

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
№ 4, 2018  
Электронный журнал,  
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010  
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>  
e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Общая теория управления

**Описание и анализ линейных нестационарных  
непрерывных систем управления в спектральной области  
в неортогональных базисах. Орторекурсивный подход.**

В.В. Рыбин  
Московский авиационный институт  
[vv-ribin@mail.ru](mailto:vv-ribin@mail.ru)

**Аннотация**

Орторекурсивные разложения являются естественным обобщением классических разложений элементов гильбертова пространства в ряды Фурье. В статье рассматриваются орторекурсивные спектральные характеристики для описания сигналов и систем управления. Разработаны алгоритмы описания и анализа линейных нестационарных систем управления, находящихся под воздействием как детерминированных, так и случайных сигналов, использующие орторекурсивные спектральные характеристики. Эти алгоритмы реализованы в пакете расширения MLSY\_OSM\_SH для Mathcad, предназначенном для анализа нестационарных непрерывных систем управления целого и дробного порядка спектральным методом в системе функций Фабера–Шаудера. Результаты демонстрируются на модельных примерах выполнения элементарных и типовых операций спектрального метода.

**Ключевые слова:** нестационарные системы управления; спектральная форма математического описания; орторекурсивные спектральные характеристики; система функций Фабера–Шаудера; системы компьютерной математики; дробные интегрирующие и дифференцирующие звенья.

### **Abstract**

Orthorecursive expansions are the generalization of the classical expansions of elements of the Hilbert space into Fourier series. In the article orthorecursive spectral characteristics for the description of signals and control systems are considered. The algorithms using orthorecursive spectral characteristics and intended for the description and analysis of linear non-stationary control systems with both deterministic and random input signals are designed. These algorithms are implemented in package MLSY\_OSM\_SH (the extension of Mathcad) which is destined for the analysis of integer and fractional order non-stationary continuous control systems by the spectral method in the system of the Faber–Schauder functions. The results are demonstrated with model examples of the elementary and typical operations of the spectral method.

**Keywords:** non-stationary control systems; spectral form of mathematical description; orthorecursive spectral characteristics; Faber–Schauder functions; computer mathematics; fractional integral and derivative.

### **Введение**

Спектральный метод анализа линейных непрерывных детерминированных и стохастических систем управления был разработан В.В. Семеновым [1, 2], а затем обобщен на задачи анализа и синтеза линейных непрерывно-дискретных [3–5] и нелинейных систем управления [6]. Истоки спектрального метода анализа нестационарных систем управления лежат в представлении сигналов и их временных характеристик в виде ортогональных рядов. Коэффициенты этих рядов, отделенные от самих рядов, рассматриваются как характеристики сигналов и систем управления. Эти характеристики и составляют аппарат анализа систем управления. Спектральный аппарат включает характеристики сигналов – нестационарные спектральные характеристики (НСХ) функций времени и нестационарные спектральные плотности (НСП) случайных функций времени, а также характеристики систем управления – нестационарные передаточные функции (НПФ): нормальную (ННПФ), сопряженную (СНПФ), двумерную (ДНПФ). Все характеристики спектрального аппарата определены для обобщенных функций на конечных или бесконечных интервалах времени относительно широкого класса так называемых ортонормированных функций. В настоящее время все характеристики спектрального аппарата определены относительно биортонормированных функций [7], а сам спектральный метод распространен на системы управления, модели которых содержат дробные интегрирующие и дифференцирующие звенья [8, 9], т.е. с систем управления, содержащих дифференциальные операторы целого порядка  $n$ , на системы управления, которые содержат дифференциальные и интегральные операторы дробного порядка  $\mu$  [10].

В конце двадцатого и в начале двадцать первого века в работах Лукашенко Т.П. [11–14] введены орторекурсивные разложения, которые обладают свойствами, справедливыми для ортогональных систем функций, а именно для них справедливы тождество Бесселя, неравенство Бесселя, эквивалентность сходимости к разлагаемому элементу и равенство Парсеваля.

В данной статье вводятся орторекурсивные спектральные характеристики, определенные относительно полных неортогональных систем функций. Выводятся алгоритмы связи вход-выход для линейных нестационарных систем управления, находящихся под воздействием как детерминированных, так и случайных сигналов. Приводится краткое описание пакета расширения элементарных операций орторекурсивного спектрального метода в базисе функций Фабера–Шаудера MLSY\_OSH\_SM для системы компьютерной математики (СКМ) Mathcad. Демонстрируется на модельных примерах выполнение элементарных и типовых операций спектрального метода анализа нестационарных непрерывных систем управления целого и дробного порядка.

### 1. Орторекурсивные разложения

Понятие орторекурсивного разложения (ОРР) было введено в работе [11], где формальный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{x}_i e_i \quad (1)$$

назван орторекурсивным разложением элемента  $x$  по системе  $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$  ненулевых элементов  $H$  (орторекурсивный ряд Фурье), где  $(H, (\cdot, \cdot))$  – пространство со скалярным произведением над полем действительных или комплексных чисел, а  $x$  – некоторый элемент  $H$ . Последовательность орторекурсивных коэффициентов  $\{\hat{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$  ряда (1) определяется индуктивно через последовательность остатков  $\{r_i(x)\}_{i=-1}^{\infty}$ . А именно, если определен остаток  $r_i(x)$ , то

$$\hat{x}_{i+1} = \frac{(r_i(x), e_{i+1})}{(e_{i+1}, e_{i+1})}, \quad (2)$$

где

$$r_{i+1}(x) = r_i(x) - \hat{x}_{i+1} e_{i+1}, \quad (3)$$

а

$$r_{-1}(x) = x. \quad (4)$$

Заметим, что в случае ортогональной системы орторекурсивное разложение дает в точности ряд Фурье разлагаемого элемента по этой системе. Кроме того, для орторекурсивных разложений справедливы тождество Бесселя, неравенство Бесселя, эквивалентность сходимости к разлагаемому элементу и равенство Парсеваля, а систему  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H \setminus \{0\}$  называют орторекурсивной системой разложения в пространстве  $H$ , если для любого элемента  $x \in H$  орторекурсивный ряд Фурье  $x$  по системе  $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$  сходится к  $x$  в  $H$ .

**Пример 1.** Система Фабера–Шаудера  $\Phi = \{\phi_i(\tau)\}_{i=0}^{\infty}$ . Эта неортогональная система [15] строится по принципу сжатий и сдвигов и задается следующим образом:

$$\begin{cases} \phi_0(\tau) = 1, \phi_1(\tau) = \tau, \\ \phi_i(\tau) = \phi_{n,k}(\tau) = \phi(2^n \tau - k), \\ i = 2^{n-1} + k + 1 = 2, 3, \dots, \\ n = 1, 2, \dots, \\ k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\phi(\tau) = \begin{cases} 2\tau, & \text{при } \tau \in [0, 1/2], \\ 2 - 2\tau, & \text{при } \tau \in [1/2, 1], \\ 0, & \text{при } \tau \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Эта система является системой разложения, в качестве коэффициентов разложения можно использовать коэффициенты, полученные при ОРР (1).

## 2. Орторекурсивные нестационарные спектральные характеристики

Будем применять орторекурсивный подход только к биортонормированным системам функций, для которых выполнены достаточные условия сходимости ОРР [16].

