

Компьютерно ориентированный метод вычисления спектра усреднения функции

Г. С. Осипенко

Филиал МГУ в Севастополе

george.osipenko@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются дискретная динамическая система и непрерывная функция. Усреднение над периодической ε -траекторией есть среднее значение функции на периоде. Предельное множество усреднений над периодическими ε -траекториями при $\varepsilon \rightarrow 0$ называется спектром усреднения функции. Известно, что спектр состоит из отрезков, каждый отрезок порожден компонентой цепно-рекуррентного множества. Представлен компьютерно ориентированный метод, который позволяет вычислить спектр усреднения. Рассмотрен пример вычисления спектра Морса.

Ключевые слова: псевдотраектория, цепно-рекуррентная компонента, символический образ, усреднение на графе, компонента сильной связности, экстремальные циклы.

1 Введение

В 1980 году академик Б. В. Гнеденко писал «Мы сталкиваемся с математиками двух существенно различных направлений - теоретиками, которые исследуют математические закономерности сами по себе, вне связи с практическими вопросами, и прикладниками. Интересы последних в первую очередь

⁰Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, грант А № 19-01-00388).

определяются запросами практики научной или производственной. Далеко не всегда в математике уже заготовлены необходимые для такого изучения понятия и идеи. В этом случае математик должен искать необходимые новые подходы и в случае нужды разрабатывать новые математические методы и даже новые ветви математической науки.»

Современная компьютерная техника существенно расширила область приложения теоретических математических методов. Компьютерно ориентированные методы исследования динамических систем основаны на конструктивных теоретических результатах. Так, теорема о существовании неподвижной точки отображения сжатия позволяет численно построить последовательность точек, сходящихся к искомой точке. Значительное число глубоких теоретических результатов не может быть применено к численному исследованию конкретных динамических систем. Например, классическая теорема о необходимых и достаточных условиях структурной устойчивости динамической системы [1, 2, 3] дает условия, которые конструктивно нельзя проверить в общем случае. Далее мы будем обсуждать результаты, которые позволяют реализовать методы исследования в виде пакетов компьютерных программ.

Ограниченная точность. Практика показывает, что вычисления не производятся с абсолютной точностью. Компьютерные вычисления, обычно, производятся с точностью до 10^{-19} . При вычислениях всегда присутствует некоторая неточность, возможно очень малая. Какое влияние оказывает на конечный результат такая неточность решается не просто. Все иррациональные числа такие как π , e задаются десятичными числами и, следовательно, приближенно. Точная траектория $x_{n+1} = f(x_n)$ динамической системы редко известна на практике, в действительности мы работаем с псевдотраекториями $x_{n+1} = f(x_n) + \varepsilon_n$, где ε_n — достаточно малое число. В прикладных задачах еще более сложная ситуация, так как система и её параметры определены с некоторым приближением. Поэтому компьютерно-ориентированные методы должны предполагать, что все вычисления производятся приближенно.

Ограниченность времени. Ограничение времени работы компьютерной программы является естественным и понятным. Более того, решение практических задач требует получить результат работы программы в строго ограниченном времени, пока этот результат имеет практический смысл. Например, прогноз погоды на завтра желательно получить сегодня к концу текущего дня, или траекторию космического спускаемого аппарата желательно рассчитать до начала этого спуска. Это выражается в требовании работы компьютерных алгоритмов и пакетов программ в «реальном времени».

Ограниченность данных и памяти. Компьютерные программы могут оперировать с достаточно большими, но конечными данными. Ограничение на объем памяти компьютера порождает ограничение по использованию данных о динамических системах. Например, мы можем использовать большое число начальных данных для построения траекторий, но их число не может быть сколь угодно большим. Рассмотренные ограничения являются взаимозависимыми. Так, улучшения точности можно добиться за счет увеличения времени счета и увеличения использования объема памяти компьютера.

2 Постановка задачи

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1)$$

порожденную гомеоморфизмом $f : M \rightarrow M$ компактного многообразия M . Бесконечная в обе стороны последовательность точек $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$ является траекторией, если $f(x_i) = x_{i+1}$. Если расстояние между образом $f(x_i)$ и x_{i+1} меньше чем $\varepsilon > 0$ для любого i , то последовательность $\{x_i\}$ называется ε -траекторией или псевдотраекторией, когда ε достаточно малое число. Если при этом последовательность $\{x_i\}$ является периодической, то она называется периодической ε -траекторией, а точки x_i называются ε -периодическими.

Усреднением функции φ над конечной последовательностью точек $\xi = \{x_k : 1 \leq k \leq n\}$ будем называть среднее арифметическое

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k).$$

В частности, если ξ является периодической псевдотраекторией, то $\lambda(\xi)$ есть среднее значение функции φ на периоде.

Пусть $\xi = \{x_k : \rho(f(x_k), x_{k+1}) < \varepsilon, k \in \mathbb{N}\}$ есть ε -полутраектория, тогда предел

$$\lambda(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)$$

назовем усреднением на полутраектории, если такой предел существует. В том случае, когда данный предел не существует, то найдется подпоследова-

тельность $n_m \rightarrow \infty$, для которой предел

$$\lambda(\xi, n_m) = \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_m} \sum_{k=1}^{n_m} \varphi(x_k) \quad (2)$$

существует. Такие подпоследовательности назовем сходящимися.

