

Моделирование и анализ  
линейных инвариантных стохастических систем\*

Т. А. Аверина<sup>1,2</sup>, Е. В. Карачанская<sup>3,4</sup>, К. А. Рыбаков<sup>5</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, [ata@osmf.sccc.ru](mailto:ata@osmf.sccc.ru)

<sup>3</sup> Дальневосточный государственный университет путей сообщения,

<sup>4</sup> Тихоокеанский государственный университет, [elena\\_chal@mail.ru](mailto:elena_chal@mail.ru)

<sup>5</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
[rkoffice@mail.ru](mailto:rkoffice@mail.ru)

**Аннотация.** Основной целью работы является построение и численное решение стохастических дифференциальных уравнений, траектории которых с вероятностью 1 находятся на заданном гладком многообразии. В качестве примеров многообразий для трехмерного пространства (фазовое пространство двумерно) выбраны цилиндрические поверхности второго порядка: эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры. Для этих поверхностей построены классы стохастических дифференциальных уравнений, из которых выделены линейные уравнения с мультипликативным шумом. По результатам моделирования оценивалось отклонение численного решения от многообразия. Для рассматриваемых примеров проведен сравнительный анализ точности восьми численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** инвариант, первый интеграл, случайный процесс, стохастическая система, стохастическое дифференциальное уравнение, численный метод.

---

\*Работа частично поддержана базовым проектом 0315-2016-0002 и РФФИ (проект № 17-08-00530-а).

**Abstract.** The main aim of this paper is to test the numerical methods for stochastic differential equations with solutions on a given smooth manifold. Cylindrical surfaces of the second order are selected as manifolds examples for the three-dimensional space (two-dimensional phase space): elliptic, hyperbolic, and parabolic cylinders. We construct classes of stochastic differential equations with solutions on these surfaces and consider linear equations with multiplicative noise. The numerical methods accuracy is estimated by the statistical modeling as mean distance between simulated solutions and the given smooth manifold. These results are compared with a theoretical accuracy of the numerical methods (in the sense of strong convergence).

**Key words:** invariant, first integral, random process, stochastic system, stochastic differential equation, numerical method.

## Введение

Устойчивость развития реальных процессов в открытых системах обусловлена наличием некоторых законов сохранения (энергии, массы, вещества и т.п.). Математически законы сохранения означают, что некая пространственно-временная функция сохраняет постоянное значение, т.е. является инвариантом. Поэтому в теории динамических систем представляет значительный интерес задача построения дифференциальных уравнений исходя из траектории движения системы или известного множества ее первых интегралов. В [1–4] были предложены методы решения таких задач как для детерминированных, так и стохастических динамических систем, в последнем случае при наличии винеровских и пуассоновских возмущений.

Основная цель представленной работы состоит в построении и численном решении стохастических дифференциальных уравнений с винеровскими возмущениями, решения которых с вероятностью 1 находятся на заданном гладком многообразии [5]. Для сравнения выбраны различные численные методы, а именно метод Эйлера–Маруямы, методы типа Рунге–Кутты, методы Мильштейна и Платена, методы типа Розенброка [6–21].

Предложенная методика проведения вычислительных экспериментов может применяться, например, для апробации различных численных методов для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений, аналитическое решение которых неизвестно, но известен первый интеграл.

## Стохастические дифференциальные уравнения с заданным набором первых интегралов

Рассматривается модель динамической системы, заданная векторным стохастическим дифференциальным уравнением в смысле Ито:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где  $X \in \mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерный вектор состояния;  $t \in T = [t_0, T]$  — время, моменты времени  $t_0$  и  $T$  заданы;  $f(t, x): T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерная вектор-функция;  $\sigma(t, x): T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$  —  $(n \times s)$ -мерная матричная функция;  $W(t)$  —  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс,  $W(t)$  и начальный вектор состояния  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  независимы.

Коэффициенты  $f_i(t, x)$  и  $\sigma_{il}(t, x)$  удовлетворяют условиям существования и единственности решения системы уравнений (1) (см. [22]) и следующим условиям гладкости:  $f_i(t, x), \sigma_{il}(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}$ , где  $f_i(t, x)$  и  $\sigma_{il}(t, x)$  — координаты вектор-функции  $f(t, x)$  и элементы матричной функции  $\sigma(t, x)$  соответственно;  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $l = 1, 2, \dots, s$ .

Согласно [1, 2], для такой системы существует первый интеграл и определены условия, при которых функция будет первым интегралом системы (1).

Напомним [3], что скалярная неслучайная функция  $M(t, x)$  называется первым интегралом для системы (1) (в смысле определения В.А. Дубко), если она не равна постоянной и с вероятностью 1 на любой траектории решения уравнения (1) принимает постоянное значение, зависящее только от  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Пусть  $M(t, x)$  — скалярная неслучайная функция, имеющая непрерывную производную первого порядка по  $t$  и непрерывные частные производные первого и второго порядков по координатам вектора  $x$ , является первым интегралом для системы (1). Тогда стохастический дифференциал случайного процесса  $M(t, X(t))$  определяется формулой Ито и приводит к условию [1, 2]:

$$dM(t, X(t)) = 0.$$

Чтобы функция  $M(t, x)$  была первым интегралом системы (1) необходимо и достаточно выполнения следующих условий на всех траекториях ее решения  $X(t)$ :

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{il}(t, x) \frac{\partial M(t, x)}{\partial x_i} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, s; \quad (2)$$

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[ f_i(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^s \frac{\partial \sigma_{il}(t, x)}{\partial x_j} \sigma_{jl}(t, x) \right] \frac{\partial M(t, x)}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

Если модель динамической системы задавать эквивалентным векторным стохастическим дифференциальным уравнением в смысле Стратоновича, т.е.

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t)) \circ dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (4)$$

где в дополнение к уже введенным обозначениям  $a(t, x): T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерная вектор-функция, то, учитывая формулу связи коэффициентов сноса в уравнениях (1) и (4), можно переписать условие (3) в виде

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) \frac{\partial M(t, x)}{\partial x_i} = 0, \quad (5)$$

где  $a_i(t, x)$  — координаты вектор-функции  $a(t, x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Через  $M(t, x)$  будем обозначать произвольную функцию из множества, определяющего набор первых интегралов  $\{M_j(t, x)\}$ . Полный набор первых интегралов для системы (1) состоит не более, чем из  $(n - 1)$  функций [1, 2].

Наличие первого интеграла  $M(t, x)$  означает, что с вероятностью 1 любая траектория решения уравнения (1) или (4) остается на гладком многообразии  $M(t, x) = C = \text{const}$  в  $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n$ , где константа  $C$  определяется начальным вектором состояния  $X_0$ :  $M(t_0, X_0) = C$ .

### Методика проведения вычислительных экспериментов

Ограничимся двумерным случаем ( $n = 2$ ) и в качестве примеров многообразий  $M(t, x) = M(t, x_1, x_2) = C = \text{const}$  в  $[t_0, T] \times \mathbb{R}^2$  возьмем поверхности второго порядка: эллиптический, гиперболический и параболический цилиндры. В частности, для таких цилиндров можно построить линейные стохастические динамические системы второго порядка с мультипликативным шумом, траектории которых с вероятностью 1 остаются на заданном многообразии.

Моделирование траекторий для линейных систем с мультипликативным шумом используется при тестировании численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений, для экспериментального определения порядка сходимости или для иллюстрации соответствующего теоретического результата [7, 14, 15].

Будем предполагать, что стохастическая система задается двумя уравнениями в смысле Ито:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= f_1(t, X_1(t), X_2(t))dt + \sigma_1(t, X_1(t), X_2(t))dW(t), \quad X_1(t_0) = X_{10}, \\ dX_2(t) &= f_2(t, X_1(t), X_2(t))dt + \sigma_2(t, X_1(t), X_2(t))dW(t), \quad X_2(t_0) = X_{20}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $t \in [t_0, T]$ ,  $W(t)$  — скалярный стандартный винеровский случайный процесс ( $s = 1$ ), эквивалентные уравнения в смысле Стратоновича:

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= a_1(t, X_1(t), X_2(t))dt + \sigma_1(t, X_1(t), X_2(t)) \circ dW(t), \quad X_1(t_0) = X_{10}, \\ dX_2(t) &= a_2(t, X_1(t), X_2(t))dt + \sigma_2(t, X_1(t), X_2(t)) \circ dW(t), \quad X_2(t_0) = X_{20}, \end{aligned} \quad (7)$$

т.е.

$$\begin{aligned} X(t) &= [X_1(t) \ X_2(t)]^T, \quad X_0 = [X_{10} \ X_{20}]^T, \\ f(t, x) &= \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_2(t, x_1, x_2) \end{bmatrix}, \quad a(t, x) = \begin{bmatrix} a_1(t, x_1, x_2) \\ a_2(t, x_1, x_2) \end{bmatrix}, \\ \sigma(t, x) &= \begin{bmatrix} \sigma_1(t, x_1, x_2) \\ \sigma_2(t, x_1, x_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $f_1(t, x_1, x_2)$ ,  $f_2(t, x_1, x_2)$ ,  $\sigma_1(t, x_1, x_2)$  и  $\sigma_2(t, x_1, x_2)$  в этих уравнениях определяются согласно алгоритму из [4]. Алгоритм для общего случая здесь приводить не будем, однако укажем формулы для коэффициентов при  $n = 2$ ,  $s = 1$  и  $M(t, x) = M(x)$ .

