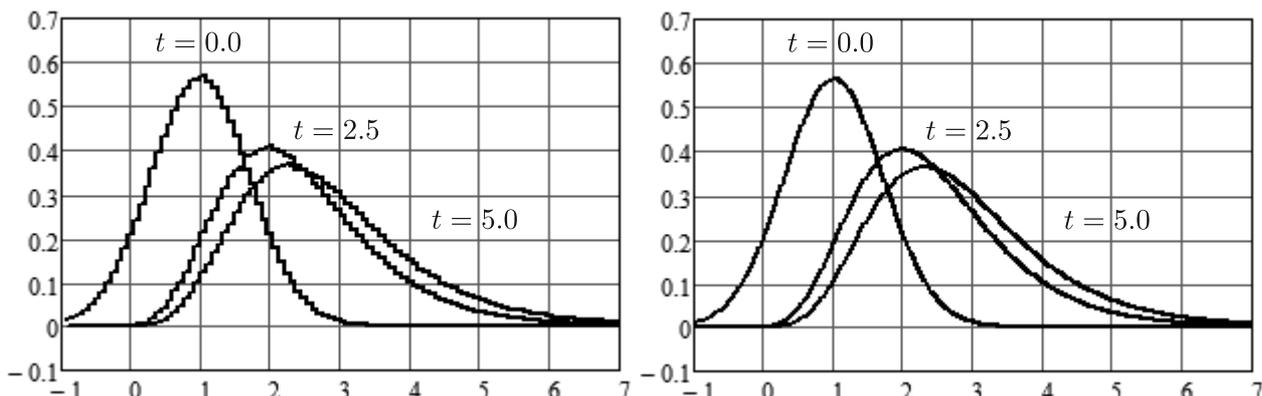


Рис. 1. Гистограмма плотности вероятности (слева) и график приближенного решения уравнения Колмогорова – Феллера (справа) в различные моменты времени.

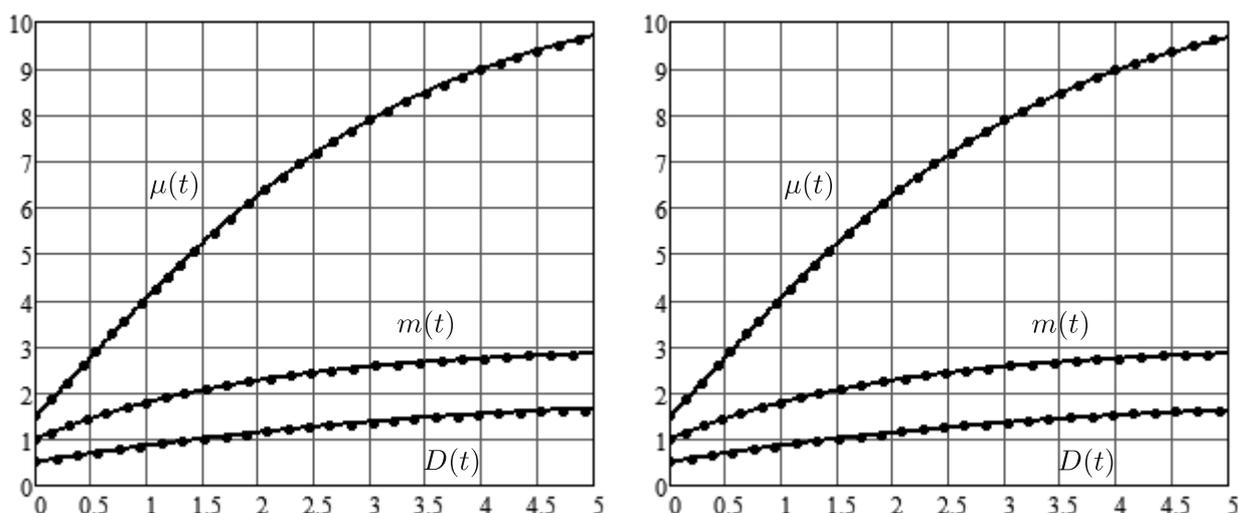


Рис. 2. Оценки математического ожидания  $m(t)$ , второго начального момента  $\mu(t)$  и дисперсии  $D(t)$  (слева – метод статистического моделирования, справа – спектральный метод). Точки соответствуют точному решению.

Таблица 1. Погрешность метода статистического моделирования при различных объеме выборки и шаге интегрирования.

| $N$    | $h$  | $J_1(m)/J_2(m)$   | $J_1(\mu)/J_2(\mu)$ | $J_1(D)/J_2(D)$   | $t_{сч}, с$ |
|--------|------|-------------------|---------------------|-------------------|-------------|
| $10^4$ | 0.1  | 0.018819/0.019722 | 0.412820/0.505480   | 0.365475/0.516070 | 0.16        |
| $10^6$ | 0.1  | 0.004732/0.007956 | 0.407391/0.589708   | 0.387952/0.552071 | 15.65       |
| $10^4$ | 0.01 | 0.020910/0.023802 | 0.152162/0.130896   | 0.055749/0.039682 | 1.05        |
| $10^6$ | 0.01 | 0.001968/0.001954 | 0.040719/0.053666   | 0.039505/0.049160 | 103.64      |

Таблица 2. Погрешность спектрального метода при различных усечениях спектральных характеристик.

| $L_0$ | $L_1$ | $J_1(m)/J_2(m)$   | $J_1(\mu)/J_2(\mu)$ | $J_1(D)/J_2(D)$   | $t_{сч}, с$ |
|-------|-------|-------------------|---------------------|-------------------|-------------|
| 12    | 12    | 0.042893/0.082562 | 0.952887/1.211549   | 0.843862/1.138380 | 1           |
| 24    | 24    | 0.008058/0.011288 | 0.090218/0.141757   | 0.097300/0.123920 | 3           |
| 48    | 48    | 0.000851/0.001426 | 0.013703/0.018030   | 0.012615/0.016982 | 270         |

Далее приведем результаты вычислений (для плотностей вероятности и моментов, погрешности; см. рис. 3 и 4, табл. 3 и 4) при изменении постановки исходной задачи. А именно при задании интенсивности скачков как функции времени:  $\lambda(t) = \lambda e^{\gamma t}$  при  $\lambda = 3$  и  $\gamma = -0.1$ . Математическое ожидание и второй начальный момент в случае переменной интенсивности вычисляются следующим образом:

$$m(t) = \left( \langle y_0 \rangle - \frac{\lambda \Delta}{a + \gamma} \right) e^{-at} + \frac{\lambda \Delta}{a + \gamma} e^{\gamma t},$$

$$\mu(t) = (\langle y_0^2 \rangle - A - B - C) e^{(\sigma^2 - 2a)t} + A e^{(\gamma - a)t} + B e^{2\gamma t} + C e^{\gamma t},$$

где

$$A = \frac{2\lambda\Delta}{a - \sigma^2 + \gamma} \left( \langle y_0 \rangle - \frac{\lambda\Delta}{a + \gamma} \right), \quad B = \frac{2\lambda^2\Delta^2}{(2a - \sigma^2 + 2\gamma)(a + \gamma)}, \quad C = \frac{\lambda\Delta^2}{2a - \sigma^2 + \gamma},$$

при  $a + \gamma \neq 0$ ,  $a + \gamma \neq \sigma^2$ ,  $2(a + \gamma) \neq \sigma^2$ ,  $2a + \gamma \neq \sigma^2$ .

