ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Аналитическая формула вычисления регулятора для линейной SIMO-системы

Микрин Е.А.[1,*], Зубов Н.Е.[2,**], Лапин А.В.[2,***], Рябченко В.Н.[2,3,****]

[1]ПАО РКК «Энергия», Королев, Московская обл., Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[3]АО «НТЦ ФСК ЕЭС», Москва, Россия

e-mail:
[*]Eugeny.Mikrin@rsce.ru
[**]Nik.Zubov@gmail.com
[***]AlexeyPoeme@yandex.ru
[****]Ryabchenko.VN@yandex.ru

Аннотация. Для линейной стационарной динамической системы с одним входом и многими выходами (Single Input Multi Outputs System – SIMO-system) получена компактная аналитическая формула вычисления коэффициентов обратной связи (матрицы регулятора) при решении задачи синтеза линейного управлении по полному вектору состояния. В основу ее получения положен метод многоуровневой декомпозиции модели системы при синтезе модального управления (заданного размещения собственных значений, полюсов) и известное свойство обратной матрицы управляемости линейной стационарной динамической системы. Основные преобразования в указанном методе выполняются с использованием матричных делителей нуля, т.е. прямоугольных матриц, аннулирующих их произведение с заданными матрицами.

Сформулированы и доказаны две леммы и теорема, на базе которых решена поставленная задача синтеза скалярного управления. Предложенный подход позволяет осуществлять поиск закона скалярного управления без его промежуточного вычисления на каждом уровне декомпозиции и соответственно исключает возникновение плохо обусловленных матриц на последних уровнях декомпозиции при использовании числовых матриц, описывающих объект управления.

При заданном размещении собственных значений замкнутой SIMO-системы полученная формула совпадает с формулой Аккермана, если коэффициенты желаемого характеристического полинома выразить через собственные значения. Соответственно, приведенные в статье выкладки являются альтернативным методом доказательства формулы Аккермана.

На примере управления объектом четвертого порядка, при решении задачи о стабилизации продольного движения космического аппарата в атмосфере Земли относительно номинальной траектории с помощью изменения угла крена, показана эффективность получения коэффициентов обратной связи (матрицы регулятора) с помощью указанной аналитической формулы.
Ключевые слова: линейная SIMO-система, пространство состояний, размещение полюсов, многоуровневая декомпозиция, регулятор по полному вектору состояния, аналитическая формула

1. Введение

Среди различных направлений теории управления динамическими системами, основанных на методе пространства состояний [1], можно выделить два подхода, получивших наибольшее распространение в инженерной практике. Один из них содержит методы оптимизации динамической системы путем сведения к минимуму некоторого функционала (обычно интеграла от какой-либо квадратичной формы), характеризующего качество управления [2] – [4]. Другой связан с методами модального синтеза – анализа динамических свойств системы и формирования законов управления с обратной связью, придающих замкнутой системе заранее выбранное распределение собственных значений [5], [6]. От частотного метода, D-разбиения, корневого годографа [7], [8] метод пространства состояний отличают принципиально иные возможности. Он позволяет судить о том, достижима ли цель управления (понятие управляемости), определить необходимый состав измерителей (понятие наблюдаемости), синтезировать управление (стабилизируемость, детектируемость, запас устойчивости) и так далее [9] – [20].

Одним из перспективных методов модального управления, по мнению авторов, является метод, основанный на многоуровневой декомпозиции [9]. Он позволяет синтезировать законы управления в аналитическом виде и не обременен различного рода ограничениями, включая алгебраическую и геометрическую кратность назначаемых собственных значений (полюсов), размерность пространства состояний и др. [9]. Однако применение метода многоуровневой декомпозиции для линейных стационарных динамических систем с одним входом и многими выходами (Single Input Multi Outputs System – SIMO-systems) [10] в силу того, что число уровней декомпозиции равно размерности вектора состояния системы, приводит к достаточно громоздким аналитическим (символьным) выражениям, затрудняющим их упрощение. Целью данной статьи является получение универсальной (единой) формулы синтеза регулятора для SIMO-системы на основе метода многоуровневой декомпозиции, в которой отсутствует собственно процесс декомпозиции.