Так,

$$a_1(t, x_1, x_2) = \frac{H_1(t, x_1, x_2)}{C(t, x_1, x_2)}, \quad a_2(t, x_1, x_2) = \frac{H_2(t, x_1, x_2)}{C(t, x_1, x_2)},$$

где

$$\begin{aligned} C(t, x_1, x_2) &= q_3(t, x_1, x_2) \frac{\partial M(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} - q_2(t, x_1, x_2) \frac{\partial M(t, x_1, x_2)}{\partial x_2}, \\ H_1(t, x_1, x_2) &= q_1(t, x_1, x_2) \frac{\partial M(t, x_1, x_2)}{\partial x_2}, \\ H_2(t, x_1, x_2) &= -q_1(t, x_1, x_2) \frac{\partial M(t, x_1, x_2)}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\sigma_1(t, x_1, x_2) = q_0(t, x_1, x_2) \frac{\partial M(t, x_1, x_2)}{\partial x_2},$$

$$\sigma_2(t, x_1, x_2) = -q_0(t, x_1, x_2) \frac{\partial M(t, x_1, x_2)}{\partial x_1}.$$

Коэффициенты сноса в уравнениях Ито (6) и Стратоновича (7) связаны между собой известным соотношением, поэтому формулы для  $f_1(t, x_1, x_2)$ ,  $f_2(t, x_1, x_2)$  здесь для краткости опущены, они выражаются через функции  $a_1(t, x_1, x_2)$ ,  $a_2(t, x_1, x_2)$ ,  $\sigma_1(t, x_1, x_2)$  и  $\sigma_2(t, x_1, x_2)$ .

В приведенных соотношениях функции  $q_0(t, x_1, x_2)$ ,  $q_1(t, x_1, x_2)$ ,  $q_2(t, x_1, x_2)$  и  $q_3(t, x_1, x_2)$  могут выбираться произвольным образом, чтобы были выполнены условия существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений [22].

Пусть  $\{t_k\}$  — регулярная сетка с заданным постоянным шагом численного интегрирования  $h$ , определяющая разбиение отрезка времени  $[t_0, T]$ , на котором решаются стохастические дифференциальные уравнения (6) или (7), т.е.

$$t_{k+1} = t_k + h, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad t_N = T, \quad N = \frac{T - t_0}{h},$$

а  $\{X_k\}$  — дискретная аппроксимация случайного процесса  $X(t)$ , полученная численным методом решения стохастических дифференциальных уравнений, где вектор  $X_k$  соответствует моменту времени  $t_k$ .

Напомним [14, 15], что численный метод имеет порядок  $p$  сильной сходимости, если

$$\varepsilon = \mathbb{E}[|X(T) - X_N|] \leq ch^p, \quad (8)$$

где  $\mathbb{E}$  означает математическое ожидание,  $c > 0$  — некоторая константа, не зависящая от шага численного интегрирования  $h$ .

При тестировании численных методов будем использовать другое определение порядка сходимости вместо (8), а именно

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathcal{M}} &= \mathbb{E}[|M(T, X(T)) - M(T, X_N)|] = \\ &= \mathbb{E}[|M(t_0, X_0) - M(T, X_N)|] \leq c^* h^p, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $c^* > 0$  — константа, не зависящая от шага численного интегрирования  $h$ .

Замена  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_{\mathcal{M}}$ , вообще говоря, не является эквивалентной. Но определение сходимости в смысле отклонения траектории от многообразия более адекватно для задач, связанных с исследованием стохастических динамических систем, траектории которых с вероятностью 1 остаются на заданном многообразии.

Линеаризуем функцию  $M(t, x)$  при фиксированном  $t = T$  в окрестности точного решения  $X(T)$ :

$$M(T, X(T)) - M(T, X_N) = \left[ \frac{\partial M(T, x)}{\partial x} \Big|_{x=X(T)} \right]^T (X(T) - X_N) + o(|X(T) - X_N|).$$

Предполагая частные производные функции  $M(T, x)$  ограниченными, т.е.

$$\left| \frac{\partial M(T, x)}{\partial x_i} \right| \leq M^*, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

имеем

$$\left| \left[ \frac{\partial M(T, x)}{\partial x} \Big|_{x=X(T)} \right]^T (X(T) - X_N) \right| \leq M^* |X(T) - X_N|.$$

Таким образом, если численный метод имеет порядок  $p$  сильной сходимости, то порядок сходимости в смысле отклонения траектории от многообразия также будет равен  $p$  при условии (10):

$$\varepsilon_{\mathcal{M}} = \mathbb{E}[|M(T, X(T)) - M(T, X_N)|] \leq c^* h^p, \quad c^* = cM^*.$$

Другой вариант состоит в нахождении среднего отклонения не в последнем узле  $t_N = T$ , а максимального среднего отклонения во всех узлах сетки, т.е. вместо (8) используется

$$\varepsilon = \max_{0 \leq k \leq N} \mathbb{E}[|X(t_k) - X_k|] \leq ch^p,$$

а вместо (9) —

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathcal{M}} &= \max_{0 \leq k \leq N} \mathbb{E}[|M(t_k, X(t_k)) - M(t_k, X_k)|] = \\ &= \max_{0 \leq k \leq N} \mathbb{E}[|M(t_0, X_0) - M(t_k, X_k)|] \leq c^* h^p. \end{aligned}$$

Для тестирования выбраны несколько методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений. Для каждого из них далее приведена соответствующая разностная схема. В ряде случаев удобнее записывать разностную схему для стохастического дифференциального уравнения в смысле Стратоновича, а не в смысле Ито, тогда в разностной схеме используется коэффициент сноса  $a(t, x)$ , а не  $f(t, x)$ .

I. Методы численного решения уравнений в смысле Ито.

1. Метод Эйлера–Маруямы (стохастический метод Эйлера) [16]:

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k.$$

2. Метод Мильштейна [17, 18]:

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k + \frac{h}{2} \frac{\partial \sigma(t_k, X_k)}{\partial x} \sigma(t_k, X_k) (\Delta W_k^2 - 1).$$

3. Метод Платена [14]:

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_k, X_k^p) - \sigma(t_k, X_k)) (\Delta W_k^2 - 1),$$

где  $X_k^p = X_k + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k$ .

4. Метод Артемьева (обобщенный метод типа Розенброка) [6–9]:

$$X_{k+1} = X_k + \left[ I - \frac{h}{2} \frac{\partial f(t_k, X_k)}{\partial x} \right]^{-1} [hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k].$$

II. Методы численного решения уравнений в смысле Стратоновича.

1. Метод Хьюна (стохастический метод Эйлера–Коши) [11, 12, 20, 21]:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{h}{2} (a(t_k, X_k) + a(t_{k+1}, X_k^p)) + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_k, X_k) + \sigma(t_{k+1}, X_k^p)) \Delta W_k,$$

где  $X_k^p = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k$ .

2. Обобщенный метод типа Рунге–Кутты [13, 19–21]:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{h}{2} (a(t_k, X_k) + a(t_{k+1}, X_k^p)) + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_k, X_k) + \sigma(t_{k+1}, X_k^p)) \Delta W_k,$$

где  $X_k^p = X_k + ha(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k$ .

