ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 3, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Интегро-дифференциальные системы

Метод регуляризации для сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем с двумя независимыми переменными

А.А.Бободжанов, В.Ф.Сафонов
Национальный исследовательский университет МЭИ

Аннотация. В работе метод регуляризации Ломова обобщается на интегродифференциальные уравнения в частных производных типа Вольтерра с двумерным интегральным оператором. Рассматривается случай, когда оператор дифференциальной части зависит только от переменной дифференцирования. При этом, в отличие от работ М. Иманалиева, в которых исследуется только предельный переход при стремлении малого параметра к нулю, в настоящей работе центральное внимание уделяется построению регуляризованного асимптотического решения любого порядка (по малому параметру). Отметим, что метод регуляризации Ломова применялся в основном для обыкновенных сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнений (см. подробную библиографию в конце статьи). В одной из работ авторов был рассмотрен случай уравнения в частных производных с одномерным интегральным оператором. Разработка этого метода для систем уравнений в частных производных с двумерным интегральным оператором ранее не проводилась. В работе рассматривается и решается также “проблема инициализации”, т. е. проблема выбора исходных данных задачи, при которых предельный переход в ее решении (в равномерной метрике, на всем рассматриваемом множестве независимых переменных, включая и зону пограничного слоя) становится возможным.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, пограничный слой, интегро-дифференциальное уравнение, проблема инициализации.

1 Введение

Рассмотрим систему интегродифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \varepsilon\frac{\partial y(t,x,\varepsilon)}{\partial t}=A\left(t\right)y\left(t,x,\varepsilon\right)+\int_0^x\int_0^t Q\left(t,x,s,v\right)y\left(s,v,\varepsilon\right)dsdv+h\left(t,x\right), \\ y\left(0,x,\varepsilon\right)=y^0\left(x\right)\ \ \left(\left(t,x\right)\in\left[0,T\right]\times\left[0,X\right]\right). \end{gathered} \tag{1}$$

с двумерным интегральным оператором

$$\int_0^x\int_0^t Q\left(t,x,s,v\right)y\left(s,v,\varepsilon\right)dsdv\equiv\int_0^x\left(\int_0^t Q\left(t,x,s,v\right)y\left(s,v,\varepsilon\right)ds\right)dv.$$

Можно было бы добавить в правой части слагаемое

$$\int_0^x K\left(t,x,s\right)y\left(s,x,\varepsilon\right)ds$$

с одномерным интегралом, но это повлекло бы лишь дополнительные вычислительные трудности, оставляя неизменными идеи, используемые в дальнейшем при разработке алгоритма регуляризованных асимптотических решений для задачи (1). Аналогичное уравнение рассматривалось в монографии [4] (стр. 52-61) при наличии скалярного коэффициента $A\equiv K(t,x)$, зависящего от двух переменных x и t. Однако в [4] дальше изучения предельного перехода при $\varepsilon\to+0$ дело не дошло. Вопрос о построении асимптотического решения (любого порядка по ε) даже не обсуждался. Кроме того, в [4] коэффициент $K(t,x)$ предполагается строго отрицательным, тогда как в нашей работе (см. ниже условие $2\,b$) этот коэффициент может быть чисто мнимым. В этом случае предельный переход при $\varepsilon\to+0$ в равномерной метрике в решении исходной системы невозможен. Поэтому в нашей работе изучается "проблема инициализации", т. е. проблема выбора исходных данных задачи, при которых предельный переход в равномерной метрике становится возможным.

Отметим, что по сравнению с работами [8,9] , где рассматриваются аналогичные задачи с одномерным интегральным оператором, регуляризация двумерного интеграла проводится по более сложной схеме, учитывающей наличие двух независимых переменных, что сказывается затем на конструкции соответствующих итерационных задач (см. ниже задачи (10_k)), где главный оператор $\mathscr{L}$ содержит уже двумерный интеграл вместо одномерного, как это было в упомянутых работах [8,9]. В силу этого автоматический перенос идей работ [8,9], реализованных при развитии теории нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач, вряд ли возможен и требует тщательной коррекции. Кроме того, весьма нетривиальным является вопрос об обосновании асимптотической сходимости формальных решений к точному. Если в случае одномерного интеграла это обоснование проводится сравнительно легко с помощью известной теоремы Гронуолла-Беллмана, то для уравнений в частных производных для обоснования асимптотической сходимости эта теорема ничего не дает, поэтому приходится использовать технику интегральных неравенств с двумя независимыми переменными, изложенную в монографии [6]. И наконец, переходя к рассмотрению системы (1), отметим что аналогичная задача в скалярном случае рассматривалась в работе [7].

2 Регуляризация задачи (1)

Не умаляя общности, можно считать, что $T = X = 1$. Введем некоторые ограничения на исходные данные задачи (1). Будем предполагать выполненными следующие условия:

1) $A(t) \in C^{\infty}([0,1], \mathbb{C}^{n\times n})$, $h(t,x) \in C^{\infty}([0,1]\times[0,1], \mathbb{C}^{n})$, начальная функция $y^0(x) \in C^{\infty}([0,1], \mathbb{C}^{n})$; ядро $Q(t,x,s,v)$ принадлежит пространству $C^{\infty}(0 \le s \le t \le 1,\, 0 \le v \le x \le 1, \mathbb{C}^{n\times n})$;

2) собственные значения $\lambda_j(t)$ матрицы $A(t)$ при каждом $t \in [0,1]$ удовлетворяют требованиям:

$$\begin{aligned} &a)\ \lambda_i(t) \neq \lambda_j(t),\ i \neq j,\ \lambda_i(t) \neq 0,\ i,j = \overline{1,n};\\ &b)\ \operatorname{Re}\lambda_i(t) \le 0,\ i = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Следуя методу С.А. Ломова [2,3], введем регуляризирующие переменные

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta)\, d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

и для функции $\tilde{y}(t,x,\tau,\varepsilon)$ поставим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\tfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \textstyle\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\tfrac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau_j} - A(t)\tilde{y} - \int_0^x\int_0^t Q(t,x,s,v)\,\tilde{y}\left(s,v,\tfrac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)dsdv =\\ &= h(t,x),\quad \tilde{y}(0,x,0,\varepsilon) = y^0(x)\quad (\psi = (\psi_1,\dots,\psi_n)). \end{aligned} \tag{3}$$

Связь задачи (3) с исходной задачей (1) такова: если $\tilde{y} = \tilde{y}\,(t, x, \tau, \varepsilon)$ — решение задачи (3), то его сужение $y\,(t, x, \varepsilon) \equiv \tilde{y}\left(t, x, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ на регуляризирующих функциях (2) будет, очевидно, точным решением исходной задачи (1). Однако задачу (3) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не произведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde{y} = \int_0^x \int_0^t Q\,(t, x, s, v)\,\tilde{y}\left(s, v, \frac{\psi\,(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) dsdv.$$

Для его регуляризации надо ввести, как известно (см. [2], стр. 62), пространство M_ε, асимптотически инвариантное относительно оператора J. Введем класс

$$U = \{y\,(t, x, \tau) : \; y = \textstyle\sum_{j=1}^{n} y_j\,(t, x)\,e^{\tau_j} + y_0\,(t, x)\,,$$
$$y_0\,(t, x)\,,\; y_j\,(t, x) \in C^\infty\left([0, 1] \times [0, 1]\,, \mathbb{C}^n\right),\; j = \overline{1, n}\}.$$

Тогда сужение этого класса при $\tau = \psi\,(t)\,/\varepsilon$ и будет пространством M_ε. Для обоснования этого факта надо показать, что образ $Jy\,(t, x, \tau)$ интегрального оператора J на элементе пространства U представим в виде степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{(k)}\,(t, x)\,e^{\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}} + y_0^{(k)}\,(t, x)\right),$$

сходящегося асимптотически при $\varepsilon \to +0$ (равномерно по $(t, x) \in [0, 1] \times \times [0, 1]$). Займемся этим вопросом.

