

УДК 531.011

УПРАВЛЕНИЕ ЭНЕРГИЕЙ МАЯТНИКА С УПРУГИМ СОЧЛЕНЕНИЕМ

А.М. Зубрицкий, Б.М. Соколов

Санкт-Петербургский государственный университет

Университетская наб., 7-9.

Аннотация

В данной работе рассматривается обобщение задачи управления энергией маятниковых систем на случай присутствия в них упругих сосредоточенных элементов. Изложение ведётся на примере алгоритма раскачки маятника с приводом, имеющим упругое соединение с осью маятника. Для получения алгоритма раскачки используется метод скоростного градиента А.Л.Фрадкова при выборе в качестве целевой функции квадрата отклонения полной энергии системы от её заданного значения. Получены условия достижения цели управления. Приводятся результаты имитационных экспериментов при изменении параметров объекта, таких как коэффициент жёсткости и заданное значение полной энергии. Библ. 12 назв. Ил. 8.

Ключевые слова: упругие сосредоточенные элементы, раскачка маятника, алгоритм скоростного градиента.

Abstract

In this paper the generalization of the energy control problem for pendulum systems in case of presence of concentrated elastic elements is considered. The exposition is conducted by example of algorithm of swinging pendulum with drive having elastic connection with pendulum shaft. For obtaining of swinging algorithm the speed-gradient algorithm of A.L.Fradkov with the squared system total energy deviation from given value as the goal function is applied. The conditions for achievement of the control goal are obtained. The results of simulation with changing object parameters such as stiffness coefficient and given total energy value are presented. Refs 12. Figs 8.

Keywords: lumped elastic elements, swinging pendulum, speed-gradient algorithm.

1. Введение. В работе рассматривается обобщение теории управления энергией механических систем, изученной, в частности, в [1–4] и в книгах [5–7], на случай присутствия в таких системах упругих сосредоточенных элементов. Будет рассмотрен пример алгоритма раскачки маятника с приводом, имеющим упругое сосредоточенное

соединение с осью маятника, как это сделано в [8–10] и других. Так, в [8] для исследования задач управляемости и наблюдаемости для манипуляторов с упругим сочленением используется метод декомпозиции, основанный на теории интегральных многообразий быстрых и медленных движений. В [9] рассматривается влияние упругих элементов на работу автоматизированных электроприводов. Даны оценки, позволяющие определить условия пренебрежения упругостью. Описываются структуры и способы настройки систем подчинённого регулирования при влиянии упругих звеньев. Показаны возможности цифровой реализации, адаптации и идентификации электроприводов с упругими звеньями. В [10] представлены новые результаты решения задачи о построении управления движением многосвязного манипулятора с учётом свойств упругости в соединительных элементах звеньев и запаздывания в структуре обратной связи. Предложен непрерывный закон управления с насыщением, позволяющий стабилизировать заданное нестационарное движение робота. В ([8–10]) представлены и другие из существующих методов. Для получения алгоритма управления в данной работе используется метод скоростного градиента [7].

2. Уравнения движения. Рассмотрим систему, состоящую из собственно маятника и привода, вращающего ось подвеса, а также имеющего сосредоточенный упругий элемент в месте соединения маятника и привода. Составим уравнения движения маятника, как это сделано, например, в [8]

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2, \\ I_1 \dot{q}_2 = -mgl \sin q_1 - k(q_1 - q_{m_1}), \\ \dot{q}_{m_1} = q_{m_2}, \\ I_m \dot{q}_{m_2} = k(q_1 - q_{m_1}) + u. \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) q_1 — угол отклонения маятника от вертикали, q_{m_1} — угол поворота вала двигателя, l — длина маятника, k — коэффициент жесткости соединения вала двигателя с маятником, m — масса маятника, u — вращающий момент (управление). I_1 — момент инерции стержня, I_m — момент инерции вала двигателя. Измеряется угол q_1 — угол отклонения маятника от вертикали и производная угла поворота вала двигателя q_{m_2} . Все величины измеряются в системе СИ.