Систему функций  $\{\phi_i, \psi_i\}$ , определенных на нестационарном отрезке  $[0, t]$ , называют биортонормированной на этом отрезке [8, 9], если все функции этой системы удовлетворяют условию

$$(\phi_h, \psi_i) = \delta_{h,i}. \quad (6)$$

Условие (6) для непрерывных функций в развернутой форме имеет вид

$$(\phi_h, \psi_i) = \delta_{h,i} = \int_0^t \phi_h^*(t, \tau) \psi_i(t, \tau) d\tau.$$

**Детерминированные сигналы.** Нестационарной спектральной характеристикой (НСХ) в общем случае комплексно-значной функции  $x$  по биортонормированному базису  $\{\phi_i, \psi_i\}$  называют функцию  $X_{\phi}^{\psi}(X)$ , ордина-

тами которой являются коэффициенты Фурье функции  $x$  по указанному выше базису [8, 9]:

$$\left( \begin{array}{l} S[x] = X_{\phi}(i) = (\phi(i), x) = \int_0^t \phi^*(i, t, \tau) x(\tau) d\tau \\ S[x] = X_{\psi}(i) = (\psi(i), x) = \int_0^t \psi^*(i, t, \tau) x(\tau) d\tau \end{array} \right),$$

где  $S$  – прямое спектральное преобразование. Эти НСХ называют взаимно-

*сопряженными.*

Обратный переход от НСХ к функции  $x$ , определяется как скалярное произведение комплексно-сопряженного общего члена биортонормированной базисной системы  $\phi(i)$  или  $\psi(i)$  на взаимно-сопряженную НСХ. Поэтому имеем:

$$S_{\psi^*}^{-1} \begin{bmatrix} X(i) \\ \phi \end{bmatrix} = x = \left( \psi^*(i), \frac{X(i)}{\phi} \right), \quad S_{\phi^*}^{-1} \begin{bmatrix} X(i) \\ \psi \end{bmatrix} = x = \left( \phi^*(i), \frac{X(i)}{\psi} \right), \quad (7)$$

где  $S^{-1}$  – обратное спектральное преобразование.

Формулы (7) (формулы прямого преобразования) принимают вид

$$S_{\phi} [x(\tau)] = \frac{X(i,t)}{\phi} = \int_0^t \phi^*(i,t,\tau) x(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$S_{\psi} [x(\tau)] = \frac{X(i,t)}{\psi} = \int_0^t \psi^*(i,t,\tau) x(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Эти взаимно-сопряженные НСХ связаны между собой:

$$\frac{X}{\psi} = \Lambda_{\psi\psi^*} \cdot \frac{X}{\phi}, \quad \frac{X}{\phi} = \Lambda_{\phi\phi^*} \cdot \frac{X}{\psi},$$

где  $\Lambda$  – двумерная нестационарная характеристика связи (ДНХС), которая имеет вид:

$$\Lambda_{\gamma\gamma^*}(h,i,t,t) = \int_0^t \gamma^*(h,t,\tau) \gamma(i,t,\tau) d\tau. \quad (10)$$

Заметим, что матрица ДНХС  $\Lambda_{\psi\psi^*}$  является обратной к матрице  $\Lambda_{\phi\phi^*}$ , т.е.  $\Lambda_{\psi\psi^*} \cdot \Lambda_{\phi\phi^*} = \Lambda_{\phi\phi^*} \cdot \Lambda_{\psi\psi^*} = E$ .

Из формул (7)–(9) видно, что каждый из двух базисов  $\{\phi_i\}$ ,  $\{\psi_i\}$  можно использовать для разложения и восстановления сигнала. В дальнейшем будем считать, что  $\{\psi_i\}$  – базис разложения, а  $\{\phi_i\}$  – базис восстановления.

Орторекурсивные нестационарные спектральные характеристики определим через НСХ функции  $x$ , заданной в базисе восстановления  $\{\phi_i\}$ . Учитывая (1)–(4) и (10), находим алгоритм вычисления ординат ОРР функции  $x$  через ординаты НСХ в базисе восстановления:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\phi}(0,t) &= \frac{X_{\phi}(0,t)}{\Lambda_{\phi\phi^*}(0,0,t,t)} = \frac{\int_0^t \phi^*(0,t,\tau) x(\tau) d\tau}{\Lambda_{\phi\phi^*}(0,0,t,t)}, \quad (11) \\ \dot{X}_{\phi}(1,t) &= \frac{\int_0^t \phi^*(1,t,\tau) x(\tau) d\tau}{\int_0^t \phi^*(1,t,\tau) \phi(1,t,\tau) d\tau} - \dot{X}_{\phi}(0,t) \frac{\int_0^t \phi^*(0,t,\tau) \phi(1,t,\tau) d\tau}{\int_0^t \phi^*(1,t,\tau) \phi(1,t,\tau) d\tau} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{X(1,t)}{\phi} - \dot{X}(0,t) \frac{\Lambda(0,1,t,t)}{\phi\phi^*}, \\ \dot{X}(2,t) &= \frac{X(2,t) - \dot{X}(0,t) \frac{\Lambda(0,2,t,t)}{\phi\phi^*} - \dot{X}(1,t) \frac{\Lambda(1,2,t,t)}{\phi\phi^*}}{\phi} \end{aligned}$$

и т.д. Тогда для  $i = 1, 2, \dots$ , имеем:

$$\dot{X}(i,t) = \frac{X(i,t) - \sum_{k=0}^{i-1} \dot{X}(k,t) \frac{\Lambda(k,i,t,t)}{\phi\phi^*}}{\phi}, \quad (12)$$

где  $\dot{X}(i,t)$  – ОРР НСХ или ОНСХ.

Следовательно, орторекурсивной нестационарной спектральной характеристикой (ОНСХ) в общем случае комплексной функции  $x$  по неортонормальному базису  $\{\phi_i\}$  назовем функцию  $\dot{X}(i)$ , ординатами которой являются коэффициенты, найденные по формулам орторекурсивного преобразования (11), (12):

$$\dot{X}(i) = O \left[ \frac{X(i)}{\phi} \right], \quad (13)$$

где  $\frac{X(i)}{\phi}$  определяется формулой (8), а  $O$  – прямое орторекурсивное преобразование по формулам (11), (12).

Обратный переход от ОНСХ к функции  $x$ , т.е. орторекурсивное разложение элемента  $x$  по системе  $\{\phi_i\}$ , имеет вид

$$O^{-1} \left[ \frac{\dot{X}(i)}{\phi} \right] = x(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{X}(i,t) \phi_i(\tau), \quad (14)$$

где  $O^{-1}$  – обратное орторекурсивное преобразование.

В теории управления приходится оперировать не только функциями одного аргумента, но и функциями многих аргументов. Рассмотрим здесь только двумерную НСХ (ДНСХ) в базисе разложения и восстановления (формула прямого преобразования), которая представляет собой скалярное произведение общего члена базисной системы функций  $\{\psi \psi^*\}$  или  $\{\phi \phi^*\}$  и преобразуемой функции двух аргументов:

$$S_{\psi\psi^*}[x] = X_{\psi\psi^*}(h,i) = (\psi(h) \psi^*(i), x), \quad (15)$$

$$S_{\phi\phi^*}[x] = X_{\phi\phi^*}(h,i) = (\phi(h) \phi^*(i), x). \quad (16)$$

Тогда ОРР ДНСХ или ОДНСХ

$$O_{\phi\phi^*} \left[ X(h,i) \right]_{\phi\phi^*} = \ddot{X}(h,i), \quad (17)$$

где  $X(h,i)$  – ДНСХ (16), а формула (17) – формула прямого орторекурсивно-го преобразования ДНСХ (16).

Для ДНСХ (15) формула обращения в базисе восстановления имеет вид

$$S_{\phi^*\phi}^{-1} \left[ X(h,i) \right]_{\psi\psi^*} = x = \left( \phi^*(h)\phi(i), X(h,i) \right)_{\psi\psi^*},$$

а для ДНСХ (16) формула обращения в базисе разложения имеет вид

$$S_{\psi^*\psi}^{-1} \left[ X(h,i) \right]_{\phi\phi^*} = x = \left( \psi^*(h)\psi(i), X(h,i) \right)_{\phi\phi^*}.$$

Тогда обратный переход от ОДНСХ к функции  $x$ , т.е. двумерное орторекурсивное разложением элемента  $x$  по системе  $\{\phi\phi^*\}$ , имеет вид

$$O_{\phi^*\phi}^{-1} \left[ \ddot{X}(h,i) \right]_{\phi\phi^*} = x(\theta, \tau) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \ddot{X}(h,i,t,t) \phi_h^*(\theta) \phi_i(\tau). \quad (18)$$

**Случайные сигналы.** Первой НСП  ${}^1S_x(i)$  случайного в общем случае нестационарного сигнала  $x$  называют НСХ его математического ожидания  $m_x$  в базисе восстановления:

$${}^1S_x(i)_{\phi} = S_{\phi}[m_x]. \quad (19)$$

Тогда ОРР первой НСП

$${}^1\dot{S}_x(i)_{\phi} = O_{\phi} \left[ {}^1S_x(i)_{\phi} \right], \quad (20)$$

где  ${}^1S_x(i)_{\phi}$  – первая НСП (19), а формула (20) – формула прямого орторекурсивного преобразования первой НСП (19).