В последнем случае, т.е. при зависимости интенсивности скачков от времени в уравнение обобщенной характеристической функции необходимо внести следующие изменения:

$$L(2, 2) = \lambda \cdot (\Lambda(1, 1) \otimes E(1, 1)), \quad H(2, 2) = \lambda \cdot (\Lambda(1, 1) \otimes H(1, 1)),$$

где  $\Lambda(1, 1)$  — спектральная характеристика оператора умножения на показательную функцию  $e^{\gamma t}$ , определенная относительно базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ .

Пример 2. Для стационарного решения задачи Коши

$$y(t) = y_0 + \int_0^t g d\tau - \int_0^t \int_0^1 \theta y(\tau) \nu(d\theta \times d\tau), \quad y_0 > 0, \quad (22)$$

где мера  $\nu$  характеризуется мерой  $\Pi(B) = \int_B \kappa(1 - \theta)^{\kappa-1} d\theta$ ,  $\Theta = [0, 1]$ ,  $\kappa > 0$  и  $g > 0$  — числовые параметры, можно показать [34], что распределение является гамма-распределением с параметрами  $g$  и  $\kappa$ , а плотность распределения имеет вид

$$\varphi(y) = \frac{y^\kappa e^{-y/g}}{g^{\kappa+1} \Gamma(\kappa + 1)}, \quad y > 0, \quad \Gamma(\kappa) — \text{гамма-функция.}$$

Кроме того, заметим, что в этой задаче

$$\pi(\theta) = \kappa(1 - \theta)^{\kappa-1}, \quad \lambda = \Pi([0, 1]) = \int_0^1 \kappa(1 - \theta)^{\kappa-1} d\theta = 1, \quad c(y, \theta) = \theta y.$$

При численном решении (22) параметры принимали следующие значения:  $g = 1$ ,  $\kappa = 3$ . Численное решение в узле сетки  $t_{n+1}$ ,  $n = 0, 1, \dots, n_T$ , определялось по формуле  $y_{n+1} = y_{n+1}^-$ , если  $t_{n+1}$  не является моментом скачка, и  $y_{n+1} = y_{n+1}^-(1 - \theta_{n+1})$ , если  $t_{n+1}$  является моментом скачка, где  $y_{n+1}^- = y_n + g(t_{n+1} - t_n)$ .

Моделирование значений случайной величины с плотностью  $3(1 - x)^2$ ,  $x \in [0, 1]$ , осуществлялось по формуле  $\theta_k = 1 - \sqrt[3]{\alpha_k}$ , где  $\alpha_k$  — равномерная случайная величина на отрезке  $[0, 1]$ . На рис. 5 приведена гистограмма численного решения в точке  $t = T = 100$  при объеме выборки  $N = 10^4$ .

Уравнение Колмогорова–Феллера с учетом равенства  $\lambda = 1$  записывается в виде

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = -g \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} - \varphi(t, y) + \int_{\mathbb{R}} \psi(t, y | z) \varphi(t, z) dz,$$

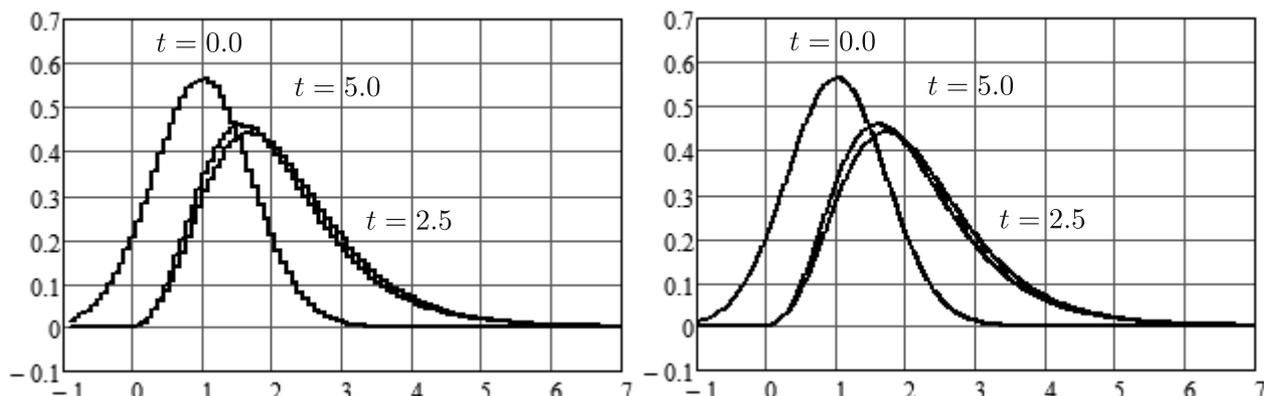


Рис. 3. Гистограмма плотности вероятности (слева) и график приближенного решения уравнения Колмогорова – Феллера (справа) в различные моменты времени.

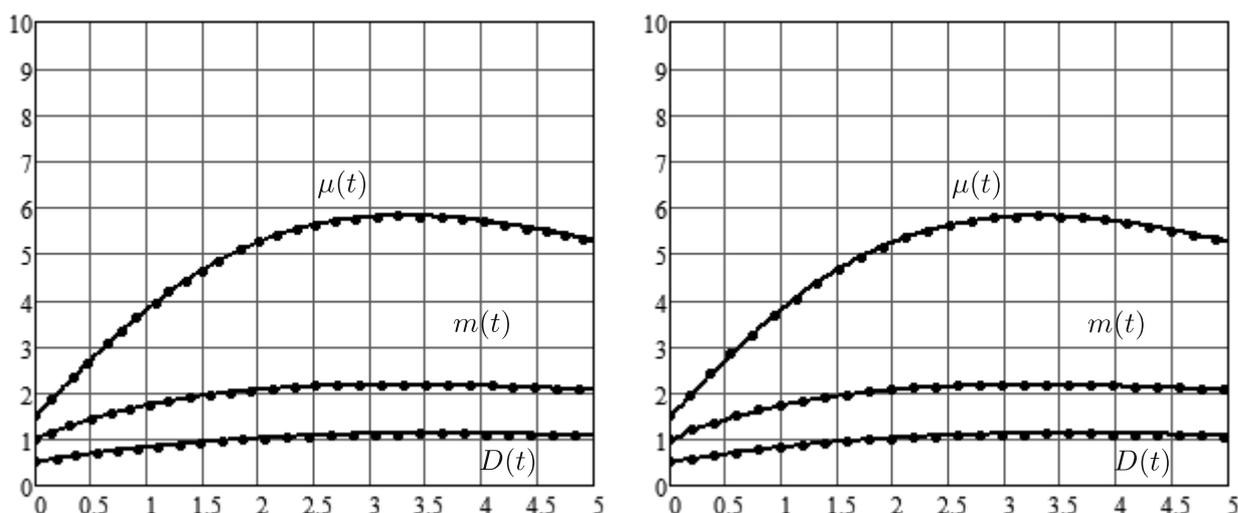


Рис. 4. Оценки математического ожидания  $m(t)$ , второго начального момента  $\mu(t)$  и дисперсии  $D(t)$  (слева – метод статистического моделирования, справа – спектральный метод). Точки соответствуют точному решению.

