

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 2, 2017

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

УДК 517.518.82+519.677

КАК ВЫГЛЯДЯТ АТТРАКТОРЫ НУЛЕЙ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,

Московский педагогический государственный университет,

Москва

e-mail: ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, dianacve@inbox.ru

Аннотация

Настоящее сообщение содержит материал, подготовленный к пленарному докладу на научной конференции «Герценовские чтения — 2017». Обсуждается вопрос о распределении нулей классических полиномов Бернштейна. Совокупность нулей рассматривается как дискретная динамическая система на комплексной плоскости. При фиксированном выборе порождающей функции вводится специальное отображение, сопоставляющее номеру полинома множество его нулей на плоскости. Изучение проводится компьютерными средствами. Основное внимание уделено эффекту существования аттрактора, к которому стягиваются почти все нули при неограниченном возрастании номера полинома Бернштейна. Установлен список из шести правил, позволяющих провести точное построение аттрактора нулей в случае кусочно линейной порождающей функции. Разобраны примеры и приведены иллюстрации. Сформулированы некоторые нерешенные проблемы. Намечены перспективные темы для дальнейших исследований. Изложение дополнено неформальными сведениями, имеющими отношение к происходящему.

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, аттракторы нулей.

Abstract

The paper contains material for the plenary report at the scientific conference “Herzen Readings — 2017”. The problem of the distribution of zeros for the classical Bernstein polynomials is discussed. The set of zeros is considered as a discrete dynamical system on the complex plane. For a fixed choice of the generating function we introduce a special mapping such that to the polynomial number corresponds the set of the polynomial zeros on the plane. The study is carried out by computer tools. The attention is paid to the existence of the attractor to which almost all zeros converge with increasing the number of the Bernstein polynomials. A list of six rules allows us to construct the attractor of zeros for a piecewise linear generating function. Examples and illustrations are given. Some unsolved problems are formulated. Prospective themes for further research are pointed out. Our exposition is supplemented with additional information.

Keywords: Bernstein polynomials, attractors of zeros.

Вопрос о поведении нулей последовательности классических полиномов Бернштейна был поставлен сравнительно недавно (см. [1]). Заинтересовавшись проблемой, авторы провели ряд исследований, выявивших интересные закономерности (см. [2]–[4]). В настоящем сообщении мы даем неформальное, популярное изложение полученных результатов. Соответствующий понятийный аппарат, терминологию и список ключевых авторов оформим в виде небольшого *гlossария*.

Аттрактор — притягивающее множество (от англ. *attract* — привлекать, притягивать). Термин употребляется для обозначения предельного множества, как правило, сложной, но конкретной структуры, к которому стремятся изучаемые объекты при продолжении процесса *ad infinitum*. Понятие аттрактора в основном используется в теории дифференциальных уравнений и динамических систем; в классическом анализе до недавнего времени такой термин встречался редко.

Иентч Роберт (Robert Jentzsch, 1890–1918), немецкий математик и поэт. Автор ряда блестящих результатов по анализу и интегральным уравнениям. Погиб молодым на фронтах Первой мировой войны, в битве при Камбре. Подробная биография Иентча приведена в [5]. Часть работ Иентча опубликована посмертно.



Рис. 1: Портрет Р. Иентча.

Теорема Иентча из теории степенных рядов утверждает, что для степенного ряда с конечным радиусом сходимости $R > 0$ окружность $|z| = R$ состоит из предельных точек для нулей, взятых от частичных сумм этого ряда. Опубликована с полным доказательством в работе [6, с. 227]. Другие варианты доказательства можно найти в [7, с. 165–166] и [8, с. 246–249]; некоторые обобщения отмечены в [9, с. 390–392, 396–399] (см. также [10]–[12]). Теорема Иентча часто формулируется в неточном виде, и окончательный результат можно понять лишь из доказательства. Фактически теорема Иентча утверждает, что граница круга сходимости является своеобразным аттрактором для «многих» нулей от частичных сумм степенного ряда.

