ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N.3, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Об одном граничном свойстве семейства операторов Дирихле обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

Харламов Б.П.

Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия e-mail: b.p.harlamov@gmail.com

Аннотация. Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с коэффициентами, обеспечивающими единственное решение задачи Дирихле на каждом конечном интервале. Определяется условие согласования семейства операторов Дирихле этого уравнения относительно операции свёртки. Исследуются решения задачи Дирихле, представимые в ядерной форме. В одномерном случае субвероятностное ядро сводится к двум функциям (правой и левой), соответствующим двум границам интервала. Правая (левая) граница исходного интервала называется недостижимой, если соответствующая субвероятность равно нулю. В терминах коэффициентов исходного дифференциального уравнения выведены конструктивно проверяемые достаточные условия недостижимости правой (левой) границы исходного интервала. Приведена интерпретация полученных результатов в терминах диффузионного полумарковского процесса.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, задача Дирихле, субвероятностное ядро, интегральное уравнение, диффузионный полумарковский процесс.

1. Введение

В настоящей статье рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на некотором конечном интервале с коэффициентами, обеспечивающими единственность решения задачи Дирихле [1] этого уравнения на любом под-интервале данного интервала. Для собственного подинтервала определяется продолжение этого решения до функции из класса непрерывных функций на всём интервале. В этом случае решение задачи Дирихле можно рассматривать как значение некоторого оператора (так называемого оператора Дирихле) на этом классе. Зависимость от аргумента (подинтервала исходного интервала) определяет семейство таких операторов для данного уравнения. Это семейство согласовано относительно операции свёртки. В данной работе исследуются граничные свойства такого семейства.

Исследования в этой области актуальны для решения краевых задач в теории диффузионных марковских [2] и полумарковских [3] процессов. Эти процессы являются математическими моделями многих реальных процессов в физике, геологии, социологии, финансовой математике и других.

В статье рассматривается ядерное представление решения задачи Дирихле, когда это решение даётся в виде интеграла по границе заданной области от значений некоторой функции, умноженной на некоторое субвероятностное ядро. В одномерном случае это ядро распадается на две неотрицательные функции, сумма которых не превышает единицы.

С другой стороны для изучения асимптотики решения и вывода компактных достаточных условий для так называемой недостижимости границ интервала (термин, заимствованный из приложений) используется известный метод решения простейшего неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (аналог уравнения Пуассона в многомерном случае) [4]. Для общего случая однородного дифференциального уравнения второго порядка этот метод используется для вывода интегрального уравнения относительно решения задачи Дирихле этого уравнения.

Вывод достаточных условий недостижимости границ производится в два этапа. На первом этапе эти условия выводятся для дифференциального уравнения второго порядка без производной первого порядка (в так называемой нормальной форме [5]). На втором этапе используется приведение исходного дифференциального уравнения в нормальную форму.

В качестве приложения рассматривается задача о недостижимых границах интервала значений диффузионного полумарковского процесса.

2. Основной результат

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f'' + A(x)f' - B(x) = 0 \tag{1}$$

на интервале (a,b), где $-\infty < a < b < \infty$, A — непрерывно дифференцируемая функция, B — непрерывная неотрицательная функция на этом интервале. Пусть $a < c < x < d < b$ и $\phi \in \mathcal{C}$ — некоторая непрерывная функция. Решение $u_{(c,d)}(\phi \,|\, x)$ уравнения (1) со значениями $\phi(c)$ и $\phi(d)$ на границах интервала (c,d) продолжим на все $x \notin (c,d)$, положив $u_{(c,d)}(\phi \,|\, x) \equiv \phi(x)$. В этом продолженном смысле функция $u_{(c,d)}(\phi \,|\, \cdot)$ может рассматриваться как значение линейного оператора вида $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ в точке ϕ. Такой оператор естественно назвать оператором Дирихле, зависящим от аргумента (c,d).

