ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 4, 2013
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/diffjournal
e-mail: jodiff@mail.ru

Моделирование динамических систем

Глобальная устойчивость систем автоматического управления с гистерезисной нелинейностью [1]

Звягинцева Т.Е. Санкт-Петербургский Государственный Университет

Аннотация

Системы с гистерезисными нелинейностями широко используются для описания динамики в различных физических процессах, а также в системах автоматического управления техническими устройствами. В настоящее время интерес к таким системам существенно возрос в связи с их применением для описания процессов, происходящих в точном современном оборудовании в нанотехнологиях, энергетике и микроэлектронике.

Мы рассматриваем систему автоматического управления, содержащую один нелинейный гистерезисный элемент с характеристикой $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0]$, представленной на рис. 1. Такая система является по своему принципу работы существенно нелинейной, характеристика $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0]$ неоднозначна: выходная величина зависит не только от значений входного сигнала $\sigma\,(t)$ в момент времени t, но и от предшествующего этому моменту времени значения характеристики φ_0.

Эту систему всегда можно привести к простейшей блок-схеме, которая состоит из нелинейного элемента и линейной части. Аналитически систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi\ [t, \sigma, \varphi_0]\,, \end{cases} \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00624.

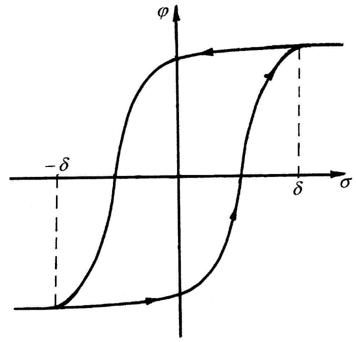

Рис. 1. Характеристика гистерезисной нелинейности (2)

где

$$\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0] = \begin{cases} \varphi_1\left(\sigma\left(t\right)\right)\ , & \textit{если}\ \ \sigma \geq -\delta, \\ \varphi_2\left(\sigma\left(t\right)\right), & \textit{если}\ \ \sigma \leq \delta, \end{cases} \tag{2}$$

$\delta > 0$, $\sigma = ay + bx$; $\varphi_1(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma)$ непрерывны, $\varphi_1(\delta) = \varphi_2(\delta)$, $\varphi_1(-\delta) = \varphi_2(-\delta)$; направление обхода петли гистерезиса на рис. 1 указано стрелками: $\varphi_1(\sigma(t))$ убывает с ростом t при $\sigma(t) \in [-\delta,\ \delta]$, $\varphi_2(\sigma(t))$ возрастает с ростом t при $\sigma(t) \in [-\delta,\ \delta]$.

Наличие устойчивости рабочего режима системы автоматического управления чрезвычайно важно при решении прикладных задач.

Сформулируем определение глобальной устойчивости систем вида (1) с нелинейностью вида (2).

Считаем, что $\alpha > 0, \quad \beta > 0$ и $b^2 - \alpha ab + a^2\beta \neq 0$, т.е. при $\varphi\ [t, \sigma, \varphi_0] \equiv 0$ система (1) асимптотически устойчива, и передаточная функция системы (1) является невырожденной.

Фазовая поверхность P системы (1) представляет собой многообразие с краем, состоящее из двух листов: $P = P_1 \cup P_2$.

Наличие края многообразия обусловлено запрещением повторного запуска системы из промежуточного состояния, поскольку остановка процесса в промежуточных точках между уровнями включения и выключения автоматики происходит при аварии или обрыве питания, и повторный запуск системы из такого состояния может привести к внештатным значениям рабочих параметров системы.

На листе $P_1 = \left\{(x, y) : \sigma \geq -\delta,\ \dot{\sigma}\left|_{\sigma\in[-\delta,\delta]} \leq 0\right.\right\}$ система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi_1 (\sigma (t)), \end{cases} \tag{3}$$

здесь $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 = a(-\alpha y - \beta x - \varphi_1(\sigma(t))) + by$ - производная $\sigma = ay + bx$ в силу системы (3),

на листе $P_2 = \left\{(x, y) : \sigma \le \delta,\ \dot{\sigma}\left|_{\sigma \in [-\delta, \delta]} \ge 0\right.\right\}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x - \varphi_2 (\sigma (t)), \end{cases} \tag{4}$$

где $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_2 = a(-\alpha y - \beta x - \varphi_2(\sigma(t))) + by$ - производная σ в силу системы (4).