Бернштейн Сергей Натанович (1880–1968), крупнейший российский и советский математик. Автор глубоких и тонких исследований по анализу, дифференциальным уравнениям и теории вероятностей. В заметке [13] ввел полиномы, обладающие замечательными свойствами.

Полиномы Бернштейна для функции $f \in C[0, 1]$ определяются формулой

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$



Рис. 2: Портрет С. Н. Бернштейна.

Здесь $z \in \mathbb{C}$, хотя чаще всего считают, что $z = x \in [0, 1]$. Согласно классической теореме Бернштейна [13] полиномы $B_n(f, x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к порождающей функции $f(x)$ равномерно на $[0, 1]$. Теория полиномов Бернштейна подробно изложена в [14], [15]. Современное состояние исследований по полиномам Бернштейна отражено в только что вышедшей монографии [16].

Канторович Леонид Витальевич (1912–1986), выдающийся советский математик и экономист, один из создателей линейного программирования. Автор замечательных работ по анализу, теории полупорядоченных пространств, операторным уравнениям и математической экономике. Лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 года «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». В пионерской работе [17] поставил и изучил вопрос о распространении сходимости полиномов Бернштейна в комплексную плоскость. Работу [17] необычайно высоко оценил С. Н. Бернштейн [18], существенно развивший теорию Канторовича (см. также [19]). Некоторые новые результаты о сходимости полиномов Бернштейна в плоскости \mathbb{C} приведены в монографии [20].



Рис. 3: Портрет Л. В. Канторовича на момент написания работы [17].

Лемниската Канторовича для точки $c \in (0, 1)$ это кривая вида

$$L_c : \left| \frac{z}{c} \right|^c \left| \frac{1-z}{1-c} \right|^{1-c} = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Подобные кривые участвуют в описании комплексной области сходимости полиномов (1) в случае кусочно аналитической порождающей функции $f \in C[0, 1]$. Например, если $f(x) \equiv \varphi(x)$ на $[a, b] \subset (0, 1)$ с некоторой целой функцией $\varphi(z)$, то полиномы $B_n(f, z)$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к $\varphi(z)$ в области, примыкающей к отрезку $[a, b]$ и ограниченной лемнискатами L_a, L_b (подробнее см. [14, гл. IV]).

Цепочка склеиваний — регулярное попарное совпадение полиномов (1), возникающее для кусочно линейных порождающих функций вида

$$f(x) = \alpha + \beta x + \sum_{j=1}^r \gamma_j |q_j x - p_j|, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

с постоянными коэффициентами $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и рациональными абсциссами точек излома

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1}, \quad \dots, \quad x_r = \frac{p_r}{q_r}, \quad x_1, \dots, x_r \in (0, 1). \quad (4)$$

Дроби (4) считаем несократимыми с наименьшим общим знаменателем $q = \text{НОК}(q_1, \dots, q_r)$. Тогда для полиномов (1) от функции (3) действует следующее *правило склеивания*

$$B_{qm+1}(f, z) = B_{qm}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Полиномы из (5) и образуют соответствующую *цепочку склеиваний*. Они чуть отличаются по своим свойствам от остальных полиномов последовательности (1). Подробнее про правило склеивания см. [21, с. 143–144].

Сейчас уже ясно (см. [3], [21]), что кусочно линейные функции в теории полиномов Бернштейна составляют особый класс порождающих функций. Отметим также, что для функции $f \in C[0, 1]$ вида (3) сходимость полиномов (1) распространяется в комплексную область на компакт, ограниченный фрагментами лемнискат Канторовича, каждая из которых построена по своей точке излома в наборе (4) (см. рис. 4).

