ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Анализ и синтез динамических MIMO систем на основе ленточных матриц специального вида

Микрин Е.А.[1], Рябченко В.Н.[2,3,*], Зубов Н.Е.[2,**], Лапин А.В.[2,***]

[1]ПАО РКК «Энергия» им. С.П. Королёва, Королёв, Московская область, Россия
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[3]АО «НТЦ ФСК ЕЭС», Москва, Россия

e-mail:
[*]Ryabchenko.VN@yandex.ru
[**]Nik.Zubov@gmail.com
[***]AlexeyPoeme@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача анализа и синтеза линейных управляемых динамических MIMO-систем, т.е. систем со многими входами и выходами, с помощью ленточных матриц специального вида. Фундаментальным основанием метода являются преобразования А.Н. Крылова (подпространства Крылова). Основными матричными преобразованиями, используемыми для получения решений, являются левые и правые делители нуля.

Для линейной полностью управляемой MIMO-системы на основе указанных преобразований сформированы ленточные матрицы специального вида, свойства которых однозначно определяют свойство полной управляемости. Кроме того, данные матрицы позволяют аналитически связать параметры управляемой MIMO-системы и коэффициенты её характеристического полинома. В основу получения этой формулы положена известная зависимость, связывающая матрицу управляемости MIMO-системы и сопровождающую (каноническую) форму Фробениуса для характеристического полинома. С использованием полученной формулы синтезирован регулятор с обратной связью, обеспечивающий замкнутой управлением MIMO-системе коэффициенты характеристического полинома, совпадающие с заданными коэффициентами. В упрощённом виде (для систем с одним входом) формула регулятора аналогична известным формулам Басса – Гура и Аккермана.

Получено условие параметризации множества регуляторов, которые удовлетворяют условиям задачи обеспечения заданного характеристического полинома MIMO-системы и порождаются левым делителем нуля ленточной матрицы специального вида.

Ключевые слова: линейная MIMO-система, управление по состоянию, характеристический полином, метод Крылова, сопровождающая форма, управляемость, кронекерово произведение, ленточная матрица специального вида, делители нуля, параметризация множества решений

1. Введение и постановка задачи

В современной теории управления для решения разнообразных задач анализа и синтеза линейных управляемых динамических MIMO-систем (*Multiple Inputs Multiple Outputs Systems*), т.е. систем со многими входами и выходами, широко используется *метод А.Н. Крылова*. К таким задачам относятся вычисление сбалансированной реализации передаточной матрицы MIMO-системы в пространстве состояний, редукция и декомпозиция модели этой системы в пространстве состояний, определение управляемых и наблюдаемых подпространств, стабилизация с помощью обратной связи по элементам состояния, синтез управления, обеспечивающего инвариантность системы к внешним возмущениям и т.д. [1] – [9].

Рассмотрим полностью управляемую линейную MIMO-систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – векторный вход, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Хорошо известно, что корни характеристического полинома (х.п.)

$$\det\, \lambda I_n - A \; = \lambda^n + \left(\lambda^{n-1} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \lambda \;\vdots\; 1 \right) \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline a_1 \\ \hdashline a_0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где I_n – единичная матрица порядка n, $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексное число, определяют устойчивость MIMO-системы (1).

В своем первоначальном виде метод Крылова предназначен для решения задачи нахождения коэффициентов х.п. матрицы (2) по значениям ее элементов. С алгебраической точки зрения эта задача имеет решение, если n векторов $A^{n-1}b, \ldots, A, b$ образуют полный базис в $\mathbb{R}^n$. Такой базис всегда существует (всегда найдется подходящий вектор b), если х.п. (2) совпадает с минимальным х.п.

Матрицы, удовлетворяющие приведенному ниже условию, получили название циклических матриц [10]. Заметим также, что линейные (циклические) подпространства, образованные векторами $A^{k-1}b, \ldots, A, \; b \; (k < n)$,

$$\operatorname{span}\left\{A^{k-1}b, \ldots, A, b\right\}, \quad k < n$$

получили название *подпространств Крылова* (*Krylov Subspaces*) [5], [11].