Определение 1 *Спектр усреднения функции φ над ε -полутраекторией $\xi = \{(x_k), k \in \mathbb{N}\}$ есть множество усреднений над сходящимися подпоследовательностями*

$$\Sigma(\xi) = \{\lambda \mid \exists n_m \rightarrow \infty : \lambda = \lambda(\xi, n_m)\}.$$

Спектр усреднения функции φ над псевдотраекториями динамической системы есть множество чисел

$$\Sigma = \{\lambda \mid \exists \varepsilon_n - \text{траектории } \{\xi_n\}, \varepsilon_n \rightarrow 0 : \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n, \lambda_n \in \Sigma(\xi_n)\}.$$

В работе [4] показано, что спектр усреднения совпадает с периодическим спектром, а именно

$$\Sigma = \{\lambda \mid \exists \text{ периодические } \varepsilon_n - \text{траектории } \{\xi_n\}, \varepsilon_n \rightarrow 0 : \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\xi_n)\}.$$

Точка x является цепно-рекуррентной, если x является ε -периодической для любого $\varepsilon > 0$, т.е. найдется периодическая ε -траектория, проходящая через точку x . Следовательно, если при компьютерных вычислениях получена периодическая точка, то, в действительности, она может быть цепно-рекуррентной. Цепно-рекуррентное множество состоит из всех цепно-рекуррентных точек и обозначается через CR . Цепно-рекуррентное множество CR является инвариантным, замкнутым и содержит все типы возвратных траекторий: периодические, почти периодические, неблуждающие, гомоклинические и т.д. Отметим, что, если цепно-рекуррентная точка не является периодической и $\dim M > 1$, то существует сколь угодно малое возмущение f в C^0 -топологии, для которого данная точка является периодической [5]. Можно сказать, что цепно-рекуррентные точки порождают периодические траектории при C^0 -возмущениях.

Определение 2 *Две цепно-рекуррентные точки назовем эквивалентными, если их можно соединить периодической ε -траекторией для любого $\varepsilon > 0$. Цепно-рекуррентное множество CR разбивается на классы эквивалентности $\{\Omega_i\}$, которые мы будем называть компонентами цепно-рекуррентного множества.*

Каждая компонента Ω цепно-рекуррентного множества является замкнутым и инвариантным множеством.

Теорема 1 [4] *Спектр Σ усреднения функции φ над псевдотраекториями системы состоит из отрезков $[a_k, b_k]$, каждый отрезок генерируется компонентой цепно-рекуррентного множества Ω_k .*

Примеры.

1. *Усреднения на окружности.* Рассмотрим непрерывную динамическую систему порожденную дифференциальным уравнением $\varphi' = \cos \varphi$ на единичной окружности S^1 на плоскости R^2 , где φ — угол. Система имеет два состояния равновесия $\varphi = \pm\pi/2$. Для точки N $\varphi = \pi/2$, для точки S $\varphi = -\pi/2$. В координатах плоскости $N = (0, 1)$, $S = (0, -1)$. Состояние равновесия N является асимптотически устойчивым, а S является асимптотически неустойчивым состоянием равновесия. Остальные траектории идут от S к N . Пусть дискретная система порождена сдвигом на единицу времени вдоль траекторий описанной непрерывной системы. Система имеет две компоненты цепно-рекуррентного множества совпадающие с S и N . Из теоремы 1 следует, что спектр усреднения функции $g(\varphi)$ над псевдотраекториями дискретной системы состоит из двух значений функции $g(S)$ и $g(N)$. Например, спектр усреднения функции равной ординате $y(\varphi)$ состоит из двух значений $\{1, -1\}$.

Если рассмотреть дискретную систему, аналогично порожденную дифференциальным уравнением $\varphi' = \cos^2 \varphi$, то цепно-рекуррентное множество имеет одну компоненту, совпадающую с окружностью S^1 , а спектр усреднения функции $y(\varphi)$ есть отрезок $[-1, 1]$.

Наконец, система, порожденная уравнением $\varphi' = \cos^2(\varphi/2)$, имеет одну компоненту цепно-рекуррентного множества, совпадающую с окружностью S^1 , а спектр усреднения функции $y(\varphi)$ состоит из одного значения $\{0\}$.

2. *Спектр Морса.* Пусть дискретная система порождена диффеоморфизмом $f : M \rightarrow M$. Дифференциал $Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ задает линейное расширение системы

$$v_{n+1} = Df(x_n)v_n \quad (3)$$

на касательное расслоение TM . Любое невырожденное линейное отображение $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ порождает отображение на единичной сфере S

$$e \rightarrow A_s(e) = Ae/|Ae|, \quad e \in S.$$

Проективное пространство P получается путем отождествления диаметрально противоположных точек сферы S . Симметричность отображения

$A_s(\pm e) = \pm A_s(e)$ позволяет нам определить отображение $PA(e) = Ae/|Ae|$ на проективном пространстве P , отождествляя противоположные точки на сфере. Для точек пространства P мы сохраним обозначение e , т. е. e обозначает одномерное подпространство и (или) единичный вектор на нем, что не приводит к недоразумениям. Таким образом, мы получаем отображение

$$Pf(x, e) = \left(f(x), \frac{Df(x)e}{|Df(x)e|} \right)$$

на проективном расслоении $P = \{(x, e) : x \in M, e \in P(x)\}$, которое порождает дискретную динамическую систему вида

$$x_{n+1} = f(x_n), e_{n+1} = \frac{Df(x_n)e_n}{|Df(x_n)e_n|} \quad (4)$$

на проективном расслоении P . Рассмотрим усреднение функции $\varphi(x, e) = \ln |Df(x)e|$ над псевдотраекториями системы (4). Положительное число $a(x, e) = |Df(x)e|$ есть коэффициент изменения длины на подпространстве $e \in T_x M$ под действием дифференциала. Если $\xi = \{(x_k, e_k), k \in \mathbb{N}\}$ является ε -полутраекторией отображения Pf , тогда число

$$\lambda(\xi) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln |Df(x_k)e_k|$$

есть характеристический показатель Ляпунова этой полутраектории. Пусть $\xi = \{(x_k, e_k)\}$ есть p -периодическая псевдотраектория, тогда показатель Ляпунова этой псевдотраектории является средним арифметическим по периоду

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \ln |a(x_k, e_k)| = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \ln |Df(x_k)e_k|. \quad (5)$$

Спектр Морса определяется как спектр усреднения функции $\varphi(x, e) = \ln |Df(x)e|$ над псевдотраекториями системы (4). Таким образом, спектр Морса есть предельное множество показателей Ляпунова периодических ε -траекторий при $\varepsilon \rightarrow 0$. В работе [6] было показано, что если спектр Морса не содержит нуля, то динамическая система является гиперболической на цепно-рекуррентном множестве. Следовательно, вычисление спектра Морса является актуальной задачей теории динамических систем.

