

Статистические алгоритмы прогнозирования для нелинейных стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа*

Т. А. Аверина^{1,2}, К. А. Рыбаков³

¹ Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

² Новосибирский государственный университет

³ Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Аннотация. В статье представлены статистические алгоритмы решения задачи прогнозирования для нелинейных стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения (стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа). В основе разработанных алгоритмов лежит моделирование траекторий специального случайного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями траекторий. Для прогнозирования применяются методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности, ветвящиеся процессы, метод статистических испытаний, метод статистического моделирования, оптимальная фильтрация, прогнозирование, статистический алгоритм, стохастическая система, уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи, уравнение Колмогорова – Феллера, экстраполяция.

Abstract. In this paper we discuss an evolution of the new approach to the prediction problem for nonlinear stochastic differential systems with a Poisson component. The proposed approach is based on reducing the prediction problem to the analysis of stochastic jump-diffusion systems with terminating and branching paths. The solution of analysis problem can be found approximately by using numerical methods for solving stochastic differential equations and methods for modeling inhomogeneous Poisson flows.

Key words: branching processes, conditional density, Duncan – Mortensen – Zakai equation, extrapolation, Kolmogorov – Feller equation, Monte Carlo method, optimal filtering problem, prediction problem, statistical algorithm, stochastic jump-diffusion system.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-05052-а и № 17-08-00530-а).

Введение

В теории стохастических динамических систем задачи анализа, синтеза и фильтрации занимают ключевое значение [13, 15]. Не менее важна и задача прогнозирования, включающая в себя анализ и фильтрацию как составные части [16, 25]. Разработка эффективных методов прогнозирования, ориентированных на применение современных вычислительных средств, не теряет своей актуальности в настоящее время [26].

Модель стохастической динамической системы (системы наблюдения) в задачах фильтрации и прогнозирования, как правило, разделяют на объект наблюдения и измерительную систему. Вектор состояния объекта наблюдения измеряется косвенно, т.е. наблюдаются значения некоторой функции вектора состояния со случайными ошибками. По этим измерениям необходимо оценить вектор состояния объекта наблюдения в некотором смысле наилучшим образом, например с минимальным среднеквадратическим отклонением, используя далее эту оценку в контуре управления [13]. Задача фильтрации предполагает оценку вектора состояния по всем доступным измерениям в текущий момент времени, а задача прогнозирования — в будущий момент времени.

В работе [19] для задачи прогнозирования в стохастических системах диффузионного типа были построены новые алгоритмы. Основу этих алгоритмов составляет новый подход, позволяющий решать задачу фильтрации как задачу анализа вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий [18]. Такой подход в отличие от [13, 16, 17, 25] позволяет получить не только оценку вектора состояния объекта наблюдения, но и оценить апостериорную плотность вероятности и функцию распределения вектора состояния, которые наиболее полно характеризуют вектор состояния объекта наблюдения с учетом косвенных измерений с начального и до текущего момента времени. Недостатком может служить достаточно большой объем вычислений, необходимый для получения таких оценок. Важнейшим элементом для построения подобных алгоритмов фильтрации является использование уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи, которое описывает динамику изменения ненормированной апостериорной плотности вероятности вектора состояния. Варианты алгоритмов оптимальной фильтрации и прогнозирования для стохастических систем диффузионного типа приведены в [20]. Аналогичный подход, но использующий робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи, применялся в [21]. Более детально алгоритмы решения задачи фильтрации на основе анализа вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий с примерами изложены в

монографии [24]. Эти алгоритмы можно отнести к семейству фильтров частиц (под частицей, как правило, понимается упорядоченная пара, которая состоит из вектора, характеризующего положение в фазовом пространстве, и скалярной неотрицательной величины, определяющей вес; иногда под частицей понимается только вектор, характеризующий положение в фазовом пространстве; такая терминология берет свое начало из статистической физики, она связана с описанием движения ансамбля абстрактных частиц [28, 31–33]).

Описанный выше подход был применен к решению задачи фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа. В [22, 23] предполагалось, что на объект наблюдения действуют не только непрерывные случайные возмущения, задаваемые винеровским случайным процессом, но и импульсные, которые можно описать общим пуассоновским случайным процессом [16]. В частности было показано, что задача оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа может быть решена как задача анализа вспомогательной стохастической системы, траектории которой могут иметь разрывы, обрываться и разветвляться в случайные моменты времени. Разрывы траекторий обусловлены исходной постановкой задачи. Они характеризуются заданными параметрами: интенсивностью и распределением величины скачков. Интенсивности обрывов и ветвлений определяются моделью измерительной системы и текущими измерениями оцениваемого вектора состояния.

В данной статье рассмотрена задача прогнозирования в нелинейных стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа [5, 6], которая состоит в оценивании вектора состояния объекта наблюдения в будущий момент времени по результатам косвенных измерений, имеющих к текущему моменту. В отличие от [5, 6] здесь предлагается не только описание метода решения задачи прогнозирования, но и приведены подробные алгоритмы.

Постановка задачи прогнозирования

Рассматриваются стохастические динамические системы, которые задаются двумя векторными уравнениями. Первое уравнение описывает модель объекта наблюдения и является стохастическим дифференциальным уравнением в смысле Ито с пуассоновской составляющей [4]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0. \quad (1)$$

В уравнении (1) используются следующие обозначения: $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $t \in [t_0, T + \Delta(T)]$ — время; $f(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ —

n -мерная вектор-функция, $\sigma(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ — матричная функция $n \times s$; $\Delta(t): [t_0, T] \rightarrow [0, +\infty)$ — величина опережения по времени для прогнозирования, удовлетворяющая условию

$$\max_{t \in [t_0, T]} (t + \Delta(t)) = T + \Delta(T); \quad (2)$$

$W(t)$ — s -мерный стандартный винеровский процесс, начальный вектор состояния X_0 определяется плотностью вероятности $\varphi_0(x)$; $Q(t)$ — общий пуассоновский процесс, заданный в виде

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k.$$

Для последнего соотношения $P(t)$ — неоднородный пуассоновский процесс интенсивности $\lambda(t) = \lambda(t, X(t))$, а Δ_k — независимые случайные векторы из \mathbb{R}^n , распределение которых задано плотностью вероятности $\psi(\tau_k, \Delta)$. Таким образом, в случайные моменты времени вектор состояния X получает приращения Δ_k и условная вероятность разрыва траектории случайного процесса $X(t)$ на промежутке $[t, t + \Delta t]$ при условии $X(t) = x$ задается равенством

$$\mathbb{P}(t, t + \Delta t) = \lambda(t, x)\Delta t + o(\Delta t). \quad (3)$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности $\psi(\tau_k, \Delta | x)$, характеризующая распределение Δ_k при условии $X(\tau_k - 0) = x$. В частном случае $\psi(\tau_k, \Delta | x) = \psi(\tau_k, \Delta)$. Наряду с $\psi(\tau_k, \Delta | x)$ введем плотность вероятности $\eta(\tau_k, x | \xi)$, характеризующую распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k - 0) = \xi$, т.е. $\Delta_k = X(\tau_k) - \xi$.

Условие (2) носит формальный характер и при необходимости может быть сформулировано иным образом.

Второе уравнение рассматриваемой стохастической системы наблюдения задает модель измерителя, оно представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение без пуассоновской составляющей [13, 16]:

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \quad (4)$$

и его удобно представить в виде [13]

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \quad (5)$$

где $Y, Z \in \mathbb{R}^m$ — векторы измерений, $t \in [t_0, T]$; $c(t, x): [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — m -мерная вектор-функция, $\zeta(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$ — матричная функция

$m \times d$, для которой соответствующая матрица диффузии невырождена; $V(t)$ — d -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$ и от начального состояния X_0 , $N(t)$ — d -мерный стандартный гауссовский белый шум.