Рассмотрим образ интегрального оператора на элементе $y\,(t, x, \tau)$ пространства U :

$$Jy\,(t, x, \tau) = \int_0^x \int_0^t Q\,(t, x, s, v) \sum_{j=1}^{n} y_j\,(s, v) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta} dsdv +$$

$$+ \int_0^x \int_0^t Q\,(t, x, s, v)\,y_0\,(s, v)\,dsdv.$$

К интегралу $\int_0^x \int_0^t Q\,(t, x, s, v)\,y_j\,(s, v) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta} dsdv$ применим операцию интегрирования по частям:

$$\int_0^x \int_0^t Q\,(t, x, s, v)\,y_j\,(s, v) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta} dsdv =$$

$$= \varepsilon \int_0^x dv \int_0^t \frac{Q\,(t, x, s, v)\,y_j\,(s, v)}{\lambda_j\,(s)} d_s(e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta}) =$$

$$= \varepsilon \int_0^x \Big(\frac{Q\left(t,x,s,v\right) y_j\left(s,v\right)}{\lambda_j\left(s\right)} \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta}\big|_{s=0}^{s=t} -$$

$$- \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q\left(t,x,s,v\right) y_j\left(s,v\right)}{\lambda_j\left(s\right)} \right) \Big) dv =$$

$$\begin{array}{l} = \varepsilon \int_0^x \left[\frac{Q(t,x,t,v) y_j(t,v)}{\lambda_j(t)} \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta)d\theta} - \frac{Q(t,x,0,v) y_j(0,v)}{\lambda_j(0)} \right] dv - \\ -\varepsilon \int_0^x \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{Q(t,x,s,v) y_j(s,v)}{\lambda_j(s)} \right) ds dv. \end{array}$$

Вводя обозначение

$$I_j^0 \left(Q\left(t,x,s,v\right) y_j\left(s,v\right) \right) \equiv \frac{Q\left(t,x,s,v\right) y_j\left(s,v\right)}{\lambda_j\left(s\right)},$$

запишем последний результат в виде

$$\begin{array}{l} \int_0^x \int_0^t Q\left(t,x,s,v\right) y_j\left(s,v\right) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta} ds dv = \\ = \varepsilon \left(\int_0^x \left(I_j^0 \left(Q\left(t,x,s,v\right) y_j\left(s,v\right) \right) \right)_{s=t} dv \right) \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta)d\theta} - \\ -\varepsilon \left(\int_0^x \left(I_j^0 \left(Q\left(t,x,s,v\right) y_j\left(s,v\right) \right) \right)_{s=0} dv \right) - \\ -\varepsilon \int_0^x \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \lambda_j(\theta)d\theta} \frac{\partial}{\partial s} \left(I_j^0 \left(Q\left(t,x,s,v\right) y_j\left(s,v\right) \right) \right) ds dv. \end{array}$$

Продолжая эту процедуру далее, получим разложение

$$\begin{array}{l} Jy\left(t,x,\tau\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \varepsilon^{\nu+1} [\left(\int_0^x \left(I_j^{\nu} \left(Q\left(t,x,s,v\right) y_j\left(s,v\right) \right) \right)_{s=t} dv \right) \times \\ \times e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_j(\theta)d\theta} - \left(\displaystyle\int_0^x \left(I_j^{\nu} \left(Q\left(t,x,s,v\right) y_j\left(s,v\right) \right) \right)_{s=0} dv \right)] + \\ + \displaystyle\int_0^x \int_0^t Q\left(t,x,s,v\right) y_0\left(s,v\right) ds dv, \end{array} \tag{4}$$

где введены операторы:

$$\begin{array}{l} I_j^0 \left(q\left(t,x,s,v\right) \right) \equiv \frac{q(t,x,s,v)}{\lambda_j(s)},\ I_j^1 \left(q\left(t,x,s,v\right) \right) \equiv \frac{1}{\lambda_j(s)} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \frac{q(t,x,s,v)}{\lambda_j(s)}, ..., \\ I_j^{\nu} \left(q\left(t,x,s,v\right) \right) \equiv \frac{1}{\lambda_j(s)} \cdot \frac{\partial}{\partial s} I_j^{\nu-1} \left(q\left(t,x,s,v\right) \right),\ \nu = 2,3,4,...\ . \end{array} \tag{5}$$

Так же, как и в [1], показываем, что ряд (4) сходится асимптотически (при $\varepsilon \to +0$) равномерно по $(t,x) \in [0,T] \times [0,T]$. Для любого элемента

$$y\left(t,x,\tau\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j\left(t,x\right) e^{\tau_j} + y_0\left(t,x\right)$$

пространства U введем операторы

$$R_0 y\left(t,x,\tau\right)=\int_0^x\int_0^t Q\left(t,x,s,v\right)y_0\left(s,v\right)dsdv,$$
$$R_{\nu+1}y\left(t,x,\tau\right)=\left(-1\right)^{\nu}\sum_{j=1}^n[\left(\int_0^x\left(I_j^{\nu}\left(Q\left(t,x,s,v\right)y_j\left(s,v\right)\right)\right)_{s=t}dv\right)\cdot e^{\tau_j}-$$
$$-\left(\int_0^x\left(I_j^{\nu}\left(Q\left(t,x,s,v\right)y_j\left(s,v\right)\right)\right)_{s=t}dv\right)],\quad \nu\geq 0, \tag{6}$$

действующие из U в U. Тогда формальным расширением интегрального оператора J на рядах

$$\tilde{y}\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k\left(t,x,\tau\right), \tag{7}$$

сходящихся асимптотически (при $\varepsilon\to 0+$) равномерно по $(t,x,\tau)\in[0,1]\times\times[0,1]\times\left\{\mathrm{Re}\,\tau_\mathrm{j}<\Delta,\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{n}}\right\}$ ($\Delta>0$ — (малая) постоянная), естественно считать оператор

$$\tilde{J}\tilde{y}\equiv\tilde{J}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k\left(t,x,\tau\right)\right)\triangleq\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left(\sum_{k=0}^{r}R_{r-k}y_k\left(t,x,\tau\right)\right). \tag{8}$$

Теперь нетрудно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к (1):

$$\begin{gathered}\mathscr{L}_{\varepsilon}\tilde{y}\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)\equiv\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\sum_{j=1}^n\lambda_j\left(t\right)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j}-A\left(t\right)\tilde{y}-\tilde{J}\tilde{y}=h\left(t,x\right),\\ \tilde{y}\left(0,x,0,\varepsilon\right)=y^0\left(x\right),\end{gathered} \tag{9}$$

где $\tilde{y}\left(t,x,\tau,\varepsilon\right)$ — ряд (7).

3 Разрешимость итерационных задач

Подставляя этот ряд (7) в (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие итерационные задачи:

$$\begin{gathered}\mathscr{L}\,y_0\left(t,x,\tau\right)\equiv\sum_{j=1}^n\lambda_j\left(t\right)\frac{\partial y_0}{\partial\tau_j}-A\left(t\right)y_0-R_0y_0=h\left(t,x\right),\\ y_0\left(0,x,0\right)=y^0\left(x\right);\end{gathered} \tag{10_0}$$

$$\mathscr{L}\,y_1\left(t,x,\tau\right)=-\tfrac{\partial y_0}{\partial t}+R_1y_0,\quad y_1\left(0,x,0\right)=0; \tag{10_1}$$

...

$$\mathscr{L}\ y_k(t,x,\tau) = -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} + R_1 y_{k-1} + ... + R_k y_0, \quad y_k(0,x,0) = 0,\ k \geq 1. \quad (10_k)$$

Каждая из итерационных задач (10_k) имеет вид

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}\ y(t,x,\tau) \equiv \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) \frac{\partial y}{\partial \tau_j} - A(t)\,y - R_0 y = H(t,x,\tau), \\ &y(0,x,0) = y_*(x), \end{aligned} \qquad (11)$$

где $H(t,x,\tau) = \sum_{j=1}^{n} H_j(t,x)\,e^{\tau_j} + H_0(t,x) \in U$, $y_*(x) \in C^\infty([0,1], \mathbb{C}^n)$ — известные функции, а оператор $R_0 y$ имеет вид (см. (6))

$$R_0 y(t,x,\tau) = \int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\,y_0(s,v)\,dsdv.$$