Переход фазовой точки с листа P_1 на P_2 - по лучу $L_1 = \left\{(x, y) : \sigma = -\delta,\ \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_1 \le 0\right\}$, с листа P_2 на P_1 - по лучу $L_2 = \left\{(x, y) : \sigma = \delta,\ \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_2 \ge 0\right\}$.

Обозначим через Γ край многообразия P. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где

$\Gamma_1 = \left\{(x, y) :\ \sigma \in [-\delta, \delta],\ \dot{\sigma}_1 = 0\right\} \subset P_1$, $\Gamma_2 = \left\{(x, y) :\ \sigma \in [-\delta, \delta],\ \dot{\sigma}_2 = 0\right\} \subset P_2$.

Пусть O_1 и O_2 - положения равновесия систем (3) и (4) соответственно. O_j имеет координаты $(\xi_j,\ 0)$, где ξ_j - решение уравнения $\varphi_j(\xi_j) = -\beta\xi_j$, $j = 1, 2$.

Решением системы (1) с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0,\ y_0) \in P_1$ является решение системы (3) с этими же начальными данными. Траектория этого решения при $t > \tau_0$ либо стремится при $t \to +\infty$ к положению равновесия O_1 системы (3), либо достигает в конечный момент времени множества $\Gamma_1 \backslash L_1$, либо при некотором $t = \tau_1 > \tau_0$ выходит на луч L_1 в точке $(x_1,\ y_1)$. В последнем случае решение (1) продолжается при $t > \tau_1$ на лист P_2 и является решением системы (4) с начальными данными $(\tau_1,\ x_1,\ y_1)$.

Аналогично определяется решение системы (1) с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0,\ y_0) \in P_2$.

Будем считать, что решения (1) с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0,\ y_0) \in P$, достигающие края многообразия Γ при некотором конечном $t = \tilde{\tau} \ge \tau_0$ в точке

$(\tilde{x},\ \tilde{y}) \in (\Gamma_1 \backslash L_1) \cup (\Gamma_2 \backslash L_2)$, продолжаются на бесконечный промежуток времени: $x(t) \equiv \tilde{x},\ \ y(t) \equiv \tilde{y}$ для всех $t \in [\tilde{\tau},\ +\infty)$. Множество таких точек $(\tilde{x},\ \tilde{y})$, объединенное с множеством $O_1 \cup O_2$, обозначим через Γ^+.

Аналогично, решения (1) с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0,\, y_0) \in P$, достигающие края многообразия Γ при конечном $t = \bar{\tau} \le \tau_0$ в точке $(\bar{x},\, \bar{y}) \in (\Gamma_1 \backslash L_1) \cup (\Gamma_2 \backslash L_2)$, продолжаются: $x\,(t) \equiv \bar{x}$, $\; y\,(t) \equiv \bar{y}$ для всех $t \in (-\infty,\; \bar{\tau}]$. Множество таких точек $(\bar{x},\, \bar{y})$ обозначим через Γ^-.

Таким образом, все решения системы (1) определены при $t \in (-\infty,\, +\infty)$.

Очевидно, что множество Γ^+ является инвариантным множеством.

Множество Γ^+ называется глобально притягивающим множеством для системы (1) [1, 2], если для любого решения системы (1) $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$ с начальными данными $t = \tau_0$, $(x_0,\, y_0) \in P$

$$\lim_{t \to +\infty} \rho \left(\left(x\,(t)\,,\, y\,(t) \right),\; \Gamma^+ \right) = 0,$$

$\rho\left(\left(x\,(t)\,,\, y\,(t) \right),\; \Gamma^+ \right)$ - расстояние от точки $(x\,(t)\,,\, y\,(t))$ до множества Γ^+.

Заметим, что говорить об устойчивости по Ляпунову множества Γ^+ не имеет смысла, поскольку Γ^+ состоит из двух компонент связности $\Gamma^+ \cap \Gamma_1$ и $\Gamma^+ \cap \Gamma_2$, и всегда существуют решения (1) с начальными данными $(x_0,\, y_0)$, сколь угодно близкими к $\Gamma^+ \cap \Gamma_1$, которые при $t \to +\infty$ стремятся к точке $(x_1,\, y_1) \in \Gamma^+ \cap \Gamma_2$.

Будем говорить, что система (1) является глобально устойчивой, если множество Γ^+ является глобально притягивающим множеством.