3. Вычисление управления. Управление будем определять из условия стремления полной энергии системы $H_1(q, \dot{q})$ к заданному значению полной энергии H_s , соответствующей заданному углу отклонения маятника. Если $H_s > H_1(q(0), \dot{q}(0))$, то это соответствует раскачке маятника, в противном случае — его успокоению. Здесь $q = [q_1, q_{m_1}]' \in \mathbb{R}^2$.

В данной задаче гамильтониан системы без учёта упругости ($k = 0$) имеет вид

$$H_0(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{I_1}{2} \dot{q}_1^2 + mgl(1 - \cos q_1),$$

а полный гамильтониан — вид

$$H_1(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{I_1}{2} \dot{q}_1^2 + \frac{I_m}{2} \dot{q}_{m_1}^2 + mgl(1 - \cos q_1) + \frac{k}{2}(q_1 - q_{m_1})^2.$$

Введем целевую функцию

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(H_1(q, \dot{q}) - H_s)^2.$$

Будем находить управление из условия: $H_1(q(t), \dot{q}(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} H_s$. Рассмотрим производную функции $V(q, \dot{q})$ с учетом системы (1)

$$\begin{aligned} \dot{V}(q, \dot{q}) &= (H_1(q, \dot{q}) - H_s)\dot{H}_1 = (H_1 - H_s)[I_1\dot{q}_1\ddot{q}_1 + I_m\dot{q}_{m_1}\ddot{q}_{m_1} + mgl \sin q_1 \cdot \dot{q}_1 + \\ &+ k(q_1 - q_{m_1})(\dot{q}_1 - \dot{q}_{m_1})] = (H_1 - H_s)[\dot{q}_1(-mgl \sin q_1 - k(q_1 - q_{m_1})) + \\ &+ \dot{q}_{m_1}(k(q_1 - q_{m_1}) + u) + mgl \sin q_1 \cdot \dot{q}_1 + k(q_1 - q_{m_1}) \cdot (\dot{q}_1 - \dot{q}_{m_1})] = \\ &= (H_1 - H_s)\{k[\dot{q}_1(q_1 - q_{m_1}) + \dot{q}_{m_1}(q_1 - q_{m_1}) + (q_1 - q_{m_1})(\dot{q}_1 - \dot{q}_{m_1})] + \\ &+ \dot{q}_{m_1}u\} = \{k(q_1 - q_{m_1})[-\dot{q}_1 + \dot{q}_{m_1} + \dot{q}_1 - \dot{q}_{m_1}] + \dot{q}_{m_1}u\}(H_1 - H_s) = \\ &= \dot{q}_{m_1}u(H_1 - H_s). \end{aligned}$$

Рассмотрим $\frac{\partial V}{\partial u} = (H_1 - H_s)\dot{q}_{m_1}$. Очевидно, при

$$u = -\gamma(H_1 - H_s)\dot{q}_{m_1}, \quad \gamma > 0 \quad (2)$$

(алгоритм скоростного градиента) выполнено неравенство $\dot{V}(q, \dot{q}) \leq 0$.

4. Основной результат. Предварительно приведем результат И. Барбалата, имеющийся в [11].

Лемма И. Барбалата. Если $\varphi(t)$ — вещественная функция времени t , определенная и равномерно непрерывная при $t > 0$, и если предел интеграла $\int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ при $t \rightarrow \infty$ существует и равен конечному числу, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$.

Теорема. Пусть в системе (1) управление $u(t)$ определяется формулой (2). Тогда либо достигается цель управления

$$H_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} H_s, \text{ где } H_1(t) = H_1(q(t), \dot{q}(t)),$$

либо выполнено предельное соотношение

$$\dot{q}_{m_1}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Доказательство. Подставляя значение управления u из (2) в выражение для \dot{V} , имеем

$$\dot{V} = -\gamma(H_1 - H_s)^2 \dot{q}_{m_1}^2 \leq 0.$$

Следовательно,

$$V_t \equiv V(q(t), \dot{q}(t)) \leq V_0,$$

где V_0 — некоторое значение $V(t)$, $t \geq 0$, а потому $V(q, \dot{q})$ ограничена на траекториях исходной системы, замкнутой найденным управлением. Из вида функции $H_1(q, \dot{q})$ следует, что $|\dot{q}(t)|$, $|\dot{q}_{m_1}(t)|$ и $|q(t) - q_{m_1}(t)|$ — ограниченные функции.

