ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2015
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

УДК 517.9

Обобщенные нормальные формы систем с гамильтоновой невозмущенной частью

А.С. Ваганян

Санкт-Петербургский государственный университет, кафедра дифференциальных уравнений

Аннотация

В статье рассматривается вопрос о нахождении структур обобщенных нормальных форм систем с гамильтоновой квазиоднородной невозмущенной частью и негамильтоновым возмущением. Наш подход основан на методе Белицкого и использует восходящую к А. Байдеру и Я. Сандерсу идею о разбиении возмущения на „гамильтоновы“ и „негамильтоновы“ составляющие.

В качестве примеров приложений метода приведены результаты, полученные автором ранее совместно с В. Басовым для двумерного случая, а также обобщена на случай произвольного количества жордановых клеток теорема Ф. Такенса о нормальной форме системы с нильпотентной невозмущенной частью.

Ключевые слова: нормальные формы, гамильтоновы системы, нильпотентная невозмущенная часть

Generalized normal forms of systems with a Hamiltonian unperturbed part

A.S. Vaganyan

Saint-Petersburg State University, Department of Differential Equations

Abstract

In this article the question of finding the structures of generalized normal forms of systems with a Hamiltonian quasi-homogeneous unperturbed part and a non-Hamiltonian perturbation is considered. Our approach is based on the Belitskii method and uses the idea due to A. Baider and J. Sanders of decomposing the perturbation into "Hamiltonian" and "non-Hamiltonian" parts.

As examples of applications of the method, results obtained earlier by the author in collaboration with V. Basov for the two-dimensional case are presented, and a generalization of the F. Takens' theorem on the normal form of a system with a nilpotent unperturbed part to the case of an arbitrary number of Jordan blocks is given.

Key words: normal forms, Hamiltonian systems, nilpotent unperturbed part

1. Введение

Представленные в настоящей работе результаты относятся к одной из развивающихся областей локальной качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, включающей в себя различные методы локальной классификации нелинейных систем около неэлементарной особой точки. Следуя терминологии, принятой в работах В. Басова (см. напр. [1]), объекты этой классификации, т. е. наиболее простые в некотором смысле системы, к которым можно прийти при помощи соответствующей группы преобразований, будем называть обобщенными нормальными формами.

Нормализуемая система состоит из заданной невозмущенной части, представленной квазиоднороднородным векторным многочленом, и формального возмущения с произвольными коэффициентами. Нас будет интересовать случай, когда невозмущенная часть гамильтонова. Как показывают результаты Басова и др., обобщенные нормальные формы таких систем выделяются из общей классификации, поэтому он заслуживает отдельного рассмотрения.

Основной результат данной работы сформулирован в параграфе 3. Используя метод Белицкого и идею разбиения возмущения на „гамильтоновы“ и „негамильтоновы“ слагаемые, примененную А. Байдером и Я. Сандерсом для классификации особенности Такенса-Богданова, мы показываем, как выглядит обобщенная нормальная форма в соответствующем базисе.

Алгоритм перехода к обобщенной нормальной форме в смысле В. Басова (в стандартном базисе) приведен в следующем параграфе. В качестве примеров приведены структуры обобщенных номальных форм систем двух уравнений с невозмущенной частью, представленной бездивергентным вектором с мономиальными компонентами произвольной степени.

В заключительном параграфе мы обобщаем на случай произвольного количества жордановых клеток теорему Ф. Такенса о нормальной форме системы двух уравнений с нильпотентной невозмущенной частью.

Рассмотрим автономную систему $2n$ уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\frac{\partial H}{\partial y_i} + X_i, \\ \dot{y}_i &= \frac{\partial H}{\partial x_i} + Y_i, \end{aligned} \tag{1}$$

где гамильтониан невозмущенной системы представляет собой квазиоднородный полином обобщенной степени χ с весом γ вида

$$H = \sum_{i=1}^{n} H_i(x_i, y_i), \tag{2}$$

а γ, в свою очередь, удовлетворяет условию

$$\gamma_1 + \gamma_{n+1} = \cdots = \gamma_n + \gamma_{2n} = \sigma \leq \chi,$$

которое означает, что скобка Пуассона квазиоднородных полиномов квазиоднородна, т. е.

$$\{P_\gamma^{[k]}, Q_\gamma^{[l]}\} \in \mathbb{R}_\gamma^{[k+l-\sigma]}[x, y].$$

Здесь и далее вес обозначается нижним индексом, а обобщенные степени — верхним индексом в квадратных скобках.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} = \{H, \cdot\}, \qquad & z_i &= x_i, \\ \mathcal{Z} &= \sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i\frac{\partial}{\partial y_i}, & z_{n+i} &= y_i. \end{aligned}$$

Нас будет интересовать, к какой наиболее простой системе (обобщенной нормальной форме) можно привести систему (1) при помощи почти тождественных преобразований, т. е. преобразований вида

$$z_i = \widetilde{z}_i + Q_i(\widetilde{z}) \qquad \Big(\mathrm{ord}_\gamma \mathcal{Q} = k + \sigma,\ \mathcal{Q} = \sum_{i=1}^{2n} Q_i \frac{\partial}{\partial z_i}.\Big)$$

При таких преобразованиях система (1) переходит в систему с такой же невозмущенной частью, причем квазиоднородные слагаемые возмущения обобщенной степени меньше $k+\chi$ не меняются, а в обобщенной степени $k+\chi$ исходное и преобразованное возмущения связаны следующим образом (см. напр. [1]):

$$\widetilde{\mathcal{Z}}_\gamma^{[k+\chi]} = \mathcal{Z}_\gamma^{[k+\chi]} + [\mathcal{Q}_\gamma^{[k+\sigma]}, \widehat{H}]. \tag{3}$$

