ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Регуляризованное решение сингулярно возмущенной задачи Коши при наличии иррациональной «простой» точки поворота

Елисеев А.Г.

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

yeliseevag@mpei.ru

Аннотация. На основе метода регуляризации С. А. Ломова построено асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для случая нарушения условий устойчивости спектра предельного оператора. В частности, рассматривается проблема с простой точкой поворота, когда одно собственное значение в начальный момент времени имеет ноль произвольного иррационального порядка (предельный оператор дискретно необратим). Данная работа является развитием идей, описанных в работах С. А. Ломова и А. Г. Елисеева. Иррациональная точка поворота и возникающие проблемы в построении асимптотики решения задачи Коши ранее не рассматривались с точки зрения метода регуляризации. В настоящей работе на основе разработанной автором теории нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач разработан и обоснован алгоритм метода регуляризации и построено асимптотическое решение любого порядка по малому параметру.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача Коши, асимптотическое решение, метод регуляризации, точка поворота.

Введение.

В данной работе методом регуляризации С.А.Ломова [1] строится асимптотическое решение задачи Коши в случае иррациональной «простой» точки поворота. Метод регуляризации позволяет построить равномерное на всем отрезке $[0, T]$ асимптотическое решение, а при дополнительных условиях на параметры сингулярно возмущенной задачи и ее правую часть точное решение. Сингулярно возмущенные задачи Коши с особенностями спектра для интегро-дифференциальных уравнений были рассмотрены в работах В.Ф.Сафонова и А.А.Бободжанова [2] Идея данной работы восходит к работе [3], в которой разработан метод регуляризации для решения сингулярно возмущенной задачи Коши в случае «простой» точки поворота предельного оператора с натуральным показателем. На рациональную точку поворота метод регуляризации развит в работах [4, 5]. Дробная точка поворота порядка 1/2 рассматривалась методом пограничных функций в работе [6].Следует отметить, что термин «простая» точка поворота был предложен автором метода регуляризации С.А. Ломовым при написании статьи [2].

Поясним термин «простая» точка поворота. Пусть дана задача Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon u' = A(t)u + h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0 \end{cases} \tag{1}$$

и выполнены условия:

1) $h(t) \in C^\infty([0, T], R^n)$;

2) $A(t) \in C^\infty([0, T], L(R^n, R^n))$;

3) спектр оператора $A(t)$ удовлетворяет условиям:

а) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t) \quad \forall i \neq j,\ i, j = \overline{1, n}$;

б) $\lambda_i(t) \neq 0,\ i = \overline{2, n}$;

с) условие «простой» точки поворота с натуральным показателем: $\lambda_1(t)$ имеет нуль k-порядка, т.е. $\forall t \in [0, T]\ \lambda_1(t) = t^k a(t)$, где $a(t) \neq 0$.

1. Формализм метода регуляризации.

Точка $\varepsilon = 0$ для задачи (1) является особой в том смысле, что классические теоремы существования решения задачи Коши не имеют места. Поэтому в решении этой задачи возникают существенно особые сингулярности. При выполнении условия стабильности для спектра $A(t)$ существенно особые сингулярности описываются с помощью экспонент вида:

$$e^{\varphi_i(t)/\varepsilon}, \quad \varphi_i(t) = \int\limits_0^t \lambda_i(s)ds, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\varphi_i(t)$ — гладкая (в общем случае комплексная) функция действительного переменного t. Для решения линейных однородных уравнений такие сингулярности были описаны ещё Луивиллем [7].

Если же условия стабильности нарушены хотя бы для одной точки спектра оператора $A(t)$ (условие 4)), то кроме экспоненциально существенно особых сингулярностей в решении неоднородного уравнения возникают еще и сингулярности вида:

$$\sigma_i = e^{\frac{-\varphi_1(t)}{\varepsilon}} \int\limits_0^t e^{\frac{\varphi_1(s)}{\varepsilon}} s^i ds, \quad i = \overline{0, k-1},$$

которые при $\varepsilon \to 0$ имеют степенной характер убывания при соответствующих ограничениях на $\lambda_1(t)$, при этом предполагается, что остальные точки спектра не обращаются в нуль при $t = 0$ (условие 3-c)).

Сингулярно возмущенные задачи возникают обычно в случаях, когда область определения исходного оператора, зависящего от ε при $\varepsilon \neq 0$, не совпадает с областью определения предельного оператора при $\varepsilon = 0$. При изучении задач с «простой» точкой поворота возникают дополнительные условия, когда область значений исходного оператора не совпадает с областью значений предельного оператора.

Для того, чтобы выявить особенности построения решения в случае иррациональной точки поворота, и не усложнять изложение материала дополнительными вычислениями при наличии стабильной части спектра, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon u' + t^\beta u = h(t), \\ u(0, \varepsilon) = u^0, \end{cases} \tag{2}$$

и выполнены условия:

1) $h(t) \in C^\infty([0, T], R)$;

2) $\beta > 0$ - иррациональное число.

