ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии "слабой" точки поворота у предельного оператора

Елисеев А.Г., Кириченко П.В.

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

yeliseevag@mpei.ru, kirichenkopv@mpei.ru

Аннотация. Статья посвящена развитию метода регуляризации С. А. Ломова на сингулярно возмущенные задачи Коши в случае нарушений условий стабильности спектра предельного оператора. В частности, рассмотрена задача при наличии «слабой» точки поворота, в которой собственные значения «слипаются» в начальный момент времени. Задачи с подобного рода спектральными особенностями хорошо известны специалистам в математической и теоретической физике, а также в теории дифференциалных уравнений, но с точки зрения метода регуляризации ранее не рассматривались. В представленной работе восполняется этот пробел. Отталкиваясь от идей асимптотического интегрирования задач со спектральными особенностями С. А. Ломова и А. Г. Елисеева, в ней указано каким образом следует вводить регуляризирующие функции, подробно описан алгоритм метода регуляризации в случае «слабой» точки поворота, проводится обоснование этого алгоритма и строится асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача Коши, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

1.Введение.

В данной работе методом регуляризации Ломова С.А. [1] строится регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущенной неоднородной задачи Коши на всем отрезке $[0, T]$ при наличии спектральной особенности в виде «слабой» точки поворота 1-го порядка у предельного оператора. Определение «слабой» точки поворота будет дано ниже.

Отметим работы [2], [3] и [4], посвященные построению асимптотики решения сингулярно возмущенных задач Коши при наличии спектральных особенностей у предельного оператора. Наиболее близкая к нашим исследованиям задача рассмотрена в работе В.В. Кучеренко [4], где строится локальная асимптотика для однородной задачи с быстроосциллирующими начальными данными.

Новизна представленной работы состоит в том,что методом регуляризации строится глобальная регуляризованная асимптотика на всем отрезке $[0, T]$ неоднородной задачи Коши с произвольными начальными условиями. Наши исследования являются развитием работы [2], в которой описана методика построения регуляризованного асимптотического решения для задач с нестабильным спектром с «простой» точкой поворота, т.е. ситуации, в которой собственные значения в отдельных точках обращаются в нуль (как сказано в [2] "предельный оператор дискретно необратим"). Основные идеи настоящей работы тезисно изложены в [5]. Для того, чтобы выявить особенности построения асимптотики решения в случае «слабой» точки поворота и не усложнять изложение дополнительными вычислениями при наличии стабильной части спектра, мы будем рассматривать задачу в $\mathbf{R^2}$.

Пусть дана задача Коши

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u} = A(t)u + h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \end{cases} \tag{1}$$

и выполнены условия:

1) $h(t) \in C^\infty([0, T], \mathbf{R^2})$;
2) $A(t) \in C^\infty([0, T], \mathcal{L}(\mathbf{R^2}, \mathbf{R^2}))$;
3) для собственных значений оператора $A(t)$:
   а) $\forall t \in (0, T] \quad \lambda_1(t) \neq \lambda_2(t)$;
   б) $\forall t \in [0, T] \quad \lambda_i(t) \neq 0, \quad i = 1, 2$;
4) условие «слабой» точки поворота 1-го порядка в точке $t = 0$:

$\lambda_2(t) - \lambda_1(t) = ta(t), \quad a(t) \neq 0,$ причем геометрическая кратность собственных значений равна алгебраической для любых $t \in [0, T]$;

5) $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \quad$ при $\quad t \in [0, T]$.

Основной проблемой метода регуляризации при решении сингулярно возмущенных задач является описание сингулярного многообразия (функций). В случае стабильного спектра $A(t)$ это:

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right), \quad \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right), \quad \text{где} \quad \varphi_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s)\, ds, \quad i = 1, 2.$$

При наличии точечных особенностей спектра все обстоит значительно сложнее. Если точечная особенность имеет вид 4), то регуляризирующие функции находятся из задачи Коши

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{J}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} J + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J, \\ J(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) в явном виде не решается. Найдем решение (2) методом последовательных приближениий.