Второй НСП или просто НСП  $S_x(h,i)_{\phi\phi^*}$  случайного в общем случае нестационарного сигнала  $x$  называют ДНСХ его автоковариационной функции  $R_{xx}$  в базисе восстановления:

$$S_x(h,i)_{\phi\phi^*} = S_{\phi\phi^*}[R_{xx}]. \quad (21)$$

Тогда ОРР второй НСП

$$\ddot{S}_{xx}(h,i)_{\phi\phi^*} = O_{\phi\phi^*} \left[ S_x(h,i)_{\phi\phi^*} \right], \quad (22)$$

где  $S_x(h,i)_{\phi\phi^*}$  – вторая НСП (21), а формула (22) – формула прямого орторекурсивного преобразования второй НСП (21).

Нестационарной взаимной спектральной плотностью  $S_{xg}(h, i)$  случайных сигналов  $x$  и  $g$  назовем ДНСХ взаимной ковариационной функции этих сигналов  $R_{xg}$ :

$$S_{xg}(h, i) = S_{\phi\phi^*}[R_{xg}]. \quad (23)$$

Тогда ОРР нестационарной взаимной спектральной плотности

$$\ddot{S}_{xg}(h, i) = O_{\phi\phi^*} \left[ S_{xg}(h, i) \right], \quad (24)$$

где  $S_{xg}(h, i)$  – нестационарная взаимная спектральная плотность (23), а формула (24) – формула прямого орторекурсивного преобразования нестационарной взаимной спектральной плотности.

Обратный переход от ОНСП (20), (22), (24) к исходным характеристикам случайного сигнала  $m_x$ ,  $R_{xx}$ ,  $R_{xg}$  осуществляется по формулам обращения (14) и (18):

$$\begin{aligned} m_x &= O_{\phi^*}^{-1} \left[ \dot{S}_x(i) \right] = \left( \phi^*(i), \dot{S}_x(i) \right), \\ R_{xx} &= O_{\phi^*\phi}^{-1} \left[ \ddot{S}_x(h, i) \right] = \left( \phi^*(h)\phi(i), \ddot{S}_x(h, i) \right), \\ R_{xg} &= O_{\phi^*\phi}^{-1} \left[ \ddot{S}_{xg}(h, i) \right] = \left( \phi^*(h)\phi(i), \ddot{S}_{xg}(h, i) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

### 3. Описание линейных непрерывных систем управления

Напомним [1–5], что каждая непрерывная система описывается тремя связанными между собой нестационарными передаточными функциями (НПФ): *нормальной, сопряженной, двумерной*.

*Нестационарной нормальной передаточной функцией* (ННПФ) линейной системы называется НСХ ее нормальной импульсной реакции в базисе разложения:

$$N(h, t, \tau) = \int_0^t \psi^*(h, t, \theta) k(\theta, \tau) d\theta.$$

*Нестационарной сопряженной передаточной функцией* (СНПФ) линейной системы называется комплексно-сопряженная НСХ сопряженной импульсной реакции линейной системы в базисе восстановления:

$$H(i, t, \theta) = \int_0^t k(\theta, \tau) \phi(h, t, \tau) d\tau.$$

*Двумерной нестационарной передаточной функцией* (ДНПФ) линейной



системы называется ДНСХ ее ИПФ в базисе  $\{\psi_h, \phi_i\}$ :

$$W_{\psi\phi^*}(h, i, t, t) = \int_0^t \psi^*(h, t, \theta) \int_0^t k(\theta, \tau) \phi(i, t, \tau) d\tau d\theta.$$

Для каждой непрерывной системы будем рассматривать нестационарные спектральные характеристики (НСХ): *нормальную* (ННСХ), *двумерную* (ДНСХ).

*Нестационарной нормальной спектральной характеристикой* (ННСХ) линейной системы называется НСХ ее нормальной импульсной реакции в базисе восстановления:

$$N_{\phi}(h, t, \tau) = \int_0^t \phi^*(h, t, \theta) k(\theta, \tau) d\theta. \tag{26}$$

*Двумерной нестационарной спектральной характеристикой* (ДНСХ) линейной системы называется ДНСХ ее ИПФ в базисе  $\{\phi_h, \phi_i\}$ :

$$W_{\phi\phi^*}(h, i, t, t) = \int_0^t \phi^*(h, t, \theta) \int_0^t k(\theta, \tau) \phi(i, t, \tau) d\tau d\theta. \tag{27}$$

Введем теперь орторекурсивные НПФ:

*Орторекурсивной нестационарной нормальной передаточной функцией* (ОННПФ) линейной системы назовем орторекурсивное преобразование НСХ ее нормальной импульсной реакции в базисе восстановления:

$$\dot{N}_{\phi}(h) = O_{\phi} \left[ N_{\phi}(h) \right], \tag{28}$$

где  $N_{\phi}(h, t, \tau)$  – НСХ (26).

*Орторекурсивной двумерной нестационарной передаточной функцией* (ОДНПФ) линейной системы назовем ДНСХ ее ИПФ в базисе  $\{\phi_h, \phi_i\}$ :

$$\dot{W}_{\phi\phi^*}(h, i) = O_{\phi} \left[ W_{\phi\phi^*}(h, i) \right], \tag{29}$$

где  $W_{\phi\phi^*}(h, i, t, t)$  – ДНСХ (27).

Теперь, используя связи между НПФ и НСХ, можно записать формулы обращения НПФ:

$$k = \Phi \cdot \dot{N}_{\phi} = H \cdot \Lambda^{-1} \cdot \Phi^+ = \Phi \cdot \dot{W}_{\phi\phi^*} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \Phi^+. \tag{30}$$

В формулах (30)  $\Phi$  – матрицы-строки, составленные из систем базисных функций  $\{\phi(i)\}$ , а через  $\Phi^+$  обозначен комплексно-сопряженный столбец к  $\Phi$ .