В данной задаче на структуру решения (2) сильно влияет правая часть уравнения (так как она не принадлежит области значений предельного оператора).

Иррациональная точка поворота предъявляет повышенные требования к правой части. Уточним условия на правую часть $h(t)$.

Рассмотрим различные случаи $h(t)$

1) $h(t)$ разлагается в обобщенный ряд Тейлора- Маклорена.

$$h(t) = h(t^{\beta+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(k)}h(0)}{k!} \frac{t^{(\beta+1)k}}{(\beta+1)^k} \tag{3}$$

Здесь оператор дифференцирования имеет вид $D(t) = \frac{1}{t^\beta}\frac{d}{dt}$, являющимся левым обратным к интегральному оператору $\int\limits_0^t s^\beta \cdot ds$ В этом случае сингулярности описываются функциями

$$e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}}, \quad \sigma(t,\varepsilon) = e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} \int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}} ds,$$

где $\varphi(t) = t^{\beta+1}/(\beta+1)$.

Согласно методу регуляризации в случае «простой» точки поворота решение ищется в виде:

$$u(t,\varepsilon) = e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} x(t,\varepsilon) + y(t,\varepsilon)\sigma(t,\varepsilon) + z(t,\varepsilon), \tag{4}$$

где $x(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$, $z(t,\varepsilon)$ — гладкие по t функции, степенным образом зависящие от ε.

Подставляя (4) в задачу (2) и выделяя слагаемые при одинаковых сингулярностях, получим задачу:

$$\begin{cases} (x(t,\varepsilon))' = 0, \\ (y(t,\varepsilon))' = 0, \\ t^\beta z(\tau,\varepsilon) = h(t) - \varepsilon y(t,\varepsilon) - \varepsilon z'(t,\varepsilon), \\ x(0,\varepsilon) + z(0,\varepsilon) = u^0. \end{cases} \tag{5}$$

Функция $y(t,\varepsilon)$ не участвует в начальном условии системы (5), так как $\sigma(0,\varepsilon) = 0$.

Задача (5) является регулярной по степеням ε, поэтому, разлагая функции x, y, z в ряды по степеням ε, получим:

$$\begin{cases} x(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t), \\ y(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t), \\ z(t,\varepsilon) = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t) \end{cases} \tag{6}$$

и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим серию итерационных задач:

$$\begin{cases} x_k'(t) = 0, \\ (y_k(t))' = 0, \\ t^\beta z_k(t) = -z_{k-1}'(t) - y_{k-1}(t) + \delta_0^k h(t), \\ x_k(0) + z_k(0) = \delta_0^k u^0, \quad k = \overline{-1, \infty}. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь δ_0^k- символ Кронекера. Отрицательная степень по ε возникает из-за того, что $h(t)$ не принадлежит области значений предельного оператора.

Для решения итерационных задач (7) сформулируем теорему о точечной разрешимости уравнения

$$t^\beta z(t) = h(t),$$

Теорема 1 *Пусть дано уравнение*

$$t^\beta z(t) = h(t) \tag{8}$$

и выполнены условия 1), 2) задачи (2)*,и условие* (3)*. Тогда уравнение* (8) *разрешимо в классе гладких функций тогда и только тогда, когда*

$$h(0) = 0.$$

Доказательство.
Необходимость. Так как уравнение разрешимо, то с необходимостью $h(0) = 0$
Достаточность. Если $h(0) = 0$*, то из* (3) *следует,что* $h(t) = t^{\beta+1} h_0(t^{\beta+1})$, $h_0(0) \neq 0$. *Уравнение* (8) *разрешимо. Решение (8) при выполнении условий теоремы запишется в виде* $z(t) = t h_0(t^{\beta+1})$

Замечание. При решении итерационных задач при определении частного решения $z_k(t)$ приходится действовать оператор дифференцирования на частное решение $z_{k-1}(t)$, которое будет иметь вид $t h_0(t^{\beta+1})$

$$\frac{d}{dt} t h_0(t^{\beta+1}) = h_1(t^{\beta+1}).$$

Таким образом, дифференцирование не выводит из класса функций, удовлетворяющих условию (3).