Попробуем решить задачу (11). Подставляя элемент

$$y(t,x,\tau) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t,x)\,e^{\tau} + y_0(t,x)$$

пространства U в (11), будем иметь

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j(t)\,I - A(t))\,y_j(t,x)\,e^{\tau_j} - A(t)\,y_0(t,x) - \\ &-\textstyle\int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\,y_0(s,v)\,dsdv = \sum_{j=1}^{n} H_j(t,x)\,e^{\tau_j} + H_0(t,x). \end{aligned}$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим уравнения

$$\begin{aligned} &(\lambda_j(t)\,I - A(t))\,y_j(t,x) = H_j(t,x),\ j = \overline{1,n}; \\ &-A(t)\,y_0(t,x) = \textstyle\int_0^x \left(\int_0^t Q(t,x,s,v)\right) y_0(t,v)\,dsdv + H_0(t,x). \end{aligned} \qquad (12)$$

Обозначим через $\varphi_j(t)$ — $\lambda_j(t)$-собственный вектор матрицы $A(t)$, а через $\chi_j(t)$ — $\bar{\lambda}_j(t)$-собственный вектор матрицы $A^*(t)$, причем системы векторов $\{\varphi_j(t)\}$ и $\{\chi_k(t)\}$ возьмем биортонормированными, т. е.

$$A(t)\,\varphi_j(t) \equiv \lambda_j(t)\,\varphi_j(t), A^*(t)\,\chi_k(t) \equiv \bar{\lambda}_k(t)\,\chi_k(t),\ (\varphi_j(t), \chi_k(t)) = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера $j,k = \overline{1,n}$. Перейдем теперь к системам (12).

Для разрешимости первой системы (12) при фиксированном $j \in \{1, ..., n\}$ в пространстве $C^\infty([0,1] \times [0,1], \mathbb{C}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (см.[1], с. 109-111)

$$(H_j(t,x), \chi_j(t)) \equiv 0 \ \ (\forall (x,t) \in [0,1] \times [0,1]). \tag{13}$$

Вторая система (12) является интегральной системой Вольтерра второго рода с гладким ядром $-A^{-1}(t) Q(t,x,s,v)$, поэтому оно имеет единственное решение в пространстве $C^\infty([0,1] \times [0,1])$ (см., например, [5, с. 149]). Если ввести в пространстве U скалярное (при каждом $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$) произведение

$$\begin{aligned}&< y(t,x,\tau), z(t,x,\tau) > \equiv \\ &\equiv < \textstyle\sum_{j=1}^n y_j(t,x) e^{\tau_j} + y_0(t,x), \sum_{j=1}^n z_j(t,x) e^{\tau_j} + z_0(t,x) > \triangleq \\ &\triangleq \textstyle\sum_{j=0}^n (y_j(t,x), z_j(t,x)),\end{aligned}$$

где $(,)$ — обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, то из предыдущих рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (11) правая часть $H(t,x,\tau) \in U$ и выполнены условия 1) и 2). Тогда для разрешимости уравнения (10) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы имели место условия (13). При выполнении этого условия уравнение (11) имеет следующее решение в пространстве U:*

$$\begin{aligned}y(t,x,\tau) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j(t,x) \varphi_j(t) e^{\tau_j} - \\ &- \int_0^x \int_0^t \mathscr{R}(t,x,s,v) A^{-1}(s) H_0(s,v)\, ds dv - A^{-1}(t) H_0(t,x),\end{aligned} \tag{14}$$

где $\mathscr{R}(t,x,s,v)$ — резольвента ядра $G(t,x,s,v) = -A^{-1}(s) H_0(s,v)$, $\alpha_j(t,x)$ — произвольные функции класса $C^\infty\left([0,1] \times [0,1], \mathbb{C}^1\right)$ $j = \overline{1,n}$.

Подчиним решение (14) начальному условию $y(0,x,0) = y_*(x)$. Будем иметь

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j=1}^n \alpha_j(0,x) \varphi_j(0) - A^{-1}(0) H_0(0,x) = y_*(x) \Leftrightarrow \\ &\alpha_j(0,x) = \left(A^{-1}(0) H_0(0,x) + y_*(x), \chi_j(0)\right), \ j = \overline{1,n}.\end{aligned} \tag{15}$$

Однако функции $\alpha_j(t,x)$ не найдены полностью. Необходимо дополнительное требование на решение задачи (11). Такое требование диктуют итерационные задачи (10_k), из которых видно, что естественным дополнительным ограничением является условие

$$< -\frac{\partial y}{\partial t} + R_1 y + P\left(t,x,\tau\right), \chi_j\left(t\right) e^{\tau_j} > \equiv 0 \left(\forall \left(t,x\right) \in [0,1] \times [0,1]\,,\ j = \overline{1,n}\right), \tag{16}$$

где $P\left(t,x,\tau\right) \in U$ — известная вектор-функция. Покажем, что при выполнении требования (16) задача (11) имеет единственное решение в пространстве U.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1)–2) и правая часть $H\left(t,x,\tau\right) \in \in U$ удовлетворяет условию ортогональности (13). Тогда задача (11) при дополнительном условии (16) однозначно разрешима в пространстве U.*

Доказательство. Чтобы воспользоваться условием (16), вычислим выражение

$$\begin{array}{l} -\frac{\partial y}{\partial t} + R_1 y + P\left(t,x,\tau\right) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\left(\alpha(t,x)\varphi_j(t)\right)}{\partial t} e^{\tau_j} + \\ +\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^x \int_0^t \mathscr{R}\left(t,x,s,v\right) A^{-1}\left(s\right) H_0\left(s,v\right) dv + A^{-1}\left(t\right) H_0\left(t,x\right)\right) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \int_0^x \left(I_j^0\left(Q\left(t,x,s,v\right)\alpha_j\left(s,v\right)\varphi_j\left(s\right)\right)\right)_{s=t} dv \cdot e^{\tau_j} - \\ - \sum_{j=1}^{n} \int_0^x \left(I_j^0\left(Q\left(t,x,s,v\right)\alpha_j\left(s,v\right)\varphi_j\left(t\right)\right)\right)_{s=0} dv + \\ + \sum_{j=1}^{n} P_j\left(t,x\right) e^{\tau_j} + P_0\left(t,x\right). \end{array}$$

Так как

$$I_j^0\left(Q\left(t,x,s,v\right)\alpha_j\left(s,v\right)\right) = \frac{1}{\lambda_j\left(s\right)} Q\left(t,x,s,v\right)\alpha_j\left(s,v\right),$$

то условие (16) принимает вид

$$\begin{array}{l} -\left(\frac{\partial\left(\alpha_j(t,x)\varphi_j(t)\right)}{\partial t}, \chi_j\left(t\right)\right) + \left(\int_0^x \frac{Q(t,x,t,v)}{\lambda_j(t)}\left(\alpha_j\left(t,v\right)\varphi_j\left(t\right)\right) dv, \chi_j\left(t\right)\right) + \\ + \left(P_j\left(t,x\right), \chi_j\left(t\right)\right) \equiv 0, \ \ j = \overline{1,n}. \end{array}$$

С учётом начального условия (15) эту интегродифференциальную систему можно записать в виде распадающейся эквивалентной интегральной системы:

$$\begin{array}{l} \alpha_j\left(t,x\right) = \alpha_j\left(0,x\right) + \int_0^t \left(\int_0^x \left(\frac{Q(s,x,s,v)}{\lambda_j(s)}\varphi_j\left(s\right), \chi_j\left(s\right)\right)\alpha_j\left(s,v\right) dv\right) ds + \\ + \int_0^t \left(P_j\left(s,x\right) - \dot{\varphi}_j\left(s\right), \chi_j\left(s\right)\right) ds, \ \ j = \overline{1,n}. \end{array} \tag{17}$$

Так как здесь каждое ядро $\left(\frac{Q(s,x,s,v)}{\lambda_j(s)}\varphi_j\left(s\right), \chi_j\left(s\right)\right)$ принадлежит классу

$$C^{\infty}\left(\left\{0 \le s \le t \le 1,\ 0 \le v \le x \le 1\right\}, \mathbb{C}^1\right),$$

то уравнение (17) имеет единственное решение $\alpha(t,x) \in C^{\infty}([0,1]\times[0,1])$. Теорема доказана.