Спектральные алгоритмы вычисления ОРР ДНПФ (ОДНПФ) элементарных звеньев непрерывной систем приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Звено	Уравнение звена	ИПФ	ОДНПФ	Номер формулы
Интегрирующее	$\frac{dx(\theta)}{d\theta} = g(\theta),$ $x(0) = 0$	$k(\theta, \tau) = 1(\theta - \tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta > 0, \\ 0, & \text{если } \theta \leq 0 \end{cases}$	$\dot{P}_{\phi\phi^*}^{-1}(h, i) = O_{\phi} \left[ P_{\phi\phi^*}^{-1}(h, i) \right],$ $P_{\phi\phi^*}^{-1}(h, i, t, t) = \int_0^i \phi^*(h, t, \theta) \int_0^{\theta} \phi(i, t, \tau) d\tau d\theta$	(31)
Дифференцирующее второго рода	$x(\theta) = \frac{dg(\theta)}{d\theta},$ $g(-0) = g(+0)$	$k(\theta, \tau) = 1(\theta) \frac{d}{d\theta} \delta(\theta - \tau)$	$\dot{\mathfrak{Z}}_{\phi\phi^*}(h, i) = O_{\phi} \left[ \mathfrak{Z}_{\phi\phi^*}(h, i) \right],$ $\mathfrak{Z}_{\phi\phi^*}(h, i, t, t) = \int_0^i \phi^*(h, t, \theta) \frac{d}{d\theta} \phi(i, t, \theta) d\theta$	(32)
Дифференцирующее первого рода	$x(\theta) = \frac{dg(\theta)}{d\theta},$ $\begin{cases} g(-0) = 0, \\ g(+0) \neq 0 \end{cases}$	$k(\theta, \tau) = \frac{d}{d\theta} \delta(\theta - \tau)$	$\dot{P}_{\phi\phi^*}(h, i) = O_{\phi} \left[ P_{\phi\phi^*}(h, i) \right],$ $P_{\phi\phi^*}(h, i, t, t) = v_{\phi\phi^*}(h, i, t, t) + \mathfrak{Z}_{\phi\phi^*}(h, i, t, t),$ $v_{\phi\phi^*}(h, i, t, t) = \phi^*(h, t, 0) \phi(i, t, 0)$	(33)
Интегродифференцирующее дробного порядка $\beta \in R$	$x(\theta) = g(\theta) * \Phi_{0+}^{\beta}(\theta),$ $\Phi_{0+}^{\beta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \theta^{\beta-1}, & \theta > 0, \\ 0, & \theta \leq 0, \end{cases}$ $\beta \in R$	$k(\theta, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} (\theta - \tau)^{\beta-1}$	$\dot{P}_{\phi\phi^*}^{-\beta}(h, i) = O_{\phi} \left[ P_{\phi\phi^*}^{-\beta}(h, i) \right],$ $P_{\phi\phi^*}^{-\beta}(h, i, t, t) = \int_0^i \phi^*(h, t, \theta) \times \int_0^{\theta} \phi(i, t, \tau) \frac{(\theta - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau d\theta$	(34)
Усилительное непрерывное	$x(\theta) = a(\theta)g(\theta)$	$k(\theta, \tau) = a(\theta)\delta(\theta - \tau)$	$\dot{A}_{\phi\phi^*}(h, i) = O_{\phi} \left[ A_{\phi\phi^*}(h, i) \right],$ $A_{\phi\phi^*}(h, i, t, t) = \int_0^i a(\theta) \phi^*(h, t, \theta) \phi(i, t, \theta) d\theta$	(35)
Чистого запаздывания	$x(\theta) = g(\theta - \theta_0),$ $\theta_0 > 0$	$k(\theta, \tau) = \delta(\theta - \tau - \theta_0)$	$\dot{\tau}_{\phi\phi^*}^{-\theta_0}(h, i) = O_{\phi} \left[ \tau_{\phi\phi^*}^{-\theta_0}(h, i) \right],$ $\tau_{\phi\phi^*}^{-\theta_0}(h, i, t, t) = \int_{\theta_0}^i \phi^*(h, t, \theta) \phi(i, t, \theta - \theta_0) d\theta$	(36)
Чистого упреждения	$x(\theta) = g(\theta - \theta_0),$ $\theta_0 < 0$	$k(\theta, \tau) = \delta(\theta - \tau - \theta_0)$	$\dot{\tau}_{\phi\phi^*}^{-\theta_0}(h, i) = O_{\phi} \left[ \tau_{\phi\phi^*}^{-\theta_0}(h, i) \right],$ $\tau_{\phi\phi^*}^{-\theta_0}(h, i, t, t) = \int_0^{t+\theta_0} \phi^*(h, t, \theta) \phi(i, t, \theta - \theta_0) d\theta$	(37)

**Спектральные связи вход-выход при детерминированных и случайных воздействиях и нулевых начальных условиях.** Получение этих связей базируется на связях вход-выход во временной области

$x(\theta) = \int_0^t k(\theta, \tau)g(\tau)d\tau$ . Преобразуя эту связь в спектральную область и учитывая определение ОДНПФ (29), а также орторекурсивное разложение (14), получим

$$\dot{X}_{\phi} = \dot{W}_{\phi\phi^*} \cdot \dot{G}_{\phi} \quad (38)$$

Аналогично устанавливаются спектральные связи вход-выход при случайных воздействиях и нулевых начальных условиях. Они имеют вид:

$${}^1\dot{S}_{x\phi} = \dot{W}_{\phi\phi^*} \cdot {}^1\dot{S}_{g\phi}, \quad \dot{S}_{x\phi} = \dot{W}_{\phi\phi^*} \cdot \dot{S}_{g\phi} \cdot \dot{W}_{\phi\phi^*}^+, \quad \dot{S}_{xg\phi} = \dot{W}_{\phi\phi^*} \cdot \dot{S}_{g\phi} \quad (39)$$

**ОДНПФ соединений линейных непрерывных звеньев.** Выведем формулы, связывающие ОДНПФ линейных непрерывных звеньев и их параллельного (рис. 1, а), последовательного (рис. 1, б) соединений и соединения с обратной связью (рис. 1, в).

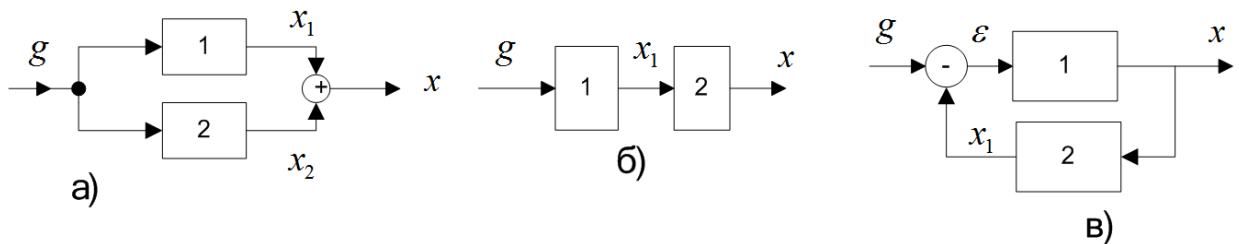


Рис. 1. Структурные схемы соединения звеньев:

а) параллельного, б) последовательного, в) с обратной связью  
Используя связи вход-выход (38), составим системы уравнений:

для параллельного соединения

$$\dot{X}_{\phi} = \dot{X}_{1\phi} + \dot{X}_{2\phi}; \quad \dot{X}_{1\phi} = \dot{W}_{1\phi\phi^*} \cdot \dot{G}_{\phi}; \quad \dot{X}_{2\phi} = \dot{W}_{2\phi\phi^*} \cdot \dot{G}_{\phi};$$

для последовательного соединения

$$\dot{X}_{\phi} = \dot{W}_{2\phi\phi^*} \cdot \dot{X}_{1\phi}; \quad \dot{X}_{1\phi} = \dot{W}_{1\phi\phi^*} \cdot \dot{G}_{\phi};$$

для соединения с обратной связью

$$\dot{X}_{\phi} = \dot{W}_{1\phi\phi^*} \cdot \dot{\varepsilon}_{\phi}; \quad \dot{X}_{1\phi} = \dot{W}_{2\phi\phi^*} \cdot \dot{X}_{\phi}; \quad \dot{\varepsilon}_{\phi} = \dot{G}_{\phi} - \dot{X}_{1\phi}.$$

Решая эти уравнения, т.е. исключая из них матрицы-столбцы ОНСХ промежуточных сигналов, получаем:

для параллельного соединения

$$\dot{X}_{\phi} = \left[ \begin{array}{c} \dot{W}_{1\phi\phi^*} + \dot{W}_{2\phi\phi^*} \\ \dot{\phi\phi^*} \end{array} \right] \dot{G}_{\phi} \quad (40)$$

для последовательного соединения

$$\dot{X}_{\phi} = \dot{W}_{\phi\phi^*}^2 \cdot \dot{W}_{\phi\phi^*}^1 \cdot \dot{G}_{\phi}; \quad (41)$$

для соединения с обратной связью

$$\dot{X}_{\phi} = \left[ E + \dot{W}_{\phi\phi^*}^1 \cdot \dot{W}_{\phi\phi^*}^2 \right]^{-1} \dot{W}_{\phi\phi^*}^1 \cdot \dot{G}_{\phi} = \dot{W}_{\phi\phi^*}^1 \left[ E + \dot{W}_{\phi\phi^*}^2 \cdot \dot{W}_{\phi\phi^*}^1 \right]^{-1} \dot{G}_{\phi}. \quad (42)$$

Анализируя связи вход-выход (40)–(42), получаем искомые выражения ОДНПФ:

для параллельного соединения

$$\dot{W}_{\phi\phi^*} = \dot{W}_{\phi\phi^*}^1 + \dot{W}_{\phi\phi^*}^2; \quad (43)$$

для последовательного соединения

$$\dot{W}_{\phi\phi^*} = \dot{W}_{\phi\phi^*}^2 \cdot \dot{W}_{\phi\phi^*}^1; \quad (44)$$

для соединения с обратной связью

$$\dot{\Phi}_{\phi\phi^*} = \left[ E + \dot{W}_{\phi\phi^*}^1 \cdot \dot{W}_{\phi\phi^*}^2 \right]^{-1} \dot{W}_{\phi\phi^*}^1 = \dot{W}_{\phi\phi^*}^1 \left[ E + \dot{W}_{\phi\phi^*}^2 \cdot \dot{W}_{\phi\phi^*}^1 \right]^{-1}. \quad (45)$$