Так как $V_t \leq 0$, то из изложенного следует, что существует $\lim_{t \rightarrow \infty} V_t = \bar{V}$. Рассмотрим два случая: 1) $\bar{V} = 0$. В этом случае цель управления достигается; 2) $\bar{V} > 0$. Тогда существует момент времени t_* такой, что

$$V_t > \frac{\bar{V}}{2} \quad \text{при } t > t_*.$$

Интегрируя неравенство

$$\dot{V} = -\gamma(H_1 - H_s)^2 \dot{q}_{m_1}^2 \leq 0$$

по $t \in [t_*, t']$, имеем

$$V_{t'} = V_{t_*} - \int_{t_*}^{t'} \gamma \cdot 2V_t \cdot |\dot{q}_{m_1}(t)|^2 dt \leq V_{t_*} - \gamma \bar{V} \int_{t_*}^{t'} |\dot{q}_{m_1}(t)|^2 dt.$$

Так как $V_{t'} \geq 0$, имеет место неравенство

$$\int_{t_*}^{t'} |\dot{q}_{m_1}(t)|^2 dt \leq \frac{V_0}{\gamma \bar{V}}, \quad \forall t > t_*.$$

Следовательно,

$$\int_{t_*}^{\infty} |\dot{q}_{m_1}(t)|^2 dt < \infty.$$

Имея целью для завершения доказательства использовать лемму Барбалата, докажем, что $\dot{q}_{m_1}(t)$ равномерно непрерывна, а для этого достаточно доказать, что $\ddot{q}_{m_1}(t)$ — ограничена. Из двух вторых уравнений объекта следует, что

$$I_m \ddot{q}_{m_1} = I_m \dot{q}_{m_2} = k(q_1 - q_{m_1}) + u.$$

Разность $(q_1 - q_{m_1})$ — ограничена, а $u = -\gamma(H_1 - H_s)\dot{q}_{m_1}$. Здесь разность $(H_1 - H_s)$ — ограничена, так как V_t — ограничена. Также ограничена производная \dot{q}_{m_1} . Следовательно, ограничена вторая производная $\ddot{q}_{m_1}(t)$. А тогда из леммы И. Барбалата следует, что $\dot{q}_{m_1}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

5. Результаты компьютерного моделирования. В качестве примера системы с упругой сосредоточенной связью рассматривается маятник с приводом. Между маятником и приводом находится пружина — упругое сосредоточенное звено. Было проведено несколько десятков вычислительных экспериментов, в которых менялся коэффициент жесткости пружины k и заданное значение H_s её полной энергии $H_1(t)$. В конце каждого эксперимента выдавались три графика: выход объекта управления (его первая компонента $x_1(t)$), управление $u(t)$ и значение полной энергии системы $H_1(t)$. Рассматривалось поведение этих функций во

времени при изменении k и H_s .

Вначале был проведен эксперимент при $k = 1$, $H_s = 5$, что соответствует жёсткой связи между маятником и приводом. Результаты его приведены на рис. 1. Здесь $x_1(t)$ имеет колебательный характер (колебания в пределах $[-1, 1]$), управление $u(t)$, колеблясь, стремится к нулю, а $H_1(t)$ — к H_s .

Первая серия экспериментов проводилась для проверки сходимости $H_1(t)$ к H_s при разных значениях $H_s = 5, 15, 25$ (рис. 2, 3, 4 соответственно) и при $k = 0.4$. Во всех случаях указанная сходимость имела место.