С позиций современной теории управления пара (A, b) с циклической матрицей A называется полностью управляемой и соответствует линейной SIMO-системе (*Single Input Multi Output System*), т.е. системе с одним входом и многими выходами. В этом случае матрица управляемости Калмана

$$\left[\, b \;\vdots\; Ab \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; A^{n-1}b \,\right] \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{3}$$

является квадратной и обратимой.

На основе (3) для SIMO-систем Бассом, Аккерманом, а также другими авторами [4], [5], [12] были предложены явные формулы, позволяющие по коэффициентам исходного х.п. (2) и заданного х.п.

$$\det\left(\lambda I_n - A + BK\right) = \lambda^n + \left[\, \lambda^{n-1} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \lambda \;\vdots\; 1 \,\right] \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline d_1 \\ \hdashline d_0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

вычислить регулятор в законе управления с обратной связью

$$u = -Kx\,. \tag{5}$$

Для MIMO-системы (1) матрица управляемости Калмана

$$\mathscr{C} = \left[\, B \;\vdots\; AB \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; A^{n-1}B \,\right] \in \mathbb{R}^{n\times rn} \tag{6}$$

является прямоугольной, что не позволяет напрямую воспользоваться методом Крылова для решения задачи вычисления коэффициентов х.п. и нахождения регулятора.

С другой стороны, известна формула [12], связывающая матрицу управляемости (6) MIMO-системы (1) и сопровождающую матрицу Фробениуса (матрицу A в канонической наблюдаемой форме [9]) для полинома (2).

Запишем сопровождающую (каноническую) форму Фробениуса

$$\mathscr{F} = \left(\begin{array}{c:c:c:c:c} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \hdashline 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \hdashline 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{array}\right), \tag{7}$$

в компактном виде

$$\mathcal{F} = \underline{E}_n - a e_n^{\mathrm{T}}.$$

Здесь

$$\underline{E}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad a = \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

e_n – единичный орт с единицей на n-м месте. Тогда имеет место равенство [12]

$$A\mathcal{C} = \mathcal{C}\ \mathcal{F} \otimes I_r\ , \tag{9}$$

$\otimes$ – символ операции кронекерова произведения матриц.

В данной работе решается следующая задача. На основе преобразований ленточных матриц управляемости требуется найти ленточную формулу, связывающую параметры управляемой динамической MIMO-системы и коэффициенты х.п. (2). Далее полученная формула используется для явного описания регулятора MIMO-системы, обеспечивающего замкнутой управлением (5) системе х.п. с коэффициентами, совпадающими с коэффициентами полинома (4).

2. Ленточная формула определения коэффициентов х.п. MIMO-системы

Рассмотрим представление матрицы управляемости (6) в следующем блочно-матричном виде [4], [5]:

$$\mathcal{C} = \begin{array}{c|c|c|c|c} I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \begin{pmatrix} I_n & -A & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & -A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}^{-1} I_n \otimes B$$

или в обобщенной форме

$$\mathcal{C} = \beta\Omega^{-1}\alpha\ . \tag{10}$$

В (10) фигурируют матрицы

$$\beta = \begin{array}{c|c|c|c|c} I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \in \mathbb{R}^{n\times n^2}, \tag{11}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} I_n & -A & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & -A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} = I_n \otimes I_n - \overline{E}_n \otimes A, \tag{12}$$

$$\alpha=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c} B & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & B & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & B & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & B \end{array}\right)=I_n\otimes B, \tag{13}$$

$$\bar{E}_n=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\in\mathbb{R}^{n\times n}.$$

Воспользовавшись соотношениями (10) – (13), перепишем уравнение (9) в компактном виде

$$A\beta\,\Omega^{-1}\alpha=\beta\,\Omega^{-1}\alpha\;\; F\otimes I_r \;\;,$$

или эквивалентно

$$A\beta\;\vdots\;-\beta\;\left(\begin{array}{c:c} \Omega & 0 \\ \hdashline 0 & \Omega \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c} \alpha \\ \hdashline \alpha\;\; F\otimes I_r \end{array}\right)=0. \tag{14}$$

Введем в рассмотрение понятие левых и правых матричных делителей нуля [5] (аннуляторов), тогда уравнение (14) можно переписать в виде, аналогичном тому, как это сделано в [5], [12],