2. Резонансное уравнение и резонансные наборы

В отличие от резонансных нормальных форм структура возмущения для обобщенных нормальных форм не определяется однозначно по невозмущенной части. Ярким примером тому служит система двух уравнений с нильпотентной невозмущенной частью $(y, 0)$, для которой имеется две встречающихся в литературе обобщенных нормальных формы:

$$1)\quad \begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \sum_{i=2}^{\infty} Y^{(i,0)} x^i + xy \sum_{i=0}^{\infty} Y^{(i+1,1)} x^i; \end{aligned} \qquad 2)\quad \begin{aligned} \dot{x} &= y + x^2 \sum_{i=0}^{\infty} X^{(i+2,0)} x^i, \\ \dot{y} &= \sum_{i=2}^{\infty} Y^{(i,0)} x^i. \end{aligned}$$

В связи с этим В. Басовым было введено понятие *резонансного набора*, которое объединяет различные обобщенные нормальные формы в единую классификацию. Аналогичное определение для гамильтоновых систем было введено автором в совместной с В. Басовым работе [2]. Как будет показано, для рассматриваемых нами систем обычные резонансные наборы, нахождение которых представляет собой нетривиальную задачу, могут быть выражены через гамильтоновы, для описания которых можно использовать более эффективные методы, основанные на идеях Г. Белицкого и развитые автором и В. Басовым в работе [3].

Следуя Г. Белицкому, определим на $\mathbb{R}[z]$ скалярное произведение

$$\langle P, Q\rangle = P(\partial)Q(z)|_{z=0}, \qquad \partial = \Big(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_s}\Big),$$

со следующими свойствами:

1) $\langle z^p, z^q\rangle = p!\,\delta_{pq}$, где $p! = \prod_{i=1}^s p_i!$, а $\delta_{pq} = \prod_{i=1}^s \delta_{p_i q_i}$ — произведение символов Кронекера;

2) $\langle PQ, R\rangle = \langle P, Q^* R\rangle$, где $Q^* = Q(\partial)$.

Из свойства 1) следует, что $\mathbb{R}[z]$ разбивается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathbb{R}_\gamma^{[k]}[z]$ квазиоднородных полиномов обобщенной степени k с весом γ.

По свойству 2), оператор, сопряженный $\widehat{H}$, имеет вид

$$\widehat{H}^* = \sum_{i=1}^{n} y_i \Big(\frac{\partial H}{\partial x_i}\Big)^* - x_i \Big(\frac{\partial H}{\partial y_i}\Big)^*.$$

Определение 1. *Резонансным уравнением* для квазиоднородного гамильтониана H будем называть уравнение

$$\widehat{H}^*(P) = 0.$$

Его полиномиальные решения назовем *резонансными полиномами.*

Обозначим линейное пространство резонансных полиномов через $\mathfrak{R}$. Из квазиоднородности гамильтониана H следует, что $\mathfrak{R}$ разбивается в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathfrak{R}_\gamma^{[k]}$ квазиоднородных резонансных полиномов.

Определение 2. Будем говорить, что множество квазиоднородных полиномов $S_{\gamma,j}^{[k]}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \dots, \dim \mathfrak{R}_\gamma^{[k]}$, образует *гамильтонов резонансный набор*, если для каждого k и произвольного базиса $R_{\gamma,i}^{[k]}$ пространства $\mathfrak{R}_\gamma^{[k]}$ матрица скалярных произведений $\langle R_{\gamma,i}^{[k]}, S_{\gamma,j}^{[k]} \rangle$ невырождена.

Отметим, что определение гамильтонова резонансного набора не зависит от выбора базиса, а любой базис $\mathfrak{R}$ сам по себе является гамильтоновым резонансным набором. Кроме того, гамильтонов резонансный набор всегда можно составить из мономов. Такие резонансные наборы будем называть *мономиальными.*

Обозначим через $\mathfrak{H}$ алгебру рядов, порожденную полиномиальными корнями из H_i,

$$\mathfrak{H} = \mathbb{R}[[H_1^{1/d_1}, \dots, H_n^{1/d_n}]], \tag{4}$$

где d_i — наибольшее натуральное число, такое, что $H_i^{1/d_i} \in \mathbb{R}[z]$. Через $H_i\mathfrak{H}$ будем обозначать идеал алгебры $\mathfrak{H}$, порожденный элементами $\mathfrak{H}$, кратными H_i.

Положим

$$\mathfrak{R}_l = \begin{cases} \mathfrak{R}, & \text{если } \chi = \sigma \\ \{P \in \mathfrak{R} : \ \langle P, Q \rangle = 0, \ \forall Q \in H_l\mathfrak{H}\}, & \text{если } \chi > \sigma \end{cases}.$$

Линейные пространства $\mathfrak{R}_l$, как и $\mathfrak{R}$, разбиваются в прямую сумму ортогональных линейных подпространств $\mathfrak{R}_{\gamma,l}^{[k]} \subset \mathbb{R}_\gamma^{[k]}[z]$.

Определение 3. Будем говорить, что множество квазиоднородных полиномов $S_{\gamma,l,j}^{[k]}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $j = 1, \ldots, \dim \mathfrak{R}_{\gamma,l}^{[k]}$, образует *$l$-й усеченный гамильтонов резонансный набор*, если для каждого k и произвольного базиса $R_{\gamma,l,i}^{[k]}$ пространства $\mathfrak{R}_{\gamma,l}^{[k]}$ матрица скалярных произведений $\langle R_{\gamma,l,i}^{[k]}, S_{\gamma,l,j}^{[k]} \rangle$ невырождена.

3. Теорема о нормализации

Специальный вид (2) гамильтониана H позволяет применить для нахождения обобщенной нормальной формы разложение векторных полей на дивергентные и бездивергентные составляющие. В теории нормальных форм такое разложение было впервые применено А. Байдером и Я. Сандерсом в работе [4] для случая системы двух уравнений с нильпотентной невозмущенной частью.