Лемма 1. *Члены семейства операторов Дирихле, зависящих от интервального аргумента, согласованы между собой следующим образом:*

$$u_{\Delta_2}(\phi \,|\, x) = u_{\Delta_1}(u_{\Delta_2}(\phi \,|\, \cdot) \,|\, x), \tag{2}$$

где $\Delta_1 \equiv (c_1, d_1)$, $\Delta_2 \equiv (c_2, d_2)$, $a < c_2 \le c_1 < d_1 \le c_2 < b$.

Доказательство. Пусть функция ϕ задана на границах интервала Δ_2. Тогда обе функции $u_{\Delta_2}(\phi \,|\, \cdot)$ и $u_{\Delta_1}(u_{\Delta_2}(\phi \,|\, \cdot) \,|\, \cdot)$ удовлетворяют внутри Δ_1 уравнению (1). Кроме того они совпадают на границах этого интервала. По теореме единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1) получаем $u_{\Delta_2}(\phi \,|\, \cdot) = \psi$ внутри интервала Δ_1, где $\psi \equiv u_{\Delta_1}(u_{\Delta_2}(\phi \,|\, \cdot) \,|\, \cdot)$. Равенство этих функций вне интервала Δ_1 вытекает из правила продолжения функции $u_{\Delta_1}(\phi \,|\, \cdot)$ на точки, не принадлежащие Δ_1. Лемма доказана.

Заметим, что формула (2) справедлива также для многомерного пространства. В этом случае Δ_1 и Δ_2 суть открытые односвязные области из этого пространства, связанные отношением $\Delta_1 \subset \Delta_2$.

Условие 1. *Существует субвероятностное ядро* $U_\Delta(x,t)$ $(x \in \Delta,\ t \in \partial\Delta)$ *такое, что*

$$u_\Delta(\phi \,|\, x) = \int_{\partial\Delta} U_\Delta(x,t)\, \phi(t)\, ds_t.$$

В одномерном пространстве существование ядра $U_\Delta(x,t)$ состоит в том, что существуют две функции: $g_\Delta(x)$ и $h_\Delta(x)$ такие, что они неотрицательны, в сумме не превышают единицы, для которых при $x \in \Delta \equiv (c,d)$ справедливо

$$u_\Delta(\phi \,|\, x) = g_\Delta(x)\, \phi(c) + h_\Delta(x)\, \phi(d). \tag{3}$$

Кроме того мы делаем ещё одно естественное предположение

Условие 2 . *В одномерном случае*

$$g_{(c,d)}(d) = h_{(c,d)}(c) = 0, \tag{4}$$

а значения $g_{(c,d)}(c) = g_{(c,d)}(c+0)$ *и* $h_{(c,d)}(d) = h_{(c,d)}(d-0)$ *определяются по непрерывности.*

Класс согласованных семейств операторов Дирихле, подчиняющихся условиям 1 и 2, не пуст. Примером является рассмотренное ниже семейство, связанное с диффузионным полумарковским процессом.

Лемма 2 . *При выполнении условий 1 и 2 функция* $g_\Delta(x)$ *не возрастает и функция* $h_\Delta(x)$ *не убывает как функции от* $x \in \Delta \equiv (c,d)$.

Доказательство. Из формул (2) и (3) условие согласованности семейства решений $u_{(c,d)}(\phi\,|\,x)$ переписывается в виде

$$u_{\Delta_2}(\phi\,|\,x) = g_{\Delta_1}(x)\,u_{\Delta_2}(\phi\,|\,c_1) + h_{\Delta_1}(x)\,u_{\Delta_2}(\phi\,|\,d_1).$$

Отсюда получаем

$$g_{\Delta_2}(x)\,\phi(c_2) + h_{\Delta_2}(x)\,\phi(d_2) =$$
$$= g_{\Delta_1}(x)\,[g_{\Delta_2}(c_1)\phi(c_2) + h_{\Delta_2}(c_1)\phi(d_2)] +$$
$$+ h_{\Delta_1}(x)\,[g_{\Delta_2}(d_1)\phi(c_2) + h_{\Delta_2}(d_1)\phi(d_2)].$$