Отметим, что пуассоновская составляющая $dQ(t)$ в уравнении (1) может быть записана в других формах [4, 9, 15, 25, 27, 34], в частности с использованием пуассоновской случайной меры. Однако вариант, предложенный в [16], представляется допустимым описанием в рассматриваемой задаче. Строгое определение решения уравнений (1), (4) и возможные теоретико-функциональные ограничения на его коэффициенты, достаточные для существования решения и его единственности, приведены в [9, 11, 34].

Задача прогнозирования состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t + \Delta(t))$ по результатам измерений $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$, накопленных к текущему моменту времени t .

Следуя [19], будем исходить из несмещенности оценки и минимума среднеквадратического отклонения. Тогда

$$\hat{X}(t + \Delta(t)) = \mathbb{M}[X(t + \Delta(t)) | Y_0^t] = \int_{\mathbb{R}^n} xp(t + \Delta(t), x | Y_0^t) dx,$$

где \mathbb{M} означает математическое ожидание, $p(t + \Delta(t), x | Y_0^t)$ — апостериорная плотность вероятности прогноза вектора состояния X в будущий момент времени $t + \Delta(t)$.

Можно рассматривать, например, следующие варианты задачи прогнозирования:

а) прогнозирование с фиксированным упреждением, т.е.

$$\Delta(t) = \Delta = \text{const};$$

б) прогнозирование в фиксированный момент времени $T' \geq T$, т.е.

$$\Delta(t) = T' - t.$$

При $\Delta(t) = 0$ задача нахождения оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений Y_0^t — это задача фильтрации [13, 15, 16, 25].

Отметим, кроме того, что задачу прогнозирования можно сформулировать и в терминах измерений $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$. В данном случае это не имеет особого значения, однако далее (для удобства записи необходимых соотношений) при решении задачи прогнозирования будут использоваться как измерения $Y(t)$, так и $Z(t)$.

Уравнения для решения задачи прогнозирования

Как и в случае систем диффузионного типа, для каждого текущего момента времени $\theta \in [t_0, T]$ задачу прогнозирования необходимо решать в два этапа [19]. На первом этапе определяется апостериорная плотность вероятности $p(t, x | Y_0^t)$ вектора состояния X , где $t \in [t_0, \theta]$, как решение уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи, а на втором этапе определяется апостериорная плотность вероятности $p(t, x | Y_0^\theta)$ вектора состояния X , где $t \in [\theta, \theta + \Delta(\theta)]$, как решение уравнения Колмогорова–Феллера [13, 15, 25].

Этап 1. Ненормированная апостериорная плотность вероятности $\varphi(t, x | Y_0^t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению Дункана–Мортенсена–Закаи, которое в форме Стратоновича имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d_{1/2}\varphi(t, x | Y_0^t)}{dt} &= \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)\varphi(t, \xi | Y_0^t)d\xi + \mu(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t), \\ \varphi(t_0, x) &= \varphi_0(x). \end{aligned} \quad (6)$$

В нем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)], \end{aligned}$$

$$g_{ij}(t, x) = \sum_{l=1}^s \sigma_{il}(t, x)\sigma_{jl}(t, x), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mu(t, x, z) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m c_k(t, x)q_{kr}(t) \left(z_r - \frac{1}{2}c_r(t, x) \right),$$

$$q(t) = \omega^{-1}(t), \quad \omega_{kr}(t) = \sum_{l=1}^d \zeta_{kl}(t)\zeta_{rl}(t), \quad k, r = 1, 2, \dots, m.$$

Зафиксируем измерения Y_0^t или Z_0^t и представим функцию $\mu(t, x, z)$ в виде

$$\mu(t, x, z) = -\mu^-(t, x, z) + \mu^+(t, x, z), \quad (7)$$

где

$$\mu^-(t, x, z) = \begin{cases} -\mu(t, x, z), & \mu(t, x, z) < 0, \\ 0, & \mu(t, x, z) \geq 0, \end{cases}$$

$$\mu^+(t, x, z) = \begin{cases} \mu(t, x, z), & \mu(t, x, z) > 0, \\ 0, & \mu(t, x, z) \leq 0, \end{cases}$$

перейдя таким образом от стохастического уравнения (6) к детерминированному уравнению Дункана–Мортенсена–Закаи [22, 23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = & \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t) + \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)\varphi(t, \xi | Y_0^t)d\xi - \mu^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t) + \\ & + \mu^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) решается на промежутке $[t_0, \theta]$, где $\theta \in [t_0, T]$ — некоторое текущее время. Решение уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи ненормировано, поэтому следующий этап — нормировка, результатом этого этапа будет апостериорная плотность вероятности $p(t, x | Y_0^t)$ вектора состояния X :

$$p(t, x | Y_0^t) = \frac{\varphi(t, x | Y_0^t)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x | Y_0^t)dx}, \quad t \in [t_0, \theta].$$

Условия существования решений уравнений нелинейной фильтрации, в том числе и уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи, рассмотрены в [29, 30].

Этап 2. Уравнение Колмогорова–Феллера для апостериорной плотности вероятности $p(t, x | Y_0^\theta)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, x | Y_0^\theta)}{\partial t} = & \mathcal{A}p(t, x | Y_0^\theta) - \lambda(t, x)p(t, x | Y_0^\theta) + \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)p(t, \xi | Y_0^\theta)d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

Требуется получить его решение на промежутке $[\theta, \theta + \Delta(\theta)]$ с начальным условием $p(\theta, x | Y_0^\theta)$ — апостериорной плотностью вероятности вектора состояния, полученной в результате нормировки решения уравнения (8), причем если решение уравнения (8) можно продолжать с ростом текущего времени θ , то решение уравнения (9) каждый раз нужно находить заново за счет изменения величины θ и начального условия.

Оба этапа, т.е. решение уравнений Дункана–Мортенсена–Закаи и Колмогорова–Феллера, можно объединить в один этап, а именно решать уравнение (8) на промежутке $[t_0, \theta + \Delta(\theta)]$ при дополнительном условии $\mu(t, x, z) = 0$, если $t > \theta$, и с течением времени θ обновлять его решение на промежутке $[\theta, \theta + \Delta(\theta)]$.

В результате получим ненормированную апостериорную плотность вероятности $\varphi(t, x | Y_0^\theta)$ как функцию текущего времени $\theta \in [t_0, T]$ и будущего момента времени $\theta \leq t \leq \theta + \Delta(\theta)$, для которого оценивается вектор состояния объекта наблюдения. При переходе к апостериорной плотности вероятности $p(t, x | Y_0^\theta)$ нужна нормировка, как и выше:

$$p(t, x | Y_0^\theta) = \frac{\varphi(t, x | Y_0^\theta)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x | Y_0^\theta) dx}, \quad t \in [\theta, \theta + \Delta(\theta)], \quad \theta \in [t_0, T].$$

Уравнения вида (8) и (9) называют обобщенными уравнениями Фоккера–Планка–Колмогорова [7, 14]. Для уравнения (8) слагаемое $\mu^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t)$ — это функция поглощения, а $\mu^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t)$ — функция восстановления. Это означает, что можно рассматривать *специальный случайный процесс* $X(t)$, который характеризуется:

- а) коэффициентами сноса $f(t, x)$ и диффузии $g(t, x)$;
- б) интенсивностью разрывов траекторий $\lambda(t, x)$ и распределением величины приращения вектора состояния при разрыве, определяемой плотностями вероятности $\psi(t, \Delta | x)$ или $\eta(t, x | \xi)$;
- в) траектории могут обрываться и обрывы образуют пуассоновский поток с интенсивностью $\mu^-(t) = \mu^-(t, X(t), Z(t))$;
- г) траектории могут разветвляться и ветвления образуют пуассоновский поток с интенсивностью $\mu^+(t) = \mu^+(t, X(t), Z(t))$.