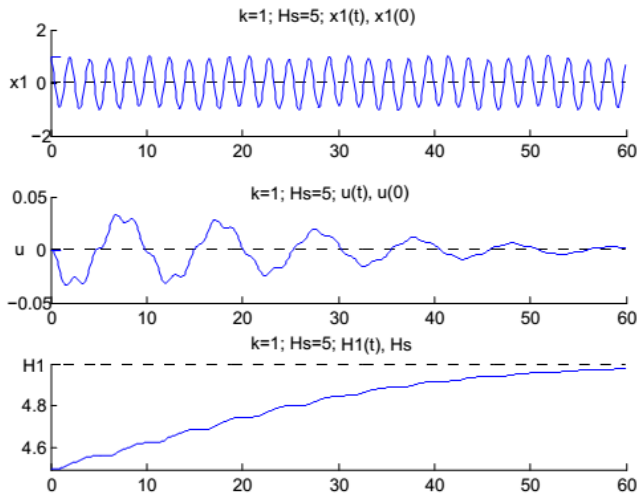


Рис. 1. $k = 1, H_s = 5$.

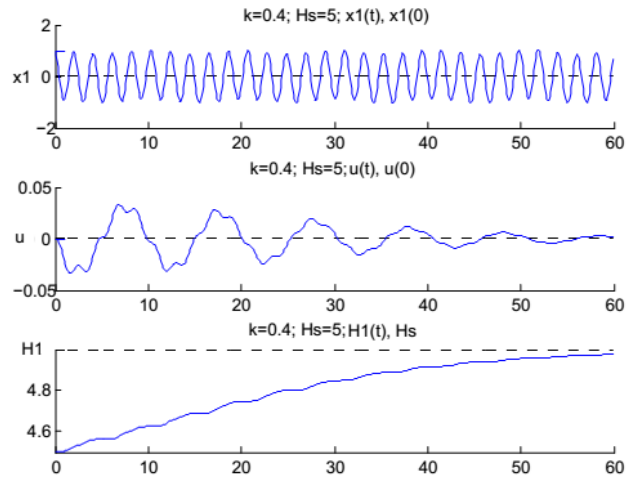


Рис. 2. $k = 0.4, H_s = 5$.

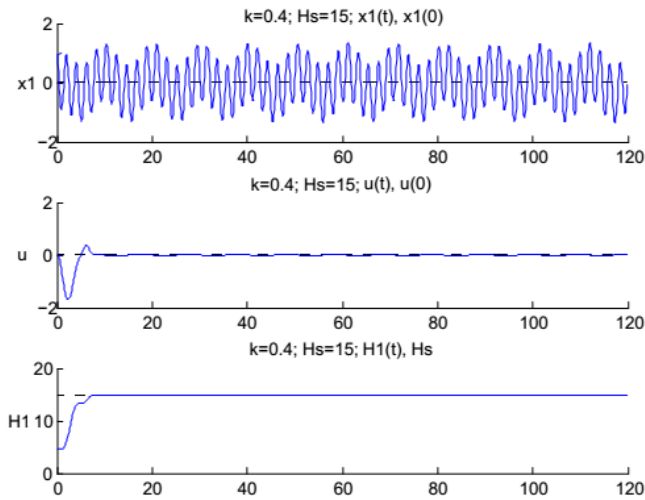


Рис. 3. $k = 0.4, H_s = 15$.

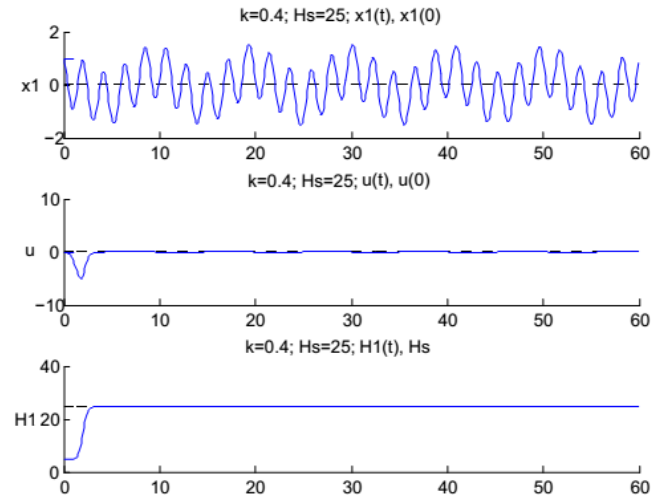


Рис. 4. $k = 0.4, H_s = 25$.