3. Метод Артемьева (метод из семейства обобщенных методов типа Розенброка) [6–9]:

$$X_{k+1} = X_k + \left[ I - \frac{h}{2} \frac{\partial a(t_k, X_k)}{\partial x} \right]^{-1} \times \\ \times \left[ ha(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k + \frac{h}{2} \frac{\partial \sigma(t_k, X_k)}{\partial x} \sigma(t_k, X_k)\Delta W_k^2 \right].$$

4. Метод Авериной (метод из семейства обобщенных методов типа Розенброка) [6–9]:

$$X_{k+1} = X_k + \frac{h}{2} \left[ I - \frac{h}{2} \frac{\partial a(t_k, X_k)}{\partial x} \right]^{-1} \times \\ \times [a(t_k, X_k) + a(t_k, X_k^p)] + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_k, X_k) + \sigma(t_k, X_k^p)) \Delta W_k,$$

где  $X_k^p = X_k + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k$ .



В этих формулах  $h$  — шаг численного интегрирования,  $\Delta W_k$  — случайная величина ( $s = 1$ ), имеющая стандартное нормальное распределение, а  $I$  — единичная матрица размера  $n \times n$ .

При численных расчетах будем моделировать  $L$  траекторий, т.е. строить дискретную аппроксимацию  $\{X_k^i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ , согласно приведенным выше разностным схемам и вычислять среднее значение отклонения траектории от многообразия в последнем узле  $t_N = T$ :

$$\hat{\varepsilon}_M = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \varepsilon_M^i, \quad \varepsilon_M^i = |M(t_0, X_0) - M(T, X_N^i)|,$$

а также доверительный интервал  $(\hat{\varepsilon}_M - \Delta_M, \hat{\varepsilon}_M + \Delta_M)$ , где

$$\Delta_M = \frac{3\hat{\sigma}_M}{\sqrt{L}}, \quad \hat{\sigma}_M = \sqrt{\frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (\varepsilon_M^i - \hat{\varepsilon}_M)^2}.$$

### Вычислительные эксперименты

В этом разделе приведем результаты расчетов для ряда примеров, полученные в соответствии с описанной выше методикой проведения вычислительных экспериментов. Не ограничивая общности, положим  $t_0 = 0$  и  $T = 1$ , т.е. будем рассматривать стохастические динамические системы на отрезке времени  $\Gamma = [0, 1]$ . Для каждого примера будем моделировать  $L = 10000$  траекторий.

**Пример 1.** Рассмотрим двумерную стохастическую динамическую систему с вектором состояния  $X = [X_1 \ X_2]^T$ , находящуюся под непрерывными случайными воздействиями, траектории которой должны с вероятностью 1 оставаться на эллиптическом (круговом) цилиндре:

$$M(t, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = C = \text{const.}$$

Уравнения Ито, которым удовлетворяет случайный процесс  $X(t) = [X_1(t) \ X_2(t)]^T$ , имеют вид (6), а коэффициенты в этих уравнениях записываются следующим образом:

$$f_1(t, x_1, x_2) = \frac{x_2 q_1(t, x_1, x_2)}{x_1 q_3(t, x_1, x_2) - x_2 q_2(t, x_1, x_2)} - 2x_1 q_0^2(t, x_1, x_2),$$

$$f_2(t, x_1, x_2) = -\frac{x_1 q_1(t, x_1, x_2)}{x_1 q_3(t, x_1, x_2) - x_2 q_2(t, x_1, x_2)} - 2x_2 q_0^2(t, x_1, x_2),$$

$$\sigma_1(t, x_1, x_2) = 2x_2q_0(t, x_1, x_2), \quad \sigma_2(t, x_1, x_2) = -2x_1q_0(t, x_1, x_2),$$

где функции  $q_0(t, x_1, x_2)$ ,  $q_1(t, x_1, x_2)$ ,  $q_2(t, x_1, x_2)$  и  $q_3(t, x_1, x_2)$  могут выбираться произвольным образом, чтобы были выполнены условия существования и единственности решения стохастических дифференциальных уравнений.

Выберем эти функции так, чтобы стохастическая динамическая система была линейной. Для этого положим

$$q_0(t, x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_1(t, x_1, x_2) = 1, \quad q_2(t, x_1, x_2) = \frac{1}{x_2} \quad \text{и} \quad q_3(t, x_1, x_2) = \frac{2}{x_1} \\ (x_1q_3(t, x_1, x_2) - x_2q_2(t, x_1, x_2) \equiv 1),$$

следовательно,

$$dX_1(t) = (-X_1(t) + X_2(t))dt + \sqrt{2}X_2(t)dW(t), \quad X_1(0) = X_{10}, \\ dX_2(t) = (-X_1(t) - X_2(t))dt - \sqrt{2}X_1(t)dW(t), \quad X_2(0) = X_{20}.$$

Соответствующие стохастические дифференциальные уравнения в смысле Стратоновича (7) имеют вид

$$dX_1(t) = X_2(t)dt + \sqrt{2}X_2(t) \circ dW(t), \quad X_1(0) = X_{10}, \\ dX_2(t) = -X_1(t)dt - \sqrt{2}X_1(t) \circ dW(t), \quad X_2(0) = X_{20}.$$

На рис. 1 показаны три выборочные траектории случайного процесса  $X(t)$  (две координаты; каждой из выборочных траекторий соответствует свой цвет: синий, красный и зеленый, второй координате по сравнению с первой соответствует менее насыщенный цвет; точками показано значение функции  $M(t, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  на выборочных траекториях:  $M(t) = M(t, X_1(t), X_2(t))$ ). Кроме того, на этом же рисунке показаны их проекции на фазовую плоскость. На рис. 2 изображены те же выборочные траектории в пространстве  $[t_0, T] \times \mathbb{R}^2$  и соответствующее многообразие (круговой цилиндр). При построении траекторий применялся стохастический метод Эйлера с шагом  $h = 10^{-4}$ . Начальные данные  $X_{10} = X_{20} = 1$ , т.е. многообразие задается уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 2$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Далее приведены результаты моделирования в виде таблицы и графиков. В табл. 1 даны средние значения отклонения траектории в момент времени  $t = 1$  в смысле величины

$$|M(1, X_1(1), X_2(1)) - M(0, X_{10}, X_{20})| = |M(1, X_1(1), X_2(1)) - 2|$$

в зависимости от шага численного интегрирования  $h$ . Эти же данные в логарифмическом масштабе для наглядности представлены в виде графиков. На рис. 3 красным показано среднее отклонение, тонкими черными линиями — границы доверительного интервала, точками — график  $ch^p$  при  $p = 0.5$  для стохастического метода Эйлера и метода Артемьева для уравнений в смысле Ито, при  $p = 1.0$  для остальных методов; для всех перечисленных методов  $c = 10$ . Здесь и далее принята следующая нумерация методов для таблиц и порядок соответствия графикам средних отклонений:

Методы численного решения уравнений в смысле Ито

I.1. Метод Эйлера      I.2. Метод Мильштейна

I.3. Метод Платена      I.4. Метод Артемьева

Методы численного решения уравнений в смысле Стратоновича

II.1. Метод Хьюна      II.2. Метод Рунге–Кутты

II.3. Метод Артемьева      II.4. Метод Авериной

**Пример 2.** Рассмотрим двумерную стохастическую динамическую систему с вектором состояния  $X = [X_1 \ X_2]^T$ , находящуюся под непрерывными случайными воздействиями, траектории которой должны с вероятностью 1 оставаться на гиперболическом цилиндре:

$$M(t, x_1, x_2) = x_1 x_2 = C = \text{const.}$$

Уравнения Ито, которым удовлетворяет случайный процесс  $X(t) = [X_1(t) \ X_2(t)]^T$ , как и ранее, имеют вид (6). Находим коэффициенты в этих уравнениях:

$$f_1(t, x_1, x_2) = -\frac{x_1 q_1(t, x_1, x_2)}{x_1 q_2(t, x_1, x_2) - x_2 q_3(t, x_1, x_2)} + \frac{x_1}{2} q_0^2(t, x_1, x_2),$$

$$f_2(t, x_1, x_2) = \frac{x_2 q_1(t, x_1, x_2)}{x_1 q_2(t, x_1, x_2) - x_2 q_3(t, x_1, x_2)} + \frac{x_2}{2} q_0^2(t, x_1, x_2),$$

$$\sigma_1(t, x_1, x_2) = x_1 q_0(t, x_1, x_2), \quad \sigma_2(t, x_1, x_2) = -x_2 q_0(t, x_1, x_2).$$