Таблица 3. Погрешность метода статистического моделирования при различных объеме выборки и шаге интегрирования.

| $N$    | $h$  | $J_1(m)/J_2(m)$   | $J_1(\mu)/J_2(\mu)$ | $J_1(D)/J_2(D)$   | $t_{сч}, с$ |
|--------|------|-------------------|---------------------|-------------------|-------------|
| $10^4$ | 0.1  | 0.016084/0.013797 | 0.343884/0.380714   | 0.287200/0.385546 | 0.16        |
| $10^6$ | 0.1  | 0.004944/0.006748 | 0.218217/0.370741   | 0.197471/0.343217 | 16.52       |
| $10^4$ | 0.01 | 0.028534/0.026052 | 0.142953/0.130209   | 0.046475/0.043864 | 1.03        |
| $10^6$ | 0.01 | 0.002182/0.001690 | 0.031752/0.036940   | 0.022988/0.034054 | 109.70      |

Таблица 4. Погрешность спектрального метода при различных усечениях спектральных характеристик.

| $L_0$ | $L_1$ | $J_1(m)/J_2(m)$   | $J_1(\mu)/J_2(\mu)$ | $J_1(D)/J_2(D)$   | $t_{сч}, с$ |
|-------|-------|-------------------|---------------------|-------------------|-------------|
| 12    | 12    | 0.111634/0.148441 | 1.039253/1.877866   | 0.900067/1.359485 | 1           |
| 24    | 24    | 0.013271/0.020531 | 0.100985/0.164824   | 0.109795/0.130905 | 3           |
| 48    | 48    | 0.002251/0.002716 | 0.016220/0.026567   | 0.024692/0.036132 | 270         |

где плотность вероятности  $\psi(t, y | z)$  описывает распределение случайной величины  $y(t) = y(t^-)(1 - \theta)$  при условии  $y(t^-) = z$ , а  $\theta$  задается плотностью

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \kappa(1-x)^{\kappa-1}, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \notin [0, 1), \end{cases}$$

т.е.

$$\psi(t, y | z) = \begin{cases} \frac{\kappa}{z} \left(1 + \frac{y-z}{z}\right)^{\kappa-1}, & y \in (0, z], \\ 0, & y \notin (0, z], \end{cases}$$

и

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = -g \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} - \varphi(t, y) + \int_y^{+\infty} \frac{\kappa}{z} \left(1 + \frac{y-z}{z}\right)^{\kappa-1} \varphi(t, z) dz, \quad (23)$$

или для стационарного случая ( $\varphi(t, y) = \varphi(y)$ )

$$-g \frac{d\varphi(y)}{dy} - \varphi(y) + \int_y^{+\infty} \frac{\kappa}{z} \left(1 + \frac{y-z}{z}\right)^{\kappa-1} \varphi(z) dz = 0, \quad y > 0. \quad (24)$$

Запишем спектральный аналог уравнения (23) — уравнение обобщенной характеристической функции:

$$(P(2, 2) - A(2, 2) + L(2, 2) - H(2, 2)) \cdot \Phi(2, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(1, 0),$$

где

$$\begin{aligned} A(2, 2) &= -g \cdot \mathcal{P}_1(2, 2) \quad (F(2, 2) = g \cdot E(2, 2)), \\ L(2, 2) &= E(2, 2), \quad H(2, 2) = E(1, 1) \otimes H(1, 1). \end{aligned}$$

Здесь  $H(1, 1)$  — спектральная характеристика линейного оператора, для которого справедливо представление

$$\mathcal{H}\varphi(y) = \int_y^{+\infty} \frac{\kappa}{z} \left(1 + \frac{y-z}{z}\right)^{\kappa-1} \varphi(z) dz,$$

а  $\Phi_0(1, 0)$  — спектральная характеристика плотности вероятности начального состояния  $y_0$ . Они определяются относительно базисной системы  $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$  пространства  $L_2([0, +\infty))$ , система функций  $\{e(i_0, i_1, t, y)\}_{i_0, i_1=0}^{\infty}$  — базис пространства  $L_2([0, +\infty) \times [0, +\infty))$ . Остальные обозначения такие же, как и в примере 1.

Спектральный аналог уравнения (24) более простой:

$$-g \cdot \mathcal{P}(1, 1) \cdot \Phi(1, 0) - \Phi(1, 0) + H(1, 1) \cdot \Phi(1, 0) = \mathcal{O}(1, 0),$$

или

$$(-g \cdot \mathcal{P}(1, 1) - E(1, 1) + H(1, 1)) \cdot \Phi(1, 0) = \mathcal{O}(1, 0). \quad (25)$$

Здесь  $\mathcal{O}(1, 0)$  — нулевая матрица-столбец,  $\Phi(1, 0)$  — спектральная характеристика стационарной плотности вероятности состояния  $y$ , определенная относительно базисной системы  $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ , т.е.

$$\varphi(y) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \varphi_{i_1} \cdot p(i_1, y), \quad y > 0,$$

где  $\varphi_{i_1}$  — элементы спектральной характеристики  $\Phi(1, 0)$ .

Нетрудно видеть, что уравнение (24) имеет бесконечное множество решений, поскольку если решением является некоторая функция  $\varphi(y)$ , то и функция  $C\varphi(y)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , также будет обращать это уравнение в тождество. Аналогичная ситуация справедлива и для уравнения (25), поэтому для его решения требуется использовать дополнительное условие — спектральный аналог соотношения

$$\int_0^{+\infty} \varphi(y) dy = 1.$$

С учетом свойств спектральных характеристик линейных функционалов [19, 23] имеем

$$J(0, 1) \cdot \Phi(1, 0) = 1, \tag{26}$$

где  $J(0, 1)$  — спектральная характеристика линейного функционала  $\mathcal{J}$ , ставящего в соответствие функции  $\varphi(y)$  интеграл от этой функции по множеству  $[0, +\infty)$  (в предположении, что базисные системы для вычисления  $J(0, 1)$  и  $\Phi(1, 0)$  одинаковы). Спектральная характеристика  $J(0, 1)$  равна транспонированной спектральной характеристике функции  $h(y) \equiv 1$ .

От решения уравнения (25) целесообразно перейти к задаче условной оптимизации:

$$\begin{cases} \|(-g \cdot \mathcal{P}(1, 1) - E(1, 1) + H(1, 1)) \cdot \Phi(1, 0)\| \rightarrow \min_{\Phi(1, 0)}, \\ J(0, 1) \cdot \Phi(1, 0) = 1, \end{cases}$$

или безусловной оптимизации:

$$\|(-g \cdot \mathcal{P}(1, 1) - E(1, 1) + H(1, 1)) \cdot \Phi(1, 0)\| + \gamma(J(0, 1) \cdot \Phi(1, 0) - 1)^2 \rightarrow \min_{\Phi(1, 0)},$$

где  $\|\cdot\|$  — норма в пространстве матриц-столбцов [19],  $\gamma > 0$  — весовой коэффициент,  $\gamma(J(0, 1) \cdot \Phi(1, 0) - 1)^2$  — штраф за невыполнение ограничения (26).

При решении спектральным методом в качестве базисной системы  $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$  были выбраны функции Лагерра [24], порядки усечения  $L_1 = 8$ ,  $L_1 = 12$  и  $L_1 = 16$ . Решалась задача безусловной оптимизации методом конфигураций при  $\gamma = 1$  (параметры метода конфигураций по обозначениям [18]: ускоряющий множитель —  $\lambda = 1.5$ , коэффициенты уменьшения и увеличения шага —  $\alpha = 1.3$  и  $\beta = 1.1$ ), параметр остановки —  $\varepsilon = 10^{-11}$ . Для  $L_1 = 8$  было сделано 1070 итераций, для  $L_1 = 12$  — 1124 итераций, а для  $L_1 = 16$  — 2979 итераций (начальное приближение — нулевое). Результаты вычислений приведены на рис. 5, результаты для  $L_1 = 16$  на графике совпали с точным решением.