Применяя теоремы 1 и 2 к итерационным задачам (10_k), построим ряд (7) с коэффициентами из класса U. Пусть $y_{\varepsilon N}(t,x) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k y_k \left(t, x, \frac{\psi(x,t)}{\varepsilon}\right)$ — сужение N-й частичной суммы $S_N(t,x,\tau,\varepsilon)$ этого ряда при $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$. Имеет место следующий результат.

Лемма. *Пусть выполнены условия 1)–2). Тогда функция $y_{\varepsilon N}(t,x)$ удовлетворяет задаче (1) с точностью до членов, содержащих ε^{N+1}, т.е.*

$$\varepsilon\frac{\partial y_{\varepsilon N}(t,x)}{\partial t} = A(t)\, y_{\varepsilon N}(t,x) + \int_0^x\int_0^t Q(t,x,s,v)\, y_{\varepsilon N}(s,v)\, ds dv + h(t,x) + \\ +\varepsilon^{N+1} K_N(t,x,\varepsilon),\, y_{\varepsilon N}(0,x) = y^0(x), \tag{18}$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно мало, $||K_N(t,x,\varepsilon)||_{C[0,T]} \le \bar{K}_N, \bar{K}_N > 0$ — постоянная, не зависящая от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_N]$.

Доказательство. Подставим решения

$$y_0(t,x,\tau), y_1(t,x,\tau), \ldots, y_N(t,x,\tau) \in U$$

в системы $(10_0), (10_1), \ldots, (10_N)$ соответственно. Полученные тождества умножим последовательно на $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^N$ и сложим полученные результаты. Будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\frac{\partial S_N(t,x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau_j} + \varepsilon\frac{\partial S_N(t,x,\tau,\varepsilon)}{\partial t} - A(t)\, S_N(t,x,\tau,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{N+1}\frac{\partial y_N(t,x,\tau)}{\partial t} + \\ +R_0 y_0 + \varepsilon(R_0 y_1 + R_1 y_0) + \ldots + \varepsilon^N(R_0 y_N + R_1 y_{N-1} + \ldots + R_N y_0 + h(t,x).$$

Производя здесь сужение при $\tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}$ и вычитая из обеих частей интеграл $\int_0^x\int_0^t Q(t,x,s,v)\, y_{\varepsilon N}(s,v)\, ds dv$, получим тождество

$$\varepsilon\frac{\partial y_{\varepsilon N}(t,x)}{\partial t} - A(t) y_{\varepsilon N}(t,x) - \int_0^x\int_0^t Q(t,x,s,v)\, y_{\varepsilon N}(s,v)\, ds dv \equiv \\ \equiv \varepsilon^{N+1}\frac{\partial y_N(t,x,\frac{\psi(t)}{\varepsilon})}{\partial t} - \Big[\int_0^x\int_0^t Q(t,x,s,v)\, y_{\varepsilon N}(s,v)\, ds dv - \\ - \sum_{r=-3}^{N} \varepsilon^r \sum_{k=0}^{r} R_{r-k} y_k(t,x,\tau)\big|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}\Big] + h(t,x). \tag{19}$$

По построению операторов R_ν выражение в квадратных скобках представляется в виде $\varepsilon^{N+1} l_N(t,\varepsilon)$, где $||l_N(t,x,\varepsilon)||_{C[0,T]} \le \bar{l}_N, \bar{l}_N > 0$ — постоянная, не зависящая от $\varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}_N], \hat{\varepsilon}_N > 0$ — достаточно мало. Учитывая равномерную ограниченность функций $y_j(t,x,\frac{\psi(t)}{\varepsilon})$ при $(t,x,\varepsilon) \in [0,1]\times[0,1]\times\{\varepsilon : \varepsilon > 0\}$, тождество (19) преобразуем к виду

$$\varepsilon\frac{\partial y_{\varepsilon N}(t,x)}{\partial t} \equiv A(t) y_{\varepsilon N}(t,x) +$$

$$+\int_0^x \int_0^t Q\left(t,x,s,v\right) y_{\varepsilon N}\left(s,v\right) dsdv + h(t,x) + \varepsilon^{N+1} K_N(t,x,\varepsilon),$$

где $K_N(t,\varepsilon) \equiv \partial y_{\varepsilon N}(t,x)/\partial t + l_N(t,x,\varepsilon)$, причем $||K_N(t,x,\varepsilon)||_{C[0,T]} \leq$ $\leq \bar{K}_N, \bar{K}_N>0$ — постоянная, не зависящая от ε при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_N]$. Начальные условие $y_{\varepsilon N}(0,x) = y^0(x)$, очевидно, также выполняется. Следовательно, функция $y_{\varepsilon N}\left(t,x\right)$ удовлетворяет задаче (18). Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству основного утверждения.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия 1)–2). Тогда при* $\varepsilon \in \left(0,\varepsilon_0\right]$, *где* $\varepsilon_0 > 0$ *— достаточно мало, задача (1) имеет единственное решение* $y\left(t,x\right)$ *в классе* $C^1\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right],\mathbb{C}^n\right)$ *и имеет место оценка*

$$\left\|y\left(t,x,\varepsilon\right) - y_{\varepsilon N}\left(t,x\right)\right\|_{C([0,1]\times[0,1])} \leq C_N \varepsilon^{N+1} \left(N = 0,1,2,...\right),$$

где постоянная $C_N > 0$ *не зависит от* $\varepsilon \in \left(0,\varepsilon_0\right]$.

Доказательство. Покажем сначала, что задача

$$\varepsilon \frac{\partial Z\left(t,x,\varepsilon\right)}{\partial t} = A(t) Z\left(t,x,\varepsilon\right) + \int_0^x \int_0^t Q\left(t,x,s,v\right) Z\left(s,v,\varepsilon\right) dsdv = \varphi(t,x,\varepsilon), \tag{20}$$

корректно разрешима, т. е. что она имеет решение при любой правой части $\varphi(t,x,\varepsilon) \in \mathrm{C}(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right],\mathbb{C}^n)$ и что имеет место оценка

$$||Z(t,x,\varepsilon)||_{C([0,1]\times[0,1])} \leq \frac{\nu_0}{\varepsilon} ||\varphi(t,x,\varepsilon)||_{C([0,1]\times[0,1])}, \tag{21}$$

где $\nu_0 > 0$ — постоянная, не зависящая от $\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$. Однозначная разрешимость задачи (20) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ доказывается так же, как и разрешимость обычной системы дифференциальных уравнений, сведением ее к интегральной системе и применением метода последовательных приближений. Покажем справедливость оценки (21). Введём для этого еще одну неизвестную вектор-функцию $V = \int_0^x \int_0^t Q\left(t,x,s,v\right) Z\left(s,v,\varepsilon\right) dsdv$. Дифференцируя ее по t, будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \int_0^x \left(\int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} Q\left(t,x,s,v\right) \right) Z\left(s,v,\varepsilon\right)\, ds + Q\left(t,x,t,v\right) Z\left(t,v,\varepsilon\right) \right) dv.$$

Тогда для вектор-функции $W = \{Z, V\}$ получим систему

$$\varepsilon \frac{dW}{dt} = \begin{pmatrix} A(t) & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} W +$$
$$+\varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^x Q\left(t, x, t, v\right) Z\left(t, v, \varepsilon\right)\ dv + \int_0^x \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} Q\left(t, x, s, v\right)\right) Z\left(s, v, \varepsilon\right)\ ds\, dv \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \varphi(t, x, \varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}, W(0, x, \varepsilon) = 0 \tag{22}$$

(здесь I_n, 0_n — единичная и нулевая квадратные матрицы порядка n соответственно). Матрица $A_0(t) = \begin{pmatrix} A(t) & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$ является матрицей простой структуры, т. е. существует невырожденная матрица $T\left(t\right)$ такая, что

$T^{-1}(t)A_0(t)T(t) \equiv \operatorname{diag}(A\left(t\right), 0_n) = \Lambda_0(t),\ \Lambda_0(t) \equiv \operatorname{diag}(\lambda_1\left(t\right), ..., \lambda_n\left(t\right), 0, ..., 0)$.