Выберем эти функции так, чтобы стохастическая динамическая система была линейной. Например,

$$q_0(t, x_1, x_2) = 1, \quad q_1(t, x_1, x_2) = 1, \quad q_2(t, x_1, x_2) = \frac{2}{x_1} \quad \text{и} \quad q_3(t, x_1, x_2) = \frac{1}{x_2}$$

$$(x_1 q_2(t, x_1, x_2) - x_2 q_3(t, x_1, x_2) \equiv 1).$$

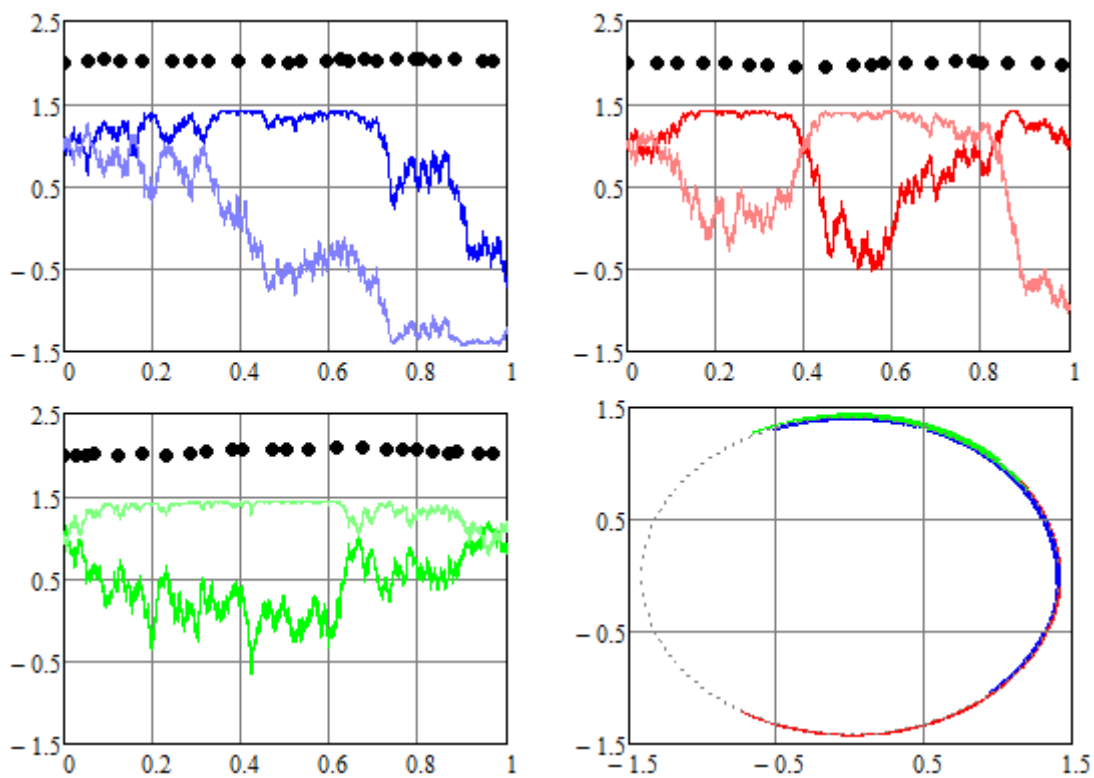


Рис. 1. Выборочные траектории случайного процесса  $X(t)$  (проекция, фазовые траектории).

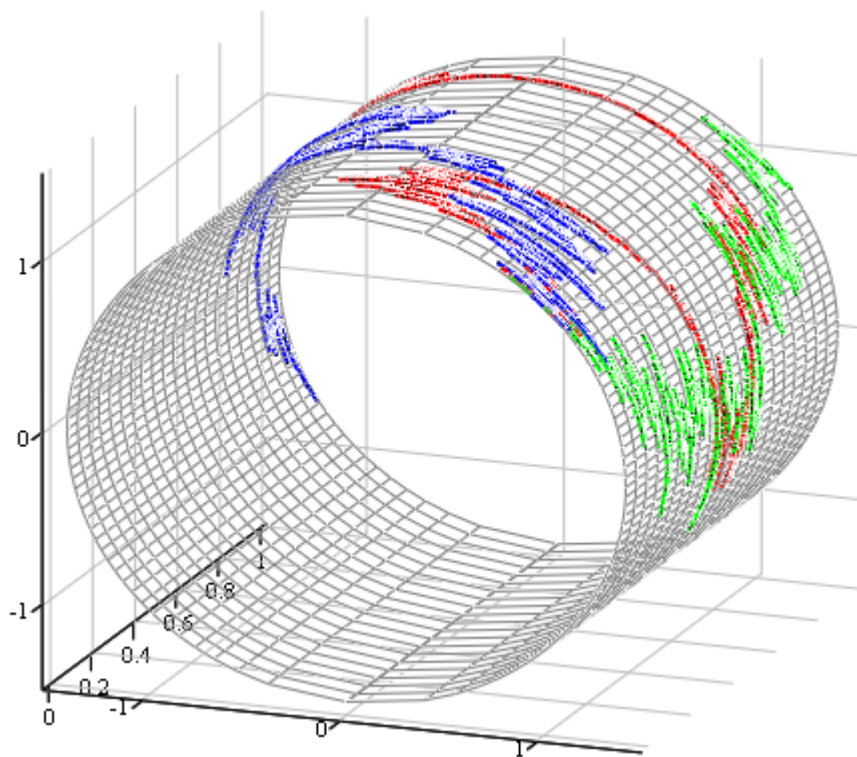


Рис. 2. Выборочные траектории случайного процесса  $X(t)$  на цилиндрической поверхности.

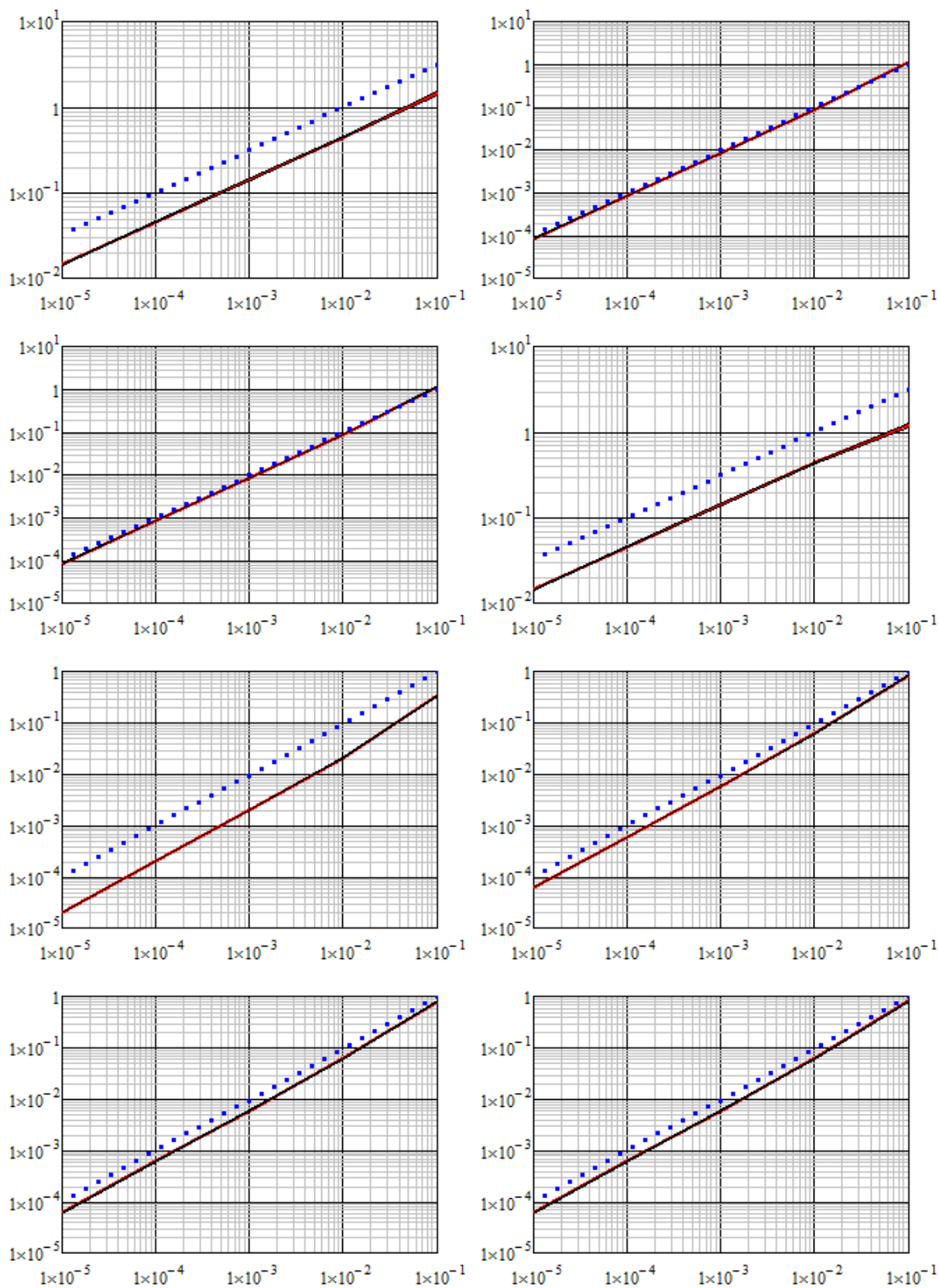


Рис. 3. Точность методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений (соответствие численным методам см. на стр. 64).