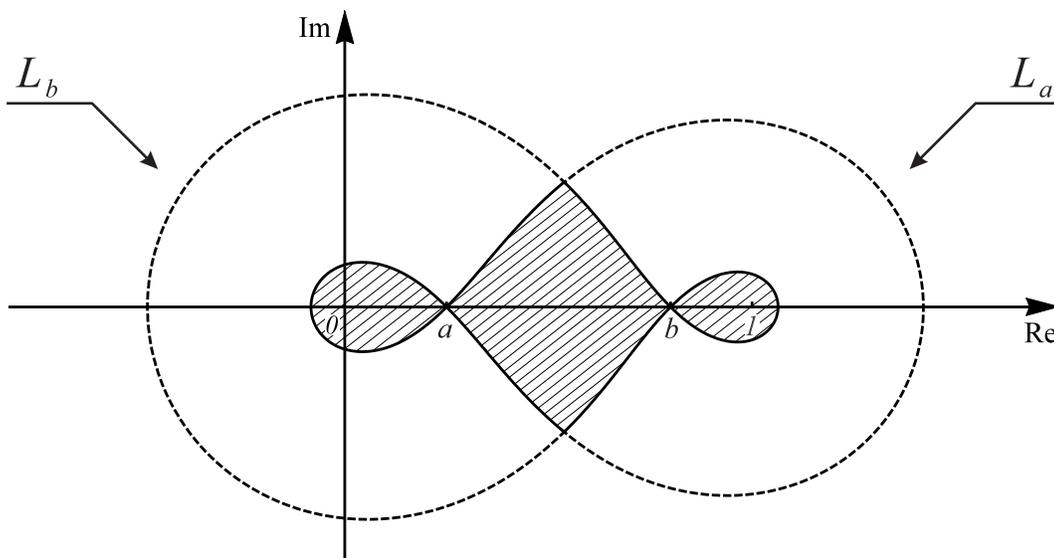


Рис. 4: Штриховкой показана область сходимости полиномов Бернштейна для кусочно линейной порождающей функции с изломами в точках $x_1 = a$ и $x_2 = b$ из $(0, 1)$.

Новиков Игорь Яковлевич (1958 г. р.), известный советский и российский математик. В работе [1] на примере кусочно линейной функции

$$f(x) = \frac{1}{4} (2 - |4x - 1| + |4x - 3|), \quad x \in [0, 1], \quad (6)$$

показал, что нули полиномов Бернштейна стремятся к некоторому устойчивому предельному множеству, связанному со структурой порождающей функции (6). Отметил связь этого эффекта с теоремой Иентча для степенных

рядов. Интерес к конкретному примеру (6) возник в связи с некоторыми задачами из теории всплесков.

Аттрактор нулей полиномов Бернштейна — предельное множество на комплексной плоскости, к которому стягивается подавляющее большинство нулей последовательности полиномов (1) при $n \rightarrow \infty$. Средствами компьютерной математики удается полностью исследовать и описать аттракторы нулей, возникающие в случае кусочно линейных порождающих функций вида (3). Как правило, такие аттракторы представляют собой некие континуумы в \mathbb{C} . Состоят из фрагментов лемнискат Канторовича, порожденных имеющимися точками излома, и больших дуг специальных *серединных окружностей* (см.), возникающих на стыках лемнискат. Аттракторы могут содержать отдельные изолированные точки той или иной природы. В целом картина с аттракторами нулей для полиномов Бернштейна получается намного более эффективной и сложной, чем для степенных рядов в случае теоремы Иентча.

Серединная окружность — кривая вида

$$\left(x - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sigma}{|\sigma^2 - 1|}\right)^2 \quad (7)$$

с параметром

$$\sigma \equiv \left[\frac{c_2^{c_2} (1 - c_2)^{1-c_2}}{c_1^{c_1} (1 - c_1)^{1-c_1}} \right]^{\frac{1}{c_2 - c_1}} > 0, \quad (8)$$

построенная по двум последовательным точкам $c_1, c_2 \in (0, 1)$, где $c_1 < c_2$. Уравнение (7) с параметром (8) получается при приравнении левых частей, взятых из уравнений лемнискат Канторовича L_{c_1}, L_{c_2} . Найденная окружность проходит через точки пересечения таких лемнискат. Термин «серединная окружность» возник по аналогии с серединным перпендикуляром $\operatorname{Re} z = 1/2$, в который окружность (7) вырождается при $c_1 + c_2 = 1$. Возможно, впрочем, что аналогия является несовершенной; термин можно заменить, если найдется более удачный вариант.