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ \hdashline \alpha\;\; F\otimes I_r \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} \Omega & 0 \\ \hdashline 0 & \Omega \end{array}\right)\;A\beta\;\vdots\;-\beta\;{}_R^{\perp}\left(\begin{array}{c} \mu_1 \\ \hdashline \mu_2 \end{array}\right). \tag{15}$$

В формуле (15) матрица $A\beta\;\vdots\;-\beta\;{}_R^{\perp}$ – правый делитель нуля максимального ранга матрицы $A\beta\;\vdots\;-\beta$ [5], т.е.

$$A\beta\;\vdots\;-\beta\quad A\beta\;\vdots\;-\beta\;{}_R^{\perp}=0\in\mathbb{R}^{n\times s},\quad s=n^2-\operatorname{rank}\;A\beta\;\vdots\;-\beta\;.$$

Используя (11), правый делитель нуля $A\beta\;\vdots\;-\beta\;{}_R^{\perp}$ можно определить в явном виде [3], [5]. Не трудно показать, что выполняется тождество

$$A\beta\;\vdots\;-\beta\;{}_R^{\perp}=\left(\begin{array}{c:c:c} \beta^{+}A_R^{\perp} & \beta^{+} & \beta_R^{\perp} \\ \hdashline 0 & \beta^{+}A & 0 \end{array}\right), \tag{16}$$

где β^{+} – псевдообратная к β, $A_R^{\perp}$ – правый делитель нуля матрицы A, $\beta_R^{\perp}$ – правый делитель нуля матрицы (11).

Из вида матрицы (11) следует, что $\beta^{+}=\beta^{\mathrm{T}}$. Тогда вместо соотношения (16) можно записать

$$A\beta \;\vdots\; -\beta_{R}^{\perp} = \left(\begin{array}{c:c:c} \beta^{\mathrm{T}} A_R^{\perp} & \beta^{\mathrm{T}} & \beta_R^{\perp} \\ \hdashline 0 & \beta^{\mathrm{T}} A & 0 \end{array}\right), \tag{17}$$

где

$$\beta_R^{\perp} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline I_n & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline I_{n-1} \otimes I_n \end{array}\right).$$

Проверяя формулу (16), получим

$$A\beta \;\vdots\; -\beta \left(\begin{array}{c:c:c} \beta^{\mathrm{T}} A_R^{\perp} & \beta^{\mathrm{T}} & \beta_R^{\perp} \\ \hdashline 0 & \beta^{\mathrm{T}} A & 0 \end{array}\right) = A\beta\beta^{\mathrm{T}} A_R^{\perp} \;\vdots\; A\beta\beta^{\mathrm{T}} - \beta\beta^{\mathrm{T}} A \;\vdots\; -\beta\beta_R^{\perp} =$$

$$= AA_R^{\perp} \;\vdots\; A - A \;\vdots\; 0 = 0 \;\vdots\; 0 \;\vdots\; 0 .$$

В случае если матрица A – обратимая, тогда $A_R^{\perp} = 0$ [3], [5] и формула (16) преобразуется к относительно простому виду

$$A\beta \;\vdots\; -\beta_{R}^{\perp} = \left(\begin{array}{c:c} \beta^{\mathrm{T}} & \beta_R^{\perp} \\ \hdashline \beta^{\mathrm{T}} A & 0 \end{array}\right).$$

Действительно, проверяя, получаем

$$A\beta \;\vdots\; -\beta \left(\begin{array}{c:c} \beta^{\mathrm{T}} & \beta_R^{\perp} \\ \hdashline \beta^{\mathrm{T}} A & 0 \end{array}\right) = A\beta\beta^{\mathrm{T}} - \beta\beta^{\mathrm{T}} A \;\vdots\; A\beta\beta_R^{\perp} = 0 \;\vdots\; 0 .$$

Подставляя далее (17) в (15), получим соотношение

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ \hdashline \alpha\, \mathcal{F} \otimes I_r \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Omega & 0 \\ \hline 0 & \Omega \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c:c} \beta^{\mathrm{T}} A_R^{\perp} & \beta^{\mathrm{T}} & \beta_R^{\perp} \\ \hdashline 0 & \beta^{\mathrm{T}} A & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mu_1 \\ \hdashline \mu_2 \\ \hdashline \mu_3 \end{array}\right), \tag{18}$$

которое будем рассматривать как уравнение относительно матрицы Фробениуса $\mathcal{F}$ (7).