Таблица 1. Отклонение от заданного многообразия в зависимости от шага численного интегрирования  $h$ .

Метод \ Шаг $h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
I.1	1.446657 $\pm 0.069984$	0.447843 $\pm 0.011673$	0.143693 $\pm 0.003294$	0.045131 $\pm 0.001029$	0.014345 $\pm 0.000325$
I.2	1.136444 $\pm 0.038756$	0.087448 $\pm 0.001691$	0.008451 $\pm 0.000151$	0.000846 $\pm 0.000015$	0.000083 $\pm 1.5 \cdot 10^{-6}$
I.3	1.150637 $\pm 0.038547$	0.087229 $\pm 0.001712$	0.008500 $\pm 0.000151$	0.000832 $\pm 0.000015$	0.000084 $\pm 1.5 \cdot 10^{-6}$
I.4	1.199571 $\pm 0.051485$	0.436593 $\pm 0.010972$	0.144217 $\pm 0.003292$	0.045722 $\pm 0.001032$	0.014377 $\pm 0.000323$
II.1	0.334666 $\pm 0.016954$	0.021042 $\pm 0.000460$	0.002006 $\pm 0.000014$	0.000200 $\pm 4.5 \cdot 10^{-7}$	0.000020 $\pm 1.4 \cdot 10^{-8}$
II.2	0.855157 $\pm 0.029713$	0.062376 $\pm 0.000624$	0.006035 $\pm 0.000019$	0.000600 $\pm 5.9 \cdot 10^{-7}$	0.000060 $\pm 1.9 \cdot 10^{-8}$
II.3	0.793538 $\pm 0.029343$	0.062734 $\pm 0.001043$	0.006046 $\pm 0.000085$	0.000604 $\pm 8.4 \cdot 10^{-6}$	0.000060 $\pm 8.3 \cdot 10^{-7}$
II.4	0.821524 $\pm 0.030060$	0.062312 $\pm 0.001050$	0.006016 $\pm 0.000085$	0.000605 $\pm 8.3 \cdot 10^{-6}$	0.000060 $\pm 8.3 \cdot 10^{-7}$

Таким образом,

$$dX_1(t) = -\frac{X_1(t)}{2}dt + X_1(t)dW(t), \quad X_1(0) = X_{10},$$

$$dX_2(t) = \frac{3X_2(t)}{2}dt - X_2(t)dW(t), \quad X_2(0) = X_{20}.$$

Соответствующие стохастические дифференциальные уравнения в смысле Стратоновича (7) имеют вид

$$dX_1(t) = -X_1(t)dt + X_1(t) \circ dW(t), \quad X_1(0) = X_{10},$$

$$dX_2(t) = X_2(t)dt - X_2(t) \circ dW(t), \quad X_2(0) = X_{20}.$$

Заметим, что для этой системы уравнения связаны только тем, что в них входит один и тот же скалярный стандартный винеровский случайный процесс  $W(t)$ .

Далее на рис. 4 и 5 показаны три выборочные траектории случайного процесса  $X(t)$ : проекции на фазовую плоскость и соответствующее многообразие (гиперболический цилиндр). При построении траекторий применялся стохастический метод Эйлера с шагом  $h = 10^{-4}$ . Начальные данные  $X_{10} = X_{20} = 1$

не отличаются от предыдущего примера, т.е. многообразие задается уравнением  $x_1 x_2 = 1$ .

Дополнительно результаты моделирования приведены в виде табл. 2 и графиков на рис. 6. Обозначения на всех рисунках не отличаются от обозначений, принятых в предыдущем примере, график  $ch^p$  показан при  $p = 0.5$  для стохастического метода Эйлера и метода Артемьева для уравнений в смысле Ито, при  $p = 1.0$  для остальных методов; для всех перечисленных методов  $c = 1$ .

Таблица 2. Отклонение от заданного многообразия в зависимости от шага численного интегрирования  $h$ .

Метод \ Шаг $h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
I.1	0.423398 $\pm 0.008895$	0.114778 $\pm 0.002568$	0.035803 $\pm 0.000810$	0.011424 $\pm 0.000257$	0.003553 $\pm 0.000080$
I.2	0.172053 $\pm 0.004197$	0.016075 $\pm 0.000367$	0.001597 $\pm 0.000036$	0.000160 $\pm 3.6 \cdot 10^{-6}$	0.000016 $\pm 3.7 \cdot 10^{-7}$
I.3	0.172053 $\pm 0.004197$	0.016075 $\pm 0.000367$	0.001597 $\pm 0.000036$	0.000160 $\pm 3.6 \cdot 10^{-6}$	0.000016 $\pm 3.7 \cdot 10^{-7}$
I.4	0.438849 $\pm 0.009507$	0.115831 $\pm 0.002588$	0.035876 $\pm 0.000809$	0.011483 $\pm 0.000257$	0.003547 $\pm 0.000081$
II.1	0.046477 $\pm 0.002382$	0.002651 $\pm 0.000058$	0.000251 $\pm 1.8 \cdot 10^{-6}$	0.000025 $\pm 5.6 \cdot 10^{-8}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$ $\pm 1.8 \cdot 10^{-9}$
II.2	0.105436 $\pm 0.003351$	0.007772 $\pm 0.000077$	0.000751 $\pm 2.3 \cdot 10^{-6}$	0.000075 $\pm 7.4 \cdot 10^{-8}$	$7.5 \cdot 10^{-6}$ $\pm 2.3 \cdot 10^{-9}$
II.3	0.117600 $\pm 0.003582$	0.010297 $\pm 0.000231$	0.001018 $\pm 0.000022$	0.000101 $\pm 2.2 \cdot 10^{-6}$	0.000010 $\pm 2.2 \cdot 10^{-7}$
II.4	0.113484 $\pm 0.003387$	0.010226 $\pm 0.000228$	0.001017 $\pm 0.000022$	0.000101 $\pm 2.2 \cdot 10^{-6}$	0.000010 $\pm 2.2 \cdot 10^{-7}$

**Пример 3.** Рассмотрим двумерную стохастическую динамическую систему с вектором состояния  $X = [X_1 \ X_2]^T$ , находящуюся под непрерывными случайными воздействиями, траектории которой должны с вероятностью 1 оставаться на параболическом цилиндре:

$$M(t, x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 = C = \text{const.}$$

Уравнения Ито, которым удовлетворяет случайный процесс  $X(t) = [X_1(t) \ X_2(t)]^T$ , как и ранее, имеют вид (6). Записываем коэффициенты для