3 Символический образ

В основе дальнейшего изложения лежит понятие символического образа [7, 8], которое соединило в себе символическую динамику [9, 10] и числен-

ные методы [11]. Символический образ является инструментом компьютерно-ориентированной технологии, которая позволяет получить информацию о глобальной динамике системы посредством изучения структуры конечного ориентированного графа.

Пусть $C = \{M(1), \dots, M(n)\}$ есть конечное покрытие многообразия M замкнутыми подмножествами. $M(i)$ называется ячейкой индекса i . Диаметр d покрытия C есть наибольший из диаметров ячеек покрытия.

Определение 3 [12] Пусть G является ориентированным графом с вершинами $\{i\}$ соответствующими ячейкам $\{M(i)\}$. Вершины i и j связаны ориентированным ребром (дугой) $i \rightarrow j$ тогда и только тогда, когда

$$f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset.$$

Граф G называется символическим образом отображения f для покрытия C .

Символический образ порожден дискретизацией фазового пространства динамической системы. Существование ребра $i \rightarrow j$ гарантирует существование точки x в ячейке $M(i)$ такой, что ее образ $f(x) \in M(j)$. Другими словами, ребро $i \rightarrow j$ является следом перехода $x \rightarrow f(x)$, где $x \in M(i)$, $f(x) \in M(j)$. Если ребро $i \rightarrow j$ не существует, то нет точек $x \in M(i)$ таких, что их образ $f(x) \in M(j)$. Мы не накладываем ограничений на покрытие C , но, не ограничивая общности, всегда можно считать, что ячейки $M(i)$ являются многогранниками, которые пересекаются по граничным дискам. Это следует из теоремы о триангуляции компактного многообразия [13]. В практических расчетах M есть компактная область в R^d , а ячейками $M(i)$ являются кубы или параллелепипеды [8].

Конечная или бесконечная последовательность $\{z_k\}$ вершин графа G называется путем (или допустимым путем), если для каждого k граф G содержит направленную дугу $z_k \rightarrow z_{k+1}$. Допустимый путь вида $\{z_0, z_1, \dots, z_p = z_0\}$ назовем замкнутым или периодическим путем периода p .

Любой путь на символическом образе продолжим в обе стороны. Вершину символического образа назовем возвратной, если через нее проходит периодический путь. Множество возвратных вершин обозначается RV . Две возвратные вершины i и j называются эквивалентными, если существует периодический путь, проходящий через i и j . Множество возвратных вершин RV разбивается на классы эквивалентности $\{H_k\}$. В теории графов H_k называют компонентами сильной связности.

Существует естественное соответствие между допустимыми путями на символическом образе и ε -траекториями отображения f .

Теорема 2 [7] Отслеживание

1. Если последовательность $\{z_k\}$ есть допустимый путь на символическом образе G , тогда существует последовательность точек $\{x_k\}$, $x_k \in M(z_k)$, которая является ε -траекторией f для любого $\varepsilon > d$. В частности, если последовательность $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ является p -периодической, тогда ε -траектория $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ является p -периодической.
2. Пусть последовательность $\{z_k\}$ есть допустимый путь на символическом образе G и $x_k \in M(z_k)$, тогда последовательность $\{x_k\}$ является ε -траекторией f для любого $\varepsilon > d + \theta(d)$, где $\theta(\cdot)$ — модуль непрерывности отображения f .
3. Существует число $r > 0$ такое, что, если последовательность точек $\{x_k\}$ является ε -траекторией f , $\varepsilon < r$ и $x_k \in M(z_k)$, то последовательность $\{z_k\}$ является допустимым путем на символическом образе G . В частности, если ε -траектория $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ является p -периодической, то $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ является p -периодическим путем на G .

Иначе говоря, допустимый путь есть след ε -траектории и наоборот. Следовательно, путь на символическом образе можно рассматривать как кодировку псевдотраекторий.

Пусть V — множество вершин символического образа. Обозначим $h : M \rightarrow V$ отображение (многозначное), которое сопоставляет точке x все вершины i такие, что $x \in M(i)$.

Утверждение 1 [4] Отображение h обладает следующими свойствами.

1. Если x — цепно-рекуррентная точка и $i \in h(x)$, то i — возвратная вершина.
2. Если x_1 и x_2 лежат в одной компоненте цепно-рекуррентного множества Ω , $i_1 \in h(x_1)$ и $i_2 \in h(x_2)$, то i_1 и i_2 эквивалентные возвратные вершины.
3. Если Ω — компонента цепно-рекуррентного множества, то существует единственный класс $H(\Omega)$ эквивалентных возвратных вершин такой, что $h(\Omega) \subset H(\Omega)$.

4 Локализация цепно-рекуррентного множества

В [14, 7] описан процесс построения последовательности вложенных окрестностей цепно-рекуррентного множества, которая сходится к этому множеству. Рассмотрим этот процесс локализации цепно-рекуррентного множества. Пусть $C = \{M(i)\}$ — покрытие, G — символический образ для C и Ω — компонента цепно-рекуррентного множества. Из утверждения 1 следует, что образ $h(\Omega)$ лежит в некотором классе эквивалентных возвратных вершин, который будем обозначать $H(\Omega)$, при этом компонента Ω лежит в объединении $\{\bigcup M(i) \mid i \in H(\Omega)\}$.

Предположим, что новое покрытие NC является подразбиением покрытия C . Это означает, что каждая ячейка $M(i)$ подразбивается на ячейки $m(i, k)$, $k = 1, 2, \dots$, т.е.

$$\bigcup_k m(i, k) = M(i).$$

Обозначим NG новый символический образ для покрытия $NC = \{m(i, k)\}$. Вершины NG обозначаются как (i, k) . Такое построение генерирует отображение s из NG на G , которое переводит вершины (i, k) на вершину i . Из

$$f(m(i, k)) \cap m(j, l) \neq \emptyset$$

следует, что

$$f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset,$$

поэтому дуга $(i, k) \rightarrow (j, l)$ отображается на дугу $i \rightarrow j$. Следовательно, s отображает ориентированный граф NG на ориентированный граф G . Поэтому, каждый допустимый путь на NG преобразуется отображением s на некий допустимый путь на G . В частности, образ периодического пути есть периодический путь, а образ возвратной вершины есть возвратная вершина. Более того, образ класса NH эквивалентных возвратных вершин (на NG) лежит в классе H эквивалентных возвратных вершин на G .