Рассеченный аттрактор — аттрактор, разделенный на несвязные части сомкнувшейся дугой серединной окружности. Возникает в особых вырожденных случаях — при обращении порождающей функции $f(x)$ в тождественный нуль на внутреннем интервале отрезка $[0, 1]$.

Изолированная точка аттрактора нулей полиномов Бернштейна расположена отдельно от основной части аттрактора. Появление подобных точек также связано с обращением в нуль самой порождающей функции $f(x)$

или ее аналитического продолжения. Характер изолированной точки дополнительно уточняется.

Девиантные нули полиномов Бернштейна — нули, ведущие себя по особым правилам и не сходящиеся к аттрактору нулей. Девиантные нули крайне малочисленны, но их присутствие следует учитывать. Для кусочно линейной порождающей функции вида (3) возникают только у полиномов, не входящих в цепочку склеиваний (5).

Жук, тело жука, усики — неформальная лексика, с помощью которой удобно объяснять структуру аттрактора нулей полиномов Бернштейна. «Жук» — весь аттрактор, «тело жука» состоит из фрагментов лемнискат, а «усики» — из дуг серединных окружностей.

Для того чтобы понять происходящее, приведем примеры на две характерные ситуации.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = |5x - 1| + |7x - 3| + |7x - 5|, \quad x \in [0, 1], \quad (9)$$

с изломами в точках

$$x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{3}{7}, \quad x_3 = \frac{5}{7}. \quad (10)$$

Это типичный случай «общего положения».

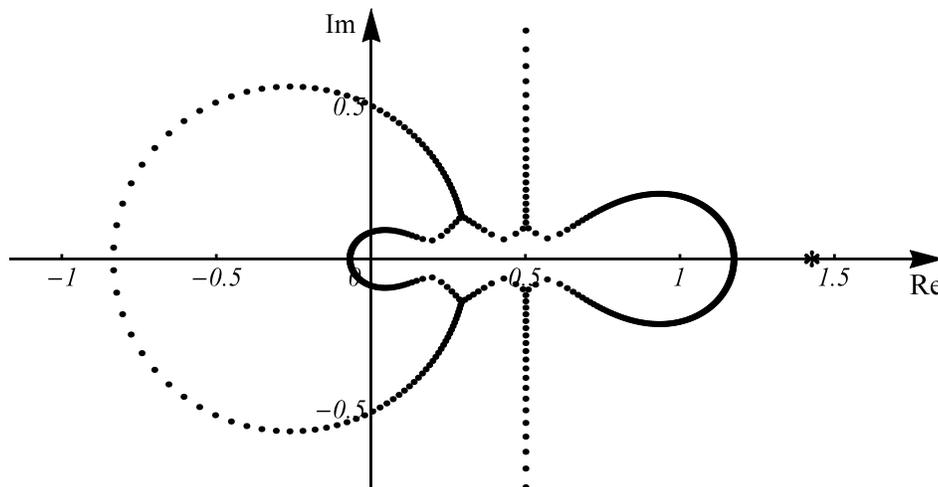


Рис. 5: Основные нули полинома $B_{550}(f, z)$ для функции (9).

Множество нулей полинома $B_{550}(f, z)$ представлено на рис. 5. Для лучшего восприятия рисунок обрзан по вертикали, и часть «дальних» нулей,

расположенных вдоль прямой $\operatorname{Re} z = 1/2$, на чертеж не попала. Впрочем, конструкция формирующейся структуры вполне просматривается. Аттрактор нулей — «жук» — состоит из «тела» и «усиков». Точный вид аттрактора показан на рис. 6.