Рассмотрим систему (7) при $k = -1$:

$$\begin{cases} x'_{-1}(t) = 0, \\ (y_{-1}(t)' = 0, \\ t^{\beta} z_{-1} = 0, \\ x_{-1}(0) + z_{-1}(0) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Решение системы (9) запишется в виде:

$$\begin{cases} x_{-1}(t) = x_{-1}(0) = 0, \\ y_{-1}(t) = y_{-1}(0), \\ z_{-1}(t) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

На данном итерационном шаге $(k = -1)$ $y_{-1}(0)$ — произвольное число, которое определяется из условия точечной разрешимости при $k = 0$:

$$\begin{cases} x'_0(t) = 0, \\ (y_0(t))' = 0, \\ t^{\beta} z_0(t) = -y_{-1}(0) + h(t^{\beta+1}), \\ x_0(0) + z_0(0) = u^0. \end{cases} \tag{11}$$

Решение задачи (11) запишется как $x_0(t) = x_0(0)$,$y_0(t) = y_0(0)$, которые определяются из условия разрешимости уравнения

$$t^{\beta} z_0(t) = h(t^{\beta+1}) - y_{-1}(0) \tag{12}$$

и начальных условий.

На основании теоремы разрешимости следует, что $y_{-1}(0) = h(0)$. Решение $z_0(t)$ запишется в виде:

$$z_0(t) = t h_0(t^{\beta+1}). \tag{13}$$

$x_0(0)$ определяется из начальных условий $x_0(0)+z_0(0) = u^0$. Так как $z_0(0) = 0$, то $x_0(0) = u^0$. Начальное условие $y_0(0)$ на нулевом итерационном шаге не определяется.

Таким образом, решение на итерационном шаге -1 определено и имеет вид:

$$u_{-1}(t, \varepsilon) = h(0)\sigma(t, \varepsilon).$$

Чтобы определить $y_0(t)$,рассмотрим итерационную систему на шаге $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 0, \\ (y_1(t))' = 0, \\ t^\beta z_1(t) = -z_0'(t) - y_0(0), \\ x_1(0) + z_1(0) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Рассмотрим уравнение относительно $z_1(t)$. Согласно замечанию $z_0'(t)$ представимо в виде $z_0'(t) = h_1(t^{\beta+1})$. Отсюда $t^\beta z_1(t) = -h_1(t^{\beta+1}) - y_0(0)$.

На основании теоремы разрешимости имеем: $y_0(0) = -h_1(0)$ и тогда $z_1(t) = th_2(t^{\beta+1})$, а из начальных условий $x_0(0) = 0$ так как $z_1(0) = 0$.

Следовательно, на нулевом итерационном шаге полностью находится главный член асимптотики:

$$u_{g.m}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} h(0)\sigma(t,\varepsilon) + u^0 e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}}. \tag{15}$$

Аналогично можно найти любой член асимптотического решения. Несложно понять, что формальное асимптотическое решение задачи (1) запишется в виде

$$u(t,\varepsilon) = u^0 e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} + \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \varepsilon^k h_k(0)\sigma(t,\varepsilon) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k t h_{k+1}(t^{\beta+1}) \tag{16}$$

Здесь $h_{-1}(0) = h(0)$.

Теорема 2 *Пусть задана задача (2) и выполнены условия 1),2)и условие (3). Тогда верна оценка*

$$\left\| u(t,\varepsilon) - \sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^k u_k(t,\varepsilon) \right\| \le C\varepsilon^{N+1}, \forall t \epsilon [0,T].$$

Здесь $u_k(t,\varepsilon) = u^0 e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} \delta_k^0 + (-1)^{(k+1)} h_{k+1}(0)\sigma(t,\varepsilon) + th_{k+1}(t^{\beta+1})$

Теорема 3 *Пусть выполнены условия теоремы 8 и дополнительные условия точечной разрешимости $h(0) = 0$, Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(t,\varepsilon) = u_0(t), \forall t \epsilon [\delta, T], \delta > 0.$$

где $u_0(t) = th_0(t^{\beta+1}), h_0(0) \neq 0$.

2) $h(t)$ разлагается в обобщенный ряд Тейлора-Маклорена.

$$h(t) = h(t^{\frac{\beta+1}{m}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(k)}h(0)}{k!} \frac{t^{\frac{k(\beta+1)}{m}}}{(\beta+1)^k} \tag{17}$$

Основные сингулярности данной задачи (2) имеют вид:

$$e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}}; \;\; \sigma_i(t,\varepsilon) = e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} \int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}} s^{\frac{i(\beta+1)}{m}} ds, \;\; i = \overline{0, m-1}.$$

где $\varphi(t) = t^{\beta+1}/(\beta+1)$.

Согласно методу регуляризации в случае «простой» точки поворота решение ищется в виде:

$$u(t,\varepsilon) = e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} x(t,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{m-1} y^i(t,\varepsilon)\sigma_i(t,\varepsilon) + z(t,\varepsilon). \tag{18}$$

где $x(t,\varepsilon)$, $y^i(t,\varepsilon)$, $z(t,\varepsilon)$, $i = \overline{0, m-1}$ — гладкие по t функции, степенным образом зависящие от ε.