Вероятность $\mathbb{P}^-(t, \Delta t)$ обрыва траектории и вероятность $\mathbb{P}^+(t, \Delta t)$ ветвления траектории на промежутке времени $[t, t + \Delta t]$ при условиях $X(t) = x$ и $Z(t) = z$ удовлетворяют соотношениям, аналогичным (3):

$$\mathbb{P}^-(t, \Delta t) = \mu^-(t, x, z)\Delta t + o(\Delta t), \quad \mathbb{P}^+(t, \Delta t) = \mu^+(t, x, z)\Delta t + o(\Delta t).$$

Таким образом, суммарная функция поглощения в рассматриваемом случае имеет вид

$$u^-(t, x, Z(t)) = [\lambda(t, x) + \mu^-(t, x, Z(t))1(\theta - t)]\varphi(t, x | Y_0^\theta),$$

а суммарную функцию восстановления можно записать следующим образом:

$$u^+(t, x, Z(t)) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t, \xi) \eta(t, x | \xi) \varphi(t, \xi | Y_0^\theta) d\xi + \\ + \mu^+(t, x, Z(t)) 1(\theta - t) \varphi(t, x | Y_0^\theta),$$

где $1(\theta - t)$ — единичная ступенчатая функция, в данном случае определяющая индикатор множества $[t_0, \theta]$ при $t \geq t_0$.

Интенсивность обрывов и ветвлений траекторий специального случайного процесса $X(t)$ задается одной функцией (7). Отрицательные значения этой функции характеризуют обрывы, а положительные — ветвления. Иначе говоря, интенсивность как обрывов, так и ветвлений равна $|\mu(t, x, z)|$, но обрывы происходят при $\mu(t, x, z) < 0$, а ветвления — при $\mu(t, x, z) > 0$.

Обрывы и ветвления траекторий случайного процесса $X(t)$ могут быть только на промежутке $[t_0, \theta]$, а на промежутке $(\theta, \theta + \Delta(\theta)]$ поведение траекторий определяется заданными коэффициентами сноса и диффузии, а также параметрами разрыва траекторий. Следовательно, функция $\varphi(t, x | Y_0^\theta)$ характеризует распределение вектора X — состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), — с учетом того, что траектории случайного процесса $X(t)$ могут иметь разрывы, обрываться и разветвляться в случайные моменты времени. Распределением моментов времени появления обрывов и ветвлений управляет случайный процесс $Z(t)$. При $t = \theta$ функция $\varphi(t, x | Y_0^\theta)$ задает распределение вектора состояния X с учетом всех имеющихся к текущему моменту времени косвенных измерений Y_0^θ , по этой функции можно найти оптимальную оценку текущего вектора состояния объекта наблюдения, т.е. решить задачу фильтрации [22, 23]. При $t > \theta$ функция $\varphi(t, x | Y_0^\theta)$ задает распределение прогноза вектора состояния X с учетом имеющихся измерений к моменту времени θ , т.е. с опережением по времени на величину $t - \theta$, по этой функции можно найти прогноз для вектора состояния объекта наблюдения, т.е. решить задачу прогнозирования [5, 6].

Алгоритмы совместного моделирования системы наблюдения и прогнозирования

Решение указанных выше уравнений основано на методе статистических испытаний. Для этого моделируется ансамбль траекторий исходной стохастической системы, заданной уравнением (1), причем для второго этапа такое моделирование осуществляется непосредственно по алгоритму решения задачи анализа [4, 27], а на первом этапе моделируются траектории стохастической системы, заданной тем же уравнением (1), но с дополнительными

условиями: обрывами и ветвлениями, моменты времени появления которых статистически зависят от текущих измерений Y или Z , т.е. реализуется алгоритм фильтрации [22, 23]. По полученному ансамблю траекторий методами математической статистики можно найти и указанные выше апостериорные плотности вероятности, и требуемые оценки вектора состояния, т.е. решение задачи прогнозирования.

Наличие разрывов, а также обрывов и ветвлений траекторий специального случайного процесса $X(t)$ усложняет алгоритм их моделирования. Так, регулярную (с постоянным шагом) или нерегулярную (с переменным шагом) сетку для численного решения стохастического дифференциального уравнения (1) без пуассоновской составляющей:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad (10)$$

необходимо дополнить узлами, которые соответствуют двум пуассоновским потокам: разрывам с заданной интенсивностью $\lambda(t, x)$, а также обрывам и ветвлениям, интенсивность которых определяется функцией $\mu(t, x, z)$. Эти дополнительные узлы сетки формируются отдельно для каждой траектории специального случайного процесса $X(t)$.

Чтобы упростить алгоритм моделирования, предлагается рассмотреть пуассоновский поток, включающий и разрывы, и обрывы, и ветвления траекторий. Суммарная интенсивность такого потока определяется формулой

$$\Lambda(t, x, z) = \lambda(t, x) + |\mu(t, x, z)|, \quad (11)$$

причем разрывы траекторий реализуются с вероятностью $\lambda(t, x)/\Lambda(t, x, z)$, а обрывы и ветвления траекторий — с вероятностью $|\mu(t, x, z)|/\Lambda(t, x, z)$. Моделирование такого пуассоновского потока проще, а результаты будут статистически эквивалентны независимому моделированию двух исходных пуассоновских потоков, что основано на свойстве композиции пуассоновских потоков.

Для определения оптимальной оценки $\hat{X}(t + \Delta(t))$ предлагается статистический алгоритм моделирования траекторий специального случайного процесса $X(t)$ с учетом разрывов, обрывов и ветвлений с последующим усреднением. При этом можно применять различные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

Например, можно использовать простой в реализации стохастический метод Эйлера, именно он применяется далее в алгоритмах для моделирования «фрагментов» траекторий на промежутках времени между двумя последова-

тельными разрывами, обрывами или ветвлениями траекторий, т.е. траекторий стохастической системы диффузионного типа, модель которой задается уравнением (10).

Для численного решения в случае жестких задач рекомендуется использовать асимптотически несмещенный метод, построенный в работе [2]. Этот метод не требует мелкого шага численного интегрирования и, кроме того, для систем с постоянной диффузионной матрицей имеет более высокий порядок сходимости в среднеквадратическом, чем стохастический метод Эйлера.

Для моделирования пуассоновского потока разрывов, обрывов и ветвлений траекторий специального случайного процесса $X(t)$ используется метод «максимального сечения» [1, 12]. Формулы для моделирования времени, через которое происходят эти события, здесь не приводятся, их можно найти в [4, 18, 19], далее они используются в приведенных ниже алгоритмах.

На основе результатов моделирования траекторий специального случайного процесса $X(t)$ с разрывами, обрывами и ветвлениями в каждый момент времени можно оценить апостериорные плотность вероятности и функцию распределения. Также можно найти оценку вектора состояния как для текущего (фильтрация), так и для будущего момента времени (прогнозирование), например усредняя по ансамблю траекторий с учетом того, что на этапе прогнозирования обрывы и ветвления не происходят.

Далее приведем два алгоритма совместного моделирования системы наблюдения и прогнозирования для нелинейных стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа. В первом из них предполагается, что за время, равное шагу численного интегрирования, может произойти только один разрыв, обрыв или ветвление траектории. Такой алгоритм проще в реализации, однако неоднородный пуассоновский поток моделируется неточно. Во втором алгоритме таких ограничений на количество разрывов, обрывов и ветвлений не накладываемся и пуассоновский поток моделируется точно методом «максимального сечения».