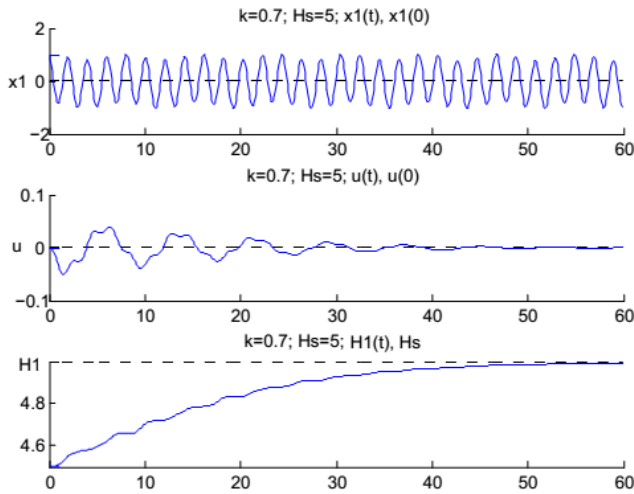


Рис. 5. $k = 0.7$, $H_s = 5$.

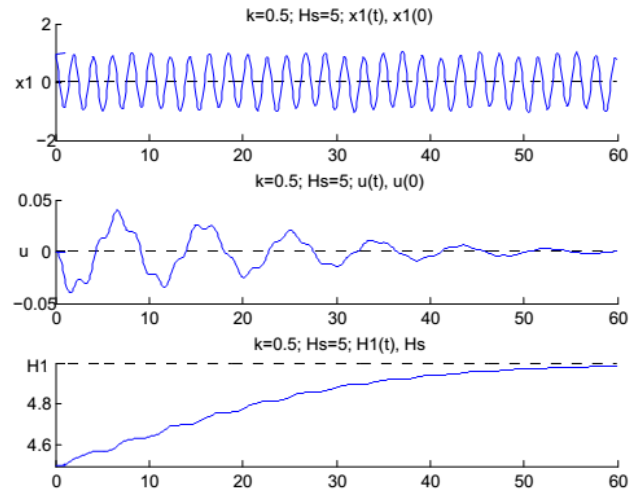


Рис. 6. $k = 0.5$, $H_s = 5$.

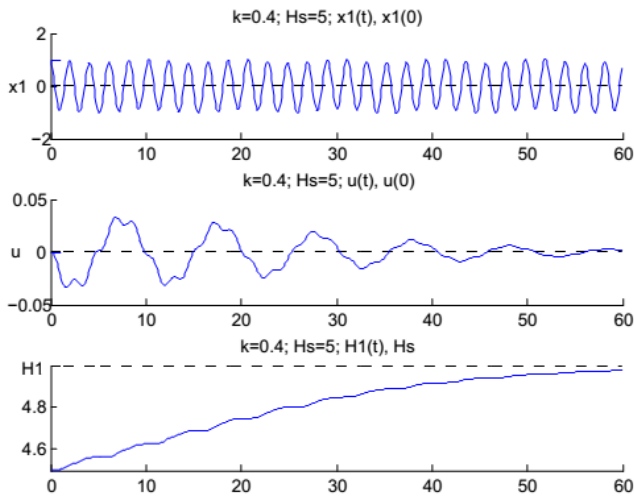


Рис. 7. $k = 0.4$, $H_s = 5$.