Далее в табл. 5 и 6 приведены погрешности с использованием двух оценок для сравнения аналитического решения  $\varphi_{\text{т}}(y)$  и соответствующего приближенного решения  $\varphi_{\text{п}}(y)$ :

$$J_1 = \max_{0 \leq y \leq 10} |\varphi_{\text{т}}(y) - \varphi_{\text{п}}(y)| \quad \text{и} \quad J_2 = \left\{ \int_0^{10} |\varphi_{\text{т}}(y) - \varphi_{\text{п}}(y)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Эти значения даны через дробь, указано время счета  $t_{\text{сч}}$ . Для численного решения, приведенного на рис. 5 ( $t = T = 100$ ,  $N = 10^4$ , шаг интегрирования  $h = 0.1$ ), погрешность составила 0.007713/0.007181.

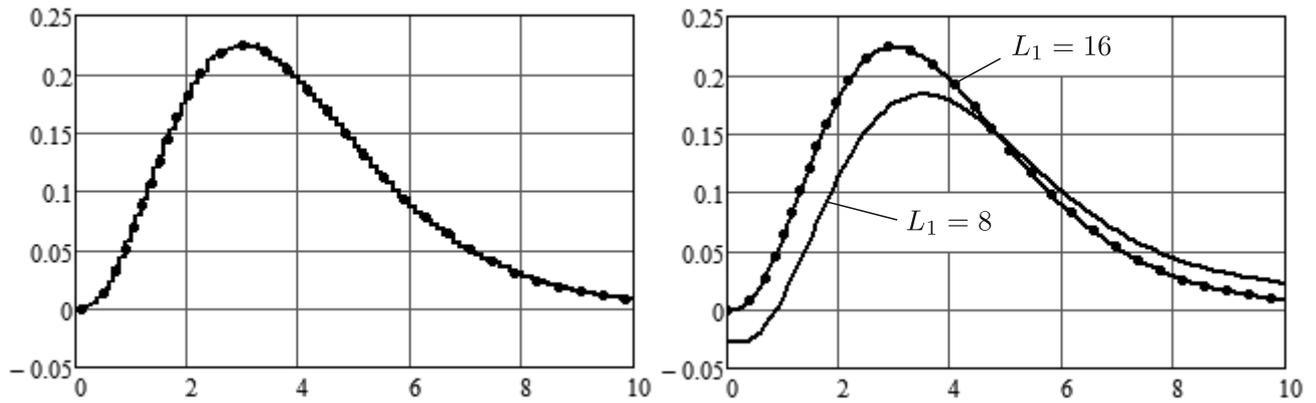


Рис. 5. Гистограмма плотности вероятности при  $t = 100$  (слева) и приближенные решения стационарного уравнения Колмогорова – Феллера (справа). График стационарной плотности вероятности показан точками.

Таблица 5. Погрешность метода статистического моделирования при различных объеме выборки  $N$  и шаге интегрирования  $h$  в момент времени  $t = 1$ .

| $N$    | $h$ | $h_g$ | $J_1/J_2$         | $t_{сч}, c$ |
|--------|-----|-------|-------------------|-------------|
| $10^4$ | 0.1 | 0.10  | 0.032340/0.022865 | 0.01        |
| $10^6$ | 0.1 | 0.10  | 0.008423/0.007631 | 1.07        |
| $10^6$ | 0.1 | 0.05  | 0.007253/0.005716 | 1.49        |

### Исследование воздействия импульсов на электрические цепи

Рассмотрим задачу определения вероятностных характеристик напряжения на конденсаторе в  $RC$ -цепи (интегрирующей цепи, см. рис. 6). Уравнение, описывающее изменение напряжения на конденсаторе, задается в виде [33]

$$du(t) = -\frac{1}{RC}u(t)dt + \Sigma dw(t) + dQ(t), \quad u(0) = u_0, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{p(t)} \Delta_k,$$

где  $R$  — сопротивление,  $C$  — емкость конденсатора,  $\Sigma$  — параметр, характеризующий интенсивность помехи,  $u_0$  — начальное напряжение,  $\Delta_k$  — амплитуды скачков напряжения (интенсивность импульсов —  $\lambda$ );  $t \in [0, T]$ ,  $T = RC$  — время окончания процесса.

Для дальнейших расчетов положим  $R = 8 \cdot 10^3$  Ом (8 кОм),  $C = 2.5 \cdot 10^{-4}$  ф (250 мкф),  $\Sigma = 0.14$ ,  $\lambda = 0.1$ , начальное напряжение  $u_0$  имеет нормальное распределение с параметрами  $m_{u_0} = 1.5$  В,  $\sigma_{u_0} = 0.2$  В (дисперсия  $D_{u_0} = 0.04$ ), случайные величины  $\Delta_k$  имеют логарифмически нормальное распределение с параметрами  $m_{\Delta} = 0.2$  и  $\sigma_{\Delta} = 0.15$  — математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением для  $\ln \Delta_k$ .

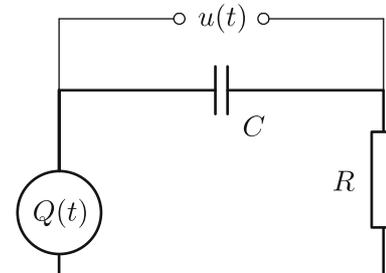


Рис. 6.  $RC$ -цепь с генератором импульсов.

Таблица 6. Погрешность спектрального метода при различном усечении спектральных характеристик  $L_1$ ,  $M$  — число итераций метода конфигураций.

| $L_1$ | $M$  | $J_1/J_2$         | $t_{\text{сч}}, \text{с}$ |
|-------|------|-------------------|---------------------------|
| 8     | 1070 | 0.067834/0.105628 | 1                         |
| 12    | 1124 | 0.004580/0.007177 | 2                         |
| 16    | 2979 | 0.000390/0.000590 | 8                         |

Выполним для удобства линейную замену переменных:  $y = 5u$ . Тогда

$$dy(t) = -\frac{1}{RC}y(t)dt + \sigma dw(t) + dq(t), \quad y(0) = y_0, \quad q(t) = \sum_{k=1}^{p(t)} \delta_k,$$

где  $\sigma = 0.7$ . Случайная величина  $y_0 = 5u_0$  имеет нормальное распределение с параметрами  $m_{y_0} = 7.5$ ,  $D_{y_0} = \sigma_{y_0} = 1$ , а  $\delta_k$  — логарифмически нормальное распределение с параметрами  $m_\delta = 0.2 + \ln 5$  и  $\sigma_\delta = 0.15$ .

Запишем уравнение Колмогорова – Феллера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} &= \frac{1}{RC} \frac{\partial}{\partial y} [y\varphi(t, y)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(t, y)}{\partial y^2} - \lambda \varphi(t, y) + \\ &+ \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta} \int_{-\infty}^y \frac{1}{y-z} e^{-\frac{(\ln(y-z)-m_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}} \varphi(t, z) dz, \quad \varphi(0, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_0}} e^{-\frac{(y-m_{y_0})^2}{2\sigma_{y_0}^2}}, \end{aligned}$$

и соответствующее ему уравнение обобщенной характеристической функции:

$$(P(2, 2) - A(2, 2) + L(2, 2) - H(2, 2)) \cdot \Phi(2, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(1, 0),$$

где

$$\begin{aligned} A(2, 2) &= \frac{1}{RC} \cdot \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot Y(2, 2) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \mathcal{P}_{11}(2, 2) \\ &\left( F(2, 2) = -\frac{1}{RC} \cdot Y(2, 2), \quad G(2, 2) = \sigma^2 \cdot E(2, 2) \right), \\ L(2, 2) &= \lambda \cdot E(2, 2), \quad H(2, 2) = \lambda \cdot (E(1, 1) \otimes H(1, 1)). \end{aligned}$$

В последнем равенстве  $H(1, 1)$  — спектральная характеристика линейного оператора, определяемого формулой

$$\mathcal{H}\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta} \int_{-\infty}^y \frac{1}{y-z} e^{-\frac{(\ln(y-z)-m_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}} \varphi(z) dz,$$

а  $\Phi_0(1, 0)$  — спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi(0, y)$  начального состояния  $y_0$ . Другие обозначения совпадают с приведенными в примере 1.