Чтобы получить нужное разложение, введем на $\mathbb{R}[z]$ следующие линейные операторы:

$$\mathcal{E}_{\gamma,i} = \gamma_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \gamma_{n+i} y_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad \mathcal{L}_{\gamma,i} = (\sigma + \mathcal{E}_{\gamma,i})^{-1}.$$

Действие $\mathcal{L}_{\gamma,i}$ на мономах определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\gamma,i}(x^p y^q) = \frac{x^p y^q}{\sigma + \gamma_i p_i + \gamma_{n+i} q_i}.$$

Лемма 1. *Произвольный векторный ряд $\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^n X_i \partial/\partial x_i + Y_i \partial/\partial y_i$ может быть единственным образом представлен в виде*

$$\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F_i}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + G_i \mathcal{E}_{\gamma,i}.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого i найдутся ряды F_i, G_i, такие, что

$$X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F_i}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + G_i \mathcal{E}_{\gamma,i},$$

причем G_i единственен. При этом ряд F_i, очевидно, определен с точностью до слагаемого не зависящего от x_i, y_i.

Взяв дивергенцию от обеих частей последнего равенства, получим

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} = \sigma G_i + \mathcal{E}_{\gamma,i}(G_i).$$

Отсюда находим выражение для G_i :

$$G_i = \mathcal{L}_{\gamma,i}\Big(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i}\Big).$$

Положим

$$F_i = \int (Y_i - \gamma_{n+i} y_i G_i)\,\mathrm{d}x_i + R_i,$$

где ряд R_i не зависит от x_i. Поскольку $\partial(Y_i - \gamma_{n+i}y_iG_i)/\partial y_i = \partial(\gamma_i x_i G_i - X_i)/\partial x_i$, R_i может быть выбран таким, что $\partial F_i/\partial y_i = \gamma_i x_i G_i - X_i$.

Найденные F_i, G_i определяют искомое представление из утверждения леммы. □

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{T}_i$, $i = 1, \ldots, n$, — произвольно выбранные гамильтоновы мономиальные резонансные и i-е усеченные резонансные наборы для H. Тогда существует формальное почти тождественное преобразование, приводящее возмущение системы (1) к виду*

$$\widetilde{\mathcal{Z}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \widetilde{G}_i \mathcal{E}_{\gamma,i},$$

в котором каждое квазиоднородное слагаемое ряда $\widetilde{F}_i$ является линейной комбинацией элементов $\mathfrak{T}_i$, а каждое квазиоднородное слагаемое ряда $\widetilde{G}_i$ является линейной комбинацией элементов $\mathfrak{S}_i$.

4. Доказательство теоремы 1

Лемма 2. *Для произвольного ряда G существует ряд F, такой, что*

$$[\widehat{H}, G\mathcal{E}_{\gamma,i}] = \mathcal{L}_{\gamma,i}\widehat{H}\mathcal{L}_{\gamma,i}^{-1}(G)\mathcal{E}_{\gamma,i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Доказательство. Из равенства $[\widehat{H}, \mathcal{E}_{\gamma,i}] = -(\chi - \sigma)\widehat{H}_i$ вытекает, что

$$[\widehat{H}, G\mathcal{E}_{\gamma,i}] = \{H, G\}\mathcal{E}_{\gamma,i} - (\chi - \sigma)G\widehat{H}_i.$$

Применяя лемму 1 к $G\widehat{H}_i$, с учетом равенства $\operatorname{div}(G\widehat{H}_i) = \{H_i, G\}$ получаем

$$[\widehat{H}, G\mathcal{E}_{\gamma,i}] = \big(\{H,G\} - (\chi-\sigma)\mathcal{L}_{\gamma,i}(\{H_i,G\})\big)\mathcal{E}_{\gamma,i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Остается показать, что $\widehat{H} - (\chi-\sigma)\mathcal{L}_{\gamma,i}\widehat{H}_i = \mathcal{L}_{\gamma,i}\widehat{H}\mathcal{L}_{\gamma,i}^{-1}$. Действительно, поскольку

$$[\widehat{H}, \mathcal{L}_{\gamma,i}] = -\mathcal{L}_{\gamma,i}[\widehat{H}, \mathcal{L}_{\gamma,i}^{-1}]\mathcal{L}_{\gamma,i} = \mathcal{L}_{\gamma,i}[\mathcal{E}_{\gamma,i}, \widehat{H}]\mathcal{L}_{\gamma,i} = (\chi-\sigma)\mathcal{L}_{\gamma,i}\widehat{H}_i\mathcal{L}_{\gamma,i},$$

имеет место цепочка равенств

$$\big(\widehat{H} - (\chi-\sigma)\mathcal{L}_{\gamma,i}\widehat{H}_i\big)\mathcal{L}_{\gamma,i} = \mathcal{L}_{\gamma,i}\widehat{H} + [\widehat{H}, \mathcal{L}_{\gamma,i}] - (\chi-\sigma)\mathcal{L}_{\gamma,i}\widehat{H}_i\mathcal{L}_{\gamma,i} = \mathcal{L}_{\gamma,i}\widehat{H},$$

откуда вытекает формула из утверждения леммы. □

Лемма 3. *Для произвольного ряда F*

$$\Big[\widehat{H}, \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big] = \frac{\partial\{H,F\}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial\{H,F\}}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Доказательство. По свойству скобок Пуассона, имеем

$$\Big[\widehat{H}_i, \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big] = \frac{\partial\{H_i,F\}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial\{H_i,F\}}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Переменные x_j, y_j, $j \neq i$, выступают здесь в роли параметров. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\sum_{j\neq i}\Big[\widehat{H}_j, \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big] &= \sum_{j\neq i}\Big(\frac{\partial H_j}{\partial x_j}\frac{\partial^2 F}{\partial y_j\partial x_i} - \frac{\partial H_j}{\partial y_j}\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_i}\Big)\frac{\partial}{\partial y_i}\\ &\quad - \Big(\frac{\partial H_j}{\partial x_j}\frac{\partial^2 F}{\partial y_j\partial y_i} - \frac{\partial H_j}{\partial y_j}\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial y_i}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= \sum_{j\neq i}\frac{\partial\{H_j,F\}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial\{H_j,F\}}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i},\end{aligned}$$

поскольку H_j не зависит от x_i, y_i. Складывая полученные равенства, приходим к формуле из утверждения леммы. □

Лемма 4. *Пусть $\chi > \sigma$. Тогда для произвольного $F \in H_i\mathfrak{H}$ найдется $G \in \mathfrak{H}$, такой, что*

$$[\widehat{H}, G\mathcal{E}_{\gamma,i}] = \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Доказательство. Всякий ряд $F \in H_i\mathfrak{H}$ представляется в виде

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_i^{k/d_i+1},$$

где коэффициенты $c_k \in \mathfrak{H}$ не зависят от x_i, y_i.