Обозначим $P(d)$ объединение ячеек $M(i)$, для которых вершина i является возвратной, т.е.

$$P(d) = \{\bigcup M(i) : i - \text{возвратная вершина}\}, \quad (6)$$

где d - диаметр покрытия. Предположим, что $C = C_0$ является исходным покрытием и C_1, C_2, \dots получены описанным процессом подразбиения, множества P_0, P_1, P_2, \dots построены согласно (6).

Теорема 3 [14] Локализация цепно-рекуррентного множества.

Последовательность множеств P_0, P_1, P_2, \dots обладает следующими свойствами:

- каждое P_k есть замкнутая окрестность цепно-рекуррентного множества CR ,
- P_k вложены друг в друга $P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset CR$,
- если диаметр покрытия $d_k \rightarrow 0$, тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \bigcap_k P_k = CR$.

Следствие 1 Пусть Ω является компонентой цепно-рекуррентного множества, тогда

$$P_k(\Omega) = \left\{ \bigcup M(i) : i \in H(\Omega) \right\} \quad (7)$$

является замкнутой окрестностью компоненты Ω и

$$P_0(\Omega) \supset P_1(\Omega) \supset P_2(\Omega) \supset \dots \supset \Omega.$$

Если диаметр $d_k \rightarrow 0$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(\Omega) = \bigcap_k P_k(\Omega) = \Omega.$$

Теорема 3 позволяет построить окрестность цепно-рекуррентного множества без какой-либо предварительной информации о системе. Здесь мы будем применять адаптивное подразбиение, т.е. некоторые ячейки будем подразбивать, а другие будем исключать из рассмотрения, что существенно сокращает время счета. На основании полученных результатов построим следующий алгоритм.

1. Выбираем исходное покрытие C компакта M . Находим символический образ G отображения f . Заметим, что ячейки исходного покрытия могут иметь произвольный диаметр d_0 .
2. Выделяем на графе G возвратные вершины $\{i\}$. Используя их, находим замкнутую окрестность $P = \left\{ \bigcup M(i) : i - \text{возвратная} \right\}$ цепно-рекуррентного множества CR .
3. Ячейки $\{M(j)\}$, соответствующие невозвратным вершинам $\{j\}$, удаляются из рассмотрения.

4. Ячейки $\{M(i)\}$, соответствующие возвратным вершинам $\{i\}$, разбиваются на мелкие ячейки с диаметром в несколько раз меньше предыдущего. Таким образом определяем новое покрытие.
5. Строим символический образ G для нового покрытия.
6. Переходим ко второму пункту.

Повторяя процесс последовательного измельчения покрытия, мы получаем, согласно теореме 3, последовательность вложенных окрестностей P_0, P_1, P_2, \dots цепно-рекуррентного множества CR и последовательность наибольших диаметров d_0, d_1, d_2, \dots ячеек, соответствующих возвратным вершинам символического образа для покрытия C_k . Согласно построению, $d_{k+1} \leq \lambda d_k$, $0 < \lambda < 1$ и, следовательно, $d_k \rightarrow 0$. Таким образом, описанный алгоритм дает монотонно убывающую последовательность окрестностей, сходящуюся к цепно-рекуррентному множеству.

Численное построение символического образа является достаточно изученной задачей. Способы построения символического образа рассмотрены в работах [8, 15, 16]. Здесь имеется ряд проблем, которые надо учитывать при построении образа ячейки. Ячейки $M(i)$ покрытия выбираются, как правило, прямоугольными параллелепипедами. Для построения ребра $i \rightarrow j$ надо проверить, что $f(M(i)) \cap M(j) \neq \emptyset$. Численно образ ячейки $f(M(i))$ и пересечение $f(M(i)) \cap M(j)$ могут быть найдены лишь приближенно. Это приводит к тому, что мы можем построить лишние стрелки, когда образ $f(M(i))$ построен с увеличением или можно потерять стрелки, когда образ построен с уменьшением. Численные эксперименты показывают, что хорошие результаты дает следующий простой способ построения стрелок. Ячейка $M(i)$ равномерно заполняется некоторым количеством точек $\{x_k, k = 1, 2, \dots, N\}$, строятся образы $f(x_k)$. Число точек N выбирается пользователем и может быть параметром компьютерной программы. Обычно для гладких систем $N = 100$ является вполне достаточным. Далее полагают, что стрелка $i \rightarrow j$ существует, если $f(x_k) \in M(j)$. В диссертации Е. Петренко [16] рассмотрены пять способов построения образа ячейки. Если мы локализуем цепно-рекуррентное множество CR , то лишние стрелки могут добавить возвратные вершины и увеличить окрестность $U \supset CR$, но исчезновение настоящих стрелок может привести к потере возвратных вершин и потере части цепно-рекуррентного множества. При этом в первом случае окрестность искомого множества можно уменьшить за счет последующих подразбиений, но во втором случае потерю части цепно-рекуррентного множества при адаптивном разбиении вос-

становить уже невозможно. Поэтому при локализации цепно-рекуррентного множества лучше строить образ ячейки с запасом, чтобы избежать потери стрелок.

Задача о локализации цепно-рекуррентного множества заданной динамической системы сводится к исследованию соответствующего символического образа и выделению на нем классов эквивалентных возвратных вершин. Имеются хорошо обоснованные алгоритмы построения компонентов сильной связности графа, наиболее популярным является алгоритм Тарьяна [17, 18]. Такие алгоритмы обладают линейной оценкой сложности, число операций оценивается как $O(n + m)$, где n — количество узлов, m — количество ребер. Более того, эти алгоритмы реализованы в кодах и их можно найти в Интернете. Студенты 4-го курса филиала МГУ в Севастополе выполняют подобную работу на современном ноутбуке в реальное время, при этом обрабатываются графы в несколько миллионов вершин.