Для нелинейных стохастических систем диффузионного и диффузионно-скачкообразного типов ранее в [18, 23] таким же образом были построены два алгоритма совместного моделирования системы наблюдения и оценивания вектора состояния в текущий момент времени (задача фильтрации), а в [19] — два алгоритма моделирования системы наблюдения и прогнозирования диффузионного типа.

Алгоритм 1

Шаг 1. Задать M — число моделируемых траекторий специального случайного процесса $X(t)$; h — шаг численного интегрирования; величины λ^* и Λ^* — мажоранты для интенсивностей $\lambda(t, x)$ и $\Lambda(t, x, z)$ соответственно. Предполагается, что для интенсивности $\lambda(t, x)$ мажоранту можно найти точно:

$$\lambda^* = \max_{(t,x) \in [t_0, T+\Delta(T)] \times \mathbb{R}^n} \lambda(t, x),$$

для интенсивности $\Lambda(t, x, z)$ это можно сделать, например по результатам пробного моделирования траекторий системы наблюдения, заданной уравнениями (1) и (5):

$$\Lambda^* = \max_{t_k \in [t_0, T], i=1,2,\dots,M} \Lambda(t_k, X_k^i, Z_k^i),$$

где максимум берется по всем значениям вектора состояния X_k^i и соответствующего ему вектора измерений Z_k^i в узлах сетки $\{t_k = t_0 + kh\}$ по M смоделированным траекториям.

Получить реализации начальных состояний X_0 и X_0^i согласно заданной плотности вероятности $\varphi_0(x)$ (X_0 — начальное состояние для основной траектории, для которой проводятся измерение и оценивание, X_0^i — для траекторий специального случайного процесса, по которым приближенно вычисляется оптимальная оценка); получить реализацию промежутка времени $\hat{\xi}$, через который может произойти разрыв основной траектории: $\hat{\xi} = -\ln \beta / \lambda^*$, и промежутков времени ξ^i , через которые могут произойти разрывы, обрывы или ветвления вспомогательных траекторий: $\xi^i = -\ln \beta / \Lambda^*$, $i = 1, 2, \dots, M$. Здесь и далее β — различные реализации (для всех i) случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$.

Положить $Y_0 = 0$, $k = 0$, $t_*^i = t_0$, $t_*^i = t_0$, $F_0^i = 1$ (траектория с номером i в начальный момент времени не оборвана), $i = 1, 2, \dots, M$.

Шаг 2. Положить $\kappa = k$, $\tau_*^i = t_*^i$, $\xi_*^i = \xi^i$ (запомнить текущее время и параметры), $i = 1, 2, \dots, M$. Далее положить $i = 1$, $j = 0$ (j — количество новых ветвей на шаге k), $\Xi = 1$ (прогнозирование).

Шаг 3. Проверить условие $t_\kappa + \Delta(t_\kappa) - t_k > 0$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 4. Иначе положить

$$M_\kappa = \sum_{i=1}^M F_\kappa^i \quad (M_0 = M)$$

и найти прогноз \hat{X}_κ как выборочное среднее реализаций $\mathbb{X}_\kappa = \{X_k^i\}_{i=1,2,\dots,M; F_\kappa^i=1}$:

$$\hat{X}_\kappa = \frac{1}{M_\kappa} \sum_{i=1,2,\dots,M; F_\kappa^i=1} X_k^i.$$

Проверить условие $T - t_\kappa = 0$. Если оно выполнено, то завершить процесс, иначе положить $k = \kappa$, $t_*^i = \tau_*^i$, $\xi_*^i = \xi_*^i$ (восстановить текущее время и параметры), $i = 1, 2, \dots, M$, затем положить $i = 1$, $\Xi = 0$ (фильтрация).

Проверить условие $\hat{t}_* + \hat{\xi} \geq t_k + h$, и если оно выполнено, то получить реализацию оцениваемого вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W,$$

и получить векторы измерений:

$$Z_k = c(t_k, X_k) + \frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h}} \Delta V, \quad Y_{k+1} = Y_k + h Z_k.$$

В этих формулах и далее ΔW и ΔV — различные для всех k и i (а также для промежуточных расчетов) реализации s -мерного и d -мерного случайных векторов соответственно, координаты которых независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Если условие $\hat{t}_* + \hat{\xi} \geq t_k + h$ не выполнено, то получить реализацию оцениваемого вектора состояния и векторы измерений в дополнительном узле сетки:

$$\hat{X} = X_k + h_{\triangleleft} f(t_k, X_k) + \sqrt{h_{\triangleleft}} \sigma(t_k, X_k) \Delta W, \quad h_{\triangleleft} = \hat{t}_* + \hat{\xi} - t_k;$$

$$Z_k^{(1)} = c(t_k, X_k) + \frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h_{\triangleleft}}} \Delta V, \quad \hat{Y} = Y_k + h_{\triangleleft} Z_k^{(1)}.$$

Получить реализацию α случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. Проверить условие $\alpha \leq \lambda(\hat{t}_* + \hat{\xi})/\lambda^*$, $\lambda(\hat{t}_* + \hat{\xi}) = \lambda(\hat{t}_* + \hat{\xi}, \hat{X})$, и если оно выполнено, то получить реализацию случайного вектора Δ , распределенного с плотностью вероятности $\psi(\hat{t}_* + \hat{\xi}, \Delta | \hat{X})$, и положить $\hat{X} = \hat{X} + \Delta$ или сразу получить новую реализацию случайного вектора \hat{X} , распределенного с плотностью вероятности $\eta(\hat{t}_* + \hat{\xi}, x | \hat{X})$.

Далее получить реализацию оцениваемого вектора состояния и векторы измерений в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1} = \hat{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \hat{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \hat{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft};$$

$$Z_k^{(2)} = c(t_k + h_{\triangleleft}, \hat{X}) + \frac{\zeta(t_k + h_{\triangleleft})}{\sqrt{h_{\triangleright}}} \Delta V, \quad Y_{k+1} = \hat{Y} + h_{\triangleright} Z_k^{(2)}.$$

Положить $\hat{t}_* = \hat{t}_* + \hat{\xi}$ и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв основной траектории: $\hat{\xi} = -\ln \beta/\lambda^*$, моделирование $\hat{\xi}$ проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие $\hat{t}_* + \hat{\xi} \geq t_k + h$.

Шаг 4. Проверить условие $F_{\kappa}^i = 0$ (траектория с номером i оборвана). Если оно выполнено, то перейти к последнему шагу, иначе: при $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$ перейти к шагу 5, а при $t_*^i + \xi^i < t_k + h$ — к шагу 6.

Шаг 5. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1}^i = X_k^i + h f(t_k, X_k^i) + \sqrt{h} \sigma(t_k, X_k^i) \Delta W.$$

Положить $F_{k+1}^i = 1$ (если $\Xi = 0$) и перейти к последнему шагу.

Шаг 6. Получить реализацию вектора состояния в дополнительном узле сетки:

$$\tilde{X} = X_k^i + h_{\triangleleft} f(t_k, X_k^i) + \sqrt{h_{\triangleleft}} \sigma(t_k, X_k^i) \Delta W, \quad h_{\triangleleft} = t_*^i + \xi^i - t_k.$$

Получить реализацию α случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. Проверить условие $\alpha \leq \Lambda(t_*^i + \xi^i)/\Lambda^*$, $\Lambda(t_*^i + \xi^i) = \Lambda(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k)$, и если оно выполнено, то перейти к шагу 7, иначе — к шагу 8.