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=0}^{\infty}(k/d_i+1)c_k H_i^{k/d_i}\widehat{H}_i.$$

Поскольку $[\widehat{H}, G\mathcal{E}_{\gamma,i}] = -(\chi-\sigma)G\widehat{H}_i$ для всякого $G \in \mathfrak{H}$, искомый ряд задается выражением

$$G = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k/d_i+1}{\chi-\sigma}c_k H_i^{k/d_i}.$$

$\square$

Замечание 1. Из приведенного доказательства видно, что справедливо и обратное утверждение: для всякого ряда $G \in \mathfrak{H}$ существует ряд $F \in H_i\mathfrak{H}$, удовлетворяющий условию леммы 4.

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 1, возмущение системы (1) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial F_i}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + G_i\mathcal{E}_{\gamma,i}.$$

Для фиксированного i рассмотрим произвольное преобразование вида

$$\begin{aligned} x_i &= \widetilde{x}_i + \gamma_i\widetilde{x}_i P_\gamma^{[k-\chi+\sigma]}(\widetilde{z}), \qquad x_j = \widetilde{x}_j,\\ y_i &= \widetilde{y}_i + \gamma_{n+i}\widetilde{y}_i P_\gamma^{[k-\chi+\sigma]}(\widetilde{z}), \quad y_j = \widetilde{y}_j, \end{aligned}$$

где j пробегает множество индексов от 1 до n, отличных от i. Согласно уравнению (3) и лемме 2, имеем

$$G_{\gamma,i}^{[k]} - \widetilde{G}_{\gamma,i}^{[k]} = (\mathcal{L}_{\gamma,i}\widehat{H}\mathcal{L}_{\gamma,i}^{-1})(P_\gamma^{[k-\chi+\sigma]}), \quad G_{\gamma,j}^{[k]} = \widetilde{G}_{\gamma,j}^{[k]}.$$

Покажем, что для заданного $G_{\gamma,i}^{[k]}$ существует единственный полином $\widetilde{G}_{\gamma,i}^{[k]} \in \operatorname{span}(\mathfrak{S}_{\gamma,i}^{[k]})$, для которого последнее уравнение разрешимо относительно $P_\gamma^{[k-\chi+\sigma]}$.

Из альтернативы Фредгольма и самосопряженности $\mathcal{L}_{\gamma,i}$ следует, что для существования $P_\gamma^{[k-\chi+\sigma]}$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $R_\gamma^{[k]} \in \mathfrak{R}_\gamma^{[k]}$ выполнялось равенство

$$\langle \mathcal{L}_{\gamma,i}^{-1}(R_\gamma^{[k]}), G_{\gamma,i}^{[k]} \rangle = \langle \mathcal{L}_{\gamma,i}^{-1}(R_\gamma^{[k]}), \widetilde{G}_{\gamma,i}^{[k]} \rangle$$

Пусть полиномы $R_{\gamma,\mu}^{[k]}$ образуют базис пространства $\mathfrak{R}_\gamma^{[k]}$, а мономы $x^{p_\nu} y^{q_\nu}$ составляют гамильтонов резонансный набор. Положим $\widetilde{G}_{\gamma,i}^{[k]} = \sum_\nu c_\nu x^{p_\nu} y^{q_\nu} \in \operatorname{span}(\mathfrak{S}_{\gamma,i}^{[k]})$. Тогда

$$\langle \mathcal{L}_{\gamma,i}^{-1}(R_{\gamma,\mu}^{[k]}), \widetilde{G}_{\gamma,i}^{[k]} \rangle = \sum_\nu \big\{ \langle R_{\gamma,\mu}^{[k]}, \mathcal{L}_{\gamma,i}^{-1}(x^{p_\nu} y^{q_\nu}) \rangle \big\} c_\nu.$$

Обозначая

$$\begin{aligned} &A = \big\{ \langle R_{\gamma,\mu}^{[k]}, x^{p_\nu} y^{q_\nu} \rangle \big\}, && c = \{c_\nu\}, \\ &B = \operatorname{diag}\{\sigma + \gamma_i p_{\nu,i} + \gamma_{n+i} q_{\nu,i}\}, && d = \big\{ \langle \mathcal{L}_{\gamma,i}^{-1}(R_{\gamma,\mu}^{[k]}), G_{\gamma,i}^{[k]} \rangle \big\}, \end{aligned}$$

с учетом $\mathcal{L}_{\gamma,i}^{-1}(x^p y^q) = (\sigma + \gamma_i p_i + \gamma_{n+i} q_i) x^p y^q$ получаем уравнения на c_ν :

$$A \cdot B \cdot c = d.$$

Матрица A невырождена по определению гамильтонова резонансного набора, а B — поскольку $\sigma + \gamma_i p_{\nu i} + \gamma_{n+i} q_{\nu i} > 0$ для всех ν. Отсюда коэффициенты c_ν, а следовательно и $\widetilde{G}_{\gamma,i}^{[k]}$, определяются по $G_{\gamma,i}^{[k]}$ однозначно.