Благодаря справедливости этого уравнения относительно любой функции ϕ оно распадается на два. Действительно. Выбрав сперва $\phi(d_2) = 0$, $\phi(c_2) > 0$, а затем наоборот $\phi(d_2) > 0$, $\phi(c_2) = 0$, мы получаем два уравнения

$$g_{\Delta_2}(x) = g_{\Delta_1}(x)\,g_{\Delta_2}(c_1) + h_{(\Delta_1}(x)\,g_{\Delta_2}(d_1), \tag{5}$$

$$h_{\Delta_2}(x) = g_{\Delta_1}(x)\,h_{\Delta_2}(c_1) + h_{\Delta_1}(x)\,h_{\Delta_2}(d_1), \tag{6}$$

где $\Delta_1 \equiv (c_1, d_1)$, $\Delta_2 \equiv (c_2, d_2)$ и $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Отсюда и из условия (4) при любых x и ϵ $(x-\epsilon,\ x+\epsilon \in (c,d))$, получаем при $\epsilon > 0$

$$g_{(c,d)}(x) = g_{(x-\epsilon,d)}(x)g_{(c,d)}(x-\epsilon) + h_{(x-\epsilon,d)}(x)g_{(c,d)}(d) = g_{(x-\epsilon,d)}(x)g_{(c,d)}(x-\epsilon) \le g_{(c,d)}(x-\epsilon$$

$$h_{(c,d)}(x) = g_{(c,x+\epsilon)}(x)h_{(c,d)}(c) + h_{(c,x+\epsilon)}(x)h_{(c,d)}(x+\epsilon) = h_{(c,x+\epsilon)}(x)h_{(c,d)}(x+\epsilon) \le h_{(c,d)}(x+\epsilon$$

Лемма доказана.

Интегральное уравнение. Рассмотрим уравнение $y'' = q(x)$. В книге [4], с.269 приведена формула для решения задачи Дирихле этого уравнения на интервале (a, b):

$$y(x) = y(a)\frac{b-x}{b-a} + y(b)\frac{x-a}{b-a} - \frac{b-x}{b-a}\int_a^x q(t)\,(t-a)\,dt - \frac{x-a}{b-a}\int_x^b q(t)\,(b-t)\,dt. \tag{7}$$

Эту формулу легко проверить и применить её к уравнению $y'' + A(x)\,y' - B(x)\,y = 0$, положив в предыдущей задаче $q(x) \equiv -A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x)$. В результате получаем интегро-дифференциальное уравнение, которое с помощью интегрирование по частям переходит в интегральное уравнение относительно функции $y(x)$:

$$y(x) = y(a)\frac{b-x}{b-a} + y(b)\frac{x-a}{b-a} + \int_a^b K_{(a,b)}(x,t)\,y(t)\,dt, \tag{8}$$

где

$$K_{(a,b)}(x,t) = \begin{cases} \frac{b-x}{b-a}(-A(t) - (B(t) + A'(t))\,(t-a)), & a < t < x, \\ \\ \frac{x-a}{b-a}(A(t) - (B(t) + A'(t))\,(b-t)), & x < t < b. \end{cases} \tag{9}$$

В частности при $A(x) \equiv 0$

$$K_{(a,b)}(x,t) = \begin{cases} \frac{b-x}{b-a}(-B(t)\,(t-a)), & a < t < x, \\ \\ \frac{x-a}{b-a}(-B(t)\,(b-t)), & x < t < b. \end{cases} \tag{10}$$

Недостижимость правой границы. Из уравнения (6), положив $c_1 = c_2$, и условия (4) получаем уравнение

$$h_{(c_1,d_2)}(x) = h_{(c_1,d_1)}(x)h_{(c_1,d_2)}(d_1),$$

из которого следует

$$h_{(a,b)}(x_0) = h_{(a,x_1)}(x_0)h_{(a,b)}(x_1), \tag{11}$$

где $a < x_0 < x_1 < b$.