Здесь и на следующих шагах Z_k — это вектор измерений, причем при условии, что на полуинтервале $[t_k, t_k + h)$ произошел разрыв основной траектории, $Z_k = Z_k^{(1)}$, если $t_*^i + \xi^i < \hat{t}_*$, и $Z_k = Z_k^{(2)}$, если $t_*^i + \xi^i \geq \hat{t}_*$.

Шаг 7. Получить реализацию γ случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, и проверить условия:

а) если $\lambda(t_*^i + \xi^i)/\Lambda(t_*^i + \xi^i) \leq \gamma$ ($\lambda(t_*^i + \xi^i) = \lambda(t_*^i + \xi^i, \tilde{X})$, разрыв траектории), то получить реализацию случайного вектора Δ , распределенного с плотностью вероятности $\psi(t_*^i + \xi^i, \Delta | \tilde{X})$, и положить $\tilde{X} = \tilde{X} + \Delta$ или сразу получить новую реализацию случайного вектора \tilde{X} , распределенного с плотностью вероятности $\eta(t_*^i + \xi^i, x | \tilde{X})$;

б) если $\Xi = 0$, $\lambda(t_*^i + \xi^i)/\Lambda(t_*^i + \xi^i) > \gamma$ и $\mu^-(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k) > 0$ (обрыв траектории), то положить $F_{k+1}^i = 0$ (траектория далее не моделируется: $F_r^i = 0, r > k$) и перейти к последнему шагу;

в) если $\Xi = 0$, $\lambda(t_*^i + \xi^i)/\Lambda(t_*^i + \xi^i) > \gamma$ и $\mu^+(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k) > 0$ (ветвление траектории), то положить $j = j + 1$ и получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$ для новой траектории (новой ветви траектории с номером i , которая далее рассматривается как другая траектория с номером $M + j$):

$$X_{k+1}^{M+j} = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft} = t_k + h - t_*^i - \xi^i.$$

Положить $F_{k+1}^{M+j} = 1$ ($F_r^{M+j} = 0, r \leq k$), $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$ и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв, обрыв или ветвление новой траектории с номером $M + j$: $\xi^{M+j} = -\ln \beta / \Lambda^*$, моделирование ξ^{M+j} проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие $t_*^{M+j} + \xi^{M+j} \geq t_k + h$.

Шаг 8. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1}^i = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft}.$$

Положить $F_{k+1}^i = 1$, $t_*^i = t_*^i + \xi^i$ и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв, обрыв или ветвление траектории с номером i : $\xi^i = -\ln \beta / \Lambda^*$, моделирование ξ^i проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$.

Шаг 9. Проверить условия:

а) если $i = M$, то положить $M = M + j$, $t_{k+1} = t_k + h$, $k = k + 1$ и перейти к шагу 3 при $\Xi = 1$ или к шагу 2 при $\Xi = 0$;

б) если $i < M$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 4.

Алгоритм 2

Шаг 1–Шаг 2 из алгоритма 1.

Шаг 3. Проверить условие $t_{\kappa} + \Delta(t_{\kappa}) - t_k > 0$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 4. Иначе положить

$$M_{\kappa} = \sum_{i=1}^M F_{\kappa}^i \quad (M_0 = M)$$

и найти прогноз \hat{X}_k как выборочное среднее реализаций $\mathbb{X}_k = \{X_k^i\}_{i=1,2,\dots,M; F_k^i=1}$:

$$\hat{X}_k = \frac{1}{M_k} \sum_{i=1,2,\dots,M; F_k^i=1} X_k^i.$$

Проверить условие $T - t_k = 0$. Если оно выполнено, то завершить процесс, иначе положить $k = \kappa$, $t_*^i = \tau_*^i$, $\xi^i = \xi_*^i$ (восстановить текущее время и параметры), $i = 1, 2, \dots, M$, затем положить $i = 1$, $\Xi = 0$ (фильтрация).

Проверить условие $\hat{t}_* + \hat{\xi} \geq t_k + h$, если оно выполнено, то получить реализацию оцениваемого вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W,$$

и получить векторы измерений:

$$Z_k = c(t_k, X_k) + \frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h}}\Delta V, \quad Y_{k+1} = Y_k + hZ_k.$$

Если условие $\hat{t}_* + \hat{\xi} \geq t_k + h$ не выполнено, то положить $\hat{X} = X_k$, $\hat{Y} = Y_k$, $\hat{\tau} = t_k$ и $l = 1$.

Последовательно найти реализации оцениваемого вектора состояния и соответствующие векторы измерений в дополнительных узлах сетки:

$$Z_k^{(l)} = c(\hat{\tau}, \hat{X}) + \frac{\zeta(\hat{\tau})}{\sqrt{\hat{h}}}\Delta V, \quad \hat{Y} = \hat{Y} + \hat{h}Z_k^{(l)};$$

$$\hat{X} = \hat{X} + \hat{h}f(\hat{\tau}, \hat{X}) + \sqrt{\hat{h}}\sigma(\hat{\tau}, \hat{X})\Delta W \quad (\text{обновление } \hat{X}), \quad \hat{h} = \hat{t}_* + \hat{\xi} - \hat{\tau}.$$

Для каждого дополнительного узла сетки необходимо выполнять следующие действия: положить $\hat{\tau} = \hat{\tau} + \hat{h}$ и получить реализацию α случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$; проверить условие $\alpha \leq \lambda(\hat{\tau})/\lambda^*$, $\lambda(\hat{\tau}) = \lambda(\hat{\tau}, \hat{X})$, и если оно выполнено, то получить реализацию случайного вектора Δ , распределенного с плотностью вероятности $\psi(\hat{\tau}, \Delta|\hat{X})$, и положить $\hat{X} = \hat{X} + \Delta$ или сразу получить новую реализацию случайного вектора \hat{X} , распределенного с плотностью вероятности $\eta(\hat{\tau}, x|\hat{X})$; положить $l = l + 1$, $\hat{t}_* = \hat{t}_* + \hat{\xi}$ и $\hat{\xi} = -\ln \beta/\lambda^*$. Эти вычисления проводятся до тех пор пока $\hat{t}_* + \hat{\xi} < t_k + h$.

Далее получить реализацию оцениваемого вектора состояния и векторы измерений в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1}^i = \hat{X} + \hat{h}f(\hat{\tau}, \hat{X}) + \sqrt{\hat{h}}\sigma(\hat{\tau}, \hat{X})\Delta W, \quad \hat{h} = t_k + h - \hat{\tau}.$$

$$Z_k^{(l)} = c(\hat{\tau}, \hat{X}) + \frac{\zeta(\hat{\tau})}{\sqrt{\hat{h}}}\Delta V, \quad Y_{k+1} = \hat{Y} + \hat{h}Z_k^{(l)}.$$

Фактически здесь формируется кусочно-постоянная функция $Z_k(t)$, $t \in [t_k, t_k + h)$, принимающая постоянное значение Z_k , если на полуинтервале нет разрывов основной траектории, или последовательно принимающая значения $Z_k^{(1)}$, $Z_k^{(2)}$, ..., если разрывы есть.

Шаг 4. Проверить условие $F_{\kappa}^i = 0$ (траектория с номером i оборвана). Если оно выполнено, то перейти к последнему шагу, иначе: при $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$ перейти к шагу 5, а при $t_*^i + \xi^i < t_k + h$ положить $\tilde{X}^i = X_k^i$, $\tau^i = t_k$ и перейти к шагу 6.

Шаг 5 из алгоритма 1.