Теперь рассмотрим произвольное почти тождественное преобразование вида

$$\begin{aligned} x_i &= \widetilde{x}_i + \gamma_i \widetilde{x}_i P_\gamma^{[k-\chi+\sigma]}(\widetilde{z}) - \frac{\partial Q_\gamma^{[k-\chi+2\sigma]}(\widetilde{z})}{\partial \widetilde{y}_i}, \qquad x_j = \widetilde{x}_j, \\ y_i &= \widetilde{y}_i + \gamma_{n+i} \widetilde{y}_i P_\gamma^{[k-\chi+\sigma]}(\widetilde{z}) + \frac{\partial Q_\gamma^{[k-\chi+2\sigma]}(\widetilde{z})}{\partial \widetilde{x}_i}, \quad y_j = \widetilde{y}_j, \end{aligned}$$

где $P_\gamma^{[k-\chi+\sigma]} \in \mathfrak{H}$, а $j \neq i$.

Согласно леммам 3, 4 и уравнению (3), при таком преобразовании $G_{\gamma,j}^{[k]} = \widetilde{G}_{\gamma,j}^{[k]}$ для всех $j = \overline{1,n}$. Кроме того $F_{\gamma,j}^{[k+\sigma]} = \widetilde{F}_{\gamma,j}^{[k+\sigma]}$ для всех $j \neq i$, а

$$F_{\gamma,i}^{[k+\sigma]} - \widetilde{F}_{\gamma,i}^{[k+\sigma]} = \widehat{H}(Q_\gamma^{[k-\chi+2\sigma]}) + H_i S_\gamma^{[k-\chi+\sigma]},$$

где $S_\gamma^{[k-\chi+\sigma]} \in \mathfrak{H}$. Для существования $Q_\gamma^{[k-\chi+2\sigma]}$ и $S_\gamma^{[k-\chi+\sigma]}$, таких, что $\widetilde{F}_{\gamma,i}^{[k+\sigma]} \in \operatorname{span}(\mathfrak{T}_{\gamma,i}^{[k]})$ необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\langle R, F_{\gamma,j}^{[k+\sigma]}\rangle = \langle R, \widetilde{F}_{\gamma,i}^{[k+\sigma]}\rangle$$

для всех $R \in \mathfrak{R}_i$. Отсюда при помощи тех же рассуждений, что и в первой части доказательства, приходим к выводу, что $\widetilde{F}_{\gamma,i}^{[k+\sigma]}$ определяется этим условием по $F_{\gamma,i}^{[k+\sigma]}$ однозначно.

Так как сказанное выше справедливо для всех $i = \overline{1, n}$, приходим к возмущению, в котором $\widetilde{G}_{\gamma,i}^{[k]} \in \operatorname{span}(\mathfrak{S}_{\gamma,i}^{[k]})$ и $\widetilde{F}_{\gamma,i}^{[k+\sigma]} \in \operatorname{span}(\mathfrak{T}_{\gamma,i}^{[k+\sigma]})$. Согласно (3), слагаемые возмущения в обобщенных степенях, меньших k, при рассмотренных выше преобразованиях не меняются. Отсюда искомое формальное почти тождественное преобразование, приводящее систему (1) к требуемому виду, получается в результате композиции указанных преобразований для всех $k > \chi - \sigma$ в порядке возрастания. $\square$

5. Обобщенные нормальные формы систем двух уравнений

С точки зрения определения, предложенного В. Басовым в работе [1], структура возмущения, полученная нами в теореме 1, еще не является обобщенной нормальной формой. Дело в том, что обобщенная нормальная форма определяется в стандартном базисе пространства вектор-полиномов. Тем не менее, возмущение в теореме 1 приводится к обобщенной нормальной форме при помощи простых преобразований. Покажем это на примере систем двух уравнений.

Пусть $n = 1$. Обозначим через $Z^{(p,q)}$ коэффициент ряда $Z \in \mathbb{R}[[z]]$ при мономе $x^p y^q$.

Представления векторного ряда $\mathcal{Z}$ в лемме 1 связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} X^{(p+1,q)} &= -(q+1)F^{(p+1,q+1)} + \gamma_1 G^{(p,q)}, \\ Y^{(p,q+1)} &= (p+1)F^{(p+1,p+1)} + \gamma_2 G^{(p,q)}. \end{aligned}$$

Если $x^{p+1}y^{q+1} \notin \mathfrak{T}$, $x^p y^q \notin \mathfrak{S}$, то, согласно теореме 1, коэффициенты $X^{(p+1,q)}, Y^{(p,q+1)}$ в соответствующей обобщенной нормальной форме равны нулю.

Если $x^{p+1}y^{q+1} \in \mathfrak{T}$, $x^p y^q \in \mathfrak{S}$, то коэффициенты $X^{(p+1,q)}, Y^{(p,q+1)}$ могут быть любыми.

Если $x^{p+1}y^{q+1} \notin \mathfrak{T}$, $x^p y^q \in \mathfrak{S}$, то, как следует из представлений

$$\begin{aligned}x^p y^q \mathcal{E}_\gamma &= \frac{\gamma_2}{p+1}\Big((p+1)x^p y^{q+1}\frac{\partial}{\partial y} - (q+1)x^{p+1}y^q\frac{\partial}{\partial x}\Big) + \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q + \sigma}{p+1}x^{p+1}y^q\frac{\partial}{\partial x}\\ &= \frac{\gamma_1}{q+1}\Big((q+1)x^{p+1}y^q\frac{\partial}{\partial x} - (p+1)x^p y^{q+1}\frac{\partial}{\partial y}\Big) + \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q + \sigma}{q+1}x^p y^{q+1}\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

в соответствующей обобщенной нормальной форме можно по выбору положить равным нулю либо $X^{(p+1,q)}$, либо $Y^{(p,q+1)}$.