2. Основной результат

Рассмотрим задачу модального управления по состоянию полностью управляемой SIMO-системы вида

$$\dot{x} = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}\mathrm{u}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rank}\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \ldots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] = n, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор состояния размерности n; u – скалярное управление, определяемое в соответствии с законом обратной связи

$$u = -\mathbf{Kx}. \tag{3}$$

Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в формулах (1) и (2) именуются матрицами состояния и управления соответственно, а матрица $\mathbf{K}$ в законе (3) – матрицей регулятора.

Как отмечено ранее, будем использовать подход, основанный на многоуровневой декомпозиции исходной системы [9], [12], суть которого заключается в следующем.

1. Определяется число уровней декомпозиции, как ближайшее к большему целому отношения размерностей пространства состояний n и управления r: $L = \mathrm{floor}(n/r)$. В случае SIMO-системы (1) $r = 1$ и, следовательно, $L = n$.
2. На каждом уровне декомпозиции вычисляются матрицы

для нулевого (исходного) уровня

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A},\ \ \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}, \tag{4}$$

для первого уровня

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}^{\perp}\mathbf{A}\mathbf{B}^{\perp L+},\ \ \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}^{\perp}\mathbf{AB}, \ldots, \tag{5}$$

для $(L-1)$-го (конечного) уровня

$$\mathbf{A}_{L-1} = \mathbf{B}^{\perp}_{L-2}\mathbf{A}_{L-2}\mathbf{B}^{\perp+}_{L-2},\ \ \mathbf{B}_L = \mathbf{B}^{\perp}_{L-1}\mathbf{A}_{L-1}\mathbf{B}_{L-1}. \tag{6}$$

3. Назначаются такие собственные значения для каждого уровня декомпозиции

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0 = \{\phi_1\},\ \mathbf{\Phi}_1 = \{\phi_2\},\ \ldots,\ \mathbf{\Phi}_{L-1} = \{\phi_n\},$$

что $\bigcup\limits_{i=1}^{L}\mathrm{eig}(\mathbf{\Phi}_{i-1})$ – желаемое множество собственных значений замкнутой системы.

4. На основании формул (4) – (6) вычисляются матрицы

$$\mathbf{K}_{L-1} = \mathbf{B}^{+}_{L-1}\mathbf{A}_{L-1} - \mathbf{\Phi}_{L-1}\mathbf{B}^{+}_{L-1}, \tag{7}$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}^{-}_1\mathbf{A}_1 - \mathbf{\Phi}_1\mathbf{B}^{-}_1,\quad \mathbf{B}^{-}_1 = \mathbf{B}^{+}_1 + \mathbf{K}_2\mathbf{B}^{\perp L}_1, \ldots, \tag{8}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 = \mathbf{B}^{-}_0\mathbf{A} - \mathbf{\Phi}_0\mathbf{B}^{-}_0,\quad \mathbf{B}^{-}_0 = \mathbf{B}^{+}_0 + \mathbf{K}_1\mathbf{B}^{\perp L}_0. \tag{9}$$

При этом для замкнутой системы (1), (3), (7) – (9) выполняется равенство

$$\mathrm{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BK}) = \bigcup_{i=1}^{L}\mathrm{eig}(\mathbf{\Phi}_{i-1}).$$

Здесь и далее верхний индекс «$\perp L$» обозначает левый делитель нуля соответствующей матрицы, а «+» – операцию псевдообращения [9].

При использовании выше изложенного подхода к синтезу модального управления, основанного на многоуровневой декомпозиции исходной системы, справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Пусть, как и ранее, $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ – матрицы состояния и управления на нулевом уровне декомпозиции (4), $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$ – соответствующие матрицы на первом уровне декомпозиции (5), а $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}$ – нижняя строка матрицы $\mathbf{U}_1^{-1}$, обратной к матрице управляемости первого уровня

$$\mathbf{U}_1 = \left[\mathbf{B}_1 \,\vdots\, \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{A}_1^{n-2}\mathbf{B}_1\right].$$

Тогда для целого числа $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ справедливо равенство

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{i}\mathbf{B}_0^{\perp L} = \begin{cases} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^{i}, & i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-2; \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^{i} - \mathbf{B}_0^{+}, & i = n-1. \end{cases}$$

Доказательство

Докажем лемму методом математической индукции по числу i.

При значении $i = 0$ лемма верна:

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{I}_{n-1}\mathbf{B}_0^{\perp L} = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{I}_n.$$

Здесь $\mathbf{I}_n$ – единичная матрица порядка n.