Выше были рассмотрены отдельные связи между орторекурсивными характеристиками линейных одномерных непрерывных систем. Связи вход-выход, полученные для одномерных систем, легко обобщаются на многомерные системы. Рассматривая линейную многомерную систему с  $n$  входами и  $m$  выходами, запишем на основе формулы (38) выражение, связывающее ОНСХ сигнала  $g_v$  на  $v$ -м входе системы с ОНСХ отклика системы на этот сигнал на  $\mu$ -м выходе

$$\dot{X}_{\mu v} = \dot{W}_{\phi_{\mu}\phi_v^*} \cdot \dot{G}_v. \quad (46)$$

Тогда на основании принципа суперпозиции реакция системы на все  $n$  входные сигналы, имеющая место на  $\mu$ -м выходе системы, описывается формулой

$$x_{\mu} = \sum_{v=1}^n x_{\mu v}. \quad (47)$$

В силу линейности ОНСХ из формул (46), (47) имеем на  $\mu$ -м выходе системы

$$\dot{X}_{\mu} = \sum_{v=1}^n \dot{X}_{\mu v} = \sum_{v=1}^n \dot{W}_{\phi_{\mu}\phi_v^*} \cdot \dot{G}_v.$$

Связи вход-выход для случайных сигналов (39) также легко обобщаются на многомерные системы:

$${}^1\dot{S}_{x_{\mu}} = \sum_{v=1}^n {}^1\dot{S}_{x_{\mu v}} = \sum_{v=1}^n \dot{W}_{\phi_{\mu}\phi_v^*} \cdot {}^1\dot{S}_{g_v}, \quad (48)$$

$$\dot{x}_{\mu x_\nu} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \dot{W}_{\mu i} \cdot \dot{g}_{i g_k} \cdot \dot{W}_{\nu k}^+, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (49)$$

$$\dot{x}_{\mu g_\nu} = \sum_{i=1}^n \dot{W}_{\mu i} \cdot \dot{g}_{i g_\nu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, m; \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (50)$$

Подводя итог, можно кратко описать общий порядок решения основной задачи анализа непрерывных систем как при детерминированных, так и при случайных воздействиях. Будем считать, что система имеет  $n$  входов и  $m$  выходов.

Находим ОДНПФ системы  $W_{\mu\nu}$  от  $\nu$ -го входа к  $\mu$ -у выходу:

а) для этого составляем расчетную схему системы, выделяя в ней элементарные (31)–(37) и типовые звенья или звенья, описываемые дифференциальными (интегральными) уравнениями [1–5]. Начальные условия дифференциальных и разностных уравнений в расчетную схему вводим в виде эквивалентных входных сигналов;

б) составляем выражение для ОДНПФ системы  $W_{\mu\nu}$  от  $\nu$ -го входа к  $\mu$ -у выходу через ОДНПФ выделенных звеньев на основе формул (43)–(45) для параллельного соединения (рис.1, а), последовательного соединения (рис.1, б) и соединения с обратной связью (рис.1, в) от  $\nu$ -го входа к  $\mu$ -у выходу.

Для детерминированных сигналов:

а) определяем ОНСХ входного сигнала  $g_\nu$  на основе формул (8), (13);

б) определяем ОНСХ  $\dot{X}_\mu$  реакции системы  $x_\mu$  на сигналы  $g_1, g_2, \dots, g_n$  по формуле (46);

в) реакцию системы  $x_\mu$  находим как функцию времени по формулам обращения (14).

При случайных воздействиях для математического ожидания определяем:

а) первую ОНСП входного случайного сигнала  $g_\nu$  на основе формул (39);

б) первую ОНСП реакции системы  $x_\mu$  на случайные сигналы  $g_1, g_2, \dots, g_n$  по формуле (48);

в) математическое ожидание случайного сигнала  $x_\mu$  находим как функцию времени по формулам обращения (25).

При случайных воздействиях для ковариационной функции определяем:

а) ОНСП входного случайного сигнала  $g_\nu$  на основе формул (39);

б) ОНСП реакции системы  $x_\mu$  на случайные сигналы  $g_1, g_2, \dots, g_n$  по формулам (49), (50);

в) ковариационную функцию случайного сигнала  $x_\mu$  находим как

функцию времени по формулам обращения (25).

Для численного расчета нестационарных непрерывных систем рассмотренные алгоритмы могут быть реализованы в виде пакетов расширения систем компьютерной математики и систем визуального моделирования [7–9, 15, 17–20]. Краткое описание пакета расширения элементарных операций спектрального метода (орторекурсивный подход) в базисе функций Фабера–Шаудера MLSY\_OSH\_SM для СКМ Mathcad приведено в приложении.

**Примеры выполнения элементарных и типовых операций спектрального метода (орторекурсивный подход)**

Замечание. При решении задач в СКМ Mathcad будем предполагать, что пакет расширения MLSY\_OSH\_SM подключен и настроен.

**Пример 2.** Вычислить интеграл

$$x(\theta) = \int_0^{\theta} g(\tau) d\tau \tag{51}$$

орторекурсивным спектральным методом от заданной функции на отрезке  $[0, t]$ . Сравнить результаты вычислений с аналитическим решением.

Решение ищем в виде (14). Найдем  $\dot{X}_{\phi}$ , используя (51) в спектральной области. Это решение имеет вид:

$$\dot{X}_{\phi} = \dot{P}_{\phi\phi}^{-1} \cdot \dot{G}_{\phi}$$

где  $\dot{G}_{\phi}$  – ОНСХ входного сигнала,  $\dot{P}_{\phi\phi}^{-1}$  – ОДНПФ интегрирующего звена.

**Решение задачи.**

**Листинг 1.**

```
t := 1          <- длина интервала работы системы управления.

L := 65        <- порядок ОНСХ, ОДНПФ.

L1 := 40       <- количество тактовых точек на отрезке работы системы управления [0, t].

g(τ) := sin( (2 · π · τ) / t ) <- заданная функция.

x(τ) := (-t / (2 · π)) · cos( (2 · π · τ) / t ) + t / (2 · π) <- интеграл от заданной функции.

E := identity (L) <- единичная матрица порядка L.

G := SNXOSHS1 (g, L, t) <- ОНСХ входного сигнала.

Gx := SNXOSHS1 (x, L, t) <- ОНСХ входного сигнала.
```

$\Pi := \text{SID}_{\mu}\text{OSHSI}(L, t, 1)$  < - ОДНПФ интегрирующего звена, полученная по ИПФ интегрирующего звена.

$X := \Pi \cdot G$  < - ОНСХ выходного сигнала, найденная по  $\Pi$ .

$X1 := \text{SNXOSHSI}(x, L, t)$  < - ОНСХ выходного сигнала, найденное по аналитической функции  $x$ .

$NB := \text{SNBSHSI}(L1, L, t)$  < - матрица-строка  $L$  функций, вычисленных в  $L1+1$  тактовых точек на отрезке  $[0, t]$ .

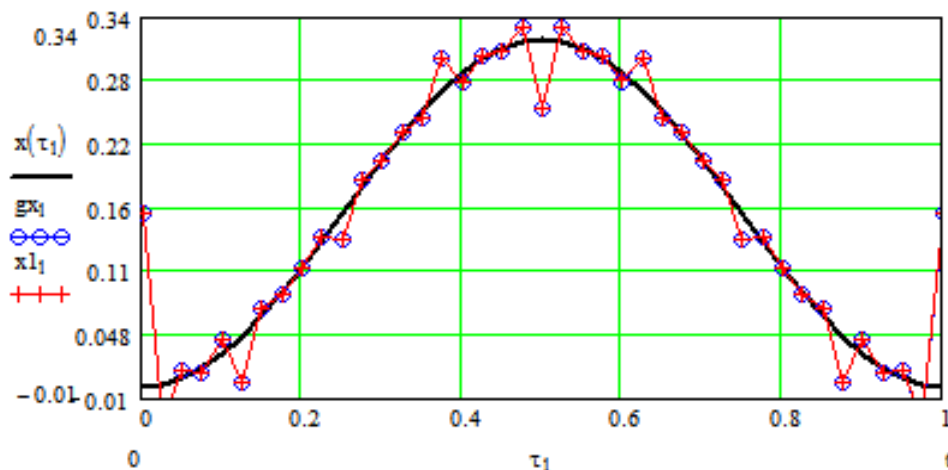
$gx := NB \cdot Gx$  < - решение ДУ, найденное обращением ОНСХ  $Gx$ .