В книге [7] приведен пример локализации цепно-рекуррентного множества дифференциального уравнения Ван-дер-Поля, которое служит математической моделью (при ряде упрощающих предположений) лампового генератора на триоде в случае кубической характеристики лампы. Здесь мы рассмотрим другой пример локализации цепно-рекуррентного множества отображения Жюлиа.

Пример 3: цепно-рекуррентное множество отображения Жюлиа.

В 1918 г. 25-летний француз Гастон Жюлиа залечивал свои раны в госпитале. Изнывая от безделья, он заинтересовался поведением точек последовательности $z_{n+1} = z_n^2 + C$ на комплексной плоскости. Множество Жюлиа есть набор точек комплексной области, которые не уходят в бесконечность при описанных итерациях. Оказалось, что такие множества существенно зависят от выбора числа C и имеют непростую фрактальную структуру. Сейчас множества Жюлиа хорошо изучены, получены красивые картинки, которые используются в дизайне. Наша цель состоит в локализации цепно-рекуррентного множества отображения Жюлиа, которые входят в описанные множества, но могут не совпадать с ним. Отображение Жюлиа порождает систему разностных уравнений на плоскости вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + a, \\y_{n+1} &= 2xy + b.\end{aligned}$$

Заданное отображения не является гомеоморфизмом и является примером применения символического образа для полудинамических систем. Здесь мы

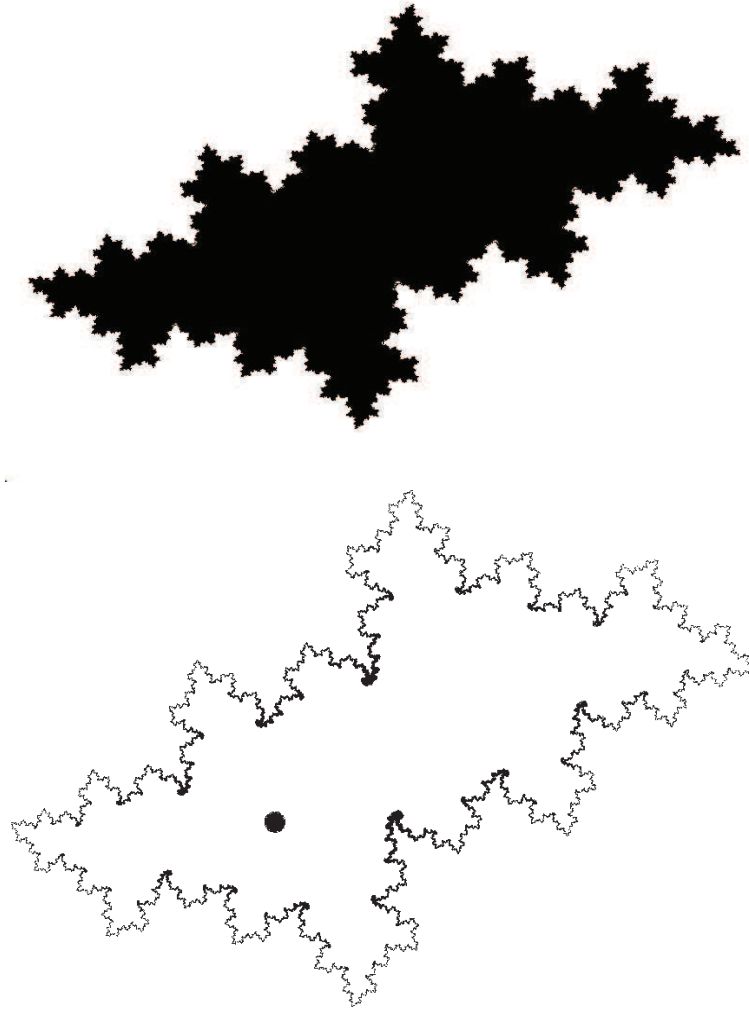


Рис. 1: Множество Жюлиа и его цепно-рекуррентные компоненты, $a=b=-0.5$.

приведем численные результаты для $a = b = -0.5$, область исследования $M = [-2, 2] \times [-2, 2]$. Множество Жюлиа представлено на верхнем рис. 1, которое при данных параметрах представляет собой двумерную замкнутую область Ω с нетривиальной фрактальной границей. Для локализации цепно-рекуррентного множества применялся вышеописанный алгоритм. Было выбрано исходное покрытие S компакта M квадратами со стороной $h = 0.25$. Построено пять подразбиений и получена окрестность цепно-рекуррентного множества, которое изображено на нижнем рисунке 1. Это инвариантное множество имеет две компоненты: Ω_1 совпадает с границей множества Жюлиа и Ω_2 расположенное близко к началу координат. Используя обычный итерационный процесс, можно показать, что Ω_1 является репеллером, а Ω_2 является аттрактором. Таким образом, любая траектория вне $\Omega_1 \cup \Omega_2$ начинается на границе Ω_1 и заканчивается в аттракторе Ω_2 .

5 Спектр усреднения функции

Рассмотрим символический образ G динамической системы $x_{n+1} = f(x_n)$ и непрерывную функцию $\varphi : M \rightarrow R$. Для вычисления спектра Σ усреднения мы построим оснащение или функцию определенную на дугах символического образа. Определим величину $a[ij]$ для каждого ребра $i \rightarrow j$ следующим образом. Пусть $i \rightarrow j$ есть дуга на G . Фиксируем точку x из ячейки $M(i)$ и положим $a[ij] = \varphi(x)$. Отметим, что значение $a[ij]$ не зависит от j и, если x^* - другая точка в $M(i)$, $a^*[ji] = \varphi(x^*)$, то мы имеем оценку

$$|a^*[ij] - a[ij]| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| < \eta(d),$$

где $\eta(d)$ есть модуль непрерывности функции φ и d — диаметр покрытия.

Пусть G — произвольный ориентированный граф и функция $A = (a[ij])$ — произвольное распределение чисел на дугах графа. Усреднение функции над $\omega = \{z_0, z_1, \dots, z_p\}$ конечным путем есть среднее арифметическое

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p a[z_{k-1}z_k].$$

В частности, если $\omega = \{z_1, \dots, z_p = z_0\}$ является периодическим путем, то $\lambda(\omega)$ есть среднее значение функции на периоде.