Лемма 1 *Решение* (2) *представляется в виде равномерно сходящегося ряда на* $[0, T] \times (0, \varepsilon_0]$, *которое допускает оценку*

a) если $\operatorname{Re} \lambda_i \leqslant -\delta < 0$, *то*

$$\|J\|_{C\,[0,T]} \leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}\mathbb{C},$$

b) если $\operatorname{Re} \lambda_i \leqslant 0$, *то*

$$\|J\|_{C\,[0,T]} \leqslant \mathbb{C},$$

где $\mathbb{C} > 0$ *— константа, не завичсящая от* ε.

Доказательство: Решив (2) методом последовательных приближений, получим:

$$J(t) = \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) \cdot T \cdot \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) ds +$$
$$+ \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) \int_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) \cdot T \cdot \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\right) \int_0^s \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^{s_1}\right) \cdot T \cdot$$
$$\cdot \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^{s_1}\right) ds_1\, ds + \ldots,$$

$$\text{здесь} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_0^t = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & \varphi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Используя свойство

$$T \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ 0 & \varphi_2(t) \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} \varphi_2(t) & 0 \\ 0 & \varphi_1(t) \end{pmatrix}\right) \cdot T,$$

получим

$$\begin{gathered} J(t) = \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right) + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^s\right)T\,ds + \\ + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^s\right)\int_0^s \exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^{s_1}\right)T\,ds_1\,ds + \\ + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^s\right)\int_0^s \exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^{s_1}\right)\cdot\int_0^{s_1} \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\triangle_0^{s_2}\right)T\,ds_2\,ds_1\,ds + \ldots, \\ \text{здесь} \quad \triangle_0^t = \begin{pmatrix} \varphi_2(t)-\varphi_1(t) & 0 \\ 0 & \varphi_1(t)-\varphi_2(t) \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3}$$

Покомпонентно (3) выглядит

$$\begin{gathered} J_1(t) = \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right) + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right)\int_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right)ds + \\ + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right)\int_0^t \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right)\int_0^s \exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right)ds_1\,ds + \ldots, \\ J_2(t) = \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right) + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right)\int_0^t \exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right)ds + \\ + \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right)\int_0^t \exp\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right)\int_0^s \exp\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right)ds_1\,ds + \ldots \end{gathered} \tag{4}$$

Равномерная сходимость рядов (4) следует из оценок:

a) $\operatorname{Re}\lambda_i \leqslant -\delta < 0, \quad t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} &\left|e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\right| \leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}, \\ &\left|e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int_0^t e^{(\varphi_2(s)-\varphi_1(s))/\varepsilon}\,ds\right| \leqslant \int_0^t e^{\int_s^t \operatorname{Re}\lambda_1(s_1)\,ds_1/\varepsilon + \int_0^s \operatorname{Re}\lambda_2(s_2)\,ds_2/\varepsilon}\,ds \leqslant \\ &\leqslant \int_0^t e^{-\delta(t-s+s)/\varepsilon}\,ds = e^{-\delta t/\varepsilon}\cdot t, \end{aligned}$$

. . . .

$$\left|e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon}\int\limits_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon}\ldots\int\limits_0^{s_{n-1}} e^{(-1)^n\Delta\varphi(s_n)/\varepsilon}\,ds_n\ldots ds_1\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_0^t\int\limits_0^{s_1}\cdots\int\limits_0^{s_{n-1}} e^{\left(\varphi_1(t)-\varphi_1(s_1)+\ldots+(-1)^{n+1}\varphi_1(s_n)\right)/\varepsilon}\cdot$$
$$\cdot e^{(\varphi_2(s_1)-\varphi_2(s_2)+\ldots+(-1)^n\varphi_2(s_n))/\varepsilon}\,ds_1\ldots ds_n\leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}\cdot\frac{t^n}{n!}$$

Таким образом

$$|J_1(t,\varepsilon)|\leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}\cdot e^t\leqslant e^T\cdot e^{-\delta t/\varepsilon};$$

аналогично

$$|J_2(t,\varepsilon)|\leqslant e^T\cdot e^{-\delta t/\varepsilon}.$$

$b)$ $\operatorname{Re}\lambda_i\leqslant 0,\quad t\in[\,0,T]$

$$|J_i(t)|\leqslant e^T,\qquad i=1,2.$$

Следовательно, ряды (4) сходятся равномерно по ε и t на $[\,0,T]\times(\,0,\varepsilon_0]$. Кроме того, легко проверяется, что ряды выдерживают действие оператора $\varepsilon\frac{d}{dt}$ в любой степени.