Характеристики нелинейных элементов, как правило, аппроксимируются кусочно-линейными или полиномиальными функциями, это приводит к соответствующим аналитическим критериям устойчивости.

Рассмотрим случай, где $\varphi\;[t, \sigma, \varphi_0]$ - гистерезисная функция с характеристикой, представленной на рис. 2, т.е.

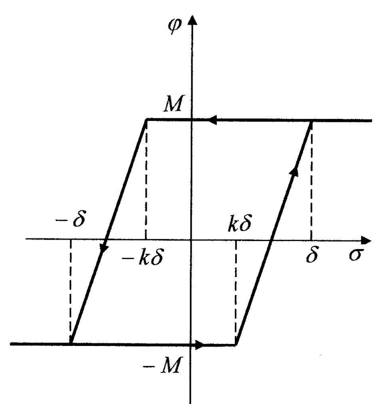

Рис. 2. Кусочно-линейная характеристика (5)

$$\begin{array}{l}\varphi_1\left(\sigma\left(t\right)\right)=\begin{cases}M, & \textit{если}\ \sigma\geq -k\delta,\\ \frac{M}{1-k}\left(\frac{2\sigma}{\delta}+(1+k)\right), & \textit{если}\ -\delta\leq\sigma\leq -k\delta,\end{cases}\\ \varphi_2\left(\sigma\left(t\right)\right)=\begin{cases}\frac{M}{1-k}\left(\frac{2\sigma}{\delta}-(1+k)\right), & \textit{если}\ k\delta\leq\sigma\leq\delta,\\ -M, & \textit{если}\ \sigma\leq k\delta,\end{cases}\end{array} \tag{5}$$

$M>0,\ \delta>0,\ 0<k<1$. Не умаляя общности рассуждений, считаем, что $a>0$. Будем считать также, что $b>0$ (случай $b<0$ рассматривается аналогично).

Здесь удобно разделить каждый из листов P_1, P_2 на две части: $P_1=P_{11}\cup P_{12}$, $P_2=P_{21}\cup P_{22}$.

$\varphi\ [t,\sigma,\varphi_0]=M$ на листе $P_{11}=\left\{(x,y):\ \ \sigma\geq -k\delta,\ \ \dot{\sigma}\,|_{-k\delta\leq\sigma\leq\delta}\leq 0\right\}$;

$\varphi\ [t,\sigma,\varphi_0]=\frac{M}{1-k}\left(\frac{2\sigma}{\delta}+(1+k)\right)$ на листе $P_{12}=\left\{(x,y):\ -\delta\leq\sigma\leq -k\delta,\ \ \dot{\sigma}\leq 0\right\}$;

$\varphi\ [t,\sigma,\varphi_0]=-M$ на листе $P_{21}=\left\{(x,y):\ \ \sigma\leq k\delta,\ \ \dot{\sigma}\,|_{-\delta\leq\sigma\leq k\delta}\geq 0\right\}$; и

$\varphi\ [t,\sigma,\varphi_0]=\frac{M}{1-k}\left(\frac{2\sigma}{\delta}-(1+k)\right)$ на листе $P_{22}=\left\{(x,y):\ \ k\delta\leq\sigma\leq\delta,\ \ \dot{\sigma}\geq 0\right\}$;

$\dot{\sigma}$ - производная σ в силу соответствующей системы на каждом из листов.

Переход фазовой точки с P_{11} на P_{12} - по лучу $L_{11}=\left\{(x,y):\sigma=-k\delta,\ \dot{\sigma}\,|_{\sigma\to -k\delta+0}\leq 0\right\}$; с листа P_{12} на лист P_{21} - по лучу $L_{12}=\left\{(x,y):\sigma=-\delta,\ \dot{\sigma}\,|_{\sigma\to\delta+0}\leq 0\right\}$.

По лучу $L_{21}=\left\{(x,y):\sigma=k\delta,\ \dot{\sigma}\,|_{\sigma\to k\delta-0}\geq 0\right\}$ точка переходит с листа P_{21} на лист P_{22}; а по лучу $L_{22}=\left\{(x,y):\sigma=\delta,\ \dot{\sigma}\,|_{\sigma\to\delta-0}\geq 0\right\}$ - с листа P_{22} на лист P_{11}.