Пусть $(x_n)_0^\infty$ — строго возрастающая последовательность точек, у которой $x_0 \in (a,b)$, а также $x_n \to b$. Отсюда из (11) следует произведение

$$h_{(a,x_n)}(x_0) = \prod_{k=1}^{n} h_{(a,x_k)}(x_{k-1}), \quad x_k > x_{k-1},$$

которое можно продолжить

$$h_{(a,b)}(x_0) = \prod_{k=1}^{\infty} h_{(a,x_k)}(x_{k-1}).$$

. Правая граница интервала (a, b) называется недостижимой для данного дифференциального уравнения, если для любой точки $x < b$ справедливо $h_{(a,b)}(x) = 0$. Из этого определения следует, что недостижимость границы b равносильна равенству нулю соответствующего бесконечного произведения (произведение расходится). Это в свою очередь равносильно расходимости ряда (см., например, [6], с.357)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - h_{(a,x_k)}(x_{k-1})) = \infty.$$

Из (10) следует

$$h_{(c,d)}(x) = h_{(c,d)}(d)\frac{x-c}{d-c} - \int_c^x \frac{d-x}{d-c}B(t)\,(t-c)h_{(c,d)}(t)\,dt - \int_x^d \frac{x-c}{d-c}B(t)\,(d-t)h_{(c,d)}(t)\,d$$

Отсюда

$$1-h_{(c,d)}(x) = 1-h_{(c,d)}(d)\frac{x-c}{d-c} + \int_c^x \frac{d-x}{d-c}B(t)\,(t-c)h_{(c,d)}(t)\,dt + \int_x^d \frac{x-c}{d-c}B(t)\,(d-t)h_{(c}$$

Учитывая, что $B \geq 0$, $\quad 0 \leq h_{(c,d)}(d) \leq 1$ и что $h_{(c,d)}(x)$ не убывает по x, получаем первое неравенство

$$1 - h_{(c,d)}(x) \geq \frac{d-x}{d-c} + h_{(c,d)}(x)\int_x^d \frac{x-c}{d-c}B(t)\,(d-t)\,dt,$$

Отсюда

$$1 - h_{(c,d)}(x) \; - h_{(c,d)}(x)\int_x^d \frac{x-c}{d-c}B(t)\,(d-t)\,dt \geq \frac{d-x}{d-c},$$

$$\frac{x-c}{d-c} \geq h_{(c,d)}(x)\,(1+L),$$

где

$$L \equiv \int_x^d \frac{x-c}{d-c}B(t)\,(d-t)\,dt,$$

$$h_{(c,d)}(x) \leq \frac{x-c}{d-c}\left[1+L\right]^{-1},$$

$$1 - h_{(c,d)}(x) \geq 1 - \frac{x-c}{d-c}\,[1+L]^{-1} \geq 1 - [1+L]^{-1} = \frac{L}{1+L}$$

Учитывая неравенства $a < x_{k-1} < x_k < b$ и свойство строгого возрастания функции $f(x) \equiv x/(1+x)$, полагая $c \equiv a$, $d \equiv x_k$, $x \equiv x_{k-1}$, получаем

$$1 - h_{(a,x_k)}(x_{k-1}) \geq \frac{L_k}{1+L_k},$$

где

$$L_k \equiv \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_{k-1}-a}{x_k-a} B(t)\,(x_k-t)\,dt$$

$$L_k \geq L_{kb} \equiv \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{x_0-a}{b-a} B(t)\,(x_k-t)\,dt$$

$$\frac{L}{1+L} \geq \frac{L_{kb}}{1+L_{kb}}$$

Отсюда достаточным условием для расходимости ряда является условие

$$(\forall k \geq 1)(\exists \epsilon > 0) \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} B(t)\,(x_k-t)\,dt \geq \epsilon.$$