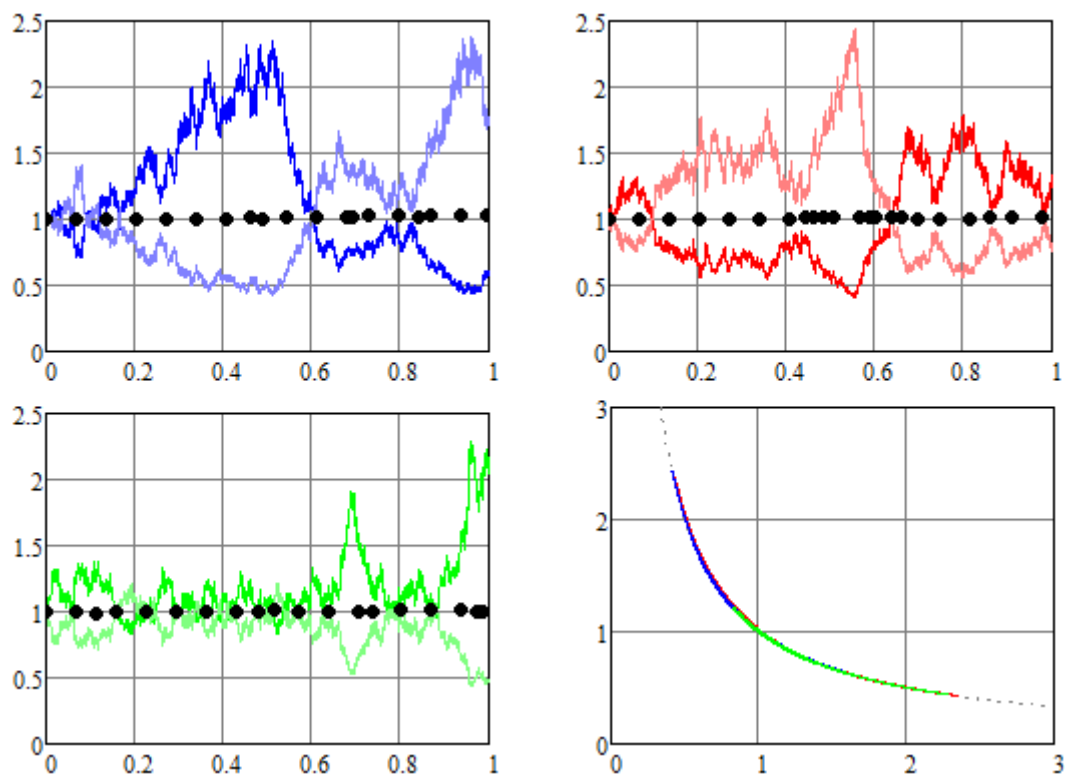


Рис. 4. Выборочные траектории случайного процесса  $X(t)$  (проекция, фазовые траектории).

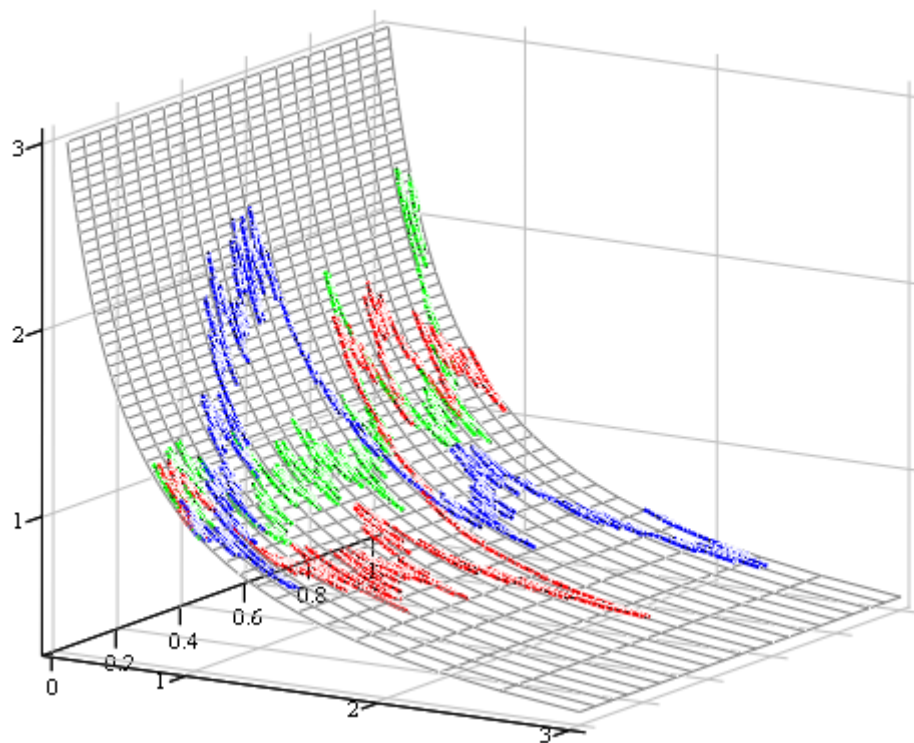


Рис. 5. Выборочные траектории случайного процесса  $X(t)$  на цилиндрической поверхности.



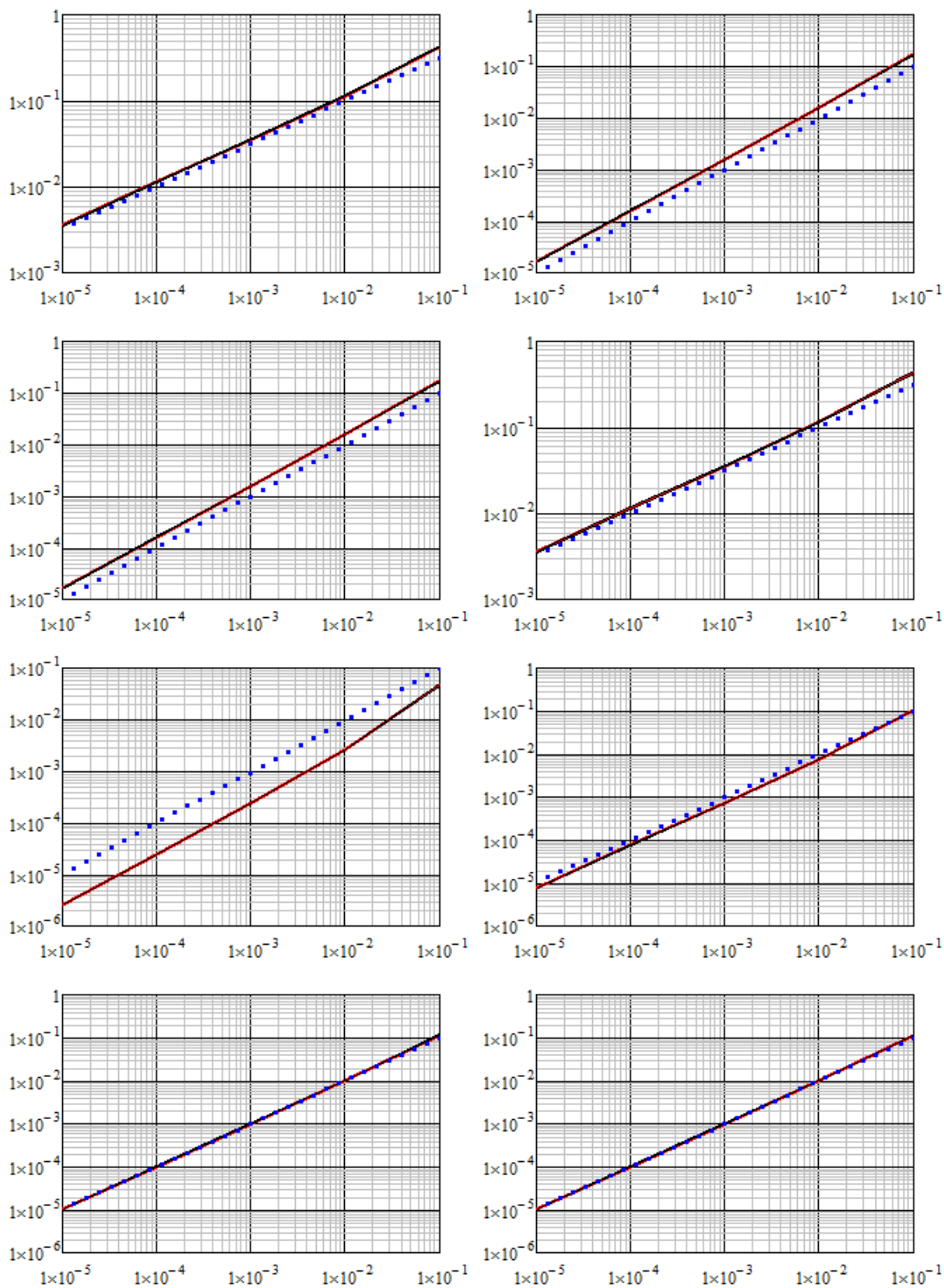


Рис. 6. Точность методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений (соответствие численным методам см. на стр. 64).