Введем обозначения

$$\sigma_{1,k}=e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\underbrace{\int\limits_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon}\int\limits_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon}\ldots\int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k+1}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{k\text{ интегралов}}\,ds_k\ldots ds_1,$$
$$\sigma_{2,k}=e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}\underbrace{\int_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon}\int_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon}\ldots\int_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^k\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{k\text{ интегралов}}\,ds_k\ldots ds_1,$$

Нетрудно установить, что $\sigma_{i,k}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases}\varepsilon\dot{\sigma_{1,k}}=\lambda_1(t)\sigma_{1,k}+\varepsilon\sigma_{2,k-1},\\ \varepsilon\dot{\sigma_{2,k}}=\lambda_2(t)\sigma_{2,k}+\varepsilon\sigma_{1,k-1},\\ \sigma_{1,k}(0)=0,\sigma_{2,k}(0)=0,k\geqslant 1.\end{cases}$$

Для обоснования формализма метода регуляризации в случае «слабой» точки поворота сформулируем и докажем ещё одно утверждение.

Лемма 2 *Пусть дана матрица $A(t)$, удовлетворяющая условиям $2) \div 4)$ из постановки задачи* (1). *Тогда $\lambda_i(t) \in C^\infty[0, T]$, $i = 1, 2$.*

Доказательство: Так как $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = \lambda_0$, то

$$A(0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 I.$$

На основании леммы Адамара

$$A(t) - \lambda_0 I = t^p B(t),$$

где $B(t)$ — диагонализируемая матрица, p — целое положительное число (в нашем случае $p = 1$). Для матриц $B(t)$, удовлетворяющих условиям стабильности ($\mu_1(t) \neq \mu_2(t)$, $i = 1, 2$, $\mu_{1,2}(t)$ — собственные значения матрицы $B(t)$) известно, что, если $B(t) \in C^\infty[0, T]$, то собственные значения $\mu_i(t) \in C^\infty[0, T]$ и собственные векторы $e_i(t) \in C^\infty[0, T]$, $i = 1, 2$ [6] (стр. 55-60). В нашем случае это можно показать и непосредственно, так как $\mu_i(t)$ — корни квадратного уравнения с гладкими коэффициентами. Отсюда и $\lambda_i = \lambda_0 + t^p \mu_i(t) \in C^\infty[0, T]$.

2. Формализм метода регуляризации.

Решение задачи (1) будем искать в виде

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{1,k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m x_m^k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{2,k} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m y_m^k(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m z_m(t). \qquad (5)$$

Подставив (5) в (1) и приравнивая слагаемые при одинаковых $\sigma_{1,k}, \sigma_{2,k}$, получим серию задач:

$$(\text{при} \quad \varepsilon^0) \qquad \begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t))\, x_0^k(t) = 0, \\ (A(t) - \lambda_2(t))\, y_0^k(t) = 0, \\ A(t) z_0(t) = -h(t), \\ x_0^0(0) + y_0^0(0) + z_0(0) = u^0, \quad k = \overline{0, \infty}. \end{cases} \qquad (6)$$

Решение (6) имеет вид:

$$x_0^k(t) = \alpha_0^k(t) e_1(t), \quad y_0^k(t) = \beta_0^k(t) e_2(t), \quad z_0(t) = -A^{-1}(t) h(t)$$

здесь $e_1(t), e_2(t)$ — собственные векторы, $\alpha_0^k(t), \beta_0^k(t)$ — произвольные скалярные функции. Значения $\alpha_0^0(0), \beta_0^0(0)$ определяются из начальных условий:

$$\alpha_0^0(0)e_1(0)+\beta_0^0(0)e_2(0)=u^0+A^{-1}(0)h(0)$$

или

$$\alpha_0^0(0)=u_1^0+\frac{h_1(0)}{\lambda_1(0)},\qquad \beta_0^0(0)=u_2^0+\frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)}$$