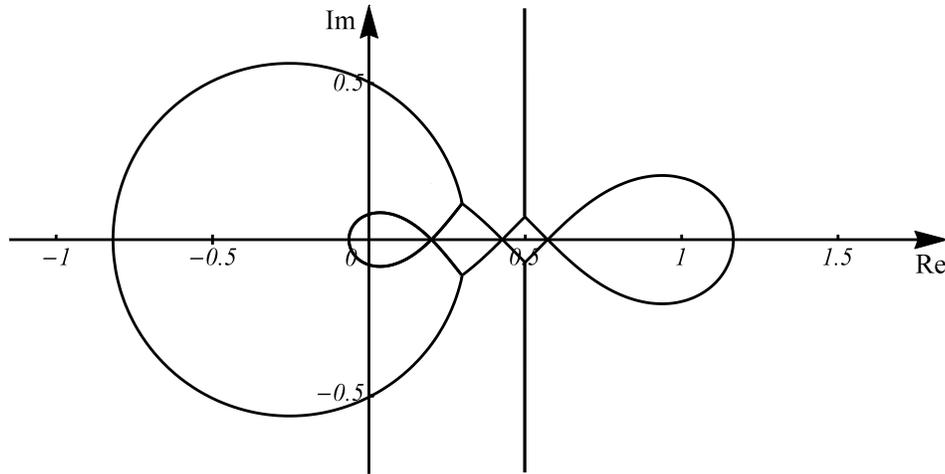


Рис. 6: Аттрактор нулей в примере 1.

Основное «тело» аттрактора образовано фрагментами трех лемнискат, порожденных точками излома (10). На стыках лемнискат возникают два «усика». Первый из них является дугой серединной окружности, а второй состоит из двух вертикальных лучей на прямой $\operatorname{Re} z = 1/2$. Такое «выпрямление» второго «усика» связано с симметрией порождающих точек $x_2 = 3/7$ и $x_3 = 5/7$, для которых $x_2 + x_3 = 1$.

Обратим еще внимание на то, что полином $B_{550}(f, z)$ имеет девиантный вещественный нуль $z^* \approx 1.42987$ (на рис. 5 он отмечен «звездочкой»). Девиантный нуль возник из-за того, что полином $B_{550}(f, z)$ не попадает в цепочку склеиваний

$$B_{35m+1}(f, z) = B_{35m}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

построенную для функции (9) по правилу (5). Компьютерный расчет показывает, что полином $B_{560}(f, z)$ из цепочки (11) подобных девиантных нулей иметь не будет, и все его нули (без исключения) регулярно укладываются вблизи аттрактора.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = 6x - 5 + |7x - 2| + |9x - 4| + |4x - 3|, \quad x \in [0, 1], \quad (12)$$

с изломами в точках

$$x_1 = \frac{2}{7}, \quad x_2 = \frac{4}{9}, \quad x_3 = \frac{3}{4}. \quad (13)$$

В данном примере $f(x) \equiv 0$ между точками $x_1 = 2/7$ и $x_2 = 4/9$ из набора (13). Множество нулей полинома $B_{756}(f, z)$ представлено на рис. 7.

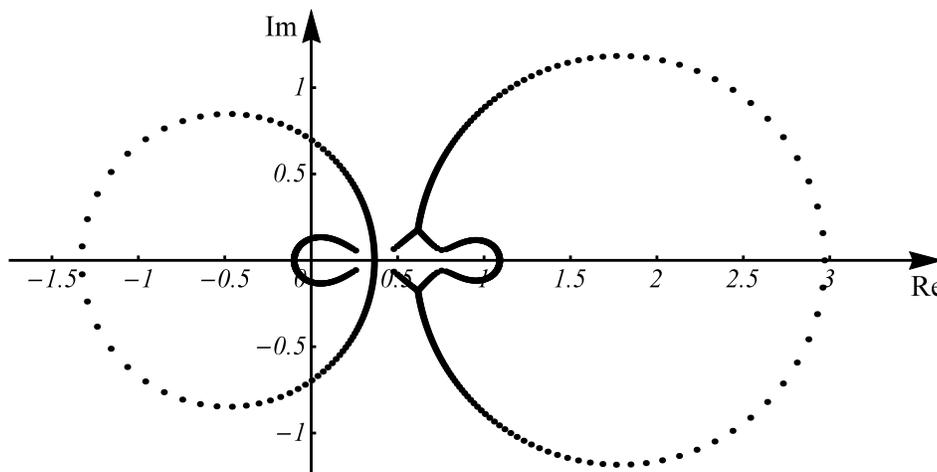


Рис. 7: Нули полинома $B_{756}(f, z)$ для функции (12).