Выполним для уравнения (18) следующее преобразование (слева):

$$\left(I_2 \otimes \left(\begin{array}{c} \alpha_L^{\perp} \\ \hdashline \alpha^{+} \end{array}\right)\right) \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \hdashline \alpha\, \mathcal{F} \otimes I_r \end{array}\right) = \left(I_2 \otimes \left(\begin{array}{c} \alpha_L^{\perp} \\ \hdashline \alpha^{+} \end{array}\right)\right) \left(\begin{array}{c:c} \Omega & 0 \\ \hdashline 0 & \Omega \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c:c} \beta^{\mathrm{T}} A_R^{\perp} & \beta^{\mathrm{T}} & \beta_R^{\perp} \\ \hdashline 0 & \beta^{\mathrm{T}} A & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mu_1 \\ \hdashline \mu_2 \\ \hdashline \mu_3 \end{array}\right), \tag{19}$$

где

$$I_2 \otimes \begin{pmatrix} \alpha_L^\perp \\ \hdashline \alpha^+ \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_L^\perp & 0 \\ \hdashline \alpha^+ & 0 \\ \hline 0 & \alpha_L^\perp \\ \hdashline 0 & \alpha^+ \end{array}\right) -$$

невырожденная матрица, ненулевые блоки которой удовлетворяют тождеству

$$\begin{pmatrix} \alpha_L^\perp \\ \hdashline \alpha^+ \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline I_{\operatorname{rank}\alpha} \end{pmatrix}.$$

Здесь α^+ – псевдообратная к α, $\alpha_L^\perp$ – левый делитель нуля матрицы (13) максимального ранга (определение левого делителя нуля симметрично определению правого делителя нуля [3], [5]).

На основе (19), получим два матричных уравнения

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline I_{\operatorname{rank}\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_L^\perp\Omega \\ \hdashline \alpha^+\Omega \end{pmatrix} \begin{array}{c:c:c} \beta^{\mathrm{T}} A_R^\perp & \beta^{\mathrm{T}} & \beta_R^\perp \end{array} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \hdashline \mu_2 \end{pmatrix} \begin{array}{c:c} I_n \otimes I_n & 0 \end{array} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \hdashline \mu_2 \\ \hdashline \mu_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline \mathcal{F} \otimes I_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_L^\perp\Omega \\ \hdashline \alpha^+\Omega \end{pmatrix} \begin{array}{c:c:c} 0 & \beta^{\mathrm{T}} A & 0 \end{array} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \hdashline \mu_2 \\ \hdashline \mu_3 \end{pmatrix},$$

которые перепишем в виде трех матричных соотношений

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_L^\perp\Omega & 0 \\ \hline 0 & \alpha_L^\perp\Omega \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c:c} \beta^{\mathrm{T}} A_R^\perp & \beta^{\mathrm{T}} & \beta_R^\perp \\ \hdashline 0 & \beta^{\mathrm{T}} A & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \hdashline \mu_2 \\ \hdashline \mu_3 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$I_{\operatorname{rank}\alpha} = \alpha^+\Omega \;\begin{array}{c:c:c} \beta^{\mathrm{T}} A_R^\perp & \beta^{\mathrm{T}} & \beta_R^\perp \end{array} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \hdashline \mu_2 \\ \hdashline \mu_3 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$\mathcal{F} \otimes I_r = \alpha^+\Omega \;\begin{array}{c:c:c} 0 & \beta^{\mathrm{T}} A & 0 \end{array} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \hdashline \mu_2 \\ \hdashline \mu_3 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Будем рассматривать уравнения (20), (21) как условия на выбор матрицы $\begin{array}{c:c:c} \mu_1^{\mathrm{T}} & \mu_2^{\mathrm{T}} & \mu_3^{\mathrm{T}} \end{array}^{\mathrm{T}}$, а уравнение (22) – как собственно решение, т.е. матрицу Фробениуса $\mathcal{F}$ (7).