Так как $\sigma_{1,k}(0)=0,\sigma_{2,k}(0)=0,\quad k\geqslant 1$, то $\alpha_0^k(0),\beta_0^k(0)$ могут принимать произвольные значения на данном итерационном шаге.

$$(\text{при}\quad \varepsilon^1)\qquad \begin{cases}(A(t)-\lambda_1(t))\,x_1^k(t)=\dot{x}_0^k(t)+y_0^{k+1}(t),\\ (A(t)-\lambda_2(t))\,y_1^k(t)=\dot{y}_0^k(t)+x_0^{k+1}(t),\\ A(t)z_1(t)=\dot{z}_0(t),\\ x_1^0(0)+y_1^0(0)+z_1(0)=0,\quad k=\overline{0,\infty}.\end{cases} \tag{7}$$

Подставив $x_0^k(t),y_0^k(t),z_0(t)$, получим:

$$\begin{cases}(A(t)-\lambda_1(t))\,x_1^k(t)=\\ =\left(\dot{\alpha}_0^k(t)+C_1^1(t)\alpha_0^k(t)\right)e_1(t)+\left(\alpha_0^k(t)C_1^2(t)+\beta_0^{k+1}(t)\right)e_2(t),\\ \\ (A(t)-\lambda_2(t))\,y_1^k(t)=\\ =\left(\dot{\beta}_0^k(t)+C_2^2(t)\beta_0^k(t)\right)e_2(t)+\left(\beta_0^k(t)C_2^1(t)+\alpha_0^{k+1}(t)\right)e_1(t),\\ \\ z_1(t)=-\left(A^{-1}(t)\dfrac{d}{dt}\right)A^{-1}(t)h(t),\end{cases} \tag{8}$$

здесь $C_i^j(t)$ — коэффициенты разложения $\dot{e}_1(t)$ и $\dot{e}_2(t)$ по базису собственных векторов $e_1(t),e_2(t)$:

$$\dot{e}_i(t)=\sum_{j=1}^{2}C_i^j(t)e_j(t),\quad i=1,2.$$

Из условий разрешимости и точечной разрешимости в нуле имеем системы:

$$\begin{cases}\dot{\alpha}_0^k(t)+C_1^1(t)\alpha_0^k(t)=0\\ \beta_0^{k-1}(0)C_2^1(0)+\alpha_0^k(0)=0\end{cases},\quad \begin{cases}\dot{\beta}_0^k(t)+C_2^2(t)\beta_0^k(t)=0\\ \alpha_0^{k-1}(0)C_1^2(0)+\beta_0^k(0)=0\end{cases},\quad k\geqslant 1. \tag{9}$$

Отсюда определяются начальные условия:

$$\alpha_0^k(0)=-\beta_0^{k-1}(0)C_2^1(0),\qquad \beta_0^k(0)=-\alpha_0^{k-1}(0)C_1^2(0) \tag{10}$$

и функции $\alpha_0^k(t)$, $\beta_0^k(t)$, $\quad k \geqslant 1$:

$$\alpha_0^k(t) = \alpha_0^k(0) \exp\left(-\int\limits_0^t C_1^1(s)\,ds\right), \qquad \beta_0^k(t) = \beta_0^k(0) \exp\left(-\int\limits_0^t C_2^2(s)\,ds\right)$$

Заметим, что $\alpha_0^0(0)$, $\beta_0^0(0)$ определены в системе (6). Тогда $\alpha_0^k(0)$, $\beta_0^k(0), k \geqslant 1$ однозначно определены из рекуррентных соотношений (10).

Решения (8) примут вид

$$\begin{cases} x_1^k(t) = \alpha_1^k(t)e_1(t) + \dfrac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t) + \beta_0^{k+1}(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}e_2(t) \\ y_1^k(t) = \beta_1^k(t)e_2(t) + \dfrac{\beta_0^k(t)C_2^1(t) + \alpha_0^{k+1}(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}e_1(t) \end{cases}$$