Шаг 6. Получить реализацию вектора состояния в дополнительном узле сетки:

$$\tilde{X}^i = \tilde{X}^i + h^i f(\tau^i, \tilde{X}^i) + \sqrt{h^i} \sigma(\tau^i, \tilde{X}^i) \Delta W, \quad h^i = t_*^i + \xi^i - \tau^i.$$

Положить $\tau^i = \tau^i + h^i$ и получить реализацию α случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. Проверить условие $\alpha \leq \Lambda(\tau^i)/\Lambda^*$, $\Lambda(\tau^i) = \Lambda(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k)$, и если оно выполнено, то перейти к шагу 7, иначе — к шагу 8.

Здесь и на следующих шагах Z_k — это вектор измерений, причем при условии, что на полуинтервале $[t_k, t_k + h)$ произошел хотя бы один разрыв основной траектории, $Z_k = Z_k^{(l)}$, где верхний индекс l соответствует моменту времени $t_*^i + \xi^i$.

Шаг 7. Получить реализацию γ случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, и проверить условия:

а) если $\lambda(\tau^i)/\Lambda(\tau^i) \leq \gamma$ ($\lambda(\tau^i) = \lambda(\tau^i, \tilde{X}^i)$, разрыв траектории), то получить реализацию случайного вектора Δ , распределенного с плотностью вероятности $\psi(\tau^i, \Delta | \tilde{X}^i)$, и положить $\tilde{X}^i = \tilde{X}^i + \Delta$ или сразу получить новую реализацию случайного вектора \tilde{X}^i , распределенного с плотностью вероятности $\eta(\tau^i, x | \tilde{X}^i)$;

б) если $\Xi = 0$, $\lambda(\tau^i)/\Lambda(\tau^i) > \gamma$ и $\mu^-(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$ (обрыв траектории), то положить $F_{k+1}^i = 0$ (траектория далее не моделируется: $F_r^i = 0$, $r > k$) и перейти к последнему шагу;

в) если $\Xi = 0$, $\lambda(\tau^i)/\Lambda(\tau^i) > \gamma$ и $\mu^+(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$ (ветвление траектории), то положить $j = j + 1$, $F_{k+1}^{M+j} = 1$ ($F_r^{M+j} = 0$, $r \leq k$), $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$, $\tilde{X}^{M+j} = \tilde{X}^i$, $\tau^{M+j} = \tau^i$ и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв, обрыв или ветвление новой траектории с номером $M + j$: $\xi^{M+j} = -\ln \beta/\Lambda^*$.

Шаг 8. Положить $t_*^i = t_*^i + \xi^i$ и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв, обрыв или ветвление траектории с номером i : $\xi^i = -\ln \beta/\Lambda^*$.

Проверить условие $t_*^i + \xi^i < t_k + h$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 6.

Шаг 9. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1}^i = \tilde{X}^i + h^i f(\tau^i, \tilde{X}^i) + \sqrt{h^i} \sigma(\tau^i, \tilde{X}^i) \Delta W, \quad h^i = t_k + h - \tau^i.$$

Положить $F_{k+1}^i = 1$.

Шаг 10. Проверить условия:

а) если $i = M + j$, то положить $M = M + j$, $t_{k+1} = t_k + h$, $k = k + 1$ и перейти к шагу 3 при $\Xi = 1$ или к шагу 2 при $\Xi = 0$;

б) если $i < M$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 4;

в) если $M \leq i < M + j$ (новые ветви), то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 6.

Замечания.

1. Предполагается, что конечный момент времени T для построения текущей оценки и конечный момент времени $t_{\kappa} + \Delta(t_{\kappa})$ для нахождения прогноза

согласованы с шагом численного интегрирования, т.е. найдутся такие целые числа K_1 и K_2^κ , что $t_0 + K_1 h = T$ и $t_0 + K_2^\kappa h = t_\kappa + \Delta(t_\kappa)$, иначе при нахождении вектора состояния в эти моменты времени потребуется корректировать шаг численного интегрирования.

2. На шаге 3 можно получить ковариационную матрицу ошибки прогнозирования:

$$\hat{\Gamma}_\kappa = \frac{1}{M_\kappa - 1} \sum_{i=1,2,\dots,M; F_\kappa^i=1} (X_k^i - \hat{X}_\kappa)(X_k^i - \hat{X}_\kappa)^T.$$

Индекс κ в обозначении \hat{X}_κ и $\hat{\Gamma}_\kappa$ указывает на то, что эти характеристики соответствуют прогнозу в момент времени $t_\kappa + \Delta(t_\kappa)$ при текущем времени $\theta = t_\kappa$.

На этом же шаге по выборке \mathbb{X}_κ можно найти оценки апостериорных плотности вероятности $p(t_\kappa + \Delta(t_\kappa), x | Y_0^{t_\kappa})$ и соответствующей функции распределения. Это дает возможность использовать не только критерий минимума среднеквадратической ошибки прогнозирования. Например, если траектории случайного процесса $X(t)$, определяемого как решение уравнения (1), а, следовательно, и траектории специального случайного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями траекторий находятся на заданном многообразии в $[t_0, T + \Delta(T)] \times \mathbb{R}^n$ [8], то оценка вектора состояния в текущий и будущий момент времени также должна быть на этом многообразии. В этом случае может оказаться полезным критерий максимума апостериорной плотности вероятности [13, 19], согласно которому

$$\hat{X}_\kappa = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} p(t_\kappa + \Delta(t_\kappa), x | Y_0^{t_\kappa}).$$

3. Алгоритм 1 может применяться, если шаг численного интегрирования h согласован с интенсивностью пуассоновского потока разрывов, обрывов и ветвлений: $\lambda^* h < 0.1$, $\Lambda^* h < 0.1$.

4. На этапе прогнозирования ($\Xi = 1$) обрывы и ветвления траекторий специального случайного процесса $X(t)$ не происходят, однако согласно приведенным алгоритмам интервалы времени между двумя последовательными моментами, в которых проверяется реализация разрыва траектории, моделируются по показательному закону распределения с параметром Λ^* , а не λ^* , при этом, как правило, $\Lambda^* \gg \lambda^*$. Это, вообще говоря, допустимо и не сказывается на точности моделирования пуассоновского потока разрывов траекторий, но увеличивает время моделирования, в частности за счет получения

«лишних» реализаций случайных величин, снижая таким образом конструктивную размерность алгоритма, связанную с многомерной равномерностью используемых псевдослучайных чисел [12].

Чтобы этого избежать, можно скорректировать приведенные алгоритмы. На шаге 2 в алгоритме 1 дополнительно требуется положить $t_*^i = t_k$ и $\xi^i = -\ln \beta / \lambda^*$, $i = 1, 2, \dots, M$. При $\Xi = 1$ на шаге 6 достаточно проверить условие $\alpha \leq \lambda(t_*^i + \xi^i) / \lambda^*$, где $\lambda(t_*^i + \xi^i) = \lambda(t_*^i + \xi^i, \tilde{X})$, и если оно выполнено, то на шаге 7 смоделировать разрыв траектории с номером i (получение реализации γ случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, и проверка условия $\lambda(t_*^i + \xi^i) / \Lambda(t_*^i + \xi^i) \leq \gamma$ не требуется). На шаге 8 получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв траектории с номером i : $\xi^i = -\ln \beta / \lambda^*$. Аналогичным образом следует модифицировать и алгоритм 2 (шаги 6, 7 и 8).