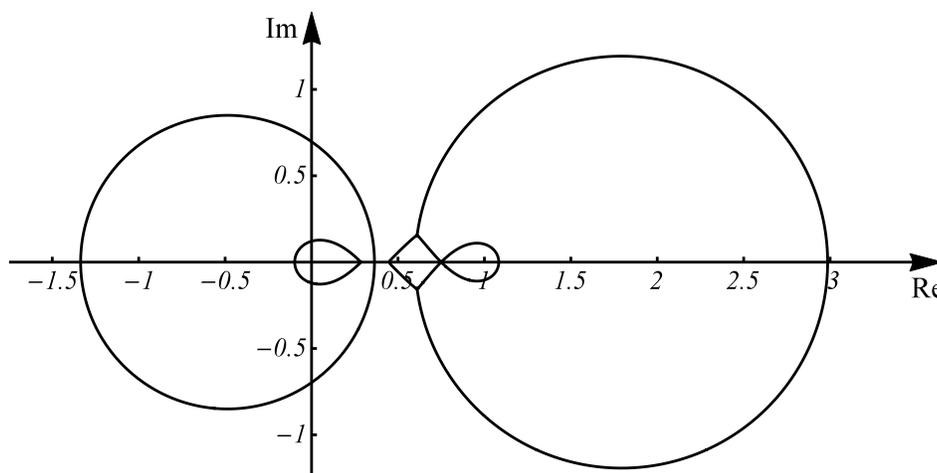


Рис. 8: Рассеченный аттрактор нулей в примере 2.

Возникающий аттрактор нулей показан на рис. 8. Одно отличие от предыдущего примера 1 отметим особо: фрагменты лемнискат, охватывающие интервал $(2/7, 4/9)$, в аттрактор уже не включаются, зато соответствующий «усик» замыкается во всю серединную окружность, порожденную точками $x_1 = 2/7$ и $x_2 = 4/9$. Аттрактор оказывается *рассеченным*.

Девиантные нули у полинома $B_{756}(f, z)$ отсутствуют, поскольку он попадает в цепочку склеиваний

$$B_{252m+1}(f, z) = B_{252m}(f, z), \quad m \in \mathbb{N},$$

построенную для функции (12) по правилу (5).

Проанализировав множество подобных примеров и приняв во внимание некоторые теоретические соображения, мы пришли к убеждению в строгой системности происходящего. Главный наш вывод прост: для полиномов Бернштейна, взятых от любой функции $f \in C[0, 1]$ вида (3), можно провести исчерпывающее построение аттрактора нулей, ориентируясь на конечный набор из шести правил. Приведем их *синописис* вместе с краткими комментариями. Для упрощения формулировок абсциссу точки излома, выбранную из общего набора (4), будем обозначать через c , а пару последовательных абсцисс — через c_1, c_2 , нумеруя их независимо от основной нумерации, введенной в (4).

Два базовых правила выглядят так.

Правило 1. При наличии у выбранной функции $f(x)$ излома в точке $x = c \in (0, 1)$ в аттрактор включается соответствующий фрагмент лемнискаты (2). Данный фрагмент проводится из точки $z = c$ до пересечения с другими лемнискатами, порожденными соседними точками излома. Если точка излома одна, то аттрактор содержит лишь одну лемнискату (2). Если точек излома несколько, то на стыках лемнискат возникают дополнительные части аттрактора («усики»), которые регулируются следующим правилом.

Правило 2. При наличии у функции $f(x)$ двух последовательных изломов в точках $x = c_1$ и $x = c_2$, где $c_1, c_2 \in (0, 1)$ и $c_1 < c_2$, в аттрактор включается большая (внешняя) дуга серединной окружности (7) с параметром $\sigma > 0$ из формулы (8). Если $c_1 + c_2 = 1$, то $\sigma = 1$, и окружность (7) вырождается в прямую $\operatorname{Re} z = 1/2$ — серединный перпендикуляр к отрезку $[0, 1]$. В таком случае в аттрактор включаются два луча этой прямой, проведенные симметрично «вверх» и «вниз» из точек пересечения соответствующих лемнискат до бесконечности.