Допустим, что лемма верна при значении $i = k$, где $0 \le k \le n-2$, т.е.

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{k}\mathbf{B}_0^{\perp L} = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^{k}.$$

Покажем, что тогда она верна и при значении $i = k+1$. Для вывода искомого тождества помимо записанного равенства будем использовать соотношения первого уровня декомпозиции в соответствии с [9], [12]

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0^{\perp L+}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0$$

и свойства матричных делителей нуля и псевдообратных матриц, доказанных в [9],

$$\mathbf{B}_0\mathbf{B}_0^{+} + \mathbf{B}_0^{\perp L+}\mathbf{B}_0^{\perp L} = \mathbf{I}_n.$$

В соответствии с определением $\mathbf{b}_1^{T}$ имеем

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{k}\mathbf{B}_1 = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-3; \\ 1 \text{ при } k = n-2 \end{cases}$$

С учётом представленных равенств получим

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{k+1}\mathbf{B}_0^{\perp L} = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{k}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0^{\perp L+}\mathbf{B}_0^{\perp L} = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{k}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0\left(\mathbf{I}_n - \mathbf{B}_0\mathbf{B}_0^{+}\right) = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{k}\left(\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^{+}\right) =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{k}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0 \text{ при } k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-3; \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{k}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0^{+} \text{ при } k = n-2; \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^{k+1} \text{ при } k+1 = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2; \\ \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^{k+1} - \mathbf{B}_0^{+} \text{ при } k+1 = n-1. \end{cases}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть как и прежде $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ – матрицы состояния и управления на нулевом уровне декомпозиции (4), $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$ – соответствующие матрицы на первом уровне (5).

Тогда для любого натурального числа i справедливо равенство

$$\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^i\mathbf{B}_0 = \sum_{j=0}^{i-1}\left(\mathbf{A}_1^j\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^+\mathbf{A}_0^{i-1-j}\mathbf{B}_0\right).$$

Доказательство

Докажем лемму методом математической индукции по числу i, учитывая следующие соотношения:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0^{\perp L+}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0$$

(из декомпозиции [9], [12]),

$$\mathbf{B}_0\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{B}_0^{\perp L+}\mathbf{B}_0^{\perp L} = \mathbf{I}_n$$

(как и прежде, из свойства аннуляторов и псевдообратных матриц, доказанного в [9]).

При значении $i = 1$ лемма верна, действительно,

$$\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^1\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^+\mathbf{A}_0^0\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1.$$

Допустим, что лемма верна при значении $i = k$. Покажем, что тогда она верна и при значении $i = k+1$. Имеем

$$\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^{k+1}\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0\left(\mathbf{B}_0\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{B}_0^{\perp L+}\mathbf{B}_0^{\perp L}\right)\mathbf{A}_0^k\mathbf{B}_0 = \left(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_0^{\perp L}\right)\mathbf{A}_0^k\mathbf{B}_0 =$$

$$= \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^+\mathbf{A}_0^k\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_1\sum_{j=0}^{k-1}\left(\mathbf{A}_1^j\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^+\mathbf{A}_0^{k-1-j}\mathbf{B}_0\right) = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^+\mathbf{A}_0^k\mathbf{B}_0 + \sum_{j=1}^{k}\left(\mathbf{A}_1^j\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^+\mathbf{A}_0^{k-j}\mathbf{B}_0\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\left(\mathbf{A}_1^j\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^+\mathbf{A}_0^{k-j}\mathbf{B}_0\right).$$

Лемма доказана.

Теорема. Задана полностью управляемая SIMO-система (1) с размерностью пространства состояний *n*. Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – матрицы состояния и управления, а $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$ – нижняя (n-я) строка матрицы $\mathbf{U}^{-1}$, обратной к матрице управляемости

$$\mathbf{U} = \left[\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{AB} \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right].$$

Матрица регулятора $\mathbf{K}$ в законе управления (3), обеспечивающая матрице состояния замкнутой системы «объект – регулятор» $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ собственные значения $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$, имеет компактный вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\prod_{i=1}^{n}\left(\mathbf{A} - \phi_i\mathbf{I}_n\right). \tag{10}$$

Доказательство

Используя аналитический метод синтеза модальных регуляторов [9], докажем теорему с помощью математической индукции по числу n.