этих уравнений:

$$f_1(t, x_1, x_2) = -\frac{q_1(t, x_1, x_2)}{2x_1q_3(t, x_1, x_2) + q_2(t, x_1, x_2)},$$

$$f_2(t, x_1, x_2) = -\frac{2x_1q_1(t, x_1, x_2)}{2x_1q_3(t, x_1, x_2) + q_2(t, x_1, x_2)} + q_0^2(t, x_1, x_2),$$

$$\sigma_1(t, x_1, x_2) = q_0(t, x_1, x_2), \quad \sigma_2(t, x_1, x_2) = 2x_1q_0(t, x_1, x_2).$$

Выберем эти функции так, чтобы стохастическая динамическая система была линейной. Например,

$$q_0(t, x_1, x_2) = 1, \quad q_1(t, x_1, x_2) = 1, \quad q_2(t, x_1, x_2) = -1 \quad \text{и} \quad q_3(t, x_1, x_2) = \frac{1}{x_1}$$

$$(2x_1q_3(t, x_1, x_2) + q_2(t, x_1, x_2) \equiv 1).$$

Таким образом,

$$dX_1(t) = -dt + dW(t), \quad X_1(0) = X_{10},$$

$$dX_2(t) = (1 - 2X_1(t))dt + 2X_1(t)dW(t), \quad X_2(0) = X_{20}.$$

Соответствующие стохастические дифференциальные уравнения в смысле Стратоновича (7) имеют вид

$$dX_1(t) = -dt + dW(t), \quad X_1(0) = X_{10},$$

$$dX_2(t) = -2X_1(t)dt + 2X_1(t) \circ dW(t), \quad X_2(0) = X_{20}.$$

Результаты моделирования представлены аналогично предыдущим примерам, а именно на рис. 7 и 8 показаны три выборочные траектории случайного процесса  $X(t)$ : проекции на фазовую плоскость и соответствующее многообразие (параболический цилиндр). При построении траекторий применялся стохастический метод Эйлера с шагом  $h = 10^{-4}$ . Начальные данные  $X_{10} = X_{20} = 1$  такие же, как и в предыдущих примерах, т.е. многообразие задается уравнением  $x_2 - x_1^2 = 0$ .

Дополнительно результаты моделирования приведены в виде табл. 3 и графиков на рис. 9. Обозначения на всех рисунках не отличаются от обозначений, принятых в предыдущем примере, график  $ch^p$  показан при  $p = 0.5$  для стохастического метода Эйлера и метода Артемьева для уравнений в смысле Ито, при  $p = 1.0$  для остальных методов; для всех перечисленных методов

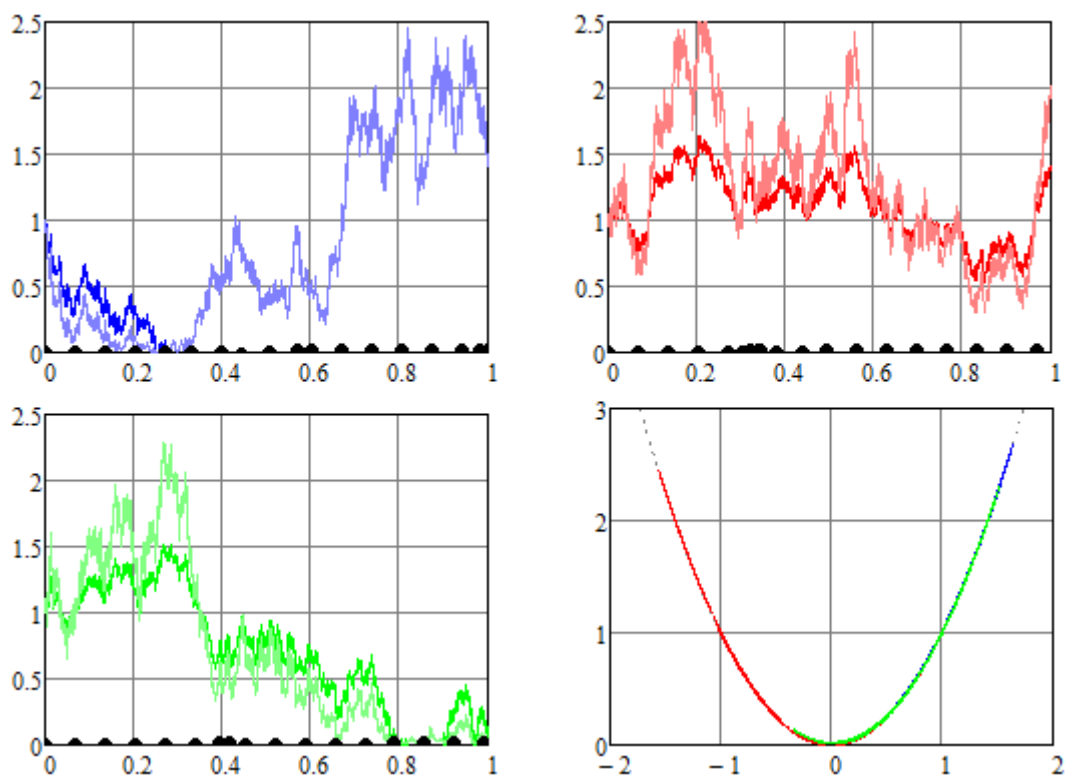


Рис. 7. Выборочные траектории случайного процесса  $X(t)$  (проекция, фазовые траектории).

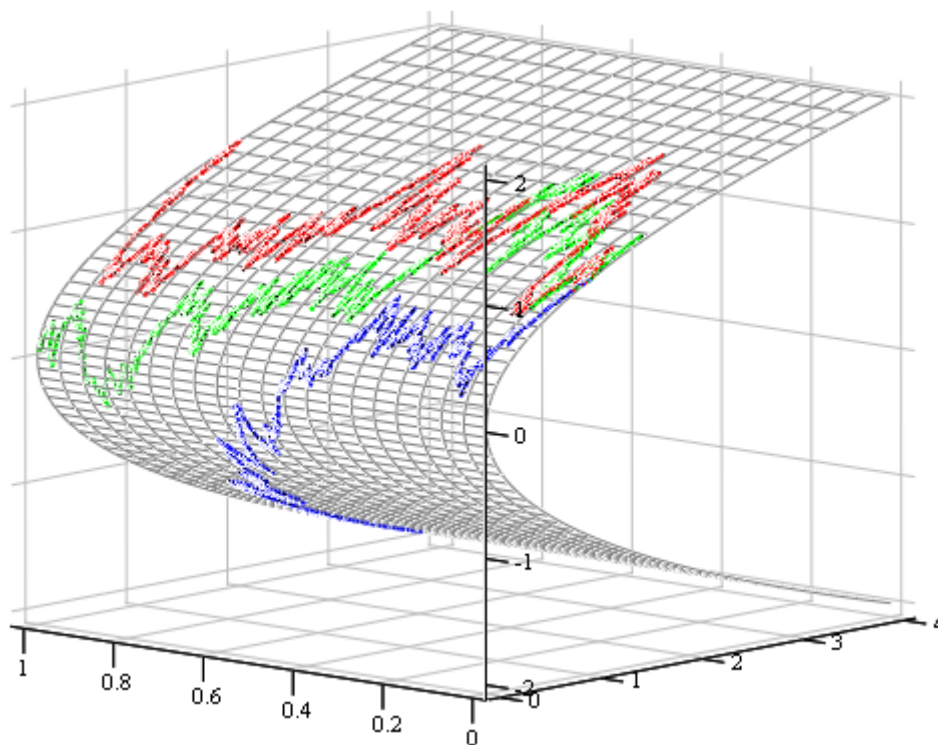


Рис. 8. Выборочные траектории случайного процесса  $X(t)$  на цилиндрической поверхности.