В случае $x^{p+1}y^{q+1} \in \mathfrak{T}$, $x^p y^q \notin \mathfrak{S}$ в обобщенной нормальной форме можно положить $X^{(p+1,q)} = 0$, если для некоторых $p', q' \in \mathbb{Z}_+$ $[\mathcal{H}_\gamma^{[\chi]}, x^{p'}y^{q'}\mathcal{E}_\gamma]_1^{(p+1,q)} \neq 0$, либо $Y^{(p,q+1)} = 0$, если $[\mathcal{H}_\gamma^{[\chi]}, x^{p'}y^{q'}\mathcal{E}_\gamma]_2^{(p,q+1)} \neq 0$. При этом нужный коэффициент обнуляется заменой вида

$$\begin{aligned}x &= \widetilde{x} + c\gamma_1 \widetilde{x}^{p'+1}\widetilde{y}^{q'},\\ y &= \widetilde{y} + c\gamma_2 \widetilde{x}^{p'}\widetilde{y}^{q'+1},\end{aligned}$$

где $c \in \mathbb{R}$. Все лишние слагаемые, возникающие после такого преобразования, можно учесть, добавляя в доказательстве теоремы 1 к $\widetilde{F}_\gamma^{[k+\chi]}$ и $\widetilde{G}_\gamma^{[k+\chi-\delta]}$ слагаемые, не принадлежащие соответственно $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{S}$.

Пример 1 ([5, следствие 1]). Пусть

$$H = -y^m \qquad (m \geq 2).$$

В этом случае в степенях $k > m$ существует лишь один мономиальный гамильтонов резонансный набор $\mathfrak{S}$, который в то же время является усеченным и состоит из мономов $x^p y^q$ с $q < m-1$. Отсюда с учетом теоремы 1 и полученных выше правил вытекает, что соответствующая обобщенная нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^{m-1} + \sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-3} X^{(i-j,j)}x^{i-j}y^j + x^2y^{m-2}\sum_{i=0}^{\infty}X^{(i+2,m-2)}x^i,\\ \dot{y} &= \sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-2} Y^{(i-j,j)}x^{i-j}y^j + xy^{m-1}\sum_{i=0}^{\infty}Y^{(i+1,m-1)}x^i,\end{aligned}$$

где для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$ полагаем $X^{(i+2,m-2)} = 0$ или $Y^{(i+1,m-1)} = 0$.

В частности, при $m = 2$ полученная формула включает в себя нормальную форму Такенса (см. [6]), а при $m = 3$ из нее вытекает результат [7, теорема 11].

Пример 2 ([5, следствие 2]). Пусть

$$H = x^l y^m \qquad \big(l > m \geq 1,\ d = \text{НОД}(l,m)\big).$$

В этом случае в степенях $k > l + m$ существует лишь один мономиальный гамильтонов резонансный набор $\mathfrak{S}$, который в то же время является усеченным и состоит из мономов $x^p y^q$, где либо $p < l - 1$, либо $q < m - 1$, либо $p = rl/d - 1$, $q = rm/d - 1$ с $r \geq d$. Отсюда с учетом теоремы 1 и полученных выше правил вытекает, что соответствующая обобщенная нормальная форма имеет вид

$$\dot{x} = -mx^l y^{m-1} + \sum_{k=l+m}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{l-2} X^{(i,k-i)} x^i y^{k-i} + \sum_{j=0}^{m-3} X^{(k-j,j)} x^{k-j} y^j \Big)$$
$$+ x^{l+2} y^{m-2} \sum_{i=0}^{\infty} X^{(i+l+2,m-2)} x^i + x^{l-1} y^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} X^{(l-1,m+j+1)} y^j$$
$$+ \sum_{r=d+1}^{\infty} X^{(rl/d,rm/d-1)} x^{rl/d} y^{rm/d-1} + \sum_{s=d+1+[\frac{3d-1}{l+m}]}^{\infty} X^{(sl/d-1,sm/d-2)} x^{sl/d-1} y^{sm/d-2},$$
$$\dot{y} = lx^{l-1} y^m + \sum_{k=l+m}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{l-3} Y^{(i,k-i)} x^i y^{k-i} + \sum_{j=0}^{m-2} Y^{(k-j,j)} x^{k-j} y^j \Big)$$
$$+ x^{l+1} y^{m-1} \sum_{i=0}^{\infty} Y^{(i+l+1,m-1)} x^i + x^{l-2} y^{m+2} \sum_{j=0}^{\infty} Y^{(l-2,m+j+2)} y^j$$
$$+ \sum_{r=d+1}^{\infty} Y^{(rl/d-1,rm/d)} x^{rl/d-1} y^{rm/d} + \sum_{s=d+1+[\frac{3d-1}{l+m}]}^{\infty} Y^{(sl/d-2,sm/d-1)} x^{sl/d-2} y^{sm/d-1},$$

где для каждых $i, j \in \mathbb{Z}_+$, $r > d$ и $s > d + [\frac{3d-1}{l+m}]$ полагаем $X^{(i+l+2,m-2)} = 0$ или $Y^{(i+l+1,m-1)} = 0$, $X^{(l-1,m+j+1)} = 0$ или $Y^{(l-2,m+j+2)} = 0$, $X^{(rl/d,rm/d-1)} = 0$ или $Y^{(rl/d-1,rm/d)} = 0$, и в случае $m = 1$ полагаем $Y^{(sl/d-2,sm/d-1)} = 0$, а в случае $m \geq 2$ полагаем $X^{(sl/d-1,sm/d-2)} = 0$ или $Y^{(sl/d-2,sm/d-1)} = 0$.

В частности, при $l = 2, m = 1$ из полученной формулы вытекает результат [8, теорема 7, случай $\alpha = -1/2$].