При значении $n=1$ теорема верна:

$$\mathbf{K}=\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{A}-\phi_1\mathbf{I}_1\right).$$

Допустим, что теорема верна при значении $n=k$. Покажем, что тогда она верна и при значении $n=k+1$. Матрица регулятора на нулевом уровне декомпозиции рассчитывается из соотношения

$$\mathbf{K}_0=\mathbf{B}_0^-\left(\mathbf{A}_0-\phi_{k+1}\mathbf{I}_{k+1}\right),\quad \mathbf{B}_0^-=\mathbf{B}_0^++\mathbf{K}_1\mathbf{B}_0^{\perp L}.$$

Матрица регулятора на первом уровне декомпозиции $\mathbf{K}_1$ представляет собой решение рассматриваемой в теореме задачи для случая $n=k$ с матрицами состояния и управления $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$. Таким образом,

$$\mathbf{B}_0^-=\mathbf{B}_0^++\left(\mathbf{b}_1^T\prod_{j=1}^{k}\left(\mathbf{A}_1-\phi_j\mathbf{I}_k\right)\right)\mathbf{B}_0^{\perp L},$$

где $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}$ – нижняя $(k\text{-я})$ строка матрицы $\mathbf{U}_1^{-1}$, обратной к матрице управляемости

$$\mathbf{U}_1=\left[\mathbf{B}_1 \,\vdots\, \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{A}_1^{k-1}\mathbf{B}_1\right].$$

Запишем матричный полином с помощью коэффициентов, являющихся комбинациями корней в желаемом спектре:

$$\prod_{j=1}^{k}\left(\mathbf{A}_1-\phi_j\mathbf{I}_k\right)=\mathbf{A}_1^k+a_{k-1}\mathbf{A}_1^{k-1}+\ldots+a_1\mathbf{A}_1+a_0\mathbf{I}_k.$$

Тогда в силу леммы 2 получим

$$\mathbf{B}_0^-=\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\left(\mathbf{A}_0^k+a_{k-1}\mathbf{A}_0^{k-1}+\ldots+a_1\mathbf{A}_0+a_0\mathbf{I}_{k+1}\right)=\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\prod_{j=1}^{k}\left(\mathbf{A}_0-\phi_j\mathbf{I}_{k+1}\right)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{K}_0=\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\prod_{j=1}^{k+1}\left(\mathbf{A}_0-\phi_j\mathbf{I}_{k+1}\right).$$

Осталось показать, что вектор $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}$ совпадает с нижней $((k+1)\text{-ой})$ строкой матрицы $\mathbf{U}_0^{-1}$, обратной к матрице управляемости

$$\mathbf{U}_0=\left[\mathbf{B}_0 \,\vdots\, \mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{A}_0^{k}\mathbf{B}_0\right].$$

В силу полной управляемости SIMO-системы эта матрица обратима и уравнение

$$\mathbf{b}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_0=\underbrace{\left[0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1\right]}_{k+1\text{ элемент}}$$

имеет единственное решение относительно вектора $\mathbf{b}_0^{\mathrm{T}}$. Таким образом, достаточно показать, что вектор $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}$ удовлетворяет записанному уравнению независимо от выбора аннулятора $\mathbf{B}_0^{\perp L}$. Рассмотрим произведение

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\left[\mathbf{B}_0 \,\vdots\, \mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{A}_0^{k}\mathbf{B}_0\right].$$

В силу свойств левого делителя нуля и псевдообратной матрицы

$$\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{B}_0=\mathbf{0}_{k\times(k+1)},\quad \mathbf{B}_0^+\mathbf{B}_0=1,$$

на основании леммы 1 и тождества

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^i\mathbf{B}_1 = \begin{cases} 0 \text{ при } i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-2, \\ 1 \text{ при } i = k-1, \end{cases}$$

вытекающего из определения вектора $\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}$, запишем

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{B}_0 = 0,$$
$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^2\mathbf{B}_0 = \ldots = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^{k-1}\mathbf{B}_0 = 0,$$
$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{A}_0^k\mathbf{B}_0 = \mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_1^{k-1}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_0^{+}\mathbf{A}_0^0\mathbf{B}_0 = 1.$$

Полученные соотношения подтверждают справедливость равенства

$$\mathbf{b}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0^{\perp L} = \mathbf{b}_0^{\mathrm{T}}$$

и доказываемого для случая $n = k+1$ тождества

$$\mathbf{K} = \mathbf{b}^T \prod_{j=1}^{k+1}\left(\mathbf{A} - \phi_j \mathbf{I}_{k+1}\right).$$

Теорема доказана.