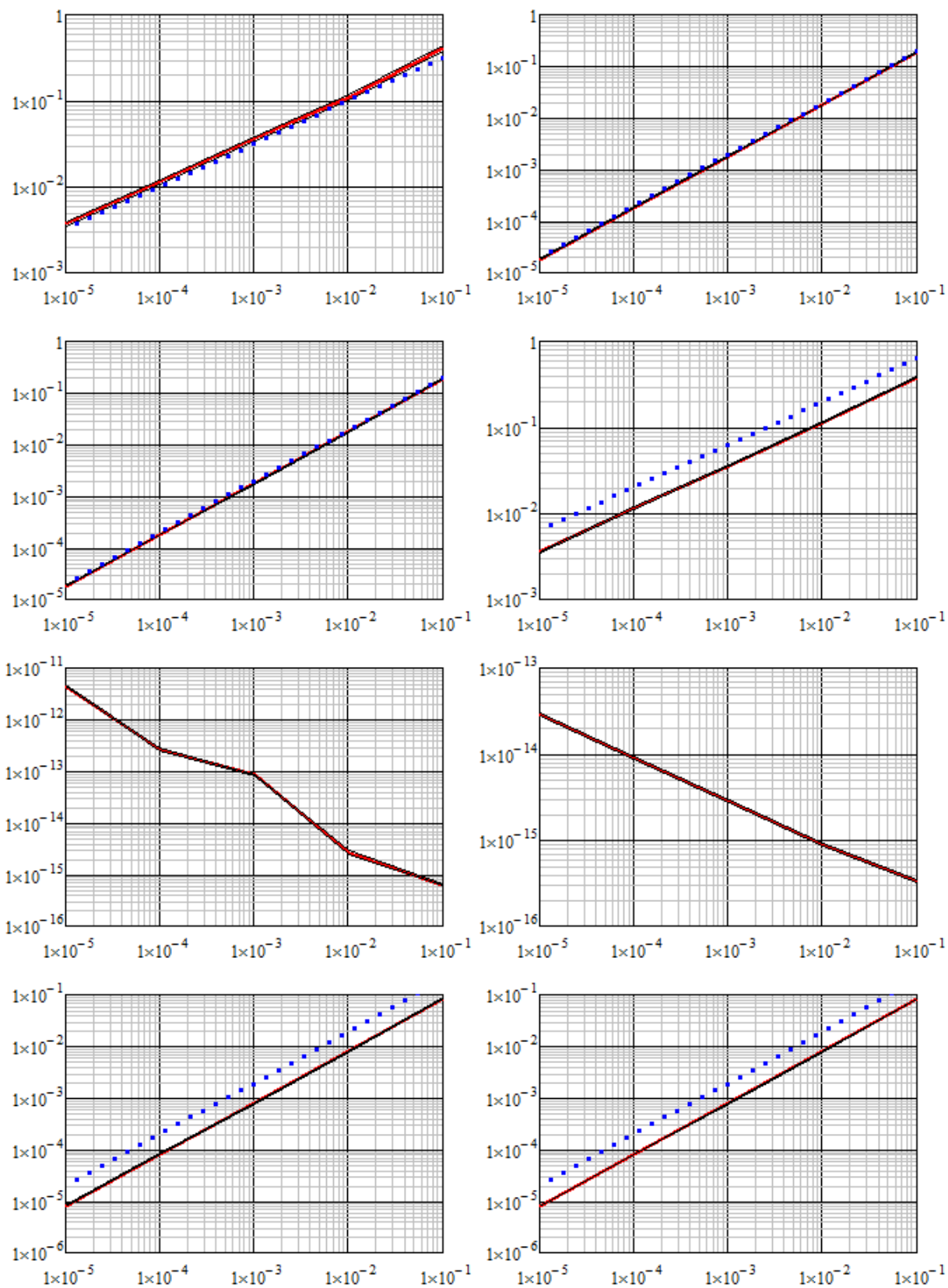


Рис. 9. Точность методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений (соответствие численным методам см. на стр. 64).

Таблица 3. Отклонение от заданного многообразия в зависимости от шага численного интегрирования  $h$ .

Метод \ Шаг $h$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
I.1	0.397297 $\pm 0.009984$	0.114164 $\pm 0.002597$	0.035436 $\pm 0.000810$	0.011375 $\pm 0.000257$	0.003563 $\pm 0.000080$
I.2	0.188112 $\pm 0.004217$	0.018082 $\pm 0.000402$	0.001820 $\pm 0.000041$	0.000181 $\pm 4.1 \cdot 10^{-6}$	0.000018 $\pm 4.0 \cdot 10^{-7}$
I.3	0.188219 $\pm 0.004210$	0.017977 $\pm 0.000405$	0.001770 $\pm 0.000040$	0.000177 $\pm 4.0 \cdot 10^{-6}$	0.000018 $\pm 4.0 \cdot 10^{-7}$
I.4	0.381135 $\pm 0.009180$	0.114156 $\pm 0.002592$	0.035800 $\pm 0.000808$	0.011480 $\pm 0.000257$	0.003547 $\pm 0.000081$
II.1	0.000000 $\pm 0.000000$	$2.6 \cdot 10^{-15}$ $\pm 0.000000$	$8.5 \cdot 10^{-14}$ $\pm 2.9 \cdot 10^{-15}$	$2.7 \cdot 10^{-13}$ $\pm 2.2 \cdot 10^{-14}$	$4.5 \cdot 10^{-12}$ $\pm 1.7 \cdot 10^{-13}$
II.2	0.000000 $\pm 0.000000$	0.000000 $\pm 0.000000$	$2.9 \cdot 10^{-15}$ $\pm 0.000000$	$9.0 \cdot 10^{-15}$ $\pm 0.000000$	$2.9 \cdot 10^{-14}$ $\pm 1.1 \cdot 10^{-15}$
II.3	0.084528 $\pm 0.001885$	0.007971 $\pm 0.000180$	0.000801 $\pm 0.000018$	0.000081 $\pm 1.8 \cdot 10^{-6}$	$8.0 \cdot 10^{-6}$ $\pm 1.8 \cdot 10^{-7}$
II.4	0.082953 $\pm 0.001871$	0.007998 $\pm 0.000184$	0.000795 $\pm 0.000018$	0.000080 $\pm 1.8 \cdot 10^{-6}$	$7.9 \cdot 10^{-6}$ $\pm 1.8 \cdot 10^{-7}$

$c = 2$ . Для метода Хьюна и метода типа Рунге–Кутты полученные погрешности соответствуют ошибкам машинной арифметики.

Все представленные расчеты проведены в системе компьютерной математики Mathcad.

### Обсуждение результатов

В работе проведен сравнительный анализ точности восьми численных методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений, решения которых с вероятностью 1 находятся на заданных цилиндрических поверхностях второго порядка: эллиптическом, гиперболическом и параболическом цилиндрах. Во всех примерах порядок сходимости в смысле отклонения траектории от многообразия для стохастического метода Эйлера и метода Артемьева для уравнений в смысле Ито равен  $p = 0.5$ , а для остальных методов —  $p = 1.0$  (тестирование проводилось для линейных стохастических систем второго порядка с мультипликативным скалярным шумом). Эти результаты соответствуют порядку сильной сходимости для таких задач. В общем случае порядок сходимости может оказаться ниже ( $p = 0.5$ ).

## Список литературы

- [1] *Дубко В.А.* Интегральные инварианты для одного класса систем стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН УССР. Серия А. — 1984. № 1. — С. 18–21.
- [2] *Дубко В.А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. — Владивосток: ДВО АН СССР, 1989.
- [3] *Карачанская Е.В.* Построение множества дифференциальных уравнений с заданным набором первых интегралов // Вестник ТОГУ. — 2011. Т. 20. № 3 (22). — С. 47–56.
- [4] *Карачанская Е.В.* Интегральные инварианты стохастических систем и программное управление с вероятностью 1. — Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2015.
- [5] *Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A.* Statistical modeling of random processes with invariants // Proceedings of the 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk Akademgorodok, Russia, September 18–22, 2017. — IEEE, 2017. — P. 34–37.
- [6] *Artemiev S.S., Averina T.A.* Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.
- [7] *Аверина Т.А.* Верификация численных методов решения систем со случайной структурой. — Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.
- [8] *Аверина Т.А.* Построение алгоритмов статистического моделирования систем со случайной структурой. — Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.
- [9] *Аверина Т.А., Артемьев С.С.* Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. — 1986. Т. 288. № 4. — С. 777–780.
- [10] *Averina T.A., Rybakov K.A.* Comparison of a statistical simulation method and a spectral method for analysis of stochastic multistructure systems with distributed transitions // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2007. Vol. 22. No. 5. — P. 431–447.

- [11] Burrage K., Tian T. Predictor-corrector methods of Runge–Kutta type for stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 2002. Vol. 40. No. 4. — P. 1516–1537.
- [12] Burrage K., Burrage P.M., Tian T. Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations: an overview // Proc. R. Soc. Lond. A. — 2004. Vol. 460. No. 2041. — P. 373–402.
- [13] Kloeden P.E., Pearson R.A. The numerical solution of stochastic differential equations // J. Aust. Math. Soc. B. — 1977. Vol. 20. — P. 8–12.
- [14] Kloeden P.E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1995.
- [15] Кузнецов Д.Ф. Повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича: разложения Фурье-Лежандра и тригонометрические разложения, аппроксимации, формулы // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2017. № 1.
- [16] Maruyama G. Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circolo Math. Palermo. — 1955. Vol. 2. No. 4. — P. 48–90.
- [17] Мильштейн Г.Н. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применения. — 1974. Т. 19. № 3. — С. 583–588.
- [18] Milstein G.N., Tretyakov M.V. Stochastic Numerics for Mathematical Physics. — Springer, 2004.
- [19] Никитин Н.Н., Разевиг В.Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1978. Т. 18. № 1. — С. 106–117.
- [20] Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. — М.: Вузовская книга, 2008.
- [21] Саульев В.К. Численное решение уравнений случайных процессов. — М.: Изд-во МАИ, 1989.
- [22] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наукова думка, 1968.