Сформулированные правила 1 и 2 отражают главные закономерности, действующие в случае «общего положения». Специальные поправки надо вносить лишь при обращении в тождественный нуль порождающей функции $f(x)$ на том или ином участке отрезка $[0, 1]$. Приведем соответствующие добавочные правила. Начнем с особого «внутреннего» случая.

Правило 3. Пусть $f(x) \equiv 0$ между двумя изломами в точках $x = c_1$ и $x = c_2$ внутри $(0, 1)$. Тогда из аттрактора нулей надо исключить те фрагменты лемнискат L_{c_1}, L_{c_2} , что сверху и снизу «охватывают» проме-

жуток (c_1, c_2) . При этом дуга с соответствующим «усиком» замыкается в полную серединную окружность (7) с параметром (8). Если $c_1 + c_2 = 1$, то в аттрактор (вместо окружности) включается вся вертикальная прямая $\operatorname{Re} z = 1/2$.

Именно в условиях правила 3 и возникает рассеченный аттрактор. Его типичный вид был представлен на рис. 8 в примере 2 выше. Охарактеризуем теперь вырожденный «граничный» случай.

Правило 4. Пусть $f(x) \equiv 0$ на промежутке $[0, c]$ с изломом в точке $x = c \in (0, 1)$. Тогда для каждого из полиномов (1) группа нулей, «тяготеющая» к левой петле лемнискаты (2), «схлопывается» в один кратный нуль, расположенный в точке $z = 0$. В таком случае из аттрактора нулей надо исключить левую петлю лемнискаты (2), а точку $z = 0$ следует считать изолированной (кратной) точкой аттрактора. Аналогично, если $f(x) \equiv 0$ на промежутке $[c, 1]$ с изломом в точке $c \in (0, 1)$, то для каждого из полиномов (1) группа нулей, «тяготеющая» к правой петле лемнискаты (2), «схлопывается» в один кратный нуль, расположенный в точке $z = 1$. Соответственно, из аттрактора нулей надо исключить правую петлю лемнискаты (2), а точку $z = 1$ следует считать изолированной (кратной) точкой аттрактора.

Особые ситуации, отмеченные в правилах 3 и 4, являются неустойчивыми, и при соответствующих малых возмущениях порождающей функции $f(x)$ картина возвращается к случаю общего положения.

Возможна, наконец, такая специфическая ситуация, когда в аттракторе нулей появляется изолированная (некратная) точка $z = d$, никак не связанная с точками излома, а порожденная тем, что сама функция $f(x)$ или ее естественное продолжение на \mathbb{R} имеет изолированный нуль в точке $x = d$. Нетрудно сообразить, например, что если подобный нуль попал на $[0, 1]$, то по соображениям равномерной аппроксимации к нему должны сходиться нули полиномов Бернштейна. Отсюда возникает следующее правило.

Правило 5. Пусть выбранная функция $f(x)$ имеет изолированный нуль, расположенный в точке $x = d \in [0, 1]$, но не имеет излома в этой точке. Тогда точка $z = d$ включается в аттрактор нулей на правах изолированной (некратной) точки.

Сложнее было заметить другой случай — с нулем естественного продолжения функции $f(x)$ при распространении формулы (3) на всю ось \mathbb{R} . Про-

веденные опыты показали полную согласованность с теорией Канторовича: важно лишь, чтобы нуль продолжения функции $f(x)$ попал внутрь области сходимости полиномов Бернштейна. После того, как следующее правило сформулировано, оно становится «почти очевидным».

Правило 6. Пусть естественное продолжение функции $f(x)$ имеет изолированный нуль в точке $x = d \in \mathbb{R}$, не принадлежащей отрезку $[0, 1]$, но попадающей внутрь области сходимости полиномов Бернштейна (1). Тогда точка $z = d$ включается в аттрактор нулей на правах изолированной (некратной) точки.