3. Пример

Рассмотрим задачу управления продольным движением космического аппарата (КА) в атмосфере Земли. Считается, что имеется номинальная траектория движения и требуется отслеживание номинальной траектории с помощью управления углом крена КА. В этом случае вектор состояния в соответствии с (1) будет представлять собой отклонения: по скорости движения, по углу наклона траектории, по радиус-вектору положения КА относительно центра Земли и по угловой дальности. Соответствующие матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ будут иметь вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Элементы матрицы $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ $(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3)$, а также b_{21} в (11) заимствованы из [21]. Соответственно другие элементы матрицы $\mathbf{A}$ равны

$$a_{41} = \frac{\cos\theta}{r}, \quad a_{42} = -\frac{V\sin\theta}{r}, \quad a_{43} = -\frac{V\cos\theta}{r^2},$$

где V – скорость движения КА, θ – угол наклона траектории, r – расстояние от центра Земли до центра масс КА.

Желаемый спектр замкнутой системы имеет следующий общий вид

$$\Lambda^* = \{\phi_1,\quad \phi_2,\quad \phi_3,\quad \phi_4\}. \qquad (12)$$

Применение формулы (10) к матрицам (11) и спектру (12) дает вектор-строку

$$\mathbf{K} = \frac{1}{b_{21}} \begin{bmatrix} a_{21} + \dfrac{a_{11}^2 + a_{11} p_3^* + p_2^*}{a_{12}} + \dfrac{1}{d_{13}} \left(\dfrac{a_{32}}{a_{12}} p_{1,0}^* - d_{34} \tilde{p}_0^* \right) \\ a_{11} + a_{22} + p_3^* \\ a_{23} - \dfrac{p_{1,0}^* + d_{14} \tilde{p}_0^*}{d_{13}} \\ \tilde{p}_0^* \end{bmatrix}^T, \tag{13}$$

где

$$p_{1,0}^* = p_1^* + \frac{a_{32}}{d_{13}} p_0^*, \quad \tilde{p}_0^* = -\frac{p_0^*}{a_{43} d_{13}},$$

$$d_{13} = a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}, \quad d_{14} = a_{11} a_{42} - a_{12} a_{41} \quad d_{34} = a_{32} a_{41} - a_{31} a_{42},$$

а p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^* – коэффициенты желаемого характеристического полинома

$$\phi^4 + p_3^* \phi^3 + p_2^* \phi^2 + p_1^* \phi + p_0^* = \prod_{i=1}^{4} (\phi - \phi_i),$$

что и требовалось получить.

Выражение (13) является аналитическим решением задачи стабилизации программной траектории продольного движения КА в атмосфере Земли.

4. Заключение

В работе для задачи модального управления SIMO-систем на основе многоуровневой декомпозиции получена универсальная компактная аналитическая формула вычисления коэффициентов обратной связи (матрицы регулятора) при управлении по вектору состояния. Предложенный подход позволяет для SIMO-систем осуществлять поиск скалярного управления без его промежуточного вычисления на каждом уровне декомпозиции.

Поскольку для SIMO-систем модальное управление дает единственный результат, по сути, на основе подхода многоуровневой декомпозиции получена формула Аккермана [22], которая здесь выражена не через коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы управления, а через сами задаваемые собственных значения.

На примере решения задачи стабилизации продольного движения КА в атмосфере Земли относительно номинальной траектории движения с помощью изменения угла крена показана эффективность получения коэффициентов обратной связи регулятора с помощью полученной формулы.

Список литературы

[1] Калман Р.Э., Фалб П.Л., Арбиб М.А. Очерки по математической теории систем. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 400 с.

[2] Уонем М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. – М.: Наука, 1980. – 376 с.

[3] Skelton R.E., Iwasaki T., and Grigoriadis K., *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. London, UK: Taylor&Francis, 1998. 304 p.

[4] Zhou K.M., and Doyle J.C., *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1999. 411 p.

[5] Skogestad S., and Postlethwaite I., *Multivariable Feedback Control*. John Wiley & Sons Ltd, 2005. 592 p.

[6] Kautsky J., Nichols N.K., and Van Dooren P., "Robust Pole Assignment in Linear State Feedback," *Int. J. Control*, vol. 41, no. 5, pp. 1129 – 1155, 1985.