Определение 4 Спектр усреднения функции на графе есть предельное множество усреднений над периодическими путями:

$$\Sigma(G) = \{\lambda \mid \exists \text{ периодические пути } \omega_n : \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\omega_n)\}.$$

Периодический путь $z = \{i_k, 0 \leq k \leq n, i_n = i_0\}$ назовем простым или циклом, если его вершины $i_k, 0 < k \leq n$ различны. Число простых путей конечно, т.к. число вершин конечно. Пусть H класс эквивалентных возвратных вершин на символическом образе и

$$\lambda_{\min}(H) = \min\{\lambda(\psi_s), s = 1, \dots, q\},$$

$$\lambda_{\max}(H) = \max\{\lambda(\psi_s), s = 1, \dots, q\}$$

есть минимум и максимум усреднений над простыми периодическими путями класса H . Следующая теорема позволяет вычислить спектр символического образа и спектр усреднения функции над псевдотраекториями системы с любой точностью.

Теорема 4 [4]

- Спектр функции на символическом образе $\Sigma(G)$ состоит из отрезков $[\lambda_{\min}(H_k), \lambda_{\max}(H_k)]$, где $\{H_k\}$ есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин символического образа G .
- Спектр Σ усреднения функции φ лежит в расширенном спектре Σ^* оснащенного символического образа, который состоит из отрезков $[\lambda_{\min}(H_k) - \eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \eta(d)]$, где $\{H_k\}$ есть полное семейство классов эквивалентных возвратных вершин, d - диаметр покрытия и $\eta(\cdot)$ - модуль непрерывности функции φ .
- Если диаметр покрытия $d \rightarrow 0$, то расширенный спектр Σ^* и спектр символического образа $\Sigma(G)$ сходятся к Σ в метрике Хаусдорфа.

Метрика Хаусдорфа. Пусть X и Y подмножества компакта K и $\rho(x, y)$ — расстояние на K . Расстояние между множествами $dist(X, Y) = \sup\{\rho(x, Y), \rho(y, X) : x \in X, y \in Y\}$, где $\rho(x, Y) = \inf\{\rho(x, y) : y \in Y\}$. Если $X \subset Y$, то $\rho(x, Y) = 0$ и $dist(X, Y) = \sup\{\rho(y, X) : y \in Y\}$

Таким образом, для вычисления спектра усреднения функции надо найти компоненты сильной связности символического образа, вычислить $\lambda_{\min}(H)$ и $\lambda_{\max}(H)$ для каждого компонента H . При этом, точность вычисления оценивается модулем непрерывности функции φ и диаметром покрытия d .

6 Экстремальные циклы

Пусть матрица $A = (a[ij])$ задает оснащение графа G , т.е. каждому ребру $e = i \rightarrow j$ сопоставляется действительное число $a[ij]$. Задача состоит в том,

что надо найти цикл (простой замкнутый путь) $c = \{i_0, i_1, \dots, i_p = i_0\}$, для которого среднее значение оснащения

$$\eta = \frac{\sum_{k=1}^p a[i_k i_{k+1}]}{p}$$

достигает максимального или минимального значения. Такой цикл назовем экстремальным. В работах [19, 20, 21, 22] рассмотрены методы решения этой задачи. Существуют два подхода к решению поставленной задачи. Первый основан на линейном программировании и сводится к вычислению потенциалов для каждой вершины, поэтому мы будем его называть методом потенциала. Впервые такой метод предложен И.В.Романовским [19]. Другой подход предложен R. M. Карп'ом [21] и сводится к вычислению некоторой величины (минимального веса) для путей длины n , где n — число вершин графа. В работе [23] рассмотрен алгоритм R. A. Новард'а, который относится к первому типу. Показано численно, что на больших графах алгоритм потенциала имеет преимущество перед алгоритмом Карп'а. Ниже излагается алгоритм R. A. Новард'а.

Будем решать задачу нахождения цикла $c = \{i_0, i_1, \dots, i_p = i_0\}$ с максимальным средним значением $\eta = \frac{\sum_{k=1}^p a[i_k i_{k+1}]}{p}$. Стратегией назовем отображение π , которое каждой вершине i сопоставляет некоторую дугу $\pi_i = (i \rightarrow j)$ графа G . Таким образом, стратегия определяет некоторый подграф $G(\pi)$, имеющий те же вершины. Из каждой вершины i есть только один выход по дуге π_i . Не трудно доказать, что на подграфе $G(\pi)$ существует цикл. Движение вперед на $G(\pi)$ определяется однозначно и допускает бесконечное число шагов, поэтому всякий периодический путь является простым или циклом. Движение в обратную сторону (противоположную ориентации) допускает неоднозначность или ветвления, движение назад допускает конечное число шагов. Из каждой вершины достигим только один цикл, т. к. в противном случае появляется вершина с несколькими выходами, что невозможно на $G(\pi)$.

Первая часть алгоритма при фиксированной стратегии π , определяет числа η_i, x_i для каждой вершины i , где η_i — оценка для искомого среднего значения. Величину x_i можно назвать потенциалом, т.к. только разность значений $x_i - x_j$ однозначно определяется в условиях задачи.

1. Фиксируем любой цикл $c = \{i_0, i_1, \dots, i_p = i_0\}$ на $G(\pi)$ и определим среднее значение

$$\eta = \frac{\sum_{k=1}^p a[i_k i_{k+1}]}{p}.$$

2. Фиксируем вершину i на c , полагаем $\eta_i = \eta$ и $x_i = 0$.
3. Посещаем все вершины j , из которых достижима вершина i (по выбранной стратегии), при этом посещаем вершины j в обратном порядке стратегии π , начиная с $k = i$, полагаем

$$\begin{aligned}\eta_j &= \eta, \\ x_j &= w(j \rightarrow k) - \eta + x_k.\end{aligned}$$

4. Если существует непустое множество вершин $V^* = \{j\}$, из которых не достижима i , то повторяем описанный алгоритм на подграфе с вершинами V^* .