Подставляя (18) в задачу (2) и выделяя слагаемые при одинаковых сингулярностях, получим задачу:

$$\begin{cases} (x(t,\varepsilon))' = 0, \\ (y^i(t,\varepsilon))' = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ t^\beta z(t,\varepsilon) = -\varepsilon z'(t,\varepsilon) - \varepsilon \left[y^0(t,\varepsilon) + t^{\frac{\beta+1}{m}} y^1(t,\varepsilon) + \ldots + t^{\frac{(m-1)(\beta+1)}{m}} y^{m-1}(t,\varepsilon) \right] + h(t), \\ x(0,\varepsilon) + z(0,\varepsilon) = u^0. \end{cases} \tag{19}$$

Функции $y^i(t,\varepsilon)$ не участвуют в начальном условии системы (19), так как $\sigma_i(0,\varepsilon) = 0$.

Задача (19) является регулярной по степеням ε, поэтому, разлагая функции $x(t,\epsilon)$, $y^i(t,\epsilon)$, $z(t,\epsilon)$ в ряды по степеням ε

$$\begin{cases} x(t) = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t), \\ y^i(t) = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k y^i_k(t), \quad i = \overline{0, m-1}, \\ z(t) = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t) \end{cases} \tag{20}$$

и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим серию итерационных задач:

$$\begin{cases} x_k'(t) = 0, \\ (y_k^i(t))' = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \\ t^\beta z_k(t) = -z_{k-1}'(t) - \sum\limits_{i=0}^{m-1} t^{\frac{i(\beta+1)}{m}} y_{k-1}^i(0) + \delta_0^k h(t), \\ x_k(0) + z_k(0) = \delta_0^k u^0, \quad k = \overline{-1, \infty}. \end{cases} \tag{21}$$

Отрицательная степень по ε возникает из-за того, что $h(t)$ не принадлежит области значений предельного оператора.

Для решения итерационных задач (21) сформулируем теорему о точечной разрешимости уравнения

$$t^\beta z(t) = h(t^{\frac{(\beta+1)}{m}}),$$

Теорема 4 *Пусть дано уравнение*

$$t^\beta z(t) = h(t^{\frac{(\beta+1)}{m}}), \tag{22}$$

и выполнены условия 1) и 2) задачи (2) и условие (17). Тогда уравнение (22) разрешимо в классе гладких функций тогда и только тогда, когда

$$D^{(k)} h(0) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}.$$

Доказательство.
Необходимость. Так как уравнение разрешимо, то разложив $h(t^{\frac{(\beta+1)}{m}})$ в обобщенный ряд Маклорена с необходимостью получим $D^{(k)} h(0) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}$.
Достаточность. Если $D^{(k)} h(0) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}$, то уравнение очевидно (22) разрешимо. Решение (22) при выполнении условий теоремы запишется в виде $z(t) = th_0(t^{\frac{(\beta+1)}{m}})$

Замечание. При решении итерационных задач при определении частного решения $z(t)$ приходится дифференцировать выражение $z(t) = th(t^{\frac{(\beta+1)}{m}})$. Проведем дифференцирование $\dot{z}(t) = h(t^{\frac{(\beta+1)}{m}}) + \frac{(\beta+1)}{m} t^{\frac{(\beta+1)}{m}} \dot{h}(t^{\frac{(\beta+1)}{m}}) = h_0(t^{\frac{(\beta+1)}{m}})$ Таким образом, дифференцирование не выводит из класса функций, удовлетворяющих условию (17).

Рассмотрим систему (21) при $k=-1$:

$$\begin{cases} x'_{-1}(t)=0, \\ (y_{-1}(t)'=0, \\ t^{\beta}z_{-1}=0, \\ x_{-1}(0)+z_{-1}(0)=0. \end{cases} \tag{23}$$

Решение системы (23) запишется в виде:

$$\begin{cases} x_{-1}(t)=x_{-1}(0)=0, \\ y^i_{-1}(t)=y^i_{-1}(0), \quad i=\overline{0,m-1}, \\ z_{-1}(t)=0. \end{cases} \tag{24}$$

На данном итерационном шаге ($k=-1$) $y_{-1}(0)$ - произвольные числа, которые определяются из условия точечной разрешимости при $k=0$:

$$\begin{cases} x'_0(t)=0, \\ y^i_0(t)=y^i_0(0), \quad i=\overline{0,m-1}, \\ t^{\beta}z_0(t)=-\sum\limits_{i=0}^{m-1} t^{\frac{i(\beta+1)}{m}}y^i_{-1}(0)+h(t^{\frac{(\beta+1)}{m}}), \\ x_0(0)+z_0(0)=u^0. \end{cases} \tag{25}$$

На основании теоремы разрешимости следует, что $y^0_{-1}(0)=h(0), y^i_{-1}(0)=\frac{D^{(i)}h(0)}{i!(\beta+1)^i}, i=\overline{1,m-1}$.