При интенсивности разрывов траекторий, не зависящей от вектора состояния, т.е. $\lambda(t, x) = \lambda(t)$, и тем более при постоянной интенсивности $\lambda(t, x) = \lambda = \text{const}$ алгоритмы можно упростить, в частности моделировать моменты времени разрывов на этапе прогнозирования заранее. Если $\lambda(t, x) = \lambda = \text{const}$, то получение реализации α случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, и проверка условия $\alpha \leq \lambda(t_*^i + \xi^i) / \lambda^*$ не требуется.

5. Целесообразно поддерживать объем выборки \mathbb{X}_k в заранее заданных пределах, чтобы статистические погрешности для получаемой оценки \hat{X}_k существенно не менялись от шага к шагу.

Если при моделировании количество обрывов существенно больше количества ветвлений траекторий, то выборка \mathbb{X}_k «вырождается» и в таком случае необходимо добавлять новые траектории, восполняя «потери» при обрывах. Это можно делать по оценке апостериорной функции распределения на основе выборки \mathbb{X}_k , добавляя в выборку новые векторы. Если при моделировании количество ветвлений существенно больше количества обрывов траекторий, то траектории нужно «прореживать», например случайным образом.

Численные расчеты

Рассмотрим пример моделирования и оценивания состояния для одномерной нелинейной системы наблюдения (размерности вектора состояния и вектора измерений равны единице).

Пусть система наблюдения описывается уравнениями

$$dX(t) = \sin 2X(t)dt + dW(t) + dQ(t), \quad X(0) = 0;$$

$$dY(t) = \frac{\cos X(t)}{2} dt + dV(t), \quad Y(0) = 0,$$

где $t \in [0, 1]$, $X, Y \in \mathbb{R}$; $W(t)$ и $V(t)$ — одномерные стандартные винеровские процессы; $W(t)$, $V(t)$ и X_0 независимы.

Величина скачка имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 1 и дисперсией 1, интенсивность скачков $\lambda = 2$. Прогнозирование осуществляется для фиксированного момента времени $T = 1$, т.е. $\Delta(t) = 1 - t$.

На рис. 1 приведены результаты моделирования системы наблюдения, оценивания состояния по результатам измерений и прогнозирования с помощью стохастического метода Эйлера с шагом $h = 0.002$: толстая линия — измеряемая траектория $X(t)$, пунктир — измерения $Y(t)$, тонкая линия — результат оценивания, полученный с помощью моделирования траекторий вспомогательного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями (начальное число вспомогательных траекторий $M = 10000$), точки — результат оценивания, полученный с помощью фильтра и предиктора Калмана–Бьюси (для линеаризованных уравнений). На рис. 2 показана оценка апостериорной плотности вероятности прогноза (гистограмма), а на рис. 3 показаны ее сечения для моментов времени $\theta = 0.0; 0.3; 0.7; 1.0$. Графики результатов прогнозирования показывают, как уточняется прогноз в зависимости от текущего времени (уточнение прогноза в динамике).

В процессе моделирования объем выборки X_k менялся в пределах от 8159 до 10229. Результаты получены с использованием алгоритма 1.

Заключение

В статье рассмотрена задача прогнозирования в нелинейных стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа, а именно задача оценивания вектора состояния объекта наблюдения в будущий момент времени по результатам косвенных измерений, имеющихся к текущему моменту. Составной частью этой задачи является задача фильтрации. Предложено решать задачи фильтрации и прогнозирования с помощью моделирования траекторий вспомогательной стохастической системы с разрывами, обрывами и ветвлениями. Разрывы траекторий обусловлены исходной постановкой задачи, т.е. наличием пуассоновской составляющей в уравнении модели объекта наблюдения, а

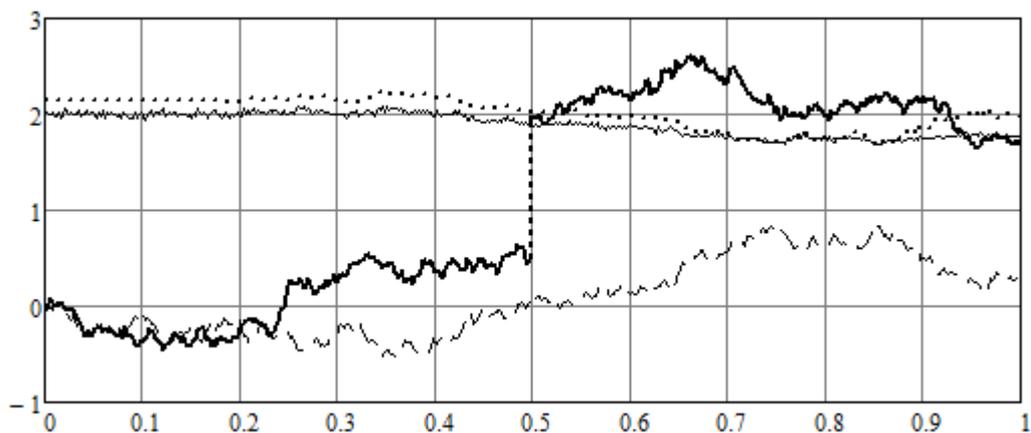


Рис. 1. Результаты моделирования системы наблюдения и прогнозирования.

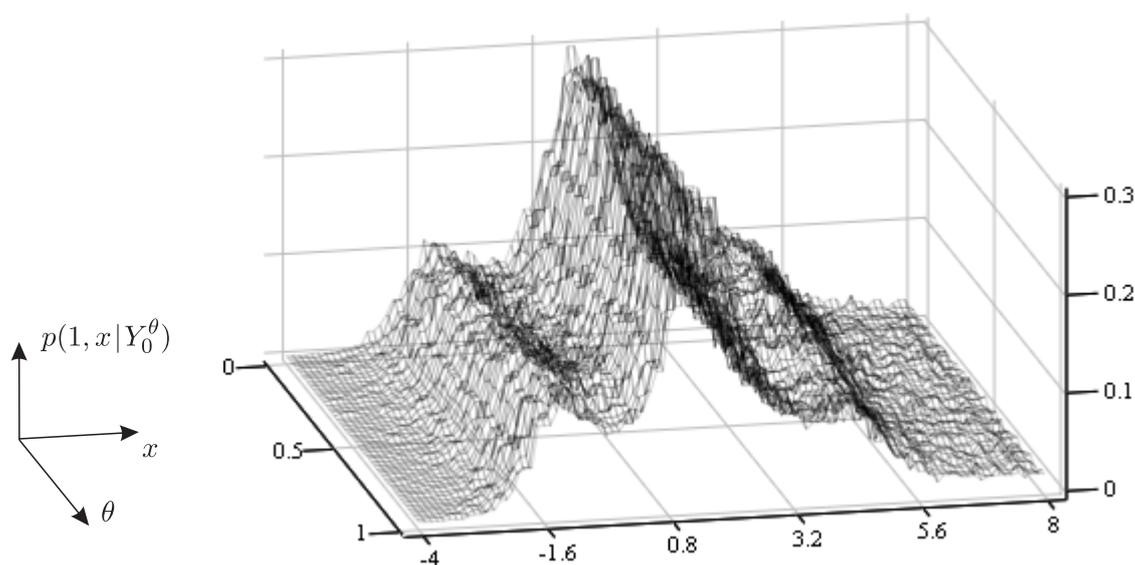


Рис. 2. Оценка апостериорной плотности вероятности прогноза в фиксированный момент времени $T = 1$ в зависимости от текущего времени.

обрывы и ветвления моделируются по результатам измерений оцениваемого вектора состояния.