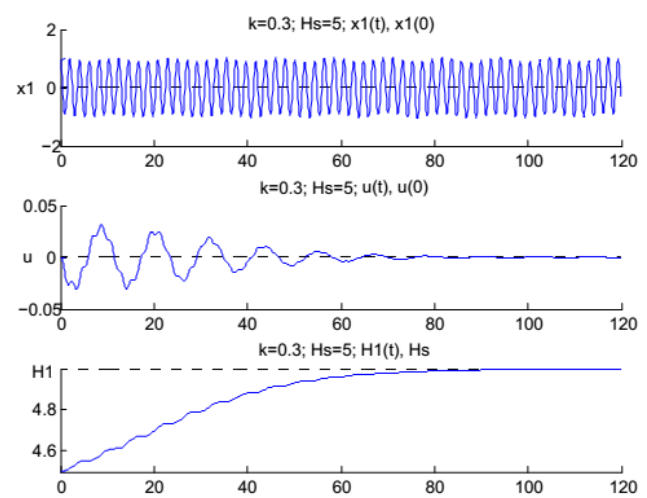


Рис. 8. $k = 0.3$, $H_s = 5$.

Вторая серия экспериментов проводилась для выявления сходимости $u(t)$ к нулю при $H_s = 5$ и исследования поведения $x_1(t)$ при значениях $k = 0.7, 0.5, 0.4, 0.3$ (рис. 5, 6, 7, 8, соответственно). Из этих экспериментов видно, что указанная сходимость имеет место.

6. Выводы. В данной работе исследовался метод скоростного градиента в применении к колебаниям маятника с приводом и упругим точечным сочленением. Получены условия сходимости переменной полной энергии к её заданному значению. Проведённые эксперименты показали возможность применения разработанной теории в задаче об управлении колебаниями маятника с упругим точечным сочленением.

В дальнейшем представляет интерес распространить полученные результаты на задачу прохождения через резонанс, см. [12]

Работа была выполнена при частичной поддержке гранта СПбГУ №6.38.230.2015.

Авторы благодарят проф. А. Л. Фрадкова за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

1. А. Л. Фрадков. Схема скоростного градиента и её применение в адаптивном управлении // Автоматика и телемеханика. 1979, №9, с. 90 – 101.
2. Б. Р. Андриевский, П. Ю. Гузенко, А. Л. Фрадков. Управление нелинейными колебаниями механических систем методом скоростного градиента // Автоматика и телемеханика, 1996, №4, с. 4 – 17.
3. А. Л. Фрадков, В. В. Шиегин. Стабилизация энергии колебаний с применением к маятнику с управляемой точкой подвеса // Известия РАН. Теория и системы управления. 1999, №2, с. 19 – 24.
4. A. S. Shiriaev, A. L. Fradkov. Stabilization of Invariant Sets of Cascaded Nonlinear Systems, Proc. of the 38th Conference on Decision & Control, Phoenix, Arizona, USA. December 1999, p. 1296 – 1301
5. А. Л. Фрадков. Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука. 1990, – 296 с.
6. М. В. Дружинина, А. Л. Фрадков. Адаптивное управление нелинейными взаимосвязанными системами. СПб.: ИПМаш РАН, 1997, – 57 с.
7. А. Л. Фрадков. Кибернетическая физика. СПб: Наука, 2003, – 208 с.
8. М. М. Семенова. Управляемость и наблюдаемость манипуляторов с упругим сочленением // Сибирский журнал индустриальной математики. Январь – март, 2004. Том VII, №1 (17), с. 109 – 113.
9. Ю. А. Борцов, Г. Г. Соколовский. Автоматизированный электропривод с упругими связями. СПб: Энергоатомиздат, 1992, – 288 с.
10. Г. А. Камаева, О. А. Перегудова. Управление многосвязными манипуляторами с упругими сочленениями на основе запаздывающей обратной связи. Научно—технический вестник Поволжья. №1, 2011, с. 30 – 33.
11. В. М. Попов. Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970, с. 230 – 231.
12. Л. М. Малинин, А. А. Первозванский. Оптимизация перехода несбалансированного ротора через критическую скорость. Машиноведение, №4, 1983, с. 36 – 41.