Решение $z_0(t)$ запишется в виде:

$$z_0(t)=\frac{h(t^{\frac{(\beta+1)}{m}})-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{D^{(i)}h(0)}{i!(\beta+1)^i}t^{\frac{i(\beta+1)}{m}}}{t^{\beta}}=th_0(t^{\frac{(\beta+1)}{m}}). \tag{26}$$

$x_0(0)$ определяется из начальных условий $x_0(0)+z_0(0)=u^0$.
Так как $z_0(0)=0$, то $x_0(0)=u^0$. Начальное условие $y_0(0)$ на нулевом итерационном шаге не определяется.

Таким образом, решение на -1 итерационном шаге определено и имеет вид:

$$u_{-1}(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{D^{(i)}h(0)}{i!(\beta+1)^i}\sigma_i(t,\varepsilon).$$

Чтобы определить $y^i_0(t)$, рассмотрим итерационную систему на шаге $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 0, \\ (y_1^i(t))' = 0, \\ t^\beta z_1(t) = -z_0'(t) - \sum_{i=0}^{m-1} t^{\frac{i(\beta+1)}{m}} y_0^i(0), \\ x_1(0) + z_1(0) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Рассмотрим уравнение относительно $z_1(t)$. Согласно замечанию $z_0'(t)$ представимо в виде $z_0'(t) = h_1(t^{\frac{(\beta+1)}{m}})$. Отсюда $t^\beta z_1(t) = -h_1(t^{\frac{(\beta+1)}{m}}) - \sum_{i=0}^{m-1} t^{\frac{i(\beta+1)}{m}} y_0^i(0)$.

На основании теоремы разрешимости имеем: $y_0^0(0) = h_1(0), y_0^i(0) = -\frac{D^{(i)}h_1(0)}{i!(\beta+1)^i}, i = \overline{1, m-1}$ и тогда $z_1(t) = th_2(t^{\frac{(\beta+1)}{m}})$ Из начальных условий $x_1(0) = 0$ так как $z_1(0) = 0$.

Следовательно, на нулевом итерационном шаге полностью находится главный член асимптотики:

$u_{g.m} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{D^{(i)}h(0)}{i!(\beta+1)^i} \sigma_i(t, \varepsilon) + u^0 e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{D^{(i)}h_1(0)}{i!(\beta+1)^i} \sigma_i(t, \varepsilon) + th_0(t^{\frac{(\beta+1)}{m}})$

Аналогично можно найти любой член асимптотического решения. Несложно понять, что формальное асимптотическое решение задачи (2) запишется в виде

$$u(t, \varepsilon) = u^0 e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} + \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \varepsilon^k \sum_{i=0}^{m-1} \frac{D^{(i)}h_k(0)}{i!(\beta+1)^i} \sigma_i(t, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k th_{k+1}(t^{\frac{(\beta+1)}{m}}) \tag{28}$$

Здесь $D^{(i)}h_{-1}(0) = D^{(i)}h(0)$

Теорема 5 *Пусть задана задача (2) и выполнены условия 1),2)и условие (17). Тогда верна оценка*

$$\left\| u(t, \varepsilon) - \sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon) \right\| \le C\varepsilon^{N+1}, \forall t \epsilon [0, T].$$

Здесь $u_k(t, \varepsilon) = u^0 e^{-\varphi(t)/\varepsilon} \delta_k^0 + (-1)^{(k+1)} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{D^{(i)}h_k(0)}{i!(\beta+1)^i} \sigma_i(t, \varepsilon) + th_{k+1}(t^{\beta+1})$

Теорема 6 *Пусть выполнены условия 1) и 2) задачи (2), условие (17) и дополнительные условия точечной разрешимости* $D^{(i)}h(0) = 0, i = \overline{0, m-1}$, *Тогда верна теорема о предельном переходе*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(t,\varepsilon) = u_0(t), t \in [\delta, T], \text{ где } \delta > 0.$$

где $u_0(t) = th_0(t^{\frac{(\beta+1)}{m}}), h_0(0) \neq 0.$

Теорема 7 *Пусть выполнены условия 1) и 2) задачи (2), условие (17) и дополнительные условия точечной разрешимости* $D^{(i)}h(0) = 0, i = \overline{0, m-1}$, *Тогда теорема о предельном переходе верна в слабом смысле*

$$\forall \phi(t) \in C[0,T] \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T u(t,\varepsilon)\phi(t)dt = \int_0^T u_0(t)\phi(t)dt$$

где $u_0(t) = th_0(t^{\frac{(\beta+1)}{m}}), h_0(0) \neq 0.$

3) $h(t)$ **гладкая функция, которая разлагается в обычный ряд Тейлора-Маклорена.**

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} t^k \tag{29}$$

Так как функция $h(t)$ не лежит в образе оператора $\varepsilon\frac{d}{dt} + t^\beta$, то спецфункций, описывающих сингулярности задачи, будет бесконечное число. Для простоты изложения будем рассматривать случай $0 < \beta < 1$. Для описания сингулярностей задачи Коши (1) в этом случае введем следующие операторы $\{\beta\}_n = \{\beta + \{\beta + ...\{\beta\}\}..\}, [\beta]_n = [\beta + \{\beta + ...\{\beta\}..\}]$.
Здесь $\{\quad\}$ -означает дробную часть числа, $[\quad]$ - целую часть числа. По определению $\{\beta\}_0 = 0$.