Обозначим через K_{ij} начало луча L_{ij} $(i,j=1,2)$. Лист P_{11} ограничен лучами L_{22} и L_{11} и отрезком $[K_{22},\,K_{11}]$; лист P_{12} - лучами L_{11}, L_{12} и отрезком $[K_{11},\,K_{12}]$. Аналогично, лист P_{21} ограничен лучами L_{12}, L_{21} и отрезком $[K_{12},\,K_{21}]$; лист P_{22} - лучами L_{21}, L_{22} и отрезком $[K_{21},\,K_{22}]$.

Если $Mb\leq k\delta\beta$, то положениями равновесия (1) являются точки $O_{11}\left(-x_1,0\right)\in P_{11}$ и $O_{21}\left(x_1,\ 0\right)\in P_{21}$, где $x_1=M/\beta$.

Характеристическое уравнение положений равновесия O_{11} и O_{21} имеет вид

$$\lambda^2+\alpha\lambda+\beta=0. \tag{6}$$

Если $Mb>k\delta\beta$, то положения равновесия системы (1) - точки

$O_{12}\,(-x_2,\ 0) \in P_{12}$ и $O_{22}\,(x_2,\ 0) \in P_{22}$, где $x_2 = \frac{M\delta(1+k)}{\beta\delta(1-k)+2Mb}$.

Характеристическое уравнение O_{12} и O_{22}:

$$\lambda^2 + \left(\alpha + \frac{2Ma}{(1-k)\,\delta}\right)\lambda + \left(\beta + \frac{2Mb}{(1-k)\,\delta}\right) = 0. \tag{7}$$

Пусть λ_1 и λ_2 - корни уравнения (6), а λ_3 и λ_4 - корни (7).

Критерий глобальной устойчивости системы (1) с нелинейностью вида (5) дает следующая теорема [3].

Теорема. *Пусть выполнено одно из условий 1-9.*

1. $Mb > k\delta\beta$, λ_i $(i = 1-4)$ вещественные, $\lambda_1 < \lambda_2$, $\lambda_3 < \lambda_4$, $a\lambda_{1,2}+b > 0$, $a\lambda_{3,4} + b < 0$ и выполнены неравенства

$$\left(\frac{(\lambda_2-\lambda_4)(a\lambda_3+b)}{(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_4+b)}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}} > \frac{\lambda_1(a\lambda_2+b)}{(\lambda_2-\lambda_4)(a\lambda_3+b)}\frac{(Mb+\delta\beta)}{(Mb-k\delta\beta)}, \tag{8}$$

$$\left(\frac{(\lambda_3-\lambda_2)\,e^{\lambda_1\tilde{t}}-(\lambda_3-\lambda_1)\,e^{\lambda_2\tilde{t}}}{(\lambda_4-\lambda_2)\,e^{\lambda_1\tilde{t}}-(\lambda_4-\lambda_1)\,e^{\lambda_2\tilde{t}}}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}} \frac{(\lambda_3-\lambda_2)\,e^{\lambda_1\tilde{t}}-(\lambda_3-\lambda_1)\,e^{\lambda_2\tilde{t}}}{(\lambda_2-\lambda_1)} \geq 1, \tag{9}$$

где $\tilde{t}$ определено равенством

$$\lambda_2 e^{\lambda_1\tilde{t}} - \lambda_1 e^{\lambda_2\tilde{t}} = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(Mb-k\delta\beta)}{(Mb+\delta\beta)}. \tag{10}$$

2. $Mb > k\delta\beta$, λ_i $(i = 1-4)$ вещественные, $\lambda_1 < \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, $a\lambda_{1,2}+b > 0$, $a\lambda_3 + b < 0$ и выполнены неравенства

$$\exp\left(-\frac{(a\lambda_2+b)\lambda_3}{(a\lambda_3+b)(\lambda_2-\lambda_3)}\right) > \frac{\lambda_1(a\lambda_2+b)}{(\lambda_2-\lambda_3)(a\lambda_3+b)}\frac{(Mb+\delta\beta)}{(Mb-k\delta\beta)},$$

$$\exp\left(-\frac{\lambda_3(e^{\lambda_1\tilde{t}}-e^{\lambda_2\tilde{t}})}{(\lambda_3-\lambda_2)\,e^{\lambda_1\tilde{t}}-(\lambda_3-\lambda_1)\,e^{\lambda_2\tilde{t}}}\right)\frac{(\lambda_3-\lambda_2)\,e^{\lambda_1\tilde{t}}-(\lambda_3-\lambda_1)\,e^{\lambda_2\tilde{t}}}{(\lambda_2-\lambda_1)} \geq 1,$$

где $\tilde{t}$ находится из равенства (10).