Заметим, что начальные условия (10), условия 1) $\div$ 4) задачи (1) и лемма 2 обеспечивают гладкость вектор-функций $x_1^k(t)$, $y_1^k(t)$ на $[0, T]$. Начальные условия для $\alpha_1^0(0)$, $\beta_1^0(0)$ определяются из соотношения:

$$\alpha_1^0(0)e_1(0) + \beta_1^0(0)e_2(0) = \left[\left(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\right)A^{-1}(t)h(t) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{\beta_0^0(t)C_2^1(t) + \alpha_0^1(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}e_1(t) - \frac{\alpha_0^0(t)C_1^2(t) + \beta_0^1(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}e_2(t)\right]\right|_{t=0}$$

Произвольные функции $\alpha_1^k(t)$, $\beta_1^k(t)$ и начальные условия для них при $k \geqslant 1$ определяются на следующем итерационном шаге.

$$(\text{при} \quad \varepsilon^2) \qquad \begin{cases} (A(t) - \lambda_1(t))\, x_2^k(t) = \dot{x}_1^k(t) + y_1^{k+1}(t), \\ (A(t) - \lambda_2(t))\, y_2^k(t) = \dot{y}_1^k(t) + x_1^{k+1}(t), \\ z_2(t) = -\left(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\right)^2 A^{-1}(t)h(t), \\ x_2^0(0) + y_2^0(0) + z_2(0) = 0, \quad k = \overline{0, \infty}. \end{cases} \tag{11}$$

Записав условия разрешимости для (11), получим задачи Коши для определения $\alpha_1^k(t)$, $\beta_1^k(t)$.

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1^k(t) + C_1^1(t)\alpha_1^k(t) = -\dfrac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t)C_2^1(t) - \alpha_0^{k+2}(t)}{\lambda_2(t) - \lambda_1(t)}, \\ \dot{\beta}_1^k(t) + C_2^2(t)\beta_1^k(t) = -\dfrac{\beta_0^k(t)C_1^2(t)C_2^1(t) - \beta_0^{k+2}(t)}{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}. \end{cases}$$

Начальные условия находятся из (11) с учетом точечной разрешимости в нуле. Приведем ответ, опуская достаточно громоздкие выкладки:

$$\begin{aligned}&\alpha_1^{k+1}(0)=-\beta_1^k(0)C_2^1(0)-\\&-\left[\frac{\beta_0^k(t)C_2^1(t)+\alpha_0^{k+1}(t)}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)}C_1^1(t)+\frac{d}{dt}\frac{\beta_0^k(t)C_2^1(t)+\alpha_0^{k+1}(t)}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)}\right]\Bigg|_{t=0},\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\beta_1^{k+1}(0)=-\alpha_1^k(0)C_1^2(0)-\\&-\left[\frac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t)+\beta_0^{k+1}(t)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}C_2^2(t)+\frac{d}{dt}\frac{\alpha_0^k(t)C_1^2(t)+\beta_0^{k+1}(t)}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}\right]\Bigg|_{t=0}.\end{aligned}\tag{13}$$

Таким образом, имеем рекуррентные соотношения для определения начальных условий $\alpha_1^k(0)$, $\beta_1^k(0)$, $k\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\alpha_1^k(0)&=-\beta_1^{k-1}(0)C_2^1(0)-\gamma_{k-1},\\ \beta_1^k(0)&=-\alpha_1^{k-1}(0)C_1^2(0)-\delta_{k-1},\end{aligned}$$

где γ_k, δ_k известные числа, определенные в (12), (13).

Следовательно, решения системы (7) определены. Продолжая аналогичный процесс можно определить любой член ряда (5).

Замечание. Как следует из вышеизложенного, построение решения сильно упростится, если хотя бы один из коэффициентов разложения производных базиса имеет нуль в точке $t=0$. Например,:

a) если $\left(C_1^2\right)^{(k)}(0)=0,\quad \forall\, k\geqslant 0$, то для построения асимптотического ряда достаточно трех регуляризирующих функций:

$$e^{\varphi_1(t)/\varepsilon},\qquad e^{\varphi_2(t)/\varepsilon},\qquad e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int_0^t e^{\Delta\varphi(s)/\varepsilon}\,ds.$$

Для построения асимптотической суммы из N членов достаточно выполнения условий: $\left(C_1^2\right)^{(k)}(0)=0,\quad \forall\, k=\overline{0,N}$.

b) если $\left(C_1^2\right)^{(k)}(0)=0$, $\left(C_2^1\right)^{(k)}(0)=0,\quad \forall\, k\geqslant 0$, то для построения асимптотического ряда понадобится всего две регуляризирующие функции:

$$e^{\varphi_1(t)/\varepsilon},\qquad e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}.$$

Аналогично a) для построения асимптотической суммы из N членов можно ограничится нулем $N-$го порядка: $\left(C_1^2\right)^{(k)}(0)=0$, $\left(C_2^1\right)^{(k)}(0)=0$, $\forall\, k=\overline{0,N}$.