Основные сингулярности данной задачи(2) имеют вид:

$$e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}}, \quad \sigma_{i,0}(t,\varepsilon) = e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} \int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}} s^{-\{\beta\}_i} ds, \sigma_{i,1}(t,\varepsilon) = e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} \int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}} s^{1-\{\beta\}_i} ds,$$
$$i = \overline{0,\infty}$$

где $\varphi(t) = t^{\beta+1}/(\beta+1)$. По определению положим $\sigma_{0,1}(t,\varepsilon) \equiv 0$.

Согласно методу регуляризации в случае «простой» точки поворота решение ищется в виде:

$$u(t,\varepsilon) = e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} x(t,\varepsilon) + \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=0}^{\infty} y^{i,j}(t,\varepsilon)\sigma_{i,j}(t,\varepsilon) + z(t,\varepsilon). \tag{30}$$

где $x(t,\varepsilon)$, $y^{i,j}(t,\varepsilon)$, $z(t,\varepsilon)$, $i = \overline{0,\infty}$ — гладкие по t функции, степенным образом зависящие от ε.

Задача (2) в классе функций (29) является регулярной по степеням ε, поэтому, разлагая функции $x(t,\varepsilon)$, $y^{i,j}(t,\varepsilon)$, $z(t,\varepsilon)$ в ряды по степеням ε

$$\begin{cases} x(t) = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t), \\ y^{i,j}(t) = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k y_k^{i,j}(t), \quad i = \overline{0,\infty}, j = 0,1, \\ z(t) = \sum\limits_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t) \end{cases} \tag{31}$$

и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим серию итерационных задач:

$$\begin{cases} x_k'(t) = 0, \\ (y_k^{i,j}(t))' = 0, \quad i = \overline{0,\infty}, j = 0,1, \\ t^\beta z_k(t) = -z_{k-1}'(t) - \sum\limits_{i=0}^{\infty} (t^{-\{\beta\}_i} y_{k-1}^{i,0}(0) + t^{1-\{\beta\}_i} y_{k-1}^{i,1}(0)) + \delta_0^k h(t), \\ x_k(0) + z_k(0) = \delta_0^k u^0, \quad k = \overline{-1,\infty}. \end{cases} \tag{32}$$

Отрицательная степень по ε возникает из-за того, что $h(t)$ не принадлежит области значений предельного оператора.

Рассмотрим систему (30) при $k = -1$:

$$\begin{cases} x_{-1}'(t) = 0, \\ (y_{-1}^{i,j}(t))' = 0, \quad i = \overline{0,\infty}, j = 0,1, \\ t^\beta z_{-1}(t) = 0, \\ x_{-1}(0) + z_{-1}(0) = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Решение системы (32) запишется в виде:

$$\begin{cases} x_{-1}(t) = x_{-1}(0) = 0, \\ y_{-1}^{i,j}(t) = y_{-1}^{i,j}(0), \quad i = \overline{0,\infty}, j = 0,1, \\ z_{-1}(t) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

На данном итерационном шаге $y_{-1}^{i,j}(0)$ — произвольные числа, которые определяются из условия точечной разрешимости при $k = 0$:

$$\begin{cases} x_0'(t) = 0, \\ y_0^{i,j}(t) = y_0^{i,j}(0), \quad i = \overline{0, \infty}, j = 0, 1, \\ t^\beta z_0(t) = -\sum\limits_{i=0}^{\infty}(t^{-\{\beta\}_i} y_{-1}^{i,0}(0) + t^{1-\{\beta\}_i} y_{-1}^{i,1}(0)) + h(t), \\ x_0(0) + z_0(0) = u^0. \end{cases} \tag{34}$$

На основании теоремы разрешимости следует, что $y_{-1}^{0,0}(0) = h(0)$, $y_{-1}^{0,1}(0) = 0, y_{-1}^{i,j}(0) = 0, i = \overline{1, \infty}, j = 1, 2$. Решение $z_0(t)$ запишется в виде:

$$z_0(t) = \frac{h(t) - h(0)}{t^\beta}. \tag{35}$$

$x_0(0)$ определяется из начальных условий $x_0(0) + z_0(0) = u^0$.
Так как $z_0(0) = 0$, то $x_0(0) = u^0$. Начальные условие $y_0^{i,j}(0)$ на нулевом итерационном шаге не определяются.