3. $Mb > k\delta\beta$, λ_i $(i = 1-4)$ вещественные, $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 < \lambda_4$, $a\lambda_1+b > 0$, $a\lambda_{3,4} + b < 0$ и выполнены неравенства (8) и

$$\left(\frac{(\lambda_1-\lambda_3)\,\tilde{t}-1}{(\lambda_1-\lambda_4)\,\tilde{t}-1}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}} e^{\lambda_1\tilde{t}}\left((\lambda_1-\lambda_3)\,\tilde{t}-1\right)\geq 1,$$

где $\tilde{t}$ находится из равенства

$$\left(1-\lambda_1\tilde{t}\right)e^{\lambda_1\tilde{t}}=\frac{(Mb-k\delta\beta)}{(Mb+\delta\beta)}. \tag{11}$$

4. $Mb>k\delta\beta$, λ_i $(i=1-4)$ вещественные, $\lambda_1=\lambda_2$, $\lambda_3=\lambda_4$, $a\lambda_1+b>0$, $a\lambda_3+b<0$ и выполнены неравенства

$$\exp\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_4-\lambda_3}\right)>-\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_3)}\frac{(Mb+\delta\beta)}{(Mb-k\delta\beta)},$$

$$\exp\left(\frac{\lambda_3\tilde{t}}{(\lambda_1-\lambda_3)\,\tilde{t}-1}\right)e^{\lambda_1\tilde{t}}\left((\lambda_1-\lambda_3)\,\tilde{t}-1\right)\geq 1,$$

где $\tilde{t}$ находится из равенства (11).

5. $Mb>k\delta\beta$, $\lambda_{1,2}$ вещественные, $\lambda_1<\lambda_2$, $a\lambda_{1,2}+b>0$, $\lambda_{3,4}=v\pm iw$, $w>0$, и выполнены неравенства

$$e^{v\bar{t}}>\frac{\lambda_1(a\lambda_2+b)}{\sqrt{(v-\lambda_2)^2+w^2}\cdot\sqrt{(av+b)^2+a^2w^2}}\frac{(Mb+\delta\beta)}{(Mb-k\delta\beta)}, \tag{12}$$

где

$$\bar{t}=\frac{1}{w}\left(arctg\left(\frac{w\,(a\lambda_2+b)}{(av+b)\,(v-\lambda_2)+aw^2}\right)+\pi\bar{r}\right), \tag{13}$$

$$\bar{r}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad (av+b)\,(v-\lambda_2)+aw^2\geq 0,\\ 1, & \text{если}\quad (av+b)\,(v-\lambda_2)+aw^2<0,\end{cases}$$

$$e^{v\tau}\frac{\sqrt{\left((\lambda_2-v)e^{\lambda_1\tilde{t}}-(\lambda_1-v)e^{\lambda_2\tilde{t}}\right)^2+w^2\left(e^{\lambda_1\tilde{t}}-e^{\lambda_2\tilde{t}}\right)^2}}{(\lambda_2-\lambda_1)}\geq 1,$$

$\tilde{t}$ определено равенством (10),

$$\tau=\frac{1}{w}\left(arctg\left(\frac{w\left(e^{\lambda_1\tilde{t}}-e^{\lambda_2\tilde{t}}\right)}{(\lambda_2-v)e^{\lambda_1\tilde{t}}-(\lambda_1-v)e^{\lambda_2\tilde{t}}}\right)+\pi r\right),$$

$$r = \begin{cases} 0, & \textit{если} \ \ (\lambda_2 - v)e^{\lambda_1 \tilde{t}} - (\lambda_1 - v)e^{\lambda_2 \tilde{t}} \le 0, \\ 1, & \textit{если} \ \ (av + b)\,(v - \lambda_2) + aw^2 > 0. \end{cases}$$

6. $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$, $\mu > 0$, $\lambda_{3,4}$ *вещественные,* $\lambda_3 < \lambda_4$, $a\lambda_{3,4} + b < 0$, *и выполнено неравенство*

$$\left(\frac{\mu\, cos \mu\tilde{t} + (\lambda_3 - \eta)\sin\mu\tilde{t}}{\mu\, cos \mu\tilde{t} + (\lambda_4 - \eta)\sin\mu\tilde{t}}\right)^{\frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3}} e^{\eta\tilde{t}} \frac{\mu\, cos \mu\tilde{t} + (\lambda_3 - \eta)\sin\mu\tilde{t}}{(-\mu)} \ge 1,$$