Решение уравнения обобщенной характеристической функции:

$$\Phi(2, 0) = (P(2, 2) - A(2, 2) + L(2, 2) - H(2, 2))^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)),$$

а плотность вероятности  $\varphi(t, y)$  представляется в виде такого же функционального ряда, как и в примере 1. Аналогично примеру 1 вычисляются математическое ожидание и второй начальный момент.

При решении задачи методом статистических испытаний нормальная случайная величина  $u_0$  моделировалась по формуле  $X_0 = \sigma_{u_0}\xi + m_{u_0}$ , где  $\xi$  — стандартная нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; моделирование времени между скачками осуществлялось по формуле  $\tau_k = -\ln \alpha_k/\lambda$ , где  $\alpha_k$  — независимые равномерные случайные величины на  $(0, 1)$ ; моделирование величин скачков осуществлялось по формуле  $\Delta_k = e^{\sigma\Delta\alpha + m\Delta}$ , где  $\alpha$  — стандартная нормальная случайная величина; на интервалах между скачками решение моделировалось по методу (11). Моделировалось  $N = 10^6$  траекторий. Сетка по времени — суперпозиция равномерной сетки с шагом  $h = 0.1$  и моментов скачков. Для оценивания плотности вероятности строилась гистограмма.

При решении спектральным методом в качестве базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$  были выбраны полиномы Лежандра [18, 19], а в качестве базисной системы  $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^\infty$  — функции Эрмита [22] с параметрами  $m = 7$  и  $D = 1$ , порядки усечения  $L_0 = 16$  и  $L_1 = 16$  соответственно. Результаты вычислений приведены на рис. 7.

Результаты вычислений для плотности вероятности и первых двух моментов напряжения двумя методами приведены на рис. 8–10. Пунктиром изображены соответствующие характеристики без учета скачков напряжения ( $\lambda = 0$ ) для сравнения. Рисунки слева соответствуют результатам, которые получены методом статистических испытаний, а справа — спектральным методом.

Далее рассмотрим задачу определения вероятностных характеристик силы тока в  $RCL$ -цепи (колебательном контуре, см. рис. 11). Следуя [33], будем использовать математическую модель

$$LC \frac{d^2 i(\theta)}{d\theta^2} + RC \frac{di(\theta)}{d\theta} + i(\theta) = \frac{dq(\theta)}{d\theta}, \quad i(0) = i_0, \quad \frac{di(0)}{d\theta} = i'_0, \quad q(\theta) = \sum_{k=1}^{p(\theta)} \Delta_k,$$

где  $R$  — сопротивление,  $C$  — емкость конденсатора,  $L$  — индуктивность,  $i_0$  и  $i'_0$  — начальные данные,  $\delta_k$  — амплитуды скачков (интенсивность импульсов —  $\lambda$ );  $\theta \in [0, T]$ ,  $T = 0.0001$  с — время окончания процесса.

Зададим числовые значения для параметров контура, начальных данных и параметров источника импульсов:  $R = 80$  Ом,  $C = 1.2 \cdot 10^{-6}$  ф (1.2 мкф),  $L = 1.5 \cdot 10^{-2}$  Гн (15 мГн),  $\lambda = 15000$ . Начальная сила тока  $i_0$  случайна и имеет нормальное распределение с параметрами  $m_{i_0} = 0$  А и  $\sigma_{i_0} = 0.1$  А;  $i'_0$  имеет нормальное распределение с параметрами  $m_{i'_0} = 2.5 \cdot 10^3$  А/с,  $\sigma_{i'_0} = 10^3$  А/с. Случайные величины  $\Delta_k$  имеют нормальное распределение с параметрами  $m_\Delta = 9 \cdot 10^{-6}$  А·с,  $\sigma_\Delta = 1.8 \cdot 10^{-6}$  А·с (дисперсия  $D_\Delta = 3.24 \cdot 10^{-12}$ ).

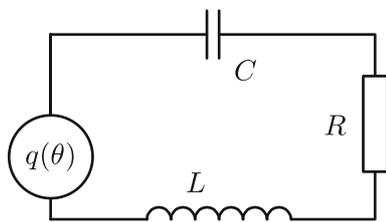


Рис. 11.  $RCL$ -цепь с генератором импульсов.

Для того чтобы коэффициенты в уравнении, описывающем изменение силы тока, были одного порядка, изменим масштаб времени:  $t = \gamma\theta$ ,  $\gamma = 10^4$ . Кроме того, введем новые обозначения [33]:

$$a = \frac{R}{2\gamma L} = \frac{4}{15}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{\gamma^2 LC} = \frac{5}{9}.$$

Тогда

$$\frac{d^2 j(t)}{dt^2} + 2a \frac{dj(t)}{dt} + \omega_0^2 j(t) = \frac{d\tilde{q}(t)}{dt}, \quad j(0) = i_0, \quad \frac{dj(0)}{dt} = i'_0, \quad \tilde{q}(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{p}(t)} \delta_k,$$

где  $j(t) = i(\gamma^{-1}t)$ ; случайные величины  $\delta_k$  имеют нормальное распределение с параметра-

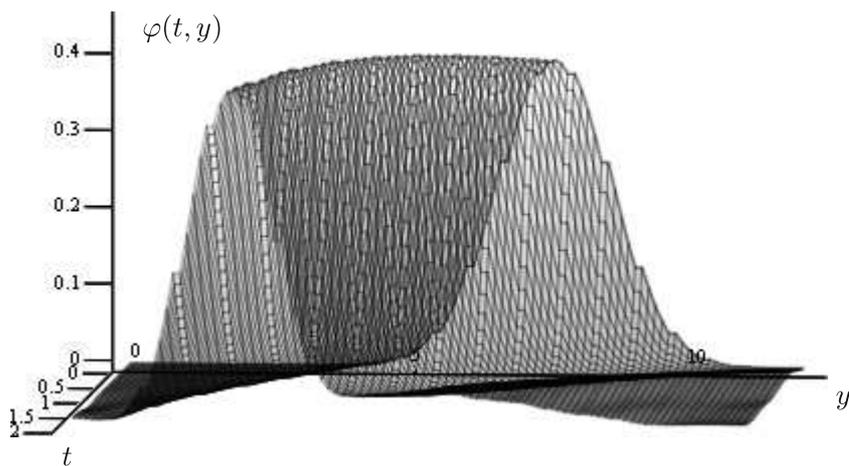


Рис. 7. График приближенного решения уравнения Колмогорова – Феллера.