3. Оценка остаточного члена. Теорема о предельном переходе.

Запишем

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{m}\varepsilon^q\left(\sigma_{1,p}\,x_q^p(t)+\sigma_{2,p}\,y_q^p(t)\right)+\sum_{q=0}^{m}\varepsilon^q z_q(t)+\varepsilon^{m+1}R_{k,m}(t,\varepsilon). \quad (14)$$

Подставив (14) в (1) и с учетом разрешимости итерационных задач, получим:

$$\begin{cases}\varepsilon\dot{R}_{n,m}-A(t)R_{n,m}=H(t,\varepsilon),\\ R_{n,m}(0,\varepsilon)=0,\end{cases} \quad (15)$$

где

$$H(t,\varepsilon)=-\left[\sum_{p=0}^{n-1}\sigma_{1,p}\left(\dot{x}_m^p(t)+y_m^{p+1}(t)\right)+\sigma_{2,p}\left(\dot{y}_m^p(t)+x_m^{p+1}(t)\right)\right]$$
$$+\sigma_{1,n}\,\dot{x}_m^n(t)+\sigma_{2,p}\,\dot{y}_m^n(t)+\dot{z}_m(t)$$

Как следует из оценок интегралов $\sigma_{1,p}$, $\sigma_{2,p}$ (см. лемму 1) правая часть (15) имеет оценку

$$H(t,\varepsilon)=\underline{O}(1)$$

Решение (15) запишем в виде:

$$R_{n,m}=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t U_\varepsilon(t,s)H(s,\varepsilon)\,ds,$$

где $U_\varepsilon(t,s)$ — разрешающий оператор, являющийся решением задачи Коши:

$$\varepsilon\dot{U}_\varepsilon(t,s)=A(t)U_\varepsilon(t,s),\qquad U_\varepsilon(t,s)\Big|_{s=t}=I.$$

Из условий 1) $\div$ 5) следует, что $U_\varepsilon(t,s)$ ограничен на $[\,0,T]$:

$$\|U_\varepsilon(t,s)\|_{C[0,T]}\leqslant\mathbb{C}.$$

Следовательно, из соотношения

$$R_{n,m}=-U_\varepsilon(t,s)A^{-1}(s)H(s,\varepsilon)\Big|_0^t+\int\limits_0^t U_\varepsilon(t,s)\frac{d}{ds}A^{-1}(s)H(s,\varepsilon)\,ds=$$

$$=-A^{-1}(t)H(t,\varepsilon)+U_\varepsilon(t,0)A^{-1}(0)H(0,\varepsilon)+\int\limits_0^t U_\varepsilon(t,s)\frac{d}{ds}A^{-1}(s)H(s,\varepsilon)\,ds,$$

получим:

$$R_{n,m}=\underline{O}(1)\qquad\text{при}\quad\varepsilon\to 0.$$

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 ***Об оценке остатка (асимтотическая сходимость).***

Пусть дана задача Коши (1) *и выполнены условия* $1) \div 5)$. *Тогда верна оценка*

$$\|U(t,\varepsilon) - \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{m} \varepsilon^q \big(\sigma_{1,p}\, x_q^p(t) + \sigma_{2,p}\, y_q^p(t)\big) - \sum_{q=0}^{m} \varepsilon^q z_q(t)\|_{C[0,T]} \leqslant \mathbb{C}\cdot\varepsilon^{m+1}$$

Теорема 2 ***О предельном переходе.***

Пусть дана задача Коши (1), *выполнены условия* $1) \div 5)$

и $\lambda_i(t) \leqslant -\delta < 0$ *при* $t \in [0,T]$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(t,\varepsilon) = -A^{-1}(t)h(t).$$

4. Пример.