где $\tilde{t}$ *находится из равенства*

$$e^{\eta\tilde{t}}(\mu\, cos \mu\tilde{t} - \eta \sin\mu\tilde{t}) = \frac{\mu(Mb - k\delta\beta)}{(Mb + \delta\beta)}. \tag{14}$$

7. $Mb > k\delta\beta$, $\lambda_{1,2}$ *вещественные,* $\lambda_1 = \lambda_2$, $a\lambda_1 + b > 0$, $\lambda_{3,4} = v \pm iw$, $w > 0$, *и выполнены неравенства (12) ($\bar{t}$ определено равенством (13)) и*

$$e^{v\tau} e^{v\tilde{t}} \sqrt{\left(1 - (\lambda_1 - v)\tilde{t}\right)^2 + w^2 \tilde{t}^2} \ge 1,$$

где $\tilde{t}$ *находится из равенства (11),*

$$\tau = \frac{1}{w}\left(arctg\left(-\frac{w\tilde{t}}{1 - (\lambda_1 - v)\tilde{t}}\right) + \pi r\right), r = \begin{cases} 0, & \textit{если} \ \ 1 - (\lambda_1 - v)\tilde{t} \le 0, \\ 1, & \textit{если} \ \ 1 - (\lambda_1 - v)\tilde{t} > 0. \end{cases}$$

8. $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$, $\mu > 0$, $\lambda_{3,4}$ *вещественные,* $\lambda_3 = \lambda_4$, $a\lambda_3 + b < 0$, *и выполнено неравенство*

$$\exp\left(\frac{-\lambda_3 \sin\mu\tilde{t}}{\mu\, cos \mu\tilde{t} + (\lambda_3 - \eta)\sin\mu\tilde{t}}\right) e^{\eta\tilde{t}} \frac{\mu\, cos \mu\tilde{t} + (\lambda_3 - \eta)\sin\mu\tilde{t}}{(-\mu)} \ge 1,$$

где $\tilde{t}$ *находится из равенства (14).*

9. $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\mu$, $\mu > 0$, $\lambda_{3,4} = v \pm iw$, $w > 0$, *и выполнено неравенство*

$$e^{v\tau} e^{\eta\tilde{t}} \frac{1}{\mu} \sqrt{\left(\mu\, cos \mu\tilde{t} + (v - \eta)\sin\mu\tilde{t}\right)^2 + w^2 \sin^2\mu\tilde{t}} \ge 1,$$

где $\tilde{t}$ *определено равенством (14),*

$$\tau = \frac{1}{w}\left(arctg\left(\frac{w\sin\mu\tilde{t}}{\mu\, cos\mu\tilde{t} + (v-\eta)\sin\mu\tilde{t}} \right) + \pi r \right),$$

$$r = \begin{cases} 0, & \textit{если}\ \ \mu\, cos\mu\tilde{t} + (v-\eta)\sin\mu\tilde{t} \le 0, \\ 1, & \textit{если}\ \ \mu\, cos\mu\tilde{t} + (v-\eta)\sin\mu\tilde{t} > 0. \end{cases}$$

Тогда система (1) с нелинейностью (5) имеет единственный устойчивый предельный цикл.

Если ни одно из условий 1-9 не выполнено, то система является глобально устойчивой с глобально притягивающим множеством Γ^+, *где* $\Gamma^+ = (K_{12}, O_{12}] \cup [O_{22}, K_{22})$, *если* $Mb > k\delta\beta$, *и* $\Gamma^+ = (K_{12}, K_{11}] \cup [K_{11}, O_{11}] \cup [O_{21}, K_{21}] \cup [K_{21}, K_{22})$, *если* $Mb \le k\delta\beta$.

Литература

1. Брур Х.В., Дюмортье Ф., С. ван Стрин, Такенс Ф. Структуры в динамике. Конечномерные детерминированные системы. Москва, Ижевск. Изд-во института компьютерных исследований. 2003. 336 с.

2. Леонов Г.А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. С.-Пб.: Изд-во СПбГУ. 2004. 143 с.

3. Звягинцева Т.Е. Критерии существования предельного цикла в двумерной системе с гистерезисом // Вестник С.-Петербург. ун-та. Серия 1. Вып. 1. 2012. С. 18-26.