Проанализируем (20). Отсюда следует, что справедливы равенства

$$\left(\begin{array}{c}\mu_1\\ \hdashline \mu_2\\ \hdashline \mu_3\end{array}\right)=\overline{\left(\begin{array}{c|c}\alpha_L^{\perp}\Omega & 0\\ \hline 0 & \alpha_L^{\perp}\Omega\end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c:c}\beta^{\mathrm{T}}A_R^{\perp} & \beta^{\mathrm{T}} & \beta_R^{\perp}\\ \hdashline 0 & \beta^{\mathrm{T}}A & 0\end{array}\right)}_R^{\perp}=$$

$$=\left(\begin{array}{c:c:c}\alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}}A_R^{\perp} & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}} & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta_R^{\perp}\\ \hdashline 0 & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}}A & 0\end{array}\right)_R^{\perp},$$

т.е. матрица $\left(\mu_1^{\mathrm{T}} \,\vdots\, \mu_2^{\mathrm{T}} \,\vdots\, \mu_3^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ является правым делителем максимального ранга матрицы

$$\left(\begin{array}{c:c:c}\alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}}A_R^{\perp} & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}} & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta_R^{\perp}\\ \hdashline 0 & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}}A & 0\end{array}\right),$$

которая к тому же должна удовлетворять дополнительному соотношению (21), т.е.

$$\alpha^{+}\Omega\left(\beta^{\mathrm{T}}A_R^{\perp} \,\vdots\, \beta^{\mathrm{T}} \,\vdots\, \beta_R^{\perp}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}\mu_1\\ \hdashline \mu_2\\ \hdashline \mu_3\end{array}\right)=I_{\operatorname{rank}\alpha}$$

или в раскрытом виде

$$\alpha^{+}\Omega\beta^{\mathrm{T}}A_R^{\perp}\mu_1+\alpha^{+}\Omega\beta^{\mathrm{T}}\mu_2+\beta_R^{\perp}\mu_3=I_{\operatorname{rank}\alpha}.$$

Будем считать, что это действительно так. Тогда имеет место формула

$$\begin{gathered}\mathcal{F}\otimes I_r=\alpha^{+}\Omega\left(0 \,\vdots\, \beta^{\mathrm{T}}A \,\vdots\, 0\right)\cdot\left(\begin{array}{c:c:c}\alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}}A_R^{\perp} & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}} & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta_R^{\perp}\\ \hdashline 0 & \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}}A & 0\end{array}\right)_R^{\perp}=\\ =\alpha^{+}\Omega\left(0 \,\vdots\, \beta^{\mathrm{T}}A \,\vdots\, 0\right)\left(\begin{array}{c}\mu_1\\ \hdashline \mu_2\\ \hdashline \mu_3\end{array}\right)=\alpha^{+}\Omega\mu_2.\end{gathered} \tag{23}$$

Подставляя в (23) ленточные матрицы [5], [12]

$$\alpha^{+}=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c}B^{+} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \hdashline 0 & B^{+} & \cdots & 0 & 0\\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & B^{+} & 0\\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & B^{+}\end{array}\right)=I_n\otimes B^{+},$$

$$\alpha_L^{\perp} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} B_L^{\perp} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & B_L^{\perp} & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & B_L^{\perp} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & B_L^{\perp} \end{array}\right) = I_n \otimes B_L^{\perp},$$

где

$$B_L^{\perp} B = 0, \quad \text{rank}\, B_L^{\perp} = n - r, \tag{24}$$

получим *ленточную формулу*, связывающую коэффициенты х.п. MIMO-системы с парой $(A,\ B)$ без явного участия матрицы управляемости (6), т.е.

$$\mathscr{F} \otimes I_r = \ I_n \otimes B^{+} \ \ \Omega\mu_2 . \tag{25}$$

В раскрытом виде согласно (7), (12) ленточная формула (25) выглядит следующим образом:

$$\underline{E}_n - ae_n^{\mathrm{T}} \ \otimes I_r = \ I_n \otimes B^{+} \ \ I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \ \ \mu_2 , \tag{26}$$