Для решения задач фильтрации и прогнозирования предложены два алгоритма, основанные на методе статистических испытаний. При моделировании «фрагментов» траекторий между двумя последовательными моментами времени разрыва, обрыва или ветвления можно применять различные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, например, стохастический метод Эйлера, асимптотически несмещенный метод, построенный в работе [2], или другие известные методы [3, 10, 27], а моделирование моментов времени разрывов, обрывов и ветвлений осуществляется с помощью метода «максимального сечения» [1, 12]. Усреднение по ансамблю тра-

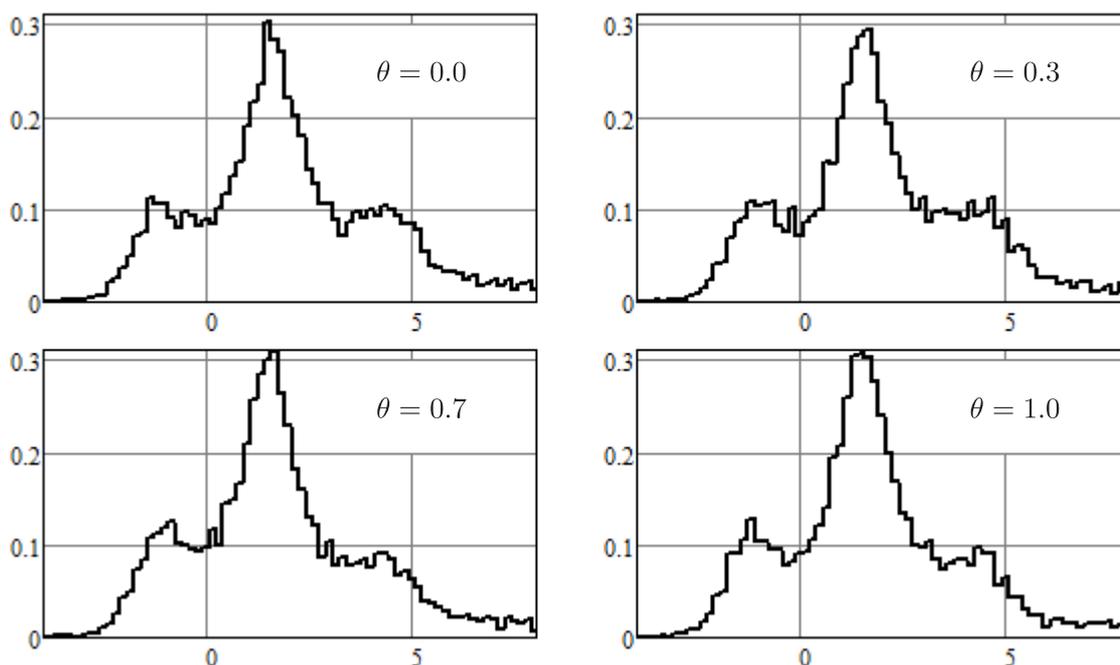


Рис. 3. Сечения апостериорной плотности вероятности прогноза в зависимости от текущего времени θ .

екторий вспомогательной стохастической системы дает приближенное решение задачи прогнозирования по критерию минимума среднеквадратической ошибки, погрешность при оценивании вектора состояния объекта наблюдения обусловлена применением приближенных методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений и зависит от выбора метода и его параметров (шага интегрирования и объема моделируемых траекторий).

Преимущества разработанных алгоритмов прогнозирования такие же, как и для алгоритмов оптимальной фильтрации [18, 20–23]. Поскольку их основу составляют методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков, реализация этих алгоритмов достаточно проста. Разработанные статистические алгоритмы рекомендуются для решения задачи прогнозирования в нелинейных стохастических дифференциальных системах с пуассоновской составляющей. Использование метода «максимального сечения» для моделирования пуассоновских потоков в предположении, что между узлами сетки может быть не более одного разрыва, обрыва или ветвления, сделало алгоритм более простым и позволило уменьшить вычислительные затраты. Такое предположение не является ограничительным, если шаг сетки согласован с интенсивностью пуассоновских потоков. Проведенные численные расчеты демонстрируют высокую точность прогноза вектора состояния и преимущества данного метода на нелинейных системах.

Список литературы

- [1] *Аверина Т.А.* Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. Т. 50. № 1. — С. 16–23.
- [2] *Аверина Т.А.* Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // Вестник Бурятского государственного университета. — 2012. № 9. — С. 91–94.
- [3] *Аверина Т.А.* Построение алгоритмов статистического моделирования систем со случайной структурой. — Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.
- [4] *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2013. № 3. — С. 85–116.
- [5] *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* О прогнозировании состояний стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей // Проблемы оптимизации сложных систем. XI Международная Азиатская школа-семинар, Чолпон-Ата, 27 июля – 7 августа 2015 г.: Тр. конф. Ч. 1. — 2015. — С. 16–24.
- [6] *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Приближенное решение задачи прогнозирования для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2017. Т. 20. № 1. — С. 1–13.
- [7] *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993.
- [8] *Карачанская Е.В.* Построение программных управлений динамической системы на основе множества ее первых интегралов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2011. Т. 42. — С. 125–133.
- [9] *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985.
- [10] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.
- [11] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 1974.
- [12] *Михайлов Г.А., Аверина Т.А.* Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. — 2009. Т. 428. № 2. — С. 163–165.
- [13] *Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С.* Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. — М.: Вузовская книга, 2008.
- [14] *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2015.
- [15] *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. — М.: Советское радио, 1976.
- [16] *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1990.
- [17] *Руденко Е.А.* Оптимальная структура непрерывного нелинейного фильтра Пугачева пониженного порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2013. № 6. — С. 25–51.

- [18] Рыбаков К.А. Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2012. № 3. — С. 91–110.
- [19] Рыбаков К.А. Алгоритмы прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2015. № 1. — С. 25–38.
- [20] Рыбаков К.А. Модифицированные статистические алгоритмы фильтрации и прогнозирования в непрерывных стохастических системах // Известия Института математики и информатики УдГУ. — 2015. № 2 (46). — С. 155–162.
- [21] Рыбаков К.А. Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2013. Т. 16. № 4. — С. 377–391.
- [22] Рыбаков К.А. Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. — 2014. № 207. — С. 54–60.
- [23] Рыбаков К.А. Статистические алгоритмы оптимальной фильтрации сигналов в нелинейных диффузионно-скачкообразных стохастических системах // Вестник УГАТУ. — 2016. Т. 20. № 4 (74). — С. 107–113.
- [24] Рыбаков К.А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. — М.: Изд-во МАИ, 2017.
- [25] Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. — М.: Логос, 2007.
- [26] Синицын И.Н., Корепанов Э.Р. Нормальные условно-оптимальные фильтры и экстраполяторы Пугачёва для стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и её применения. — 2016. Т. 10. № 2. — С. 14–23.
- [27] Artemiev S.S., Averina T.A. Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.
- [28] Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering. — Springer, 2009.
- [29] Ceci C., Colaneri K. Nonlinear filtering for jump diffusion observations // Advances in Applied Probability. — 2012. Vol. 44. No. 3. — P. 678–701.
- [30] Ceci C., Colaneri K. The Zakai equation of nonlinear filtering for jump-diffusion observations: existence and uniqueness // Applied Mathematics & Optimization. — 2014. Vol. 69. No. 1. — P. 47–82.
- [31] Crisan D. Exact rates of convergence for a branching particle approximation to the solution of the Zakai equation // The Annals of Probability. — 2003. Vol. 31. No. 2. — P. 693–718.
- [32] Del Moral P. Feynman–Kac Formulae: Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications. — Springer, 2004.
- [33] Del Moral P., Doucet A. Particle methods: an introduction with applications // Journées MAS 2012. ESAIM: Proceedings, Vol. 44. Clermont-Ferrand, August 29–31, 2012. — ESAIM, 2014. — P. 1–46.
- [34] Situ R. Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications. — Springer, 2005.