$x1 := NB \cdot X$  < - решение ДУ, найденное по ОНСХ  $X1$ .

$$l := 0..L1 \quad \tau_1 := 1 \cdot \frac{t}{L1}$$

Визуализация решения, найденного орторекурсивным спектральным методом, совмещенная с визуализацией точного решения для функции

$$g(\theta) = \sin\left(\frac{2\pi\theta}{t}\right):$$



**Конец листинга 1.**

**Пример 3.** Найти дробный интеграл порядка  $\mu$  от функции  $g(\tau) = 1(\tau)$  спектральным методом (орторекурсивный подход) и сравнить найденное решение с аналитическим решением  $h(\tau) = \frac{\tau^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}$ . Вычисления провести для

$$\mu = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}.$$

**Решение задачи.**

**Листинг 2.**

```

L := 33    <- порядок усечения ОДНПФ и ОНСХ
t := 1     L1 := 200

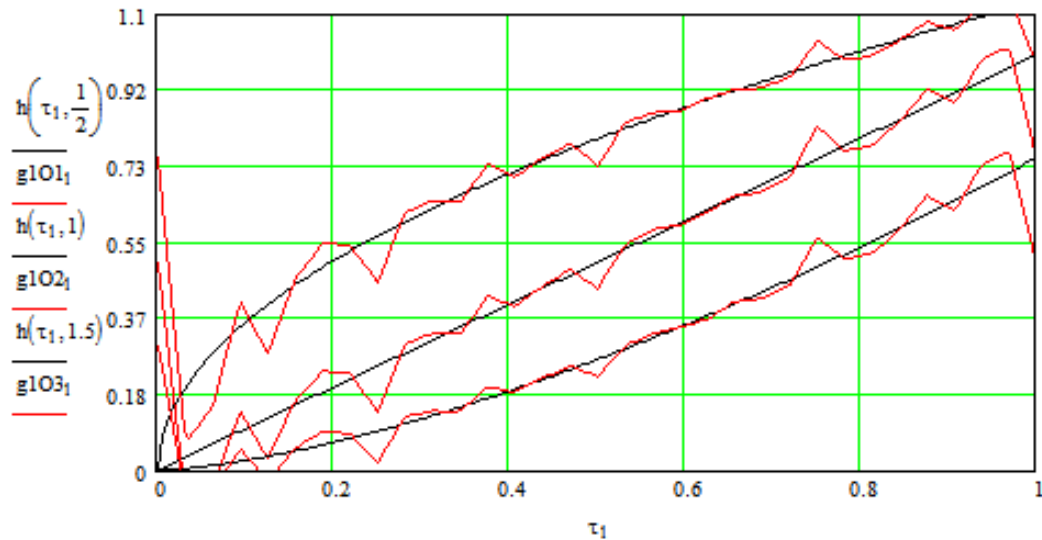
h(τ, μ) := τμ / Γ(μ + 1)    <- дробный интеграл от функции g(τ) := 1
                                порядка μ (аналитический вид).
g(τ) := 1    G1O := SNXOSHSI(g, L, t)    NB := SNBSHSI(L1, L, t)
IO(μ) := SIDμOSHSI(L, t, μ)    <- ОДНПФ интегрирующего звена
                                порядка μ.
XO(μ) := IO(μ) · G1O    g1O(μ) := NB · XO(μ)

g1O1 := g1O(1/2)    g1O2 := g1O(1)    g1O3 := g1O(3/2)
    
```

Визуализация решения, найденного орторекурсивным спектральным методом, совмещенная с визуализацией точного решения:

```

l := 0..L1    τ1 := 1 · t / L1
    
```



**Конец листинга 2.**

**Пример 4.** Решить орторекурсивным спектральным методом интегральное уравнение Абеля [15]

$$x(\theta) + \frac{\lambda}{\Gamma(\mu)} \int_0^\theta \frac{x(\tau)}{(\theta - \tau)^{1-\mu}} d\tau = g(\theta) \quad (52)$$

для  $g(\theta) = \theta^4 e^{-\theta} + \left( \left| \sin\left(\frac{5\pi\theta}{t}\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \Phi\left(\theta - \frac{t}{2}\right)$ ,  $\mu = \frac{1}{2}$  на отрезке  $[0, t]$ .

Решение уравнения (52) для  $\mu = \frac{1}{2}$  можно представить в виде [15]



$$y(\theta) = \frac{d}{d\theta} \left[ \int_0^\theta e^{\lambda^2(\theta-\tau)} \operatorname{erfc}(\lambda\sqrt{\theta-\tau}) g(\tau) d\tau \right].$$

Эта формула после дифференцирования приводится к виду:

$$y(\theta) = \lambda \int_0^\theta g(\tau) \left[ \lambda \cdot \operatorname{erfc}(\lambda\sqrt{\theta-\tau}) e^{\lambda^2(\theta-\tau)} - \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta-\tau)}} \right] d\tau + g(\theta).$$

Уравнение (52) в спектральной области принимает вид:

$$\left( E + \lambda \dot{P}_{\phi\phi}^{-\mu} \right) \dot{X}_{\phi} = \dot{G}_{\phi}. \quad (53)$$

где  $\dot{P}_{\phi\phi}^{-\mu}$  ОДНПФ дробного интегрирующего звена Римана–Лиувилля порядка  $\mu > 0$  (34).

Из (53) находим ОНСХ

$$\dot{X}_{\phi}(t) = \left( E + \lambda \dot{P}_{\phi\phi}^{-\mu} \right)^{-1} \dot{G}_{\phi}(t).$$

**Решение задачи.**

**Листинг 3.**

N1 := 65 <- порядок усечения ОДНПФ и ОНСХ

N2 := 100    t := 25     $\mu := \frac{1}{2}$      $\lambda := 1.2$     E := identity(N1)

$$g(\theta) := \theta^4 \cdot e^{-\theta} + \left( \left| \sin\left(\frac{5 \cdot \pi \cdot \theta}{t}\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Phi\left(\theta - \frac{t}{2}\right)$$

$$yy(g, N2) := \left[ \begin{array}{l} \text{for } l \in 0.. N2 \\ \left[ \begin{array}{l} \omega_1 \leftarrow 1 \cdot \frac{t}{N2} \\ y_{a1} \leftarrow \left[ \begin{array}{l} \lambda \cdot \int_0^{\omega_1} g(\tau) \cdot \left[ \begin{array}{l} \lambda \cdot \operatorname{erfc}(\lambda \cdot \sqrt{\omega_1 - \tau}) \cdot \exp[\lambda^2 \cdot (\omega_1 - \tau)] \\ -1 \\ \sqrt{\pi \cdot (\omega_1 - \tau)} \end{array} \right] \dots \end{array} \right] dt \dots \\ + g(\omega_1) \end{array} \right. \end{array} \right] \\ ya \end{array} \right]$$

y := yy(g, N2) <- точное решение задачи.

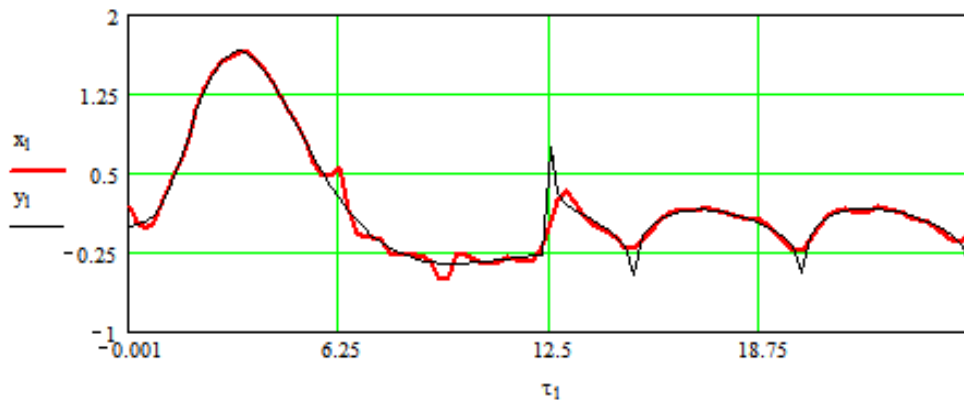
I $\mu$ O := SI $\mu$ OSHSI(N1, t,  $\mu$ ) <- ОДНПФ интегрирующего звена порядка  $\mu$ .