Оно слишком громоздко и трудно проверяемо. Будем искать более простое достаточное условие. Зададим конкретную последовательность $(x_n)_0^\infty$:

$$(\forall k \geq 1) \quad x_k = x_0 + (b-x_0)(1-2^{-k}),$$

откуда $r_k = (b-x_0)2^{-k}$, где $r_k \equiv x_k - x_{k-1}$. Более простое условие достаточности:

$$(\exists \epsilon > 0)\,(\forall k \geq 1) \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} B(t)\,(x_k-t)\,dt \geq \epsilon.$$

Условие 3. *Существует* $x_0 < b$ *такое, что функция* B *не убывает на интервале* (x_0, b)

В этом случае для выполнения предыдущего условия достаточно :

$$(\exists \epsilon > 0)\,(\forall k \geq 1) \quad B(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k-t)\,dt \geq \epsilon.$$

что равносильно

$$B(x_{k-1}) \geq \epsilon \left[\frac{r_k^2}{2}\right]^{-1}.$$

Рассмотрим продолжение функции x_k, заданной для всех целых $n \geq 0$, на интервал всех $t \geq 0$:

$$x_t = x_0 + (b - x_0)(1 - 2^{-t}).$$

Отсюда $r_t = (b - x_0)/2^t$. Используя выражение множителя 2^t в терминах x_t:

$$2^t = \frac{b - x_0}{b - x_t},$$

получаем продолжение функции $B(x_n)$ на все $z \in [x_0, b)$ и условие достаточности в терминах $B(z)$:

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall z \in (x_0, b)) \quad B(z) \geq \frac{2\epsilon}{r_{t+1}^2} = \frac{8\epsilon}{(b - z)^2}.$$

Недостижимость левой границы. Рассмотрим представление функции $g_{(a,b)}(x)$. **.** Левая граница интервала (a, b) называется недостижимой для данного дифференциального уравнения, если для любой точки $x > a$ справедливо $g_{(a,b)}(x) = 0$.

Пусть $(y_n)_0^\infty$ — строго убывающая последовательности точек, у которых $y_0 \in (a, b)$, а также $y_n \to a$. Отсюда и из (5) следует произведение

$$g_{(y_n,b)}(y_0) = \prod_{k=1}^{n} g_{(y_k,b)}(y_{k-1}), \quad y_k < y_{k-1},$$

которое можно продолжить

$$g_{(a,b)}(y_0) = \prod_{k=1}^{\infty} g_{(y_{k-1},b)}(y_k),$$

Это в свою очередь равносильно расходимости ряда (см., например, [6], с.357)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - g_{(a,y_{k-1})}(y_k)) = \infty, \tag{12}$$

Оценим члены этого ряда. Из формулы (10) при $A(x) \equiv 0$ получаем

$$g_{(a,b)}(x) = g_{(a,b)}(a)\,\frac{b-x}{b-a} - \frac{b-x}{b-a}\,\int_a^x B(t)\,(t-a)\,g_{(a,b)}(t)\,dt - \frac{x-a}{b-a}\,\int_x^b B(t)\,(b-t)\,g_{(a,b)}(t)$$

Отсюда

$$1 - g_{(a,b)}(x) \geq \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a}\,g_{(a,b)}(x)\,\int_a^x B(t)\,(t-a)\,dt.$$

Отсюда

$$1 - \frac{x-a}{b-a} \geq g_{(a,b)}(x)\,(1+L),$$

где

$$L \equiv \frac{b-x}{b-a} \int_a^x B(t)\,(t-a).$$

Отсюда

$$1 - g_{(a,b)}(x) \geq \left[\frac{x-a}{b-a} + L\right]\,(1-L)^{-1} \geq \frac{L}{1+L}.$$