Пример 3 ([5, следствие 3]). Пусть

$$H = x^m y^m \qquad (m \geq 1).$$

В этом случае в степенях $k > 2m$ существует лишь один мономиальный гамильтонов резонансный набор $\mathfrak{S}$, который состоит из мономов $x^p y^q$, где либо $p < m-1$, либо $q < m-1$, либо $p = q$. Поскольку мономы вида $x^p y^p$ являются интегралами невозмущенной части, они не входят в усеченный гамильтонов резонансный набор. Отсюда с учетом теоремы 1 и полученных выше правил вытекает, что соответствующая обобщенная нормальная форма имеет вид

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -x^m y^{m-1} + \sum_{k=2m}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{m-2} X^{(i,k-i)} x^i y^{k-i} + \sum_{j=0}^{m-3} X^{(k-j,j)} x^{k-j} y^j\Big) \\
&+ x^{m+2} y^{m-2} \sum_{i=0}^{\infty} X^{(i+m+2,m-2)} x^i + x^{m-1} y^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} X^{(m-1,m+j+1)} y^j \\
&+ x^m y^m \sum_{r=0}^{\infty} X^{(r+m+1,r+m)} x^{r+1} y^r, \\
\dot{y} &= x^{m-1} y^m + \sum_{k=2m}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{m-3} Y^{(i,k-i)} x^i y^{k-i} + \sum_{j=0}^{m-2} Y^{(k-j,j)} x^{k-j} y^j\Big) \\
&+ x^{m+1} y^{m-1} \sum_{i=0}^{\infty} Y^{(i+m+1,m-1)} x^i + x^{m-2} y^{m+2} \sum_{j=0}^{\infty} Y^{(m-2,m+j+2)} y^j \\
&+ x^m y^m \sum_{r=0}^{\infty} Y^{(r+m,r+m+1)} x^r y^{r+1}.
\end{aligned}
$$

где для каждых i, j и $r \in \mathbb{Z}_+$ полагаем $X^{(i+m+2,m-2)} = 0$ или $Y^{(i+m+1,m-1)} = 0$, $X^{(m-1,m+j+1)} = 0$ или $Y^{(m-2,m+j+2)} = 0$, $X^{(r+m+1,r+m)} = 0$ или $Y^{(r+m,r+m+1)} = 0$.

Пример 4 ([5, следствие 4]). Пусть

$$H = x^l \mp y^m \qquad \big(l, m \geq 2,\ d = \text{НОД}(l,m)\big).$$

В этом случае гамильтонов резонансный набор составляют мономы $x^{p-r_{pq}l} y^{q+r_{pq}m}$ с $q \leq m-2$ для произвольно выбранных целых чисел r_{pq}, таких, что $0 \leq r_{pq} \leq [p/l]$. Нужный усеченный набор получается исключением из него мономов, не ортогональных степеням H.

Из-за громоздкости формул мы приведем не все возможные структуры обобщенных нормальных форм, а лишь те, которые соответствуют $r_{pq} = 0$. Из теоремы 1 и полученных выше правил вытекает, что соответствующая обобщенная нормальная форма имеет вид

$$\dot{x} = \pm y^{m-1} + \sum_{j=1}^{m-2} y^{j-1} \Bigg(\sum_{\substack{i \not\equiv 0,-1 \bmod l \\ i > l(1-j/m)}} X^{(i,j-1)} x^i + \sum_{r=1+\theta[m-jl]}^{\infty} X^{(rl-1,j-1)} x^{rl-1}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} X^{(sl,j-1)} x^{sl} \Bigg) + \sum_{\substack{i \not\equiv 0 \bmod l \\ i > l/m}} X^{(i,m-2)} x^i y^{m-2},$$

$$\dot{y} = x^{l-1} + \sum_{j=1}^{m-2} y^{j} \Bigg(\sum_{\substack{i \not\equiv 0,-1 \bmod l \\ i > l(1-j/m)}} Y^{(i-1,j)} x^{i-1} + \sum_{r=1+\theta[m-jl]}^{\infty} Y^{(rl-2,j)} x^{rl-2}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} Y^{(sl-1,j)} x^{sl-1} \Bigg) + \sum_{\substack{i \not\equiv 0,-1 \bmod l \\ i > l}} Y^{(i-1,0)} x^{i-1} + \sum_{\substack{i \not\equiv 0 \bmod l \\ i > l/m}} Y^{(i-1,m-1)} x^{i-1} y^{m-1},$$

где введено обозначение

$$\theta[k] = \begin{cases} 0, & \text{если } k < 0 \\ 1, & \text{если } k \geq 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

и для каждых $i \not\equiv 0 \bmod l$, $i > l/m$, $j = \overline{1, m-2}$, $r > \theta[m-jl]$ и $s \in \mathbb{N}$ полагаем $X^{(i,m-2)} = 0$ или $Y^{(i-1,m-1)} = 0$, $X^{(rl-1,j-1)} = 0$ или $Y^{(rl-2,j)} = 0$, $X^{(sl,j-1)} = 0$ или $Y^{(sl-1,j)} = 0$ за исключением случая $l = m$, в котором при $j = m-2$ в парах $\{X^{(sm,m-3)}, Y^{(sm-1,m-2)}\}$ полагаем $X^{(sm,m-3)} = 0$.

При $m = 2$ полученная формула совпадает с нормальной формой второго порядка, полученной А. Байдером и Я. Сандерсом в работе [4].

Отметим, что для случая $l = 3, m = 2$ полная классификация обобщенных нормальных форм приведена в [9, теорема 4], а для случая $l = 4, m = 2$ — в [1, теорема 3].

6. Многомерное обобщение нормальной формы Такенса

Рассмотрим систему $2n$ уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i + X_i, \\ \dot{y}_i &= Y_i \end{aligned} \tag{5}$$

с однородной невозмущенной частью, порожденной квадратичным гамильтонианом

$$H = -\sum_{i=1}^{n} y_i^2/2.$$

Для случая $n = 1$ обобщенная нормальная форма такой системы была впервые получена Ф. Такенсом (см. [6, proposition 2.2]). Применим полученные нами выше результаты, чтобы распространить данное утверждение на $2n$-мерный случай.