GO := SNXOSHSI(g, N1, t)    XO := (E +  $\lambda \cdot I_{\mu O}$ )<sup>-1</sup> · GO

x := SNBSHSI(N2, N1, t) · XO <- решение задачи, найденное спектральным методом (орторекурсивный подход).

Визуализация решения, найденного спектральным методом, совмещенная с визуализацией точного решения:

$$1 := 0..N2 \quad \tau_1 := 1 \cdot \frac{t}{N2}$$



**Конец листинга 3.**

Сравним решение интегрального уравнения Абеля (52), найденное орторекурсивным спектральным методом в базисе функций Фабера–Шаудера, с решением, найденным с помощью биортогонального подхода в базисе функций Фабера–Шаудера и в базисе кусочно-линейных финитных функций Шёнберга [8, 15] (рис.1).

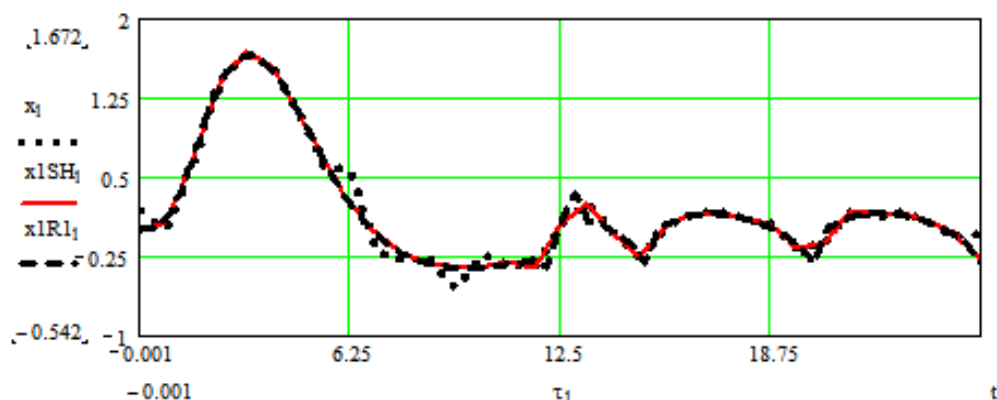


Рис. 1.

Из приведенных графиков видно, что решение интегрального уравнения Абеля, найденное орторекурсивным спектральным методом в базисе функций Фабера–Шаудера при заданных параметрах практически совпадает с решением интегрального уравнения Абеля, найденное по формуле

$$y(\theta) = \lambda \int_0^\theta g(\tau) \left[ \lambda \cdot \operatorname{erfc}(\lambda \sqrt{\theta - \tau}) e^{\lambda^2(\theta - \tau)} - \frac{1}{\sqrt{\pi(\theta - \tau)}} \right] d\tau + g(\theta),$$

с решениями найденными с помощью биортогонального подхода спектрального метода в базисе функций Фабера–Шаудера и в базисе кусочно-линейных финитных функций Шёнберга при выбранных параметрах.

**Пример 5.** Решить ОДУ 1-го порядка

$$\dot{x} + \theta^2 x = \theta^2 \quad (54)$$

орторекурсивным методом, используя функции Фабера–Шаудера, и сравнить его с точным решением  $x = 1 - e^{-\theta^3/3}$ .

Решение ищем в виде (14).  $\dot{X}_\phi$  найдем, решая уравнение (54) в спектральной области. Это решение имеет вид:

$$\dot{X}_\phi = \left[ E + \dot{P}_\phi^{-1} \cdot \dot{A}_\phi \right]^{-1} \dot{P}_\phi^{-1} \cdot \dot{G}_\phi,$$

где  $\dot{G}_\phi$  – ОНСХ входного сигнала,  $\dot{P}_\phi^{-1}$  – ОДНПФ интегрирующего звена,  $\dot{A}_\phi$  – ОДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи  $\theta^2$ .

**Решение задачи.**

**Листинг 4.**

t := 1    L1 := 40    L := 33

g(τ) := τ<sup>2</sup>    E := identity(L)    x(τ) :=  $\left( 1 - e^{-\frac{\tau^3}{3}} \right)$

II := SIDμOSHSI(L, t, 1)

GB := SNXOSHSI(g, L, t)

XB := SNXOSHSI(x, L, t)

NB := SNBSHSI(L1, L, t)

A := SYZOSHSI(g, L, t)

< - ОДНПФ усилительного звена.

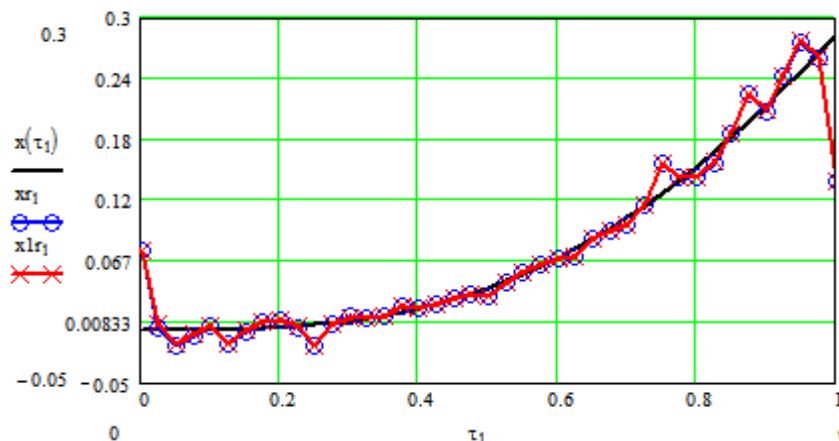
X1R := (E + II · A)<sup>-1</sup> · II · GB

< - ОНСХ выходного сигнала, найденное по ДУ в спектральной области.

x1r := NB · X1R    < - решение ДУ, найденное обращением ОНСХ X1R.

xr := NB · XB    < - решение ДУ, найденное по ОНСХ XR.

l := 0.. L1    τ<sub>1</sub> := 1 ·  $\frac{t}{L1}$



**Конец листинга 4.**

Сравним решение дифференциального уравнения (54), найденное орторекурсивным спектральным методом в базисе функций Фабера–Шаудера, с решением, найденным с помощью биортогонального подхода в базисе функций Фабера–Шаудера (рис.2 а)) и в базисе кусочно-линейных финитных функций Шёнберга (рис.2 б)) [8, 15].

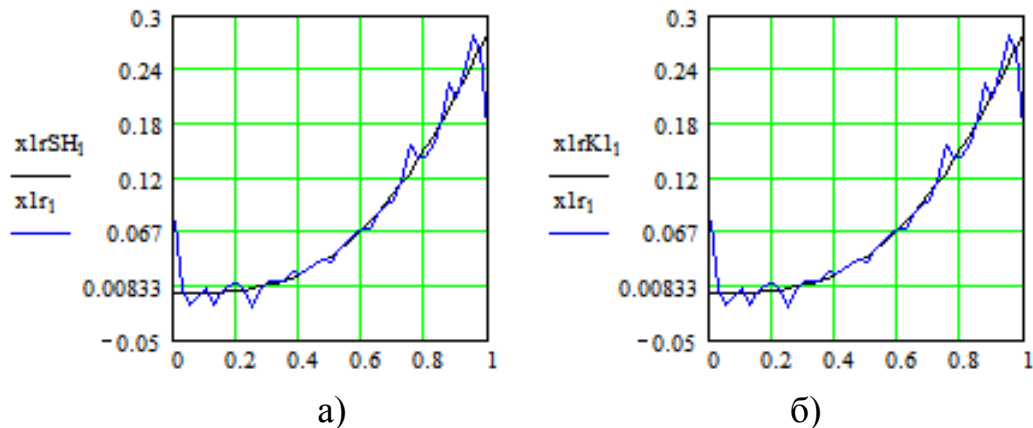


Рис. 2.