Зададим конкретную последовательность

$$y_n = a + (y_0 - a)2^{-n}$$

и её продолжение на все $t > 0$

$$y_t = a + (y_0 - a)2^{-t}. \tag{13}$$

Для данной последовательности (y_n) имеем

$$r_n \equiv y_{n-1} - y_n = (y_0 - a)2^{-n}$$

а также

$$1 - g_{(y_n,b)}(y_{n-1}) \geq \frac{L_n}{1+L_n},$$

где

$$L_n \equiv \frac{b-y_{n-1}}{b-y_n} \int_{y_n}^{y_{n-1}} B(t)(t-y_n)\,dt.$$

Замечая, что $\dfrac{b-y_{n-1}}{b-y_n} \geq \dfrac{b-y_0}{b-a}$ и пользуясь строгим возрастанием функции $f(x) \equiv 1/(1+x)$, получаем

$$1 - g_{(y_n,b)}(y_{n-1}) \geq \frac{L_{an}}{1+L_{an}},$$

где

$$L_{na} \equiv \frac{b-y_0}{b-a} \int_{y_n}^{y_{n-1}} B(t)(t-y_n)\,dt.$$

Теперь для расходимости исходного ряда достаточно найти условия, при которых расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{an}}{1+L_{na}}.$$

Простое достаточное условие расходимости этого ряда состоит в том, например, что
$$(\forall n \geq 1)\,(\exists \epsilon > 0) \quad \int_{y_n}^{y_{n-1}} B(t)(t-y_n)\,dt > \epsilon.$$
Чтобы им воспользоваться, сделаем следующее предположение:

Условие 4. *Существует $y_0 > a$ такое, что на интервале (a, y_0) функция B не возрастает.*

При этом
$$\int_{y_n}^{y_{n-1}} B(t)(t-y_n)\,dt \geq B(y_{n-1}) \int_{y_n}^{y_{n-1}} (t-y_n)\,dt = B(y_{n-1})\,\frac{(y_n - y_{n-1})^2}{2}.$$
Наше новое предположение, обеспечивающее расходимость :
$$(\exists \epsilon > 0)\,(\forall n \geq 1) \quad B(y_{n-1}) \int_{y_n}^{y_{n-1}} (t-y_n)\,dt > \epsilon.$$
Отсюда
$$(\forall n \geq 1) \quad B(y_{n-1}) \geq \frac{2\epsilon}{(y_n - y_{n-1})^2}$$

$$(\forall n \geq 0) \quad B(y_n) \geq \frac{2\epsilon}{(y_n - y_{n+1})^2} = \frac{2\epsilon}{(y_0 - a)^2 (2^{-n} - 2^{-n-1})^2} = \frac{8\epsilon\, 2^{2n}}{(y_0 - a)^2}.$$
С другой стороны, из определения y_n следует
$$2^n = \frac{y_0 - a}{y_n - a}$$
. Отсюда
$$(\forall n \geq 0) \quad B(y_n) \geq \frac{8\varepsilon}{(y_n - a)^2}.$$
Продолжая это неравенство на все $t \geq 0$ и заменяя y_t на $z \in (a, y_0)$, получаем достаточное условие для расходимости исходного ряда:
$$(\exists \epsilon > 0)(\forall z \in (a, y_0)) \quad B(z) \geq \frac{8\varepsilon}{(z-a)^2}.$$

6. Приведение уравнения в нормальную форму

Рассмотрим уравнение

$$y'' + A(x)y' - B(x)y = 0. \tag{14}$$

С помощью замены функции

$$y(x) \equiv u(x) \exp\left(\frac{1}{2}\int_x^b A(t)\,dt\right)$$

это уравнение очевидным образом преобразуется в нормальную форму (см., например, [6], с.145)

$$u'' - B_1(x)u = 0, \tag{15}$$

где

$$B_1 \equiv B + \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{2}A'. \tag{16}$$

Чтобы уравнение (15) допускало единственное решение задачи Дирихле на любом конечном интервале, предположим, что выполнено следующее условие:

Условие 5 . *Для преобразованного уравнения справедливо* $B_1 \geq 0$.