где

$$\left(\begin{array}{c} \mu_1 \\ \hline \mu_2 \\ \hline \mu_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \hline 0 & \Psi_{22} & 0 \end{array}\right)_R^{\perp}, \tag{27}$$

$$\Psi_{11} = \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}}A_R^{\perp} = \ I_n \otimes B_L^{\perp} \ \ I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \ \left(\begin{array}{c} A_R^{\perp} \\ \hline 0 \end{array}\right), \tag{28}$$

$$\Psi_{12} = \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}} = \ I_n \otimes B_L^{\perp} \ \ I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \ \left(\begin{array}{c} I_n \\ \hline 0 \end{array}\right), \tag{29}$$

$$\Psi_{13} = \alpha_L^{\perp}\Omega\beta_R^{\perp} = \ I_n \otimes B_L^{\perp} \ \ I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \ \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline I_{n-1} \otimes I_n \end{array}\right), \tag{30}$$

$$\Psi_{22} = \alpha_L^{\perp}\Omega\beta^{\mathrm{T}}A = \ I_n \otimes B_L^{\perp} \ \ I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \ \left(\begin{array}{c} A \\ \hline 0 \end{array}\right), \tag{31}$$

$$I_n \otimes B^{+} \ \ I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \ \left(\begin{array}{c|c|c} A_R^{\perp} & I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-1} \otimes I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \mu_1 \\ \hline \mu_2 \\ \hline \mu_3 \end{array}\right) = I_{\text{rank}\,\alpha} . \tag{32}$$

Выражение (32) следует рассматривать как *условие нормировки*.

В случае динамической системы с одним входом и многими выходами (SIMO-системы)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$

$r=1$ и формула (26) принимает упрощенный вид, эквивалентный известным формулам Басса – Гура и Аккермана [5]

$$\underline{E}_n - ae_n^{\mathrm{T}} = \; I_n \otimes b^{+} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \;\; \mu_2 .$$

Отсюда следует, что вектор коэффициентов х.п. a (8) определяется по следующей ленточной формуле (записанной в форме кронекерова произведения)

$$a = \quad I_n \otimes b^{+} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \;\; \mu_2 - \underline{E}_n \;\; e_n ,$$

или с учетом тождества $\underline{E}_n e_n = e_{n-1}$

$$a = \; I_n \otimes b^{+} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \;\; \mu_2 e_n - e_{n-1}. \tag{33}$$

Формула (33) эквивалентна ранее полученной в [5], [12] и имеющей следующий вид:

$$\left(\begin{array}{c} a_0 \\ \hdashline a_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline a_{n-1} \\ \hdashline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c:c:c:c} -b^{+}A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline b^{+} & -b^{+}A & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & b^{+} & -b^{+}A & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & b^{+} & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -b^{+}A \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & b^{+} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c:c:c:c} -b_L^{\perp}A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline b_L^{\perp} & -b_L^{\perp}A & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & b_L^{\perp} & -b_L^{\perp}A & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & b_L^{\perp} & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -b_L^{\perp}A \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & b_L^{\perp} \end{array}\right)_R^{\perp} . \tag{34}$$

3. Ленточная формула регулятора MIMO-системы

Выражение (26) применим для вывода явной формулы регулятора MIMO-системы, обеспечивающего замкнутой управлением (5) MIMO-системе коэффициенты, как у х.п. (4).

Очевидно, что для замкнутой системы можно записать

$$\underline{E}_n - de_n^{\mathrm{T}} \;\; \otimes I_r = \; I_n \otimes B^{+} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes (A - BK) \;\; \widehat{\mu}_2 , \tag{35}$$

где

$$d = \left(\begin{array}{c} d_{n-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline d_1 \\ \hdashline d_0 \end{array}\right).$$

а $\widehat{\mu}_2$ – некоторая подходящая матрица.