[7] Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.

[8] Aström K.J., and Hägglund T., *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. Research Triangle Park, USA, 2^{nd} Ed., 1995. 343 p.

[9] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. – 666 с.

[10] Kailath T., *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1980. 682 p.

[11] Gibbard M.J., Pourbeik P., and Vowles D.J., *Small-Signal Stability, Control and Dynamic Performance of Power Systems*. Univ. of Adelaide Press, 2015. 658 p.

[12] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 2. С. 118 – 132.

[13] Blumthaler I., and Oberst U., "Design, Parameterization and Pole Placement of Stabilizing Output Feedback Compensators via Injective Cogenerator Quotient Signal Modules," *Linear Algebra Appl.*, vol. 436 (5-2), pp. 963 – 1000, 2012.

[14] Peretz Y., "A Randomized Approximation Algorithm for the Minimal-Norm Static-Output-Feedback Problem," *Automatica*, vol. 63, pp. 221 – 234, 2016.

[15] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Управление по выходу спектром дескрипторной динамической системы // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468. № 2. С. 134 – 136.

[16] Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А. и др. Управление по выходу спектром движения космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 4. С. 111 – 122.

[17] Воробьёва Е.А., Зубов Н.Е., Микрин Е.А. и др. Синтез стабилизирующего управления космическим аппаратом на основе обобщённой формулы Аккерманна // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 96 – 106.

[18] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Стабилизация взаимосвязанных движений летательного аппарата в каналах тангаж-рысканье при отсутствии информации об угле скольжения. Аналитический синтез // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 95 – 105.

[19] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Управление по выходу продольным движением летательного аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 164 – 176.

[20] Зубов Н.Е., Лапин А.В., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Управление по выходу спектром линейной динамической системы на основе подхода Ван дер Воуда // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476. № 3. С. 260 – 263.
[21] Джабаров М.А., Зубов Н.Е. Об одном подходе к решению задачи спуска космического аппарата в атмосфере Земли // Пилотируемые полеты в космос. 2018. № 2. С. 46 – 63.
[22] Ackermann J., “Der Entwurf linearer Regelungsysteme im Zustandraum,” *Regeltech, Proz.-Datenverarb.*, vol. 7, pp. 297 – 300, 1972.

Analytical formula of calculating a controller for linear SIMO-system

Mikrin E.A.[1,*], Zubov N.E.[2,**], Lapin A.V.[2,***], Ryabchenko V.N.[2,3,****]

[1] PSC Korolev RSC “Energia”
[2] Bauman MSTU
[3] JSC RDC at FGC of UES
e-mail:
[*]Eugeny.Mikrin@rsce.ru
[**]Nik.Zubov@gmail.com
[***]AlexeyPoeme@yandex.ru
[****]Ryabchenko.VN@yandex.ru

Abstract. A compact analytical formula for calculating the coefficients of feedback (controller matrix) is obtained for linear stationary dynamic single-input multiple-output (SIMO) system while solvingthe problem of synthesis of linear control by fully measured state vector. This formula was obtained basing both on the technique of multilevel decomposition applied to the mathematical model of system while synthesizing its modal control (providing the desirable eigenvalues/poles placement) and on widely known property of inverse matrix of controllability in linear stationary dynamical systems. The main transformations in the mentioned technique are being performed using matrix zero divisors that are rectangular matrices zeroing their products with specified matrices.

Two lemmas and the theorem for solving the assigned problem have been formulated and proved. The proposed approach allows realizing the search of scalar control bypassing intermediate calculations on each decomposition level and therefore eliminates an occurrence of badly conditioned matrices on the lower decomposition levels if the control object is described by numerical matrices. At assigned eigenvalues placement of a closed-loop SIMO-system the obtained formula matches Ackermann’s formula if the coefficients of desirable characteristic polynomial are represented by eigenvalues. Thus the calculations given in the article may be considered as an alternate technique of proving Ackermann’s formula.

The efficiency of applying the described analytical formula to calculate the coefficients of feedback (controller matrix) is shown for the fourth-order control object at solving the problem of stabilizing aspace vehicle longitudinal motion relative to the nominal trajectory in the Earth atmosphere by changing the bank angle.

Keywords: linear SIMO-system, state space, poles placement, multilevel decomposition, controller by fully measured state vector, analytical formula