Из приведенных графиков видно, что решение дифференциального уравнения (54), найденное орторекурсивным спектральным методом в базисе функций Фабера–Шаудера практически совпадает с решением дифференциального уравнения (54)  $x = 1 - e^{-\theta^3/3}$ . Решения дифференциального уравнения (54), найденные с помощью биортогонального подхода в базисе функций Фабера–Шаудера (рис.2 а) и в базисе кусочно-линейных финитных функций Шёнберга (рис.2 б) практически совпадают при заданных параметрах с аналитическим решением  $x = 1 - e^{-\theta^3/3}$ .

### Заключение

Орторекурсивные спектральные характеристики, введенные относительно полных неортогональных систем функций, позволяют работать с этими неортогональными системами как с ортогональными. В приведенных примерах достигается приемлемая для многих приложений точность. Этот подход является альтернативным подходом к применению в спектральном методе биортогональных систем базисных функций [8, 15]. Сравнение орторекурсивного и биортогонального подхода в спектральном методе указывает на некоторое преимущество по приближению решений, найденных с применением биортогонального подхода, к аналитическим решениям. Однако в орторекурсивном подходе используется одна неортогональная система базисных функций, а в биортогональном подходе нужно иметь две базисные системы: систему разложения и систему восстановления. Какой подход и в каких задачах его применять, выявит в дальнейшем практика применения этих вариантов спектрального метода.

**Приложение.** Описание процедур (элементарных операций орторекурсивного спектрального метода) пакета расширения *MLSY\_SM\_OSH + Mathcad* и их формальных параметров в системе функций Фабера–Шаудера

Правила формирования структуры имени программного модуля для спектральных алгоритмов можно найти в работах [7–9, 17–19].

Здесь используются идентификаторы SH и OSH для НСХ функций Фабера–Шаудера восстановления и для ОРР НСХ функций Фабера–Шаудера восстановления.

1) *SNBSHSH1(L1, L, t)* – вычисление усеченной матрицы-строки  $L$  непрерывных функций (восстановления) Фабера–Шаудера на отрезке  $[0, t]$  на системе тактовых точек  $(l-1)t/L1$ , где  $l=1, \dots, L1+1$ . Результат представляется матрицей размером  $L1 \times L$ ; *SNBSHSH2(i,  $\tau$ , t)* – вычисление  $i$ -й функции Фабера–Шаудера на отрезке  $[0, t]$  в точке  $\tau$ . Результат представляется матрицей размером  $L1 \times L$ ; *SNBSHSH1K(L, t)* – вычисление усеченной матрицы-строки  $L$  непрерывных функций (восстановления) Фабера–Шаудера на отрезке  $[0, t]$  в конечной точке  $t$ .

2) *SNXOSHSH1(g, L, t)* – вычисление усеченной матрицы-столбца ОНСХ размером  $L \times 1$  на отрезке  $[0, t]$  по аналитически заданной функции  $g(x)$ ; *SNXOSHSH2(a, N1, L, t)* – вычисление усеченной матрицы-столбца ОНСХ размером  $L \times 1$  на отрезке  $[0, t]$  по таблично заданной функции  $a(x)$  в  $N1$  тактовой точке отрезке  $[0, t]$ .

3) *SNCOSHOSH1(R, L, t)* – вычисление усеченной матрицы НСПП размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$  по аналитически заданной корреляционной функции  $R(x, y)$ .

4) *SIOSHSH1(L, t)* – вычисление усеченной матрицы ОДНПФ интегрирующего звена размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ ; *SI $\mu$ OSHSH1(L, t,  $\mu$ )* – вычисление усеченной матрицы ОДНПФ интегрирующего звена Римана – Лиувилля дробного порядка  $\mu > 0$  размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ .

5) *SP1OSHSH1(L, t)* – вычисление усеченной матрицы ОДНПФ дифференцирующего звена (первого рода) размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ ; *SD1OSHSH1(L, t)* – вычисление усеченной матрицы ОДНПФ дифференцирующего звена (второго рода) размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ ; *SID $\mu$ OSHSH1(L, t,  $\mu$ )* – вычисление усеченной матрицы ОДНПФ обобщенного интегродифференцирующего звена дробного порядка  $\mu \in R$  размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ . Если  $\mu > 0$ , то вычисляется усеченная матрица ДНПФ интегрирующего звена Римана – Лиувилля дробного порядка, если  $\mu < 0$ , то вычисляется усеченная матрица ДНПФ дифференцирующего звена дробного порядка. При  $\mu = 0$  вычисляется единичная матрица размером  $L \times L$ .

6) *SAPOSHSH1(L, T, k, t)* – вычисление усеченной матрицы ОДНПФ

апериодического звена размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ ;  $T$  – постоянная времени апериодического звена;  $k$  – коэффициент усиления апериодического звена.

7)  $SKOOSHS1(L, T, k_1, k, t)$  – вычисление усеченной матрицы ОДНПФ колебательного звена размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ ;  $T$  – постоянная времени колебательного звена;  $k$  – коэффициент усиления колебательного звена;  $k_1$  – коэффициент демпфирования колебательного звена.

8)  $SCDOSHS1(L, T_1, t)$  – вычисление усеченной матрицы ОДНПФ звена чистого сдвига размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ ;  $T_1$  – величина чистого сдвига: если  $T_1 > 0$ , то  $T_1$  – величина запаздывания, если  $T_1 < 0$ , то  $T_1$  – величина упреждения.

9)  $SYZOSHS1(a, L, t)$  – вычисление усеченной матрицы ОДНПФ усилительного звена размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$  по аналитически заданному коэффициенту усиления  $a(x)$ .

10)  $SXCSHS1(L)$  – вычисление усеченной матрицы ДНХС размером  $L \times L$  на отрезке  $[0, t]$ .

#### Библиографический список

1. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
2. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральный метод расчета нестационарных систем управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1975. – 272 с.
3. Семенов В.В., Рыбин В.В. Спектральный анализ линейных непрерывно-дискретных систем с переменными параметрами на конечных нестационарных интервалах времени / В кн. Адаптивные системы автоматического управления. Вып. 6. – Киев: Техника, 1978. – С. 3–11.
4. Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979. – 664 с.
5. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. – М.: МАИ, 1984. – 84 с.
6. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2015. – 392 с.
7. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 220 с.
8. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.

9. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Моделирование распределенных и дробно-распределенных процессов и систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
10. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
11. Лукашенко Т.П. Рекурсивные разложения, подобные ортогональным // Математика, Экономика, Экология, Образование. Межд. конф. Ряды Фурье и их приложения (26 мая – 1 июня 1999 г.), Тез. докл., Ростов-на-Дону, 1999. – С. 331.
12. Лукашенко Т.П. Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тез. докл. 10-й Саратовской зимней школы. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2000. – С. 83.
13. Лукашенко Т.П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2001. № 1. – С. 6–10.
14. Лукашенко Т.П. О новых системах разложения и их свойствах // Чебышевский сборник. – 2004. Том 5. Вып. 2. – С. 66–82.
15. Рыбин В.В., Цветаев В.Е. Моделирование дробных систем управления летательными аппаратами спектральным методом в системе функций Фабера–Шаудера // Труды МАИ. – 2017. № 93.
16. Политов А.В. Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2010. № 3. – С. 3–7.
17. Рыбин В.В. Разработка и применение пакетов расширения MLSY\_SM СКМ Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab // Труды МАИ. – 2003. № 13.
18. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr\_SM СКМ Matlab // Труды МАИ. – 2003. № 13.
19. Рыбин В.В. Разработка и применение пакета расширения Spektr\_SM пакета Simulink СКМ Matlab. – М.: МАИ, 2004. – 92 с.
20. Рыбаков К.А., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета систем автоматического управления в спектральной форме математического описания / В кн. Современная наука: теоретические, практические и инновационные аспекты развития. Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во Международного исследовательского центра «Научное сотрудничество», 2018. С. 171–199.