Таким образом, каждая вершина i получает пару (η_i, x_i) .

Вторая часть алгоритма меняет стратегию, чтобы увеличить среднее значение η .

1. Полагаем

$$\begin{aligned}J &= \{i : \max_{i \rightarrow j} \eta_j > \eta_i\}, \\ K(i) &= \arg \max_{i \rightarrow j} \eta_j, \quad i = 1, \dots, n, \\ I &= \{i : \max_{(i \rightarrow j) \in K(i)} (w(i \rightarrow j) - \eta_j + x_j) > x_i\} \\ L(i) &= \arg \max_{(i \rightarrow j) \in K(i)} (w(i \rightarrow j) - \eta_j + x_j), \quad i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Здесь $\arg \max_e f(e)$ есть множество элементов e^* , на которых реализуется $\max: f(e^*) = \max_e f(e)$.

2. Если $J = \emptyset$ и $I = \emptyset$, то алгоритм закончен.
3. (а) Если $J \neq \emptyset$, мы меняем стратегию, полагая

$$\pi^*(i) = \begin{cases} \text{любомu } (i \rightarrow j) \text{ из } K(i) & \text{если } i \in J, \\ \pi(i) & \text{если } i \notin J. \end{cases}$$

- (б) Если $J = \emptyset$, но $I \neq \emptyset$, мы меняем стратегию, полагая

$$\pi^*(i) = \begin{cases} \text{любомu } (i \rightarrow j) \text{ из } L(i) & \text{если } i \in I, \\ \pi(i) & \text{если } i \notin J. \end{cases}$$

Затем переходим к первой части алгоритма.

После завершения алгоритма (реализуется пункт 2 второй части алгоритма) мы имеем стратегию π , для каждой вершины i на $G(\pi)$ определена пара значений $\{\eta_i, x_i\}$, где $\eta_i = \eta$ есть искомое среднее значение на цикле, который лежит в $G(\pi)$.

Пример 4: вычисление спектра Морса.

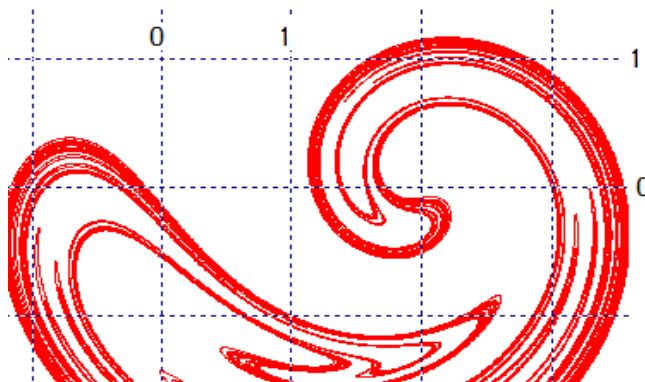


Рис. 2: Часть аттрактора модифицированного отображения Икеды

Ниже приведен пример из работы [24], где вычислен спектр Морса и показана гиперболичность нетривиального инвариантного множества динамической системы на плоскости. Рассмотрим модифицированное отображение Икеды:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d + a(x \cos \tau(x, y) - y \sin \tau(x, y)) \\ b(x \sin \tau(x, y) + y \cos \tau(x, y)) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\tau(x, y) = 0.4 - \frac{6}{1 + x^2 + y^2}, \quad (9)$$

где $d > 0$, $0 < a < 1$, $0 < b < 1$. Отображение обладает свойством сжатия площадей. При $d = 2$, $a = -0.9$, $b = 0.9$ это отображение меняет ориентацию и имеет глобальный аттрактор A_g (см. рис. 2) в области $M = [-10, 10] \times [-10, 10]$. Существует единственная гиперболическая неподвижная точка $H(1.3815, -2.4746)$. Кроме того, отображение имеет единственную 2-периодическую траекторию $P_2 = \{(0.2338, -0.7031), (1.9995, 0.6681)\}$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекаются и образуют гомоклинический цикл.

Если спектр Морса не содержит нуля, то цепно-рекуррентное множество системы является гиперболическим. Вычисления показывают, что аттрактор A_g не является гиперболическим. Нам хотелось найти нетривиальное инвариантное множество, которое окажется гиперболическим. Мы рассмотрели

часть этого аттрактора, а именно, максимальное цепно-рекуррентное множество Ω_0 в области $M = [-1.1, 3.5] \times [-1.5, 1.8]$, см. рис. 2. Применение ранее описанной техники локализации цепно-рекуррентного множества дает следующие результаты. При начальном разбиении множества M , стартовые размеры ячейки были 0.46×0.33 . После нескольких подразбиений (при размерах ячейки 0.0071×0.0051) окрестность цепно-рекуррентного множества Ω_0 распадается на две компоненты Ω_1 и Ω_2 , соответствующие двум компонентам сильной связности на символическом образе.

Инвариантное множество Ω_1 оказалось 6-периодической орбитой. Для лучшей локализации в базе проведено несколько подразбиений до момента, когда размеры ячейки составили 0.00045×0.00032 . Построение оснащенного символического образа проводилось до момента, пока размер ячейки в проективном пространстве (угол) не стал равен 0.0003 . При таких данных расстояние между спектром Морса исходной системы и спектром символического образа не превосходит 0.01 . В результате вычислений на проективном расслоении получены две компоненты и спектр Морса над множеством Ω_1 содержится в объединении интервалов $[0.522, 0.523]$ и $[-0.734, -0.733]$. Это означает, что расширенный спектр состоит из отрезков $[0.512, 0.533]$ и $[-0.744, -0.723]$. Эти отрезки содержат спектр Морса на инвариантном множестве Ω_1 , отсюда следует, что Ω_1 является 6-периодической гиперболической траекторией. Эти вычисления были проверены прямым вычислением показателей Ляпунова 6-периодической траектории Ω_1 .