На наш взгляд представленный список из шести правил является исчерпывающим, хотя, не исключено, что какие-то скрытые возможности остались незамеченными. Во всяком случае, изложенная картина была проверена компьютерными средствами на большой серии различных функций вида (3). Эффекты, связанные с изолированными точками аттракторов из правил 4–6, легко обосновываются. Для более сложных правил 1–3 подробные аналитические доказательства — дело будущего.

В итоге вырисовывается масштабная программа предстоящих исследований, связанных с аттракторами нулей полиномов Бернштейна. Укажем несколько перспективных тем, требующих теоретической разработки. Было бы весьма желательно

- дать строгое аналитическое обоснование сформулированных правил построения аттракторов;
- оценить скорость сходимости нулей полиномов Бернштейна к тем или иным частям аттрактора;
- выявить примерные пропорции нулей, тяготеющих к различным фрагментам аттрактора;
- найти и обосновать точные правила, регулирующие поведение девиантных нулей полиномов Бернштейна;
- изучить вопрос о возможности распространения результатов на более общий класс кусочно аналитических порождающих функций.

Дальнейшие исследования в этих направлениях могут существенно обогатить общую теорию распределения нулей для полиномов специального вида.

Список литературы

- [1] Новиков И. Я. Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. 2002. Т. 71. Вып. 2. С. 239–253.
- [2] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Задача о нулях полиномов Бернштейна на модельном примере симметричного модуля // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 18-й междунар. Саратов. зимней школы. Саратов: ООО Издательство «Научная книга», 2016. С. 271–275.
- [3] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2016. Материалы научной конференции, 11–15 апреля 2016 г. СПб: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. С. 139–145.
- [4] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Компьютерная классификация аттракторов для нулей полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII международной научной конференции. Выпуск 17. Смоленск: СмолГУ, 2016. С. 224–227.
- [5] Duren P., Herbig A.-K., Khavinson D. Robert Jentzsch, mathematician and poet // The Mathematical Intelligencer. 2008. Vol. 30. Issue 3. P. 18–24.
- [6] Jentzsch R. Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen // Acta Math. 1918. Vol. 41. P. 219–251.
- [7] Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 240 с.
- [8] Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.
- [9] Rahman Q. I., Schmeisser G. Analytic Theory of Polynomials. Oxford: Clarendon Press, 2002. xiv+742 p.
- [10] Izumi S. On the Distribution of the Zero Points of Sections of a Power Series // Japanese Journal of Math. 1927. Vol. 4. P. 29–32.
- [11] Коробейник Ю. Ф. О некоторых свойствах функциональных рядов // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15. Вып. 4. С. 149–156.
- [12] Лебедева Е. А. Об одном обобщении теоремы Р. Йенча // Матем. заметки. 2010. Т. 88. Вып. 5. С. 753–758.
- [13] Бернштейн С. Н. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités // Сообщения Харьковского Математического Общества. 1912. Т. 13. № 1. С. 1–2.

- [14] Lorentz G. G. Bernstein Polynomials. Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953. x+130 p.
- [15] Виденский В. С. Многочлены Бернштейна. Учебное пособие к спецкурсу. Л.: ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1990. 64 с.
- [16] Bustamante J. Bernstein Operators and Their Properties. Birkhäuser, 2017. xii+420 p.
- [17] Канторович Л. В. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Известия АН СССР. Сер. VII. Отделение матем. и естеств. наук. 1931. № 8. С. 1103–1115.
- [18] Бернштейн С. Н. О сходимости многочленов $\sum_0^n C_n^m f(\frac{m}{n})x^m(1-x)^{n-m}$ в комплексной области // Известия АН СССР. Сер. матем. 1943. Т. 7. № 2. С. 49–88.
- [19] Виденский В. С. Работы Л. В. Канторовича о полиномах С. Н. Бернштейна // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2013. Вып. 2. С. 50–53.
- [20] Gal S. G. Approximation by Complex Bernstein and Convolution Type Operators. (Series on Concrete and Applicable Mathematics. Vol. 8.) New Jersey – London – Singapore: World Scientific, 2009. xii+338 p.
- [21] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. С. 126–175.