Таким образом, решение на -1 итерационном шаге определено и имеет вид:

$$u_{-1}(t, \varepsilon) = h(0) e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} \int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}} ds. \tag{36}$$

Чтобы определить $y_0^{i,j}(t)$, рассмотрим итерационную систему на шаге $k = 1$:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 0, \\ (y_1^{i,j}(t))' = 0, \quad i = \overline{0, \infty}, j = 0, 1, \\ t^\beta z_1(t) = -z_0'(t) - \sum\limits_{i=0}^{\infty}(t^{-\{\beta\}_i} y_0^{i,0}(0) + t^{1-\{\beta\}_i} y_0^{i,1}(0)), \\ x_1(0) + z_1(0) = 0. \end{cases} \tag{37}$$

Рассмотрим уравнение относительно $z_1(t)$. Согласно замечанию $z_0'(t)$ представимо в виде $z_0'(t) = t^{-\{\beta\}}(\dot{h}(t) - \frac{\beta(h(t) - h(0))}{t}) = t^{-\{\beta\}} h_0(t)$. Заметим, что $h_0(0) = (1 - \beta)\dot{h}(0)$.

Отсюда

$$t^\beta z_1(t) = -t^{-\{\beta\}} h_0(t) - \sum_{i=0}^{\infty}(t^{-\{\beta\}_i} y_0^{i,0}(0) + t^{1-\{\beta\}_i} y_0^{i,1}(0)).$$

На основании теоремы разрешимости имеем: $y_0^{1,0}(0) = -h_0(0), y_0^{1,1}(0) = -\dot{h}_0(0)$,
остальные $y_0^{i,j} = 0$.
Тогда $z_1(t) = \frac{(h_0(t) - h_0(0) - t\dot{h}_0(0))}{t^\beta} = t^{2-\beta-\{\beta\}} h_1(t)$. Возможны две ситуации
a) $[\beta]_2 = 1$ $z_1(t) = t^{1-\{\beta\}_2} h_1(t)$
b) $[\beta]_2 = 0$ $z_1(t) = t^{2-\{\beta\}_2} h_1(t)$

Это можно записать в виде $z_1(t) = t^{2-\delta_1^{[\beta]_2}-\{\beta\}_2} h_1(t)$, де δ_i^j-символ Кронекера Из начальных условий $x_1(0) = 0$ так как $z_1(0) = 0$.

Следовательно, на нулевом итеррационном шаге полностью находится главный член асимптотики:

$$u_{g.m} = \frac{1}{\varepsilon} h(0) e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} \int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}} ds + u^0 e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} - h_0(0) e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} \int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}} s^{-\{\beta\}} ds$$

$$-\dot{h}_0(0) e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} \int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}} s^{1-\{\beta\}} ds + \frac{h(t) - h(0)}{t^\beta}. \tag{38}$$

Аналогично можно найти любой член асимптотического решения. Нетрудно получить общий вид регуляризованного асимптотического решения задачи Коши (1).

$$\begin{aligned} u(t,\varepsilon) = u^0 e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} + \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} \varepsilon^k (h_k(0)\sigma_{k,0}(t,\varepsilon) + \dot{h}_k(0)\sigma_{k,1}(t,\varepsilon))\delta_1^{[\beta]_k} \\ +(h_k(0)\sigma_{k,1}(t,\varepsilon))\delta_0^{[\beta]_k}) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k t^{2-\delta_1^{[\beta]_{k+1}}-\{\beta\}_{k+1}} h_k(t). \end{aligned} \tag{39}$$

Теорема 8 *Пусть задана задача* (2) *и выполнены условия 1)-3). Тогда верна оценка*

$$\left\| u(t,\varepsilon) - \sum_{k=-1}^{N} \varepsilon^k u_k(,\varepsilon) \right\| \le C\varepsilon^{N+1}, \forall t \in [0,T].$$

Здесь $u_k(t) = u^0 e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}} \delta_k^0 + (-1)^{k+1}(h_k(0)\sigma_{k,0}(t,\varepsilon) + \dot{h}_k(0)\sigma_{k,1}(t,\varepsilon))\delta_1^{[\beta]_k}$
$+ (h_k(0)\sigma_{k,1}(t,\varepsilon))\delta_0^{[\beta]_k} + t^{2-\delta_1^{[\beta]_{k+1}}-\{\beta\}_{k+1}} h_k(t)$.

Теорема 9 *Пусть выполнены условия 1) и 2) задачи* (2) *и дополнительные условия точечной разрешимости* $h(0) = 0$*, Тогда верна теорема о предельном переходе*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(t,\varepsilon) = u_0(t), t \in [\delta, T], \text{ где } \delta > 0.$$

где $u_0(t) = \frac{h(t)-h(0)}{t^\beta}$.