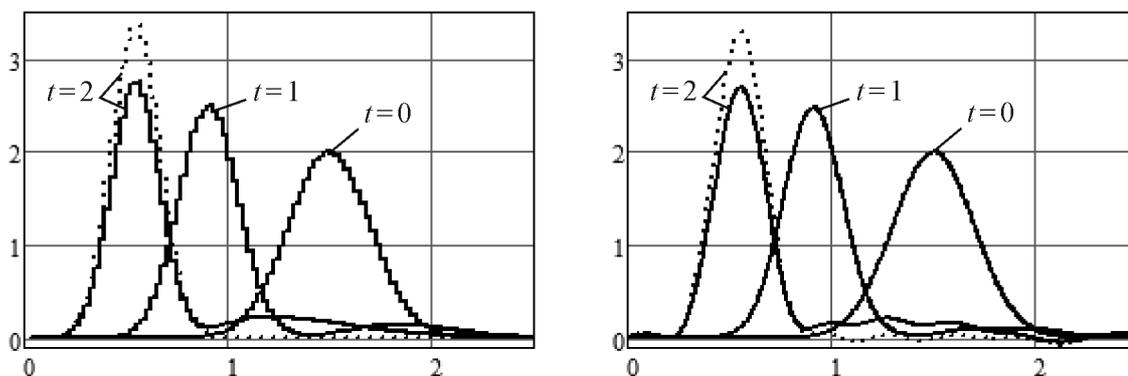


Рис. 8. Оценка плотности вероятности напряжения для  $RC$ -цепи.

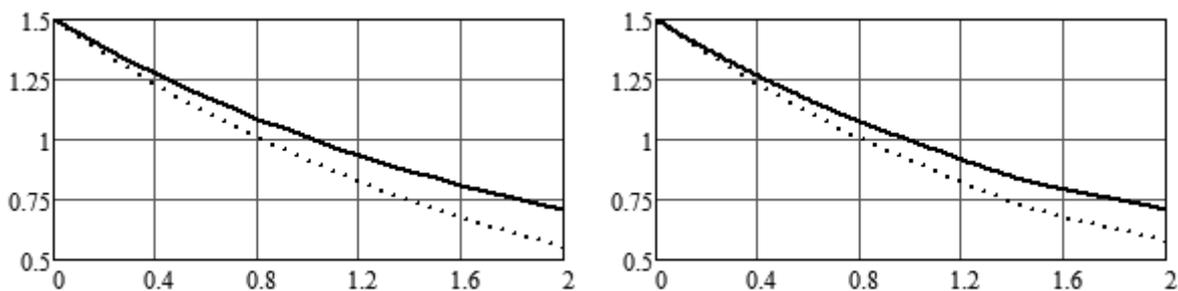


Рис. 9. Оценка математического ожидания напряжения для  $RC$ -цепи.

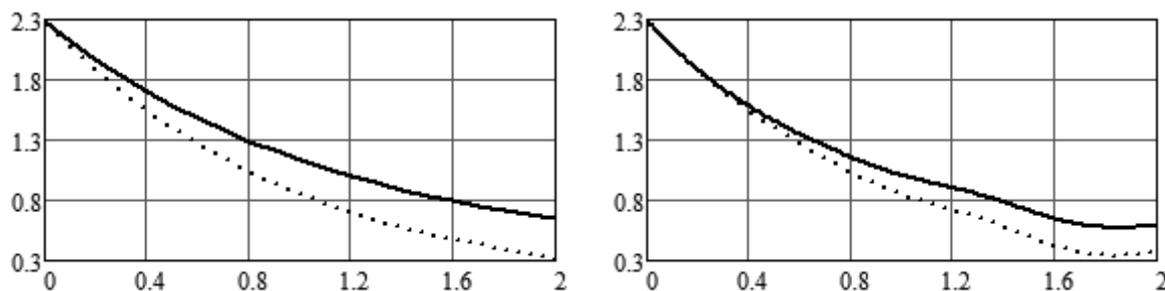


Рис. 10. Оценка второго начального момента напряжения для  $RC$ -цепи.

ми  $m_\delta = 0.05$ ,  $\sigma_\delta = 0.01$ , интенсивность импульсов, определяющая простой пуассоновский процесс  $\tilde{p}(t)$ ,  $-\tilde{\lambda} = 1.5$ ;  $t \in [0, 1]$ . Запишем уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} dy_1(t) = y_2(t)dt, & y_1(0) = y_{10}, \\ dy_2(t) = (-\omega_0^2 y_1(t) - 2ay_2(t))dt + d\tilde{q}(t), & y_2(0) = y_{20}. \end{cases}$$

Уравнение Колмогорова – Феллера, описывающее эволюцию плотности вероятности  $\varphi(t, y_1, y_2)$ , записывается в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, y_1, y_2)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y_1} [y_2 \varphi(t, y_1, y_2)] + \frac{\partial}{\partial y_2} [(\omega_0^2 y_1 + 2ay_2) \varphi(t, y_1, y_2)] - \\ &- \tilde{\lambda} \varphi(t, y_1, y_2) + \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y_2 - z_2 - m_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}} \varphi(t, y_1, z_2) dz_2, \\ \varphi(0, y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\left(\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}, \end{aligned}$$

а параметры распределения начального состояния такие:  $m_1 = 0$ ,  $\sigma_1 = 0.1$ ;  $m_2 = 0.25$ ,  $\sigma_2 = 0.1$ .

Выберем в качестве базисной системы  $\{e(i_0, i_1, i_2, t, y_1, y_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^\infty$  пространства  $L_2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$  систему функций  $\{q(i_0, t)p_1(i_1, y_1)p_2(i_2, y_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^\infty$ , где  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$  – базис пространства  $L_2([0, T])$ , а  $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty$  и  $\{p_2(i_2, y_2)\}_{i_2=0}^\infty$  – базисы  $L_2(\mathbb{R})$  (в общем случае различные). Далее приведем уравнение обобщенной характеристической функции:

$$(P(3, 3) - A(3, 3) + L(3, 3) - H(3, 3)) \cdot \Phi(3, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(2, 0),$$

в котором спектральная характеристика  $A(3, 3)$  представляется следующим образом:

$$A(3, 3) = -\mathcal{P}_1(3, 3) \cdot F_1(3, 3) - \mathcal{P}_2(3, 3) \cdot F_2(3, 3).$$

Соотношения для вычисления спектральной характеристики  $P(3, 3)$  оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент и спектральных характеристик  $\mathcal{P}_1(3, 3)$  и  $\mathcal{P}_{11}(3, 3)$  операторов дифференцирования первого порядка по переменным  $y_1$  и  $y_2$  соответственно:

$$P(3, 3) = (\mathcal{P}_t(1, 1) + q(1, 0; 0) \cdot q^T(1, 0; 0)) \otimes E(1, 1) \otimes E(1, 1),$$

$$\mathcal{P}_1(3, 3) = E(1, 1) \otimes \mathcal{P}_1(1, 1) \otimes E(1, 1), \quad \mathcal{P}_2(3, 3) = E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes \mathcal{P}_2(1, 1).$$

Здесь, как и в примере 1,  $\mathcal{P}_t(1, 1)$  – спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ ;  $q(1, 0; 0)$  – матрица-столбец значений функций базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$  при  $t = 0$ . Через  $\mathcal{P}_1(1, 1)$  и  $\mathcal{P}_2(1, 1)$  обозначены спектральные характеристики оператора дифференцирования, определенные относительно базисных систем  $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty$  и  $\{p_2(i_2, y_2)\}_{i_2=0}^\infty$  соответственно.

Спектральные характеристики  $F_1(3, 3)$  и  $F_2(3, 3)$  операторов умножения на функции  $f_1(t, y_1, y_2) = y_2$  и  $f_2(t, y_1, y_2) = -\omega_0^2 y_1 - 2ay_2$  можно представить в виде

$$F_1(3, 3) = E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes Y_2(1, 1),$$

$$F_2(3, 3) = -\omega_0^2 \cdot (E(1, 1) \otimes Y_1(1, 1) \otimes E(1, 1)) - 2a \cdot (E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes Y_2(1, 1)),$$

где  $Y_1(1, 1)$  и  $Y_2(1, 1)$  – спектральные характеристики операторов умножения на величины  $y_1$  и  $y_2$ , определенные относительно базисных систем  $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty$  и  $\{p_2(i_2, y_2)\}_{i_2=0}^\infty$  соответственно. Заметим, что если эти базисные системы совпадают, то  $\mathcal{P}_1(1, 1) = \mathcal{P}_2(1, 1)$  и  $Y_1(1, 1) = Y_2(1, 1)$ .