Будем считать, что матрица $A-BK$ асимптотически устойчивая и, следовательно, невырожденная. В этом случае правый делитель нуля $A_R^{\perp}=0$ и вместо соотношений (27) – (32) запишем: $\widehat{\Psi}_{11}=0$,

$$\left(\begin{array}{c} \widehat{\mu}_2 \\ \hdashline \widehat{\mu}_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \widehat{\Psi}_{12} & \widehat{\Psi}_{13} \\ \hdashline \widehat{\Psi}_{22} & 0 \end{array}\right)_R^{\perp} , \tag{36}$$

$$\widehat{\Psi}_{12} = I_n \otimes B_L^{\perp} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes (A - BK) \begin{pmatrix} I_n \\ \hdashline 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$\widehat{\Psi}_{13} = I_n \otimes B_L^{\perp} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes (A - BK) \begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline I_{n-1} \otimes I_n \end{pmatrix}, \tag{38}$$

$$\widehat{\Psi}_{22} = I_n \otimes B_L^{\perp} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes (A - BK) \begin{pmatrix} A - BK \\ \hdashline 0 \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$I_n \otimes B^{+} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes (A - BK) \left(\begin{array}{c:c} I_n & 0 \\ \hdashline 0 & I_{n-1} \otimes I_n \end{array}\right) \begin{pmatrix} \widehat{\mu}_2 \\ \hdashline \widehat{\mu}_3 \end{pmatrix} = I_{\mathrm{rank}\,\alpha}.$$

Не трудно заметить, что в силу условий (24), вместо формул (37) – (39) следует записать

$$\widehat{\Psi}_{12} = I_n \otimes B_L^{\perp} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \begin{pmatrix} I_n \\ \hdashline 0 \end{pmatrix} = \Psi_{12},$$

$$\widehat{\Psi}_{13} = I_n \otimes B_L^{\perp} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline I_{n-1} \otimes I_n \end{pmatrix} = \Psi_{13},$$

$$\widehat{\Psi}_{22} = I_n \otimes B_L^{\perp} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes A \begin{pmatrix} A \\ \hdashline 0 \end{pmatrix} = \Psi_{22},$$

где матрицы Ψ_{12}, Ψ_{13} и Ψ_{22} *инвариантны относительно действия обратной связи* (5). Отсюда следует, что матрицы (36) также инвариантны к обратной связи.

На основании выполненного анализа, вместо формулы (35) запишем

$$\underline{E}_n - de_n^{\mathrm{T}} \quad \otimes I_r = I_n \otimes B^{+} \quad I_n \otimes I_n - \bar{E}_n \otimes (A - BK) \quad \mu_2. \tag{40}$$

Вычтем соответствующие части выражений (26) и (40), в результате получим

$$a - d \quad e_n^{\mathrm{T}} \otimes I_r = I_n \otimes B^{+} \quad \bar{E}_n \otimes BK \quad \mu_2.$$

Отсюда следует цепочка утверждений

$$a - d \quad e_n^{\mathrm{T}} \otimes I_r = \bar{E}_n \otimes K \quad \mu_2 \to$$

$$\to \quad a - d \quad e_n^{\mathrm{T}} \otimes I_r \quad \mu_2^{+} = \bar{E}_n \otimes K. \tag{41}$$

Выражение (41), переписанное в виде

$$\bar{E}_n \otimes K = \quad a - d \quad e_n^{\mathrm{T}} \otimes I_r \quad \mu_2^{+}, \tag{42}$$

и есть искомая *явная формула регулятора для MIMO-системы,* обеспечивающего заданные коэффициенты х.п. (заданного х.п.).

Отметим, что множество регуляторов $\{K\}$, удовлетворяющих условиям задачи обеспечения заданного х.п. MIMO-системы (1), в данном случае порождается левым делителем нуля $\mu_2^{\perp L}$ матрицы μ_2. Другими словами, при любой невырожденной матрицы T подходящего размера оказывается справедливым тождество

$$a-d\ \ e_n^{\mathrm{T}}\otimes I_r = \ \bar{E}_n\otimes K + T\mu_2^{\perp L}\ \ \mu_2.$$

Если произведение $T\mu_2^{\perp L}$ наделить структурой кронекерова произведения матриц $\bar{E}_n\otimes K$, т.е. $\bar{E}_n\otimes f(T\mu_2^{\perp L})$, тогда вместо формулы (42) можно записать условие *параметризации* множества регуляторов, а именно,

$$\bar{E}_n\otimes\ K + f(T\mu_2^{\perp L})\ =\ \ a-d\ \ e_n^{\mathrm{T}}\otimes I_r\ \ \mu_2^{+}.$$

Любой элемент параметризованного таким образом множества обеспечивает MIMO-системе (1), замкнутой управлением (5), х.п. с заданными коэффициентами.