Действительно, покажем, что существует невырожденное решение матричного уравнения

$$A_0(t)T(t) = T(t)\Lambda_0(t) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A(t) & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0(t) & S(t) \\ 0_n & M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0(t) & S(t) \\ 0_n & M(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda(t) & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Здесь матрица $T(t)$ разбита на блоки $T_0(t), S(t), 0_n, M(t)$ размера $n \times n$. Перепишем матричное уравнение (23) в виде

$$A(t)T_0(t) = T_0(t)\Lambda(t), A(t)S(t) + M(t) = 0.$$

Из первого уравнения вытекает, что $T_0(t) = \varphi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$ — матрица из собственных векторов матрицы $A(t)$, а из второго уравнения следует, что $S(t) = -A^{-1}(t)M(t)$. Возьмем $M(t) = I_n$, тогда $S(t) = -A^{-1}(t)$ и матрица $T(t)$ будут иметь вид

$$T(t) = \begin{pmatrix} T_0(t) & S(t) \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) & -A^{-1}(t) \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}.$$

Так как $\det T(t) = \det T_0(t) \det I_n = \det \varphi(t) \neq 0 (\forall t \in [0, T])$, то $T(t)$ — невырожденное решение уравнения (23), поэтому $A_0(t)$ — матрица простой структуры.

Обозначим через $Y(t,s,\varepsilon)$ нормальную фундаментальную матрицу однородной системы $\varepsilon\frac{dW}{dt}=A_0(t)W,$ т. е. матрицу, удовлетворяющую уравнению

$$\varepsilon\frac{dY(t,s,\varepsilon)}{dt}=A_0(t)Y(t,s,\varepsilon),Y(s,s,\varepsilon)=I,0\leq s\leq t\leq T.$$

Так как $A_0(t)$ — матрица простой структуры и её собственные значения при всех $t\in[0,1]$ лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda\leq 0,$ то $Y(t,s,\varepsilon)$ равномерно ограничена (см., например, [1], стр. 119–120]), т. е. $||Y(t,s,\varepsilon)||\leq c_0\forall(t,s,\varepsilon)\in$ $\in\{0\leq s\leq t\leq T\}\times\{\varepsilon>0\},$ где постоянная $c_0>0$ не зависит от $\varepsilon>0.$ Запишем теперь интегральную систему, эквивалентную системе (22):

$$W(t,x,\varepsilon)=\int_0^t Y(t,\zeta,\varepsilon)\times$$
$$\times\begin{pmatrix}0\\ \int_0^x Q\left(\varsigma,x,\varsigma,v\right)Z\left(\varsigma,v,\varepsilon\right)\,dv+\int_0^x\int_0^\varsigma\left(\frac{\partial}{\partial\varsigma}Q\left(\varsigma,x,s,v\right)\right)Z\left(s,v,\varepsilon\right)\,ds\,dv\end{pmatrix}d\zeta+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t Y(t,\zeta,\varepsilon)\begin{pmatrix}\varphi(\varsigma,x,\varepsilon)\\ 0\end{pmatrix}d\zeta. \tag{24}$$

Поскольку при каждом $\varepsilon>0$ существует решение $W(t,x,\varepsilon)$ системы (24) в пространстве $\mathrm{C}([0,1]\times[0,1],\mathbb{C}^n),$ то подставляя его в (24), получим тождество. Перейдем в нем к нормам:

$$||W(t,x,\varepsilon)||\leq\int_0^t\|Y(t,\zeta,\varepsilon)\|\,||\begin{pmatrix}0\\ \int_0^x Q\left(\varsigma,x,\varsigma,v\right)Z\left(\varsigma,v,\varepsilon\right)\,dv\end{pmatrix}||d\zeta+$$
$$+\int_0^t\|Y(t,\zeta,\varepsilon)\|\cdot||\begin{pmatrix}0\\ \int_0^x\int_0^\varsigma\left(\frac{\partial}{\partial\varsigma}Q\left(\varsigma,x,s,v\right)\right)Z\left(s,v,\varepsilon\right)\,ds\,dv\end{pmatrix}||d\zeta+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\|Y(t,\zeta,\varepsilon)\|\cdot||\begin{pmatrix}\varphi\left(\varsigma,x,\varepsilon\right)\\ 0\end{pmatrix}||d\zeta.$$

Оценим здесь каждое слагаемое в отдельности[1]:

$$\int_0^t\|Y(t,\zeta,\varepsilon)\|\,||\begin{pmatrix}0\\ \int_0^x Q\left(\varsigma,x,\varsigma,v\right)Z\left(\varsigma,v,\varepsilon\right)\,dv\end{pmatrix}||d\zeta\leq$$
$$\leq\int_0^t\|Y(t,\zeta,\varepsilon)\|\left\|\int_0^x Q\left(\varsigma,x,\varsigma,v\right)\right\|||Z\left(\varsigma,v,\varepsilon\right)||dvd\zeta\leq$$
$$\leq c_0c_1\int_0^t\int_0^x\|W\left(\varsigma,v,\varepsilon\right)\|\,dvd\zeta,$$

[1] Учесть, что функции $Q\left(\varsigma,x,s,v\right),\ \frac{\partial}{\partial\varsigma}Q\left(\varsigma,x,s,v\right),\varphi\left(\varsigma,x,\varepsilon\right)$ равномерно ограничены.

$$\int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\| \cdot || \left(\begin{array}{c} 0 \\ \int_0^\varsigma \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial\varsigma} Q(\varsigma,x,s,v)\right) Z(s,v,\varepsilon)\ ds\ dv \end{array} \right) ||d\zeta \le$$
$$\le \int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\| \cdot \left(\int_0^x \int_0^\varsigma \left(\left\|\frac{\partial}{\partial\varsigma} Q(\varsigma,x,s,v)\right\|\right) \|W(s,v,\varepsilon)\|\ ds\ dv\right) d\zeta \le$$
$$\le c_0c_2 \int_0^t \left(\int_0^x \int_0^\varsigma \|W(s,v,\varepsilon)\|\ ds\ dv\right) d\varsigma \le$$
$$\le c_0c_2 \int_0^t \left(\int_0^x \int_0^t \|W(s,v,\varepsilon)\|\ ds\ dv\right) d\varsigma =$$
$$= c_0c_2 \int_0^x \int_0^t \|W(s,v,\varepsilon)\|\ dsdv\ \cdot \int_0^t d\varsigma \le$$
$$\le c_0c_2 \int_0^x \int_0^t \|W(s,v,\varepsilon)\|\ dsdv = c_0c_2 \int_0^t \int_0^x \|W(s,v,\varepsilon)\|\ dvds,$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|Y(t,\zeta,\varepsilon)\| \cdot || \left(\begin{array}{c} \Phi(\varsigma,x,\varepsilon) \\ 0 \end{array} \right) ||d\zeta \le \frac{c_0}{\varepsilon} \|\Phi(\varsigma,x,\varepsilon)\|_{C([0,1]\times[0,1])} = \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$||W(t,x,\varepsilon)|| \le (c_0c_1 + c_0c_2) \int_0^t \int_0^x \|W(s,v,\varepsilon)\|\ dvds +$$
$$+ \frac{c_0}{\varepsilon} \|\Phi(\varsigma,x,\varepsilon)\|_{C([0,1]\times[0,1])}.$$