Теорема 10 *Пусть выполнены условия 1) и 2) задачи (2) и дополнительные условия точечной разрешимости* $h(0) = 0$*, Тогда теорема о предельном переходе верна в слабом смысле*

$$\forall \varphi(t) \in C[0,T] \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T u(t,\varepsilon)\varphi(t)dt = \int_0^T u_0(t)\varphi(t)dt$$

где $u_0(t) = \frac{h(t)-h(0)}{t^\beta}$.

Пример

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -t^\beta u + h(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

1) $h(x,t) = h(x, t^{\beta+1}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(k)}h(x,0)}{k!}\frac{t^{(\beta+1)k}}{(\beta+1)^k}$

$u_{g.m}(x,t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}h(x,0)\sigma(t,\varepsilon) + \varphi(x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{t^{\beta+1}}{\beta+1}} + \frac{h(x,t)-h(x,0)}{t^\beta}$.

где $\sigma(t,\varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{t^{\beta+1}}{\beta+1}}\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\frac{s^{\beta+1}}{\beta+1}}ds$

2) $h(x,t) = h(x, t^{\frac{\beta+1}{m}}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{D^{(k)}h(x,0)}{k!}\frac{t^{\frac{k(\beta+1)}{m}}}{(\beta+1)^k}$

$u_{g.m} = \frac{1}{\varepsilon}\sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{D^{(i)}h(x,0)}{i!(\beta+1)^i}\sigma_i(t,\varepsilon) + \varphi(x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{t^{\beta+1}}{\beta+1}} - \sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{D^{(i)}h_1(x,0)}{i!(\beta+1)^i}\sigma_i(t,\varepsilon) + \frac{h(x,t^{\frac{(\beta+1)}{m}}) - \sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{D^{(i)}h(x,0)}{i!(\beta+1)^i}t^{\frac{i(\beta+1)}{m}}}{t^\beta}$.

где $\sigma_i(t,\varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{s^{\beta+1}}{\beta+1}}\int\limits_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\frac{s^{\beta+1}}{\beta+1}}s^{\frac{i(\beta+1)}{m}}ds, \quad i = \overline{0, m-1}$.

3) $h(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{h^{(k)}(x,0)}{k!}t^k$

$$u_{g.m} = \frac{1}{\varepsilon}h(x,0)e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}}\int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}}ds + \varphi(x)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{t^{\beta+1}}{\beta+1}} - h_0(x,0)e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}}\int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}}s^{-\{\beta\}} - \dot{h}_0(x,0)e^{\frac{-\varphi(t)}{\varepsilon}}\int\limits_0^t e^{\frac{\varphi(s)}{\varepsilon}}s^{1-\{\beta\}}ds + \frac{h(x,t)-h(x,0)}{t^{\beta}}.$$

Список литературы

[1] Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.

[2] Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А. Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации.— М.: Издат.дом МЭИ, 2012.

[3] Елисеев А. Г., Ломов С. А. Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора. — Математический сборник, 1986, т. 131, № 173, с. 544–557.

[4] Eliseev A, Ratnikova T. Regularized Solution of Singularly Perturbed Cauchy Problem in the Presence of Rational “Simple” Turning Point in Two-Dimensional Case.— Axioms. 2019, 8(4):124.

[5] Елисеев А.Г., Ратникова Т.А. Сингулярно возмущенная задача Коши при наличии рациональной «простой» точки поворота у предельного оператора. — Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2019, № 3, с. 63–73, https://diffjournal.spbu.ru/pdf/$eliseev_1$.pdf

[6] Турсунов Д. А., Кожобеков К. Г. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота. — Известия Иркутского гос. университета, 2017, т. 21, с. 108–121.

[7] Lioville J. Second memoire sur le development des fonctions en series dont divers termes sont assujettis, a une meme equation. — J. Math. Pure Appl., 1837, vol. 2, c. 16–35.

Regularized solution of a singularly perturbed Cauchy problem in the presence of irrational simple turning point

Alexander Eliseev

National Research University "Moscow Power Engineering Institute"

eliseevag@mpei.ru

Absract. Basing on the regularization method of S. A. Lomov, we construct an asymptotic solution for a singularly perturbed Cauchy problem for the case when the stability conditions for the spectrum of the limit operator are violated. In particular, we consider the problem with a simple turning point, when one eigenvalue at the initial moment of time has zero of arbitrary irrational order (the limit operator is discretely irreversible). This work is a development of the ideas described in the works of S. A. Lomov and A. G. Eliseev. The irrational turning point and the problems that arise in constructing the asymptotic of the solution of the Cauchy problem have not previously been considered from the point of view of the regularization method. In the present work, basing on the theory o f normal and unique solvability of iterative problems developed by the author, we design and justify the algorithm for the regularization method and construct an asymptotic solution of any order with respect to a small parameter.

Keywords: singularly perturbed Cauchy problem, asymptotic solution, regularization method, turning point.