Спектральная характеристика  $L(3, 3)$  согласно свойствам оператора умножения на константу представляется следующим образом:

$$L(3, 3) = \tilde{\lambda} \cdot E(3, 3) = \tilde{\lambda} \cdot (E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes E(1, 1)),$$

где  $E(3, 3)$  — шестимерная единичная матрица, а для спектральной характеристики  $H(3, 3)$  справедливо соотношение

$$H(3, 3) = \tilde{\lambda} \cdot (E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes H(1, 1)),$$

в котором  $H(1, 1)$  — спектральная характеристика линейного оператора, рассматриваемого на множестве функций одной переменной  $y_2$  и задаваемого формулой

$$\mathcal{H}\varphi(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y_2-z-m_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}} \varphi(z) dz.$$

Очевидно, что спектральная характеристика  $H(1, 1)$  определяется относительно системы функций  $\{p_2(i_2, y_2)\}_{i_2=0}^\infty$ .

Спектральная характеристика  $\Phi_0(2, 0)$  плотности вероятности  $\varphi(0, y_1, y_2)$  начального состояния вычисляется по определению относительно базисной системы  $\{p_1(i_1, y_1)p_2(i_2, y_2)\}_{i_1, i_2=0}^\infty$  пространства  $L_2(\mathbb{R}^2)$ .

Выразим спектральную характеристику  $\Phi(3, 0)$ :

$$\Phi(3, 0) = (P(3, 3) - A(3, 3) + \Lambda(3, 3) - H(3, 3))^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(2, 0)),$$

и запишем соотношение для искомой плотности вероятности  $\varphi(t, y_1, y_2)$ :

$$\varphi(t, y_1, y_2) = \mathbb{S}^{-1}[\Phi(3, 0)] = \sum_{i_0, i_1, i_2=0}^\infty \varphi_{i_0 i_1 i_2} \cdot e(i_0, i_1, i_2, t, y_1, y_2), \quad (t, y_1, y_2) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2,$$

где  $\varphi_{i_0 i_1 i_2}$  — элементы обобщенной характеристической функции  $\Phi(3, 0)$ .

В примере 1 приведены соотношения для расчета математического ожидания и второго начального момента с применением спектральной формы математического описания, в этой задаче моментные характеристики вычислялись аналогично.

При решении задачи методом статистических испытаний были использованы те же правила для моделирования случайных величин, что и в предыдущем примере. Моделировалось  $N = 10^6$  траекторий. Сетка по времени — суперпозиция равномерной сетки с шагом  $h = 0.1$  и моментов скачков. Для оценивания плотности вероятности строилась гистограмма.

При решении спектральным методом в качестве базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$  были выбраны полиномы Лежандра [18, 19], а в качестве базисных систем  $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty$  и  $\{p_2(i_2, y_2)\}_{i_2=0}^\infty$  — функции Эрмита [22] с параметрами  $m = 0$  и  $D = 0.01$ , порядки усечения  $L_0 = 8$  и  $L_1 = L_2 = 20$  соответственно. Графики приближенного решения уравнения Колмогорова–Феллера при различных значениях переменной  $t$  изображены на рис. 12.

Результаты вычислений для плотности вероятности и первых двух моментов силы тока двумя методами приведены на рис. 13–15. Пунктиром изображены соответствующие характеристики без учета скачков напряжения ( $\lambda = 0$ ) для сравнения. Рисунки слева соответствуют результатам, которые получены методом статистических испытаний, а справа — спектральным методом.

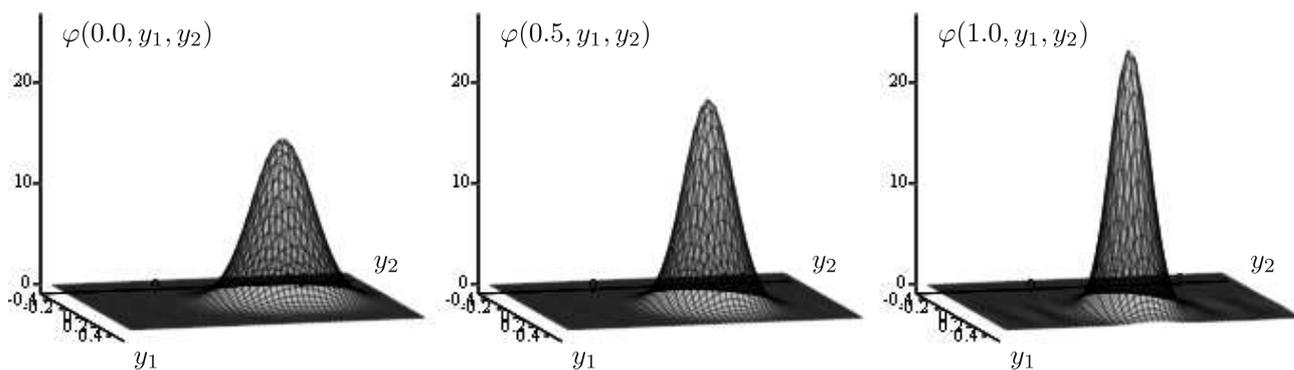


Рис. 12. Графики приближенного решения уравнения Колмогорова–Феллера при  $t = 0.0$ ,  $t = 0.5$  и  $t = 1.0$ .

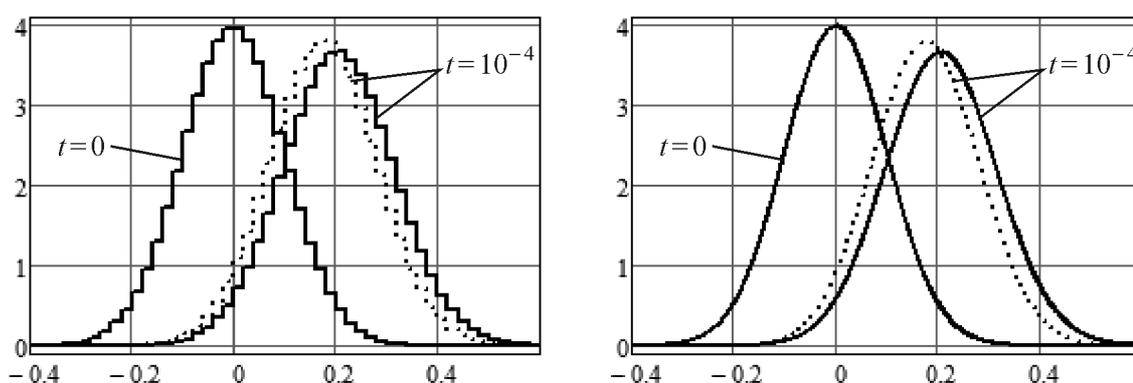


Рис. 13. Оценка плотности вероятности силы тока для  $RCL$ -цепи.