Теперь воспользуемся следующим утверждением (см. [6], стр. 67): *если для всех* $(t,x) \in [0,b] \times [0,c]$ *функции* $u(t,x)$ *и* $p(t,x)$ *неотрицательны и удовлетворяют неравенству* $u(t,x) \le \gamma + \int_0^t \int_0^x p(s,v) \times \times u(s,v)\, dvds\, (\gamma = \mathrm{const} \ge 0)$, *то в области* $[0,b] \times [0,c]$ *справедливо неравенство*

$$u(t,x) \le \gamma \cdot \exp\left\{\int_0^t \int_0^x p(s,v)\, dvds\right\}.$$

В нашем случае $b = c = 1$ и

$$u(t,x) = ||W(t,x,\varepsilon)||, \gamma = \frac{c_0}{\varepsilon}\|\varphi(\varsigma,x,\varepsilon)\|_{C([0,1]\times[0,1])}, p(t,x) = c_0c_1 + c_0c_2 = \mathrm{const},$$

поэтому

$$||W(t,x,\varepsilon)|| \le \frac{c_0}{\varepsilon}\|\varphi(\varsigma,x,\varepsilon)\|_{C([0,1]\times[0,1])} \cdot \exp\left\{\int_0^t \int_0^x (c_0c_1 + c_0c_2)\, dvds\right\} \le$$
$$\le \frac{\nu_0}{\varepsilon}\|\varphi(\varsigma,x,\varepsilon)\|_{C([0,1]\times[0,1])},$$

где $\nu_0 = c_0c_1 + c_0c_2$ не зависит от $\varepsilon > 0$. Так как $\|Z\| \le \|W\|$, то неравенство (21) доказано.

Применим теперь это неравенство для оценки остатка

$$\Delta_N(t,x,\varepsilon) = y(t,x,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t,x),$$

где $y(t,x,\varepsilon)$ — точное решение задачи (1), а $y_{\varepsilon N}(t,x)$ — формальное асимптотическое решение, построенное выше. Функция $\Delta_N(t,x,\varepsilon)$ (согласно лемме 1) удовлетворяет задаче

$$\varepsilon\frac{\partial y_{\varepsilon N}(t,x)}{\partial t}=A(t)y_{\varepsilon N}(t,x)+\int_0^x\int_0^t Q\left(t,x,s,v\right)y_{\varepsilon N}\left(s,v\right)dsdv\equiv$$
$$\equiv-\varepsilon^{N+1}K_N(t,x,\varepsilon),$$

где $||K_N(t,x,\varepsilon)||\leq\bar{K}_N,\bar{K}_N>0$ — не зависит от ε при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_N]$. Сравнивая это с (18), видим, что $\varphi(t,x,\varepsilon)\equiv-\varepsilon^{N+1}K_N(t,x,\varepsilon)$, поэтому из оценки (21) выводим неравенство

$$||\Delta_N(t,x,\varepsilon)||_{C[0,T]}\leq\frac{\nu_0}{\varepsilon}\varepsilon^{N+1}||K_N(t,x,\varepsilon)||_{C[0,T]}\leq\nu_0\varepsilon^N||K_N(t,x,\varepsilon)||\leq\nu_0\bar{K}_N\varepsilon^N.$$

Значит, $||\Delta_N(t,x,\varepsilon)||_{C([0,1]\times[0,1])}\equiv||y(t,x,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])}\leq\leq\bar{c}_N\varepsilon^N, N=0,1,2,....$ Отсюда (за счет гладкости коэфициентов $y_k(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon})$ сужения ряда (7)) получаем обычную оценку:

$$||y(t,x,\varepsilon)-y_{\varepsilon N}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])}\leq c_N\varepsilon^{N+1},N=0,1,2,\ldots.$$

Теорема полностью доказана.

4 Решение первой итерационной задачи. Исследование проблемы инициализации

Поскольку в системе (10_0) вектор-функция $H(t,x,\tau)\equiv h(t,x)$ не зависит от τ, то условия (13) для нее выполнены автоматически, поэтому система (10_0) имеет в пространстве U решение, которое можно записать в форме (см. (14))

$$\begin{gathered}y_0(t,x,\tau)=y\left(t,x,\tau\right)=\sum_{j=1}^n\alpha_j^{(0)}\left(t,x\right)\varphi_j\left(t\right)e^{\tau_j}+y_0^{(0)}(t,x),\\ y_0^{(0)}(t,x)\equiv-\int_0^x\mathscr{R}\left(t,x,s,v\right)A^{-1}\left(s\right)h\left(s,v\right)dsdv-A^{-1}\left(t\right)h\left(t,x\right).\end{gathered}\qquad(14_0)$$

где $\alpha_j^{(0)}(t,x)\in C^\infty([0,1]\times[0,1],\mathbb{C}^1)$ — пока произвольные функции. Для вычисления этой функции запишем правую часть следующей итерационной системы (10_1):

$$\begin{gathered}H\left(t,x,\tau\right)\equiv-\frac{\partial y_0^{(0)}(t,x)}{\partial t}-\sum_{j=1}^n\frac{\partial\left(\alpha_j^{(0)}(t,v)\varphi_j(t)\right)}{\partial t}e^{\tau_j}+\\ +\sum_{j=1}^n\left(\frac{\int_0^x Q(t,x,t,v)\alpha_j^{(0)}(t,v)\varphi_j(t)dv}{\lambda_j(t)}\right)e^{\tau_j}-\\ -\sum_{j=1}^n\left(\frac{\int_0^x Q(t,x,0,v)\alpha_j^{(0)}(0,v)\varphi_j(0)}{\lambda_j(0)}dv\right)\end{gathered}$$

Подчиняя $H(t,x,\tau)$ условию ортогональности (13), будем иметь

$$\begin{array}{l} -\left(\frac{\partial\left(\alpha_j^{(0)}(t,x)\varphi_j(t)\right)}{\partial t},\chi_j(t)\right)+\left(\int_0^x\frac{\left(Q(t,x,t,v)\alpha_j^{(0)}(t,v)\varphi_j(t),\chi_j(t)\right)}{\lambda_j(t)}dv\right)=0\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\frac{\partial\alpha_j^{(0)}(t,x)}{\partial t}=-\left(\dot\varphi_j(t),\chi_j(t)\right)\alpha_j^{(0)}(t,x)+\\ +\left(\int_0^x\frac{\left(Q(t,x,t,v)\varphi_j(t),\chi_j(t)\right)}{\lambda_j(t)}\alpha_j^{(0)}(t,v)\,dv\right)\end{array}\qquad(25)$$

Начальные условия для функций $\alpha^{(0)}(t,x)$ находим из равенства

$$y_0(0,x,0)=y^0(x)\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l}\Leftrightarrow\sum_{j=1}^n\alpha_j^{(0)}(0,x)\varphi_j(0)-A^{-1}(0)h(0,x)=y^0(x)\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\alpha_j^{(0)}(0,x)=\left(y^0(x)+A^{-1}(0)h(0,x),\chi_j(0)\right),\ j=\overline{1,n}.\end{array}$$

С учётом начальных условий $\alpha_j^{(0)}(0,x)$ уравнение (25) можно записать в эквивалентной форме:

$$\begin{array}{l}\alpha_j^{(0)}(t,x)=\left(y^0(x)+A^{-1}(0)h(0,x),\chi_j(0)\right)+\\ +\int_0^t\left(\int_0^x\left(\frac{Q(s,x,s,v)}{\lambda_j(s)}\varphi_j(s),\chi_j(s)\right)\alpha_j^{(0)}(s,v)\,dv\right)ds+\\ +\int_0^t\left(-\dot\varphi_j(s),\chi_j(s)\right)\alpha_j^{(0)}(s,x)\,ds,\ \ j=\overline{1,n}.\end{array}\qquad(26)$$

Так как здесь ядра $\left(\frac{Q(s,x,s,v)}{\lambda_j(s)}\varphi_j(s),\chi_j(s)\right)$ принадлежит классу

$$C^\infty\left(\{0\le s\le t\le 1,0\le v\le x\le 1\},\mathbb{C}^n\right),$$

то уравнения (26) имеют единственные решения

$$\alpha_j^{(0)}(t,x)\in C^\infty\left([0,1]\times[0,1],\mathbb{C}^1\right),\ j=\overline{1,n}.$$

Тем самым, решение первой итерационной задачи (10_0) найдено в виде (14_0) однозначно. Перейдем теперь к рассмотрению проблемы инициализации.