Рассмотрим пример, в котором можно ограничиться тремя регуляризирующими функциями.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{u} = A(t)u + h(t), \\ u(0,\varepsilon) = u^0, \end{cases} \qquad t \in [0,1],$$

$$\text{где} \quad A(t) = \begin{pmatrix} -1+t & 0 \\ -2te^{2t} & -1-t \end{pmatrix}.$$

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = -1 \pm t$.

Собственные векторы: $e_1 = \{0, e^t\}^T$, $e_2 = \{-e^{-t}, e^t\}^T$.

$$u^0 = u_1^0 e_1 + u_2^0 e_2, \quad h(t) = h_1(t)e_1 + h_2(t)e_2,$$

$$\dot{e}_1 = e_1, \quad \dot{e}_2 = \{e^{-t}, e^t\}^T = 2e_1 - e_2,$$

$$\varphi_1(t) = -t + \frac{t^2}{2}, \quad \varphi_2(t) = -t - \frac{t^2}{2}, \quad \Delta\varphi = -t^2.$$

Регуляризирующие функции:

$$\sigma_{1,0} = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}, \quad \sigma_{2,0} = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}, \quad \sigma_{1,1} = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int_0^t e^{\Delta\varphi(s)/\varepsilon}\,ds.$$

Главный член асимптотики запишется в виде:

$$u_0(t,\varepsilon) = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\left(u_1^0 + \frac{h_1(0)}{\lambda_1(0)}\right)e^{-t}e_1(t) + e^{\varphi_2(t)/\varepsilon}\left(u_2^0 + \frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)}\right)e^{-t}e_2(t) +$$

$$+ e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{\Delta\varphi(s)/\varepsilon}\,ds\cdot\left(-2u_2^0 - 2\frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)}\right)e^{t}e_1(t).$$

5. Заключение.

Подводя итог, еще раз подчеркнем, что основной проблемой метода регуляризации С.А. Ломова является описание семейства регуляризирующих сингулярность функций. В настоящей работе эта проблема успешно решена в случае спектральной особенности предельного оператора в виде «слабой» точки поворота, что подтверждается результатами наших исследований.

Список литературы

[1] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

[2] Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора. — Математический сборник, 1986, т. 131, № 173, с. 544–557.

[3] Бободжанов А. А., Сафонов В. Ф. Регуляризованная асимптотика решений интегродифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами. — Уфимский математический журнал, 2018, т. 10, № 2, с. 3–12.

[4] Кучеренко В.В. Асимптотика решения системы $A(x, -ih\frac{\partial}{\partial x})$ при $h \to 0$ в случае характеристик переменной кратности — Известия АН СССР. Сер.матем, 1974, т. 38, № 3, с. 625–662.

[5] Елисеев А. Г., Сальникова Т. А. Построение решения задачи Коши в случае "слабой" точки поворота предельного оператора. — Математические методы и приложения. Труды двадцатых математических чтений РГСУ, 2011, с. 46–52.

[6] Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.

REGULARIZED ASYMPTOTICS OF SOLUTION A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM IN THE PRESENCE OF THE «WEAK» TURNING POINT AT THE LIMIT OPERATOR

Alexandr G. Eliseev, Pavel V. Kirichenko

National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

yeliseevag@mpei.ru, kirichenkopv@mpei.ru

Abstract. The article is devoted to the development of the regularization method of S. A. Lomov for singularly perturbed Cauchy problems in the case of violation of the stability conditions for the spectrum of the limit operator. In particular, the problem is considered in the presence of a "weak"turning point, in which the eigenvalues "stick together"at the initial instant of time. Problems with this kind of spectral features are well known to specialists in mathematical and theoretical physics, as well as in the theory of differential equations, but from the point of view of the regularization method they have not been previously considered. This work fills this gap. Based on the ideas of asymptotic integration of problems with spectral features of S. A. Lomov and A. G. Eliseev, it indicates how to introduce regularizing functions, describes in detail the algorithm of the regularization method in the case of a “weak” turning point, justifies this algorithm and an asymptotic solution of any order with respect to a small parameter is constructed.

Keywords: singularly perturbed Cauchy problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.