4. Заключение

В работе на основе преобразований ленточных матриц специального вида найдена аналитическая формула, также названная ленточной и связывающая параметры управляемой динамической MIMO-системы и коэффициенты характеристического полинома (2).

С использованием полученной ленточной формулы осуществлен синтез регулятора линейной MIMO-системы общего вида, обеспечивающий замкнутой управлением (5) системе характеристический полином с коэффициентами, совпадающими с коэффициентами полинома (4).

Таким образом, решена задача стабилизации линейной MIMO-системы методом, основанном на подпространствах Крылова и ленточных матрицах специального вида. Представленный подход расширяет возможности синтеза регуляторов по отношению к ранее опубликованным результатам [15] – [17].

Список литературы

[1] Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.

[2] Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985.

[3] Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004.

[4] Гаджиев М.Г., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Шаров Ю.В. Матричные методы анализа и управления переходными процессами в электроэнергетических системах. М.: Изд. дом МЭИ, 2019.

[5] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2016.

[6] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

[7] Уонем М. Линейные многомерные системы управления: геометрический подход. М.: Наука, 1980.

[8] Zhou K.M., and Doyle J.C., *Essentials of robust control*. NJ. Prentice Hall. 1998.

[9] Kailath T., *Linear Systems*. NJ. Prentice Hall. 1980.

[10] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

[11] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001.

[12] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Ленточная формула решения задачи А.Н. Крылова // АиТ, 2007. № 12. С. 53 – 69.

[13] Nordstrom K., and Norlander H., “On the Multi Input Pole Placement Control Problem,” // *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 5, pp. 4288 – 4293, 1998. DOI: 10.1109/CDC.1997.649511

[14] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Управление по выходу спектром дескрипторной динамической системы // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468, № 2. С. 134–136.

[15] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Стабилизация взаимосвязанных движений летательного аппарата в каналах тангаж-рысканье при отсутствии информации об угле скольжения // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 95–105

[16] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Управление по выходу продольным движением летательного аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 164–175.

[17] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Фомичёв А.В. Синтез законов управления боковым движением летательного аппарата при отсутствии информации об угле скольжения. Аналитическое решение // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 1. С. 61–70.

Analysis and synthesis of dynamic MIMO-system based on band matrices of special type

$\boxed{\text{Mikrin E.A.}^{1},}$ Ryabchenko V.N.[2,3,*], Zubov N.E.[2,**], Lapin A.V.[2,***]

[1]PSC Korolev RSC «Energia», Korolev, Moscow region, Россия
[2]Bauman MSTU, Moscow, Russia
[3]JSC «RDC at FGC of UES», Moscow, Russia

e-mail:
[*]Ryabchenko.VN@yandex.ru
[**]Nik.Zubov@gmail.com
[***]AlexeyPoeme@yandex.ru

Abstract. The problem of analysis and synthesis of linear controllable dynamic MIMO-systems (systems with multiple input and multiple output) using band matrices of special type is considered. The fundamental basis of suggesting approach is A.N. Krylov transformations (Krylov subspaces). The main matrix transformations applying for getting solutions are left and right zero divisors.

Band matrices of special type with properties that uniquely define the property of full controllability are formed basing on mentioned transformations for linear fully controllable MIMO-system. Besides, these matrices allow analytic connecting parameters of controllable MIMO-system and coefficients of its characteristic polynomial. Obtaining the formula of this connection is founded on the well-known relationship between MIMO-system controllability matrix and the companion (canonical) Frobenius form for its characteristic polynomial. Using the obtained formula a controller is synthesized with feedback providing coefficients of characteristic polynomial of the closed-loop controlled MIMO-system matching the assigned coefficients. In simplified form (for single input systems) the formula of controller is similar to the well-known Bass – Gura and Ackermann formulas.

The condition is obtained for parameterizing the set of controllers that provide the assigned characteristic polynomial of closed-loop MIMO-system and that are generated by left zero divisor of a band matrix of special type.

Keywords: linear MIMO-system, control by state, characteristic polynomial, Krylov method, companion form, controllability, Kronecker product, band matrix of special type, zero divisors, parameterization of set of solutions