Пусть $\mathrm{Re}\,\lambda_j(t)<0\ \forall t\in[0,1]$. Тогда по теореме 3 имеем

$$\begin{array}{l}||y(t,x,\varepsilon)-y_{\varepsilon 0}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])}\le c_0\varepsilon\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow||y(t,\varepsilon)-\left(\sum_{j=1}^n\alpha_j^{(0)}(t,x)\varphi_j(t)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta}+y_0^{(0)}(t,x)\right)||_{C([0,1]\times[0,1])}\le c_0\varepsilon.\end{array}$$

Отсюда при любом $\delta\in(0,1]$ получаем, что

$$c_0\varepsilon\ge||y(t,x,\varepsilon)-\left(\sum_{j=1}^n\alpha_j^{(0)}(t,x)\varphi_j(t)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta}+y_0^{(0)}(t,x)\right)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\ge$$

$$\ge||y(t,x,\varepsilon)-\sum_{j=1}^n\alpha_j^{(0)}(t,x)\varphi_j(t)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta}-y_0^{(0)}(t,x)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\ge$$

$$\ge||y(t,x,\varepsilon)-y_0^{(0)}(t,x)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}-||\sum_{j=1}^n\alpha_j^{(0)}(t,x)\varphi_j(t)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta}||_{C([\delta,1]\times[0,1])},$$

откуда выводим, что

$$\begin{aligned}
&||y(t,x,\varepsilon)-y_0^{(0)}(t,x)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\leq c_0\varepsilon+\\
&+||\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(0)}(t,x)\varphi_j\left(t\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta}||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\leq\\
&\leq c_0\varepsilon+\left\|\textstyle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(0)}(t,x)\varphi_j\left(t\right)\right\|_{C([\delta,1]\times[0,1])}e^{-\frac{\varkappa\delta}{\varepsilon}},
\end{aligned}$$

где $\varkappa=\min\limits_{t\in[0,T],j=\overline{1,n}}(-\mathrm{Re}\lambda_j(t))>0.$ Следовательно,

$$||y(t,x,\varepsilon)-y_0^{(0)}(t,x)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\to(\varepsilon\to+0). \tag{27}$$

Получен следующий результат.

Теорема 4. *Если выполнены условия 1) и 2), причем* $\mathrm{Re}\,\lambda_j\left(t\right)<0\ \forall t\in\in[0,1],\ j=\overline{1,n}$, *то имеет место предельный переход (27), где* $y==y(t,x,\varepsilon)$ *— точное решение задачи (1), а функция* $y_0^{(0)}(t,x)$ *является решением интегральной системы*

$$-A\left(t\right)y_0\left(t,x\right)=\int_0^x\left(\int_0^t Q\left(t,x,s,v\right)\right)y_0\left(t,v\right)dsdv+h\left(t,x\right) \tag{28}$$

Эта система является вырожденной по отношению к исходной системе (1).

Однако в нашем случае допускаются чисто мнимые собственные значения. Пусть, например,

$$\begin{aligned}
&\lambda_j\left(t\right)=\pm i\omega_j\left(t\right),\omega_j\left(t\right)>0\ \left(j=\overline{1,m}\right),\\
&\mathrm{Re}\,\lambda_k\left(t\right)<0\ \left(\forall t\in[0,1]\,,\,k=\overline{2m+1,n}\right).
\end{aligned} \tag{29}$$

В этом случае предельный переход (27) в метрике пространства $C\left([0,1]\times[0,1]\right)$ становится невозможным. В связи с этим возникает следующая *проблема инициализации*: какими должны быть исходные данные задачи (1), чтобы равномерный предельный переход $y\left(t,x,\varepsilon\right)\rightrightarrows y_0^{(0)}\left(t,x\right)$ (при $\varepsilon\to+0$) был возможен на множестве $[0,1]\times[0,1]$, включая и зону пограничного слоя по t? Исходные данные задачи (1), удовлетворяющие этому требованию, называют классом инициализации Σ. Так как

$$\begin{aligned}
&y\left(t,x,\varepsilon\right)=\textstyle\sum_{j=1}^{m}\alpha_j^{(0)}(t,x)\varphi_j\left(t\right)e^{\frac{-i}{\varepsilon}\int_0^t\omega_j(\theta)d\theta}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j^{(0)}(t,x)\varphi_j\left(t\right)e^{\frac{\pm i}{\varepsilon}\int_0^t\omega_j(\theta)d\theta}+\\
&+\textstyle\sum_{k=2m+1}^{n}\alpha_k^{(0)}(t,x)\varphi_k\left(t\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_k(\theta)d\theta}+y_0^{(0)}(t,x)+O(\varepsilon),
\end{aligned}$$

то первые $2m$ слагаемых быстро осциллирует и препятствуют существованию предельного перехода $y\left(t,x,\varepsilon\right)\rightrightarrows y_0^{(0)}\left(t,x\right)$ на множестве $[0,1]\times[0,1]$, поэтому их надо удалить, т. е. положить

$$\alpha_j^{(0)}(t,x) \equiv 0,\ \beta_j^{(0)}(t,x) \equiv 0 \left(\forall (t,x) \in [0,1] \times [0,1],\ j = \overline{1,m}\right).$$

Из формулы (26) следует, что это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\left(y^0(x) + A^{-1}(0)\, h(0,x), \chi_j(0)\right),\ j = \overline{1,2m},\ \forall x \in [0,1]. \tag{30}$$

Доказан следующий результат.

Теорема 5. *Пусть для задачи (1) выполнены условия 1), 2) и (28). Тогда для того чтобы имел место предельный переход*

$$||y(t,x,\varepsilon) - y_0^{(0)}(t,x)||_{C([\delta,1]\times[0,1])} \to 0(\varepsilon \to +0), \tag{$*$}$$

необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства (30). При этом если равенства (30) имеют место для всех $j = \overline{1,n}$, то в $(*)$ можно взять $\delta = 0$, *т. е. предельный переход будет иметь место при всех* $(t,x) \in$ $\in [0,1] \times [0,1]$.

Значит, класс инициализации Σ описывается условиями

$$\left(y^0(x) + A^{-1}(0)\, h(0,x), \chi_j(0)\right),\ j = \overline{1,n},\ \forall x \in [0,1]. \tag{$**$}$$

Ясно, что условие $\left(h(t,x), y^0(x), A(t)\right) \in \Sigma$ гарантирует равномерный предельный переход

$$||y(t,x,\varepsilon) - y_0^{(0)}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])} \to 0(\varepsilon \to +0)$$

и в случае, когда все $\lambda_j(t) < 0$.

5 Пример

Посмотрим, как результаты, полученные для системы (1), экстраполируются на скалярные интегродифференциальные уравнения

$$\begin{gathered} \varepsilon\frac{\partial y(t,x,\varepsilon)}{\partial t} = a(t)\, y(t,x,\varepsilon) + \int_0^x \int_0^t Q(t,x,s,v)\, y(s,v,\varepsilon)\, ds dv + h(t,x), \\ y(0,x,\varepsilon) = y^0(x)\ \ ((t,x) \in [0,1] \times [0,1]), \end{gathered} \tag{31}$$

где функции $a(t) \in C^\infty[0,1],\, h(t,x) \in C^\infty([0,1]\times[0,1])$, ядро $Q(t,x,s,v)$ принадлежит классу $C^\infty(0 \le s \le t \le 1, 0 \le v \le x \le 1)$ и $\operatorname{Re} a(t) \le 0, a(t) \ne 0\ (\forall t \in [0,1])$.