Инвариантное множество Ω_2 оказалось нетривиальным канторовым множеством. Подразбиения на плоскости проводились до размера ячейки 0.00089×0.00058 . Затем строились итерации оснащенного символического образа до размера ячейки по углу 0.00038 . Аналогично вычислениям для первой компоненты, при таких данных спектр Морса исходной системы отличается от спектра символического образа на 0.01 . В результате получены два интервала $[0.632, 0.793]$ и $[-1.004, -0.843]$, которые являются расширенными интервалами оснащенного символического образа. Спектр Морса множества Ω_2 лежит в построенных интервалах. Эти интервалы не содержат нуля, следовательно, множество Ω_2 является гиперболическим и Ω -устойчивым, т.е. оно будет сохраняться при C^1 -возмущениях системы.

7 Заключение

Описана компьютерно ориентированная технология вычисления спектра усреднения функции над траекториями компактной динамической системы. Спектр усреднения состоит из отрезков, каждый из которых порожден компонентой цепно-рекуррентного множества. Инструментом предложенного метода является символический образ динамической системы, который является ориентированным графом, построенным для покрытия фазового пространства замкнутыми ячейками. Допустимые пути символического образа соответствуют траекториям системы. Компоненты сильной связности графа дают окрестность цепно-рекуррентного множества системы. Заданная функция порождает оснащение символического образа. Таким образом, вычисление спектра усреднения функции сводится к вычислению средних на экстремальных циклах символического образа. Показано, что существуют алгоритмы теории графов, которые позволяют локализовать компоненты цепно-рекуррентного множества динамической системы и вычислить наибольшие средние и наименьшие средние для каждой компоненты сильной связности. Это дает возможность вычислить спектр усреднения функции над траекториями данной системы. Точность вычисления определяется диаметром ячеек покрытия и модулем непрерывности заданной функции. Приведенные примеры показывают, что предложенный метод работает в реальном времени.

Список литературы

- [1] J. Robbin. A structural stability theorem.// Ann. Math. v. 94 (1971), no. 3, 447-493.
- [2] C. Robinson. Structural stability of C^1 -diffeomorphism.// J. Differential Equations. v. 22 (1976), no. 1, 28-73.
- [3] R. Mane. A proof of the C^1 stability conjecture.// Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. v. 66 (1988), 161-610.
- [4] Г. С. Осипенко. Спектр усреднения функции над псевдотраекториями динамической системы.// Математический сборник. 2018 т. 209, № 8, 114–137.
- [5] M. Shub. Stabilite globale de systems denamiques.// Asterisque. v. 56 (1978), 1-21.

- [6] George Osipenko. Symbolic Image, Hyperbolicity, and Structural Stability.// Journal of Dynamics and Differential Equations. v. 15 (2003), no. 213, 427 – 450.
- [7] George Osipenko. Dynamical systems, Graphs, and Algorithms. Lectures Notes in Mathematics. v. 1889, Berlin, Springer, 2007.
- [8] V. Avrutin, P. Levi, V. Schanz, D. Fundinger, and G. Osipenko. Investigation of dynamical systems using symbolic images: efficient implementation and applications.// International J. of Bifurcation and Chaos. v. 16, no. 12 (2006), 3451-3496.
- [9] Lind Douglas, Marcus Brian. An introduction to symbolic dynamics and coding. Cambridge University Press, 1995.
- [10] C. Robinson. Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos. CRC-Press, 1995.
- [11] C. S. Hsu. Cell-to-Cell Mapping. N.Y., Springer-Verlag, 1987.
- [12] Г. С. Осипенко О символическом образе динамической системы.// Краевые задачи. Пермский политех. институт. Пермь. 1983. 101-105.
- [13] В. В. Прасолов. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. Москва. Изд. МЦНМО. 2004.
- [14] G.S. Osipenko. Localization of the chain recurrent set by symbolic dynamics methods Proceedings of Dynamics Systems and Applications. 1994. Dynamic Publishers Inc, 227 – 282.
- [15] Danny Fundinger. Investigating Dynamics by Multilevel Phase Space Discretization. PhD thesis. Stuttgart University. 2006.
- [16] Е. И. Петренко. Компьютерное исследование динамических систем на основе метода символического образа. Диссертация канд. ф.м.н. Санкт-Петербургский университет. 2009.
- [17] R. Tarjan. Depth-first search and linear graph algorithms.// SIAM Journal on Computing. 1. 146-160, 1972.
- [18] С. Писсанецки. Технология разреженных матриц. Мир, М., 1988.
- [19] И. В. Романовский. Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом.// Кибернетика. N. 2, 1967, с.66-78.

- [20] И. В. Романовский. Алгоритмы решения экстремальных задач. Изд. Наука. Москва. 1977.
- [21] R. M. Karp. A characterization of the minimum mean-cycle in a digraph.// Discrete Mathematics. 23 (1978), 309-311.
- [22] L. Georgiadis, A.V. Goldberg, R.E. Tarjan, R.F. Werneck. An experimental study of minimum mean cycle algorithms. Proc. 6th International Workshop on Algorithm Engineering and Experiments, ALENEX 2009, 1–13.
- [23] J. Cochet-Terrason, G. Cohen, S. Gaubert, M. McGettrick, J.-P. Quadrat. Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra. IFAC Conference on System Structure and Control. July 8-10. 1998.
- [24] G.S. Osipenko, J.V. Romanovsky, N.B. Ampilova, and E.I Petrenko.// Computation of the Morse Spectrum. Journal of Mathematical Sciences. 2004. v. 120:2 (2004), 1155 – 1166.

On a computer oriented method of the calculation of the spectrum of the function averaging

George Osipenko

Branch of Lomonosov Moscow State University in Sevastopol

george.osipenko@mail.ru

Abstract. A discrete dynamical system and a continuous function are considered. Averaging over a periodic ε -trajectory is the average value of the function for the period. The limit set of averages values over periodic ε -trajectories at $\varepsilon \rightarrow 0$ is called the spectrum of the function averaging. It is known that the spectrum consists of segments, and each segment is generated by a component of the chain-recurrent set. A computer oriented method is presented that allows one to calculate the spectrum of averaging. The example of calculation of the Morse spectrum is considered.

Keywords: pseudotrajectory, chain-recurrent component, symbolic image, averaging on a graph, component of strong connectivity, extreme cycles.