Оператор $\widehat{H}^*$ принимает вид гамильтонова векторного поля

$$\widehat{H}^* = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial/\partial y_i,$$

так что резонансные полиномы суть его полиномиальные интегралы.

В рассматриваемом случае $H_i = -y_i^2/2$, а соответствующая алгебра $\mathfrak{H} = \mathbb{R}[[y_1, \ldots, y_n]]$, определяемая равенством (4), состоит из нерезонансных полиномов. Таким образом, линейные пространства $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_i$ совпадают, вне зависимости от того, считаем ли мы гамильтониан H однородным или квазиоднородным, и имеют вид

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_i = \mathbb{R}[x, M],$$

где $M = \{M_{ij} = x_i y_j - x_j y_i : \ 1 \le i < j \le n\}$.

Согласно [10, теорема 9], полиномы вида $x^\alpha M^\beta$, не содержащие произведений $x_i M_{jk}$ с $i < j < k$ и $M_{ij} M_{kl}$ с $i < j < k < l$, образуют базис пространства $\mathfrak{R}$. Отсюда следует, что в условиях теоремы 1 гамильтоновы резонансные наборы $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{T}_i$ можно выбрать не зависящими от y_i.

Теорема 2. *Система* (5) *формально эквивалентна системе вида*

$$\dot{x}_i = y_i,$$
$$\dot{y}_i = f_i + y_i g_i,$$

где ряды f_i, g_i *не зависят от* y_i.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{T}_i$ — произвольные не зависящие от y_i гамильтоновы резонансные наборы. Согласно теореме 1, система (5) может быть приведена формальным почти тождественным преобразованием к системе с возмущением вида

$$\widetilde{\mathcal{Z}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{F}_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} + \widetilde{G}_i \mathcal{E}_{\gamma,i},$$

где ряды $\widetilde{F}_i, \widetilde{G}_i$ состоят из мономов, принадлежащих $\mathfrak{T}_i$ и $\mathfrak{S}_i$ соответственно. Те же рассуждения, что были приведены выше для двумерного случая, показывают, что мы всегда можем уничтожить любую из двух ненулевых компонент вектора $\widetilde{G}_i\mathcal{E}_{\gamma,i}$, при помощи слагаемых, не принадлежащих соответственно $\mathfrak{T}_i$ и $\mathfrak{S}_i$. Таким образом, избавляясь от слагаемых, соответствующих $\dot{x}_i$, мы приходим в точности к утверждению теоремы. □

Теорема 2 наиболее естественным образом обобщает утверждение Такенса. И хотя полученная нами структура возмущения еще не является обобщенной нормальной формой, так как может быть дополнительно упрощена при помощи почти тождественных преобразований, она имеет существенно более простой вид, чем у исходной системы. Например, если $f_i = -\partial V(x)/\partial x_i$, то ввиду равенства

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{2} + V(x)\Big) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 g_i$$

в ряде случаев можно судить об устойчивости положения равновесия в зависимости от вида функций V и g_i.

Пример 5. Пусть $n = 2$. В этом случае гамильтоновы резонансные наборы $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{T}_i$ определяются условиями теоремы 2 однозначно и состоят из мономов $x_1^{p_1}x_2^{p_2}y_2^{q_2}$, $p_1 \geq q_2$, для $i = 1$ и $x_1^{p_1}x_2^{p_2}y_1^{q_1}$, $p_2 \geq q_1$, для $i = 2$. Соответствующая обобщенная нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1,\\
\dot{y}_1 &= \sum_{p_1+1\geq q_2} Y_1^{(p_1,p_2,0,q_2)} x_1^{p_1}x_2^{p_2}y_2^{q_2} + y_1 \sum_{p_1\geq q_2} Y_1^{(p_1,p_2,1,q_2)} x_1^{p_1}x_2^{p_2}y_2^{q_2},\\
\dot{x}_2 &= y_2,\\
\dot{y}_2 &= \sum_{p_2+1\geq q_1} Y_2^{(p_1,p_2,q_1,0)} x_1^{p_1}x_2^{p_2}y_1^{q_1} + y_2 \sum_{p_2\geq q_1} Y_2^{(p_1,p_2,q_1,1)} x_1^{p_1}x_2^{p_2}y_1^{q_1}.
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Басов В.В. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность систем дифференциальных уравнений с нулевыми характеристическими числами // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 2. С. 154–170.

2. Басов В.В., Ваганян А.С. Нормальные формы гамильтоновых систем // Дифференц. уравнения и процессы управления (Эл. журнал). 2010. № 4. С. 86–107. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/basovvr.pdf.

3. Басов В.В., Ваганян А.С. О нахождении неполной нормальной формы Белицкого гамильтоновой системы // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48, № 4. С. 9–18.

4. Baider A., Sanders J. Further reduction of the Takens-Bogdanov normal form // Journal of Differential Equations. 1992. Vol. 99, no. 2. P. 205–244.

5. Басов В.В., Ваганян А.С. Обобщенные нормальные формы двумерных систем с гамильтоновой невозмущенной частью // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2014. Т. 59, № 3. С. 351–359.

6. Takens F. Singularities of vector fields // IHES. 1974. Vol. 43, no. 2. P. 47–100.

7. Басов В.В., Федорова Е.В. Двумерные вещественные системы ОДУ с квадратичной невозмущенной частью: классификация и вырожденные обобщенные нормальные формы // Дифференц. уравнения и процессы управления (Эл. журнал). 2010. № 4. С. 49–85. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/basovfr.pdf.

8. Басов В.В., Скитович А.В. Обобщенная нормальная форма и формальная эквивалентность двумерных систем с нулевым квадратичным приближением, I // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1016–1029.

9. Басов В.В., Федотов А.А. Обобщенная нормальная форма двумерных систем ОДУ с линейно-квадратичной невозмущенной частью // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2007. Т. 40, № 1. С. 13–33.

10. Malonza D. Normal forms for coupled Takens-Bogdanov systems // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 2004. Vol. 11, no. 3. P. 376–398.