Введем регуляризирующую переменную

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a\left(\theta\right) d\theta \equiv \frac{\psi\left(t\right)}{\varepsilon}$$

и для функции $\tilde{y}\left(t, x, \tau, \varepsilon\right)$ поставим следующую задачу:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \tfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + a\left(t\right) \tfrac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} - a\left(t\right) \tilde{y} - \int_0^x \int_0^t Q\left(t, x, s, v\right) \tilde{y}\left(s, v, \tfrac{\psi(s)}{\varepsilon}, \varepsilon\right) ds dv = h\left(t, x\right), \\ & \tilde{y}\left(0, x, 0, \varepsilon\right) = y^0\left(x\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Будем решать эту задачу в классе функций

$$\begin{aligned} & U = \{y\left(t, x, \tau\right) : y = y_1(t, x) e^{\tau} + y_0\left(t, x\right), y_0\left(t, x\right), \\ & y_1\left(t, x\right) \in C^{\infty}\left(\left[0, 1\right] \times \left[0, 1\right]\right) \end{aligned}$$

Производя регуляризацию интегрального оператора в классе U и вычисляя решение регуляризованной задачи

$$L_{\varepsilon} \tilde{y}\left(t, x, \tau, \varepsilon\right) \equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + a\left(t\right) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tau} - a\left(t\right) \tilde{y} - \tilde{J} \tilde{y} = h\left(t, x\right), \;\; \tilde{y}\left(0, x, 0, \varepsilon\right) = y^0\left(x\right)$$

в виде ряда (7), получим серию итерационных задач

$$L\, y_0\left(t, x, \tau\right) \equiv a\left(t\right) \frac{\partial y_0}{\partial \tau} - a\left(t\right) y_0 - R_0 y_0 = h\left(t, x\right), \, y_0\left(0, x, 0\right) = y^0\left(x\right), \tag{33_0}$$

$$L\, y_1\left(t, x, \tau\right) = -\tfrac{\partial y_0}{\partial t} + R_1 y_0, \;\; y_1\left(0, x, 0\right) = 0, \;\; (33_1)$$

$$\ldots$$

где оператор R_0 имеет вид $R_0 y\left(t, x, \tau\right) = \int_0^x \int_0^t Q\left(t, x, s, v\right) y_0\left(s, v\right) ds dv$. Решение первой итерационной задачи (33_0) будет таким:

$$y_0(t, x, \tau) = y\left(t, x, \tau\right) = \alpha^{(0)}\left(t, x\right) e^{\tau} + y_0^{(0)}(t, x),$$

где $y_0^{(0)}(t, x)$, $\alpha^{(0)}\left(t, x\right)$ удовлетворяет интегральным уравнениям

$$y_0^{(0)}\left(t, x\right) = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t \frac{Q\left(t, x, s, v\right)}{-a\left(t\right)} y_0^{(0)}\left(s, v\right) ds \right) dv - \frac{h\left(t, x\right)}{a\left(t\right)} \tag{34}$$

$$\alpha^{(0)}\left(t, x\right) = y^0\left(x\right) + \frac{h\left(0, x\right)}{a\left(0\right)} + \int_0^t \left(\int_0^x \frac{Q\left(s, x, s, v\right)}{a\left(s\right)} \alpha^{(0)}\left(s, v\right) dv \right) ds. \tag{35}$$

Значит, главный член асимптотического решения задачи (31) имеет вид

$$y_{\varepsilon 0}(t,x)=\alpha^{(0)}\left(t,x\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(\theta)d\theta}+y_0^{(0)}(t,x).$$

При этом имеет место предельный переход

$$||y(t,x,\varepsilon)-y_0^{(0)}(t,x)||_{C([\delta,1]\times[0,1])}\to(\varepsilon\to+0),$$

где $y=y(t,x,\varepsilon)$ — точное решение задачи (31), а функция $y_0^{(0)}(t,x)$ является решением уравнения (34), *вырожденного по отношению к исходной системе (31).* И наконец, если исходные данные $\left(h\left(t,x\right),y^0\left(x\right),a\left(x\right)\right)$ задачи (31) принадлежат классу

$$\Sigma=\left\{\left(h,y^0,a\right):y^0\left(x\right)+\frac{h\left(0,x\right)}{a\left(0\right)}\equiv 0\forall x\in[0,1]\right\},$$

то предельный переход имеет место на всем множестве $[0,1]\times[0,1]$, включая и точку $t=0:$ $||y(t,x,\varepsilon)-y_0^{(0)}(t,x)||_{C([0,1]\times[0,1])}\to 0$ $(\varepsilon\to+0)$.

Например, в задаче

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}y\left(t,x,\varepsilon\right)=-3\;y\left(t,x,\varepsilon\right)+\int\limits_0^x\int\limits_0^t s\cdot v\cdot y\left(s,v,\varepsilon\right)dsdv+\\+6x+9t-\frac{1}{2}t^3x^2-\frac{1}{3}t^2x^3,y\left(0,\;x,\varepsilon\right)=2\;x\end{gathered}\tag{36}$$

исходнными данными будут:

$$Q\left(t,x,s,v\right)\equiv s\cdot v,a\left(t\right)\equiv-3,y^0\left(x\right)=2x,\;\;h\left(t,x\right)=6x+9t-\frac{1}{2}t^3x^2-\frac{1}{3}t^2x^3.$$

Нетрудный подсчет показывает, что $y_0^{(0)}\left(t,x\right)\equiv 2\;x+3\;t$, $\alpha_0^{(0)}\left(t,x\right)\equiv 0$, а точное решение $y(t,x,\varepsilon)$ задачи (36) будет стремится при $\varepsilon\to+0$ к предельному решению $y_0^{(0)}\left(t,x\right)\equiv 2\;x+3\;t$ равномерно на всем множестве $[0,1]\times[0,1]$, включая и зону поганичного слоя. В этом случае главный член асимптотического решения задачи (36) совпадает с предельным решением $y_0^{(0)}\left(t,x\right)$.

Список литературы

[1] Сафонов, В. Ф., Бободжанов, А. А. Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные уравнения и метод регуляризации: учебное пособие.- Издательский дом МЭИ, 2012.

[2] Ломов,С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.- М.:Наука,1980.

[3] Ломов, С.А., Ломов, И.С. Основы математической теории пограничного слоя.- М.Изд-во Московского университета, 2011.

[4] Иманалиев, М.И. Методы решения обратных задач и их приложение.- Фрунзе, ИЛИМ, 1977.

[5] Смирнов, В.И. Курс высшей математики, Том 4.-М.:ГИФМЛ, 1953.

[6] Филатов, А.Н., Шарова, Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.:Наука, 1976.

[7] Бободжанов, А. А, Сафонов, В. Ф. Асимптотическое интегрирование интегродиф ференциальных уравнений с двумя независимыми переменными. Сиб. электрон. матем. изв., 15 (2018), 186–197.

[8] Бободжанов, А. А, Сафонов, В. Ф. Обобщение метода регуляризации на сингуляр но возмущенные интегродифференциальные уравнения в частных производных. Изв. вузов, 3 (2018), 9–22.

[9] Бободжанов, А. А, Сафонов, В. Ф. Регуляризованные асимптотические решения начальной задачи для системы интегродифференциальных уравнений в частных производных. Матем. заметки, 102:1 (2017), 28–38.

Regularization method for singularly perturbed integro-differential systems with two independent variables

A.A. Bobodzhanov ,V.F. Safonov

Higher mathematics department National Research University "Moscow Power Engineering Institute”

Abstract. In this paper, the Lomov regularization method is generalized to Volterra-type integro-differential partial differential equations with a two-dimensional integral operator. We consider the case when the operator of the differential part depends only on the differentiation variable. Thus, in contrast Imanaliev, M. I. (where only the passage to the limit is studied, when a small parameter tends to zero), in this paper, the focus is on constructing a regularized asymptotic solution of any order (with respect to a small parameter). Note that the Lomov regularization method was used mainly for ordinary singularly perturbed integro-differential equations (see the detailed bibliography at the end of the article). In one of the authors' works, the case of a partial differential equation with a one-dimensional integral operator was considered. The development of this method for systems of partial differential equations with a two-dimensional integral operator has not been carried out before. The paper also considers and solves the «initialization problem», i.e., the problem of choosing the initial data of the problem, in which the limit transition in its solution (in a uniform metric over the entire considered set of independent variables, including the boundary layer zone) becomes possible.

Keywords: singular perturbation, boundary layer, integro-differential equation, the problem of initialization.