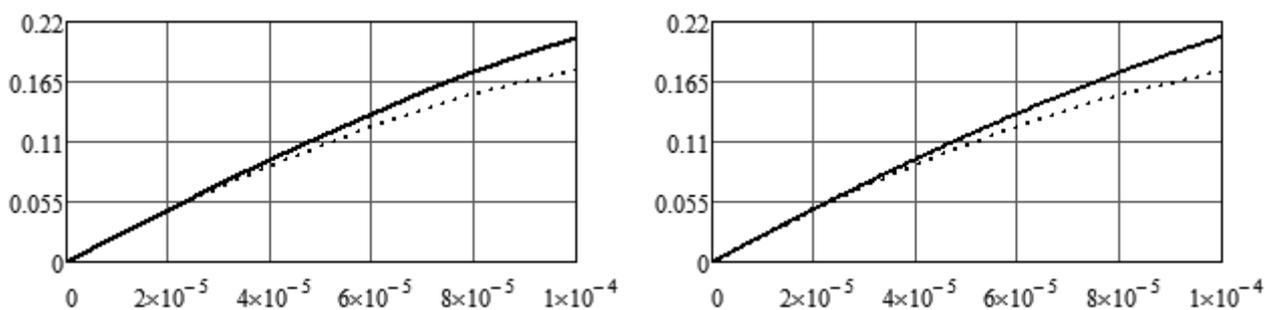


Рис. 14. Оценка математического ожидания силы тока для  $RCL$ -цепи.

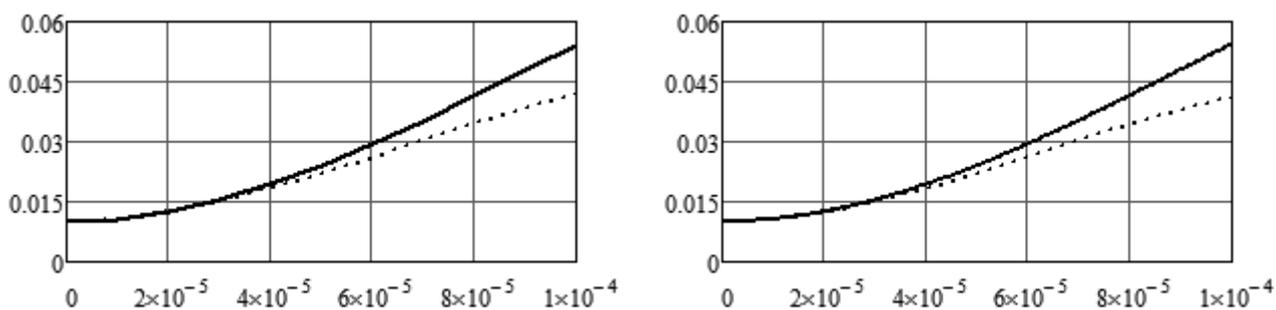


Рис. 15. Оценка второго начального момента силы тока для  $RCL$ -цепи.

## Заключение

Проведенные численные расчеты подтверждают теоретические результаты. Метод статистического моделирования позволяет оценивать погрешность численного решения и контролировать оценки спектрального метода.

Как видно из приведенных в примерах таблиц метод статистического моделирования рекомендуется использовать для получения оценок с абсолютной точностью до третьего значащего знака после запятой. Для увеличения точности требуется более мелкий шаг интегрирования и большее число моделируемых траекторий, что сильно увеличивает время счета. Для получения оценок с большей точностью возможно применение спектрального метода, он удобен для приближенного нахождения плотности вероятности вектора состояния стохастической системы. Метод статистического моделирования предпочтительнее, если требуется оценить только моментные характеристики вектора состояния.

## Список литературы

- [1] *Аверина Т.А.* Методы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2009. Т. 12. № 4. — С. 361–374.
- [2] *Аверина Т.А.* Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. Т. 50. № 1. — С. 16–23.
- [3] *Аверина Т.А.* Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайным периодом квантования // Вестник СГТУ. — 2011. № 4 (62). Вып. 4. — С. 212–218.
- [4] *Аверина Т.А., Артемьев С.С.* Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. — 1986. Т. 288. № 4. — С. 777–780.
- [5] *Аверина Т.А., Михайлов Г.А.* Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. Т. 50. № 6. — С. 1005–1016.
- [6] *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Два метода анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2008. Т. 11. № 1. — С. 1–18.
- [7] *Артемьев В.М., Ивановский А.В.* Дискретные системы управления со случайным периодом квантования. — М.: Энергоатомиздат, 1986.
- [8] *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях стохастических уравнений Ито со скачками // Теория вероятностей и ее применения. — 1987. Т. 32. Вып. 1. — С. 159–163.
- [9] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.
- [10] *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.
- [11] *Кожеевников А.С.* Программное обеспечение для статистического моделирования и анализа случайных процессов со скачками, описывающих динамику цен акций предприятий авиационной отрасли // Труды МАИ. — 2012. № 59. — <http://www.mai.ru/science/trudy>.
- [12] *Кожеевников А.С., Рыбаков К.А.* О применении спектрального метода анализа систем со случайным периодом квантования в модели Мертона // Модернизация и инновации в авиации и космонавтике: Сб. науч. тр. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. — С. 299–305.

- [13] *Кожеевников А.С., Рыбаков К.А.* Об оценке стоимости финансовых инструментов в модели Бейтса // Проблемы авиастроения, космонавтики и ракетостроения: Сб. науч. тр. — М.: Изд-во Ваш полиграфический партнер, 2012. — С. 353–361.
- [14] *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985.
- [15] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.
- [16] *Михайлов Г.А., Аверина Т.А.* Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. — 2009. Т. 428. № 2. — С. 163–165.
- [17] *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // Автоматика и телемеханика. — 2011. № 2. — С. 183–194.
- [18] *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. — М.: Изд-во МАИ, 2012.
- [19] *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006. (Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2013. № 1. — <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>)
- [20] *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. — М.: Советское радио, 1976.
- [21] *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1990.
- [22] *Романов В.А., Рыбаков К.А.* Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ. — 2010. № 39. — <http://www.mai.ru/science/trudy>.
- [23] *Рыбаков К.А.* Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ. — 2005. № 18. — <http://www.mai.ru/science/trudy>.
- [24] *Рыбаков К.А.* Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Лагерра // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2012. № 1. — С. 114–141. — <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
- [25] *Рыбаков К.А.* Многопараметрические ортонормированные системы функций для решения задач в спектральной форме математического описания // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Межд. конф., Воронеж, 26–28 ноября 2012 г.: Сб. тр. конф. Ч. 1. — Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ, 2012. — С. 327–331.
- [26] *Рыбин В.В.* Разработка пакета расширения MLSY\_SM CRM Mathcad в проекционно-сеточных финитных базисах // Труды МАИ. — 2010. № 41. — <http://www.mai.ru/science/trudy>.
- [27] *Рыбин В.В.* Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. — М.: Изд-во МАИ, 2011.
- [28] *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
- [29] *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. — М.: Наука, 1973.
- [30] *Солодовников В.В., Семенов В.В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.

- [31] Таблицы и математическое обеспечение спектрального метода теории автоматического управления / Под ред. В.В. Семенова. — М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1973.
- [32] *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982.
- [33] *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. — М.: Советское радио, 1977.
- [34] *Artemiev S.S., Averina T.A.* Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.
- [35] *Averina T.A.* Numerical Solution to SDEs Systems with a Poisson Component // Proceedings of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulations. St. Petersburg, NII Chemistry, June 26 – July 2, 2005. — St. Petersburg University Publishers, 2005. — P. 172–177.
- [36] *Cont R., Tankov P.* Financial Modeling with Jump Processes. — Chapman & Hall, 2004.
- [37] *Hanson F.B.* Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions. — SIAM, 2007.
- [38] *Øksendal B., Sulem A.* Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. — Springer, 2005.
- [39] *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. — Springer, 2010.
- [40] *Protter P., Talay D.* The Euler Scheme for Lévy Driven Stochastic Differential Equations // Annals of Probability. — 1997. Vol. 25. No. 1. — P. 393–423.