При фиксированной функции A с ограниченной производной это условие всегда может быть достигнуто за счёт увеличения B

Обозначим $h^{(u)}_{(a,b)}(x)$ правую субвероятность, соответствующую уравнению (15)

$$h^{(u)}_{(a,b)}(a) = 0, \quad h^{(u)}_{(a,b)}(b) \leq 1.$$

Согласно замене функций, для соответствующего решения уравнения (14) имеем представление

$$h_{(a,b)}(x) = h^{(u)}_{(a,b)}(x) \exp\left(\frac{1}{2}\int_x^b A(t)\,dt\right).$$

В частности,

$$h_{(a,b)}(a) = h^{(u)}_{(a,b)}(a) \exp\left(\frac{1}{2}\int_a^b A(t)\,dt\right) = 0,$$

$$h_{(a,b)}(b) = h^{(u)}_{(a,b)}(b) \exp\left(\frac{1}{2}\int_b^b A(t)\,dt\right) \leq 1.$$

Согласно полученным выше сравнениям, для недостижимости правой границы интервала (a, b) достаточно, чтобы для любого $z \in (a, b)$

$$B_1(z) \geq \frac{8\epsilon}{(b-z)^2}. \tag{17}$$

Из определения недостижимости правой границы следует, что эта недостижимость будет у дифференциального уравнения (14) тогда же, как и у уравнения (15). Это означает, что условие (17) является достаточным для недостижимости правой границы дифференциального уравнения (14)).

Условие недостижимости левой границы дифференциальным уравнением (14) мы получим с помощью замены функции

$$y(x) = v(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^x A(t)\,dt\right).$$

При этом уравнение (14) очевидным образом преобразуется к нормальному виду. v"- B$_1(x)v = 0$,где коэффициент $B_1(x)$ определён выше (16). Как и ранее мы предполагаем, что коэффициент $B_1(x)$ всюду на интервале (a, b) неотрицателен. Следовательно, уравнение () допускает существование единственного решения задачи Дирихле на любом конечном интервале. этому новому уравнению. "левая"субвероятность $g^{(v)}_{(a,b)}(x)$. Левая граница интервала называется недостижимой, если для любой точки интервала $g^{(v)}_{(a,b)}(x) = 0$. Достаточным условием этой недостижимости является доказанное выше неравенство

$$B_1(z) \geq \frac{8\epsilon}{(z-a)^2}. \tag{18}$$

Функция $g_{(a,b)}(x)$ исходного дифференциального уравнения определяется условием

$$g_{(a,b)}(x) = g^{(v)}_{(a,b)}(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_a^x A(t)\,dt\right).$$

Поэтому достаточным условием недостижимости левой границы для исходного дифференциального уравнения является то же самое условие (18).

Таким образом мы доказали 2 теоремы

Теорема 1 . *Пусть функция B непрерывна и неотрицательна на интервале* (a, b) *и выполняются условия 1 и 2 для дифференциального уравнения f" - B(x)f=0*

на интервале (a, b).

Для того, чтобы для этого уравнения правая граница интервала была недостижима, достаточно, чтобы функция B была неубывающей на некотором интервале (x_0, b) ($x_0 \in (a, b)$), а также для любого $z \in [x_0, b)$ выполнялось неравенство

$$B(z) \geq \frac{8\epsilon}{(b-z)^2}.$$

Для того, чтобы для этого уравнения левая граница интервала была недостижима, достаточно, чтобы функция B была невозрастающей на некотором интервале (a, y_0) ($y_0 \in (a, b)$), а также для любого $z \in (a, y_0]$ выполнялось неравенство

$$B(z) \geq \frac{8\epsilon}{(z-a)^2}.$$

Теорема 2 . *Пусть функция B непрерывна и неотрицательна, функция A непрерывно дифференцируема и выполняются условия 1 и 2 для уравнения f" + A(x)f'-B(x)f=0*

на интервале (a, b),

Для того, чтобы для этого уравнения правая граница интервала была недостижима, достаточно, чтобы функция $B_1 \equiv B + \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{2}A'$ была неотрицательной на (a, b), неубывающей на некотором интервале (x_0, b) ($x_0 \in (a, b)$), а также для любого $z \in [x_0, b)$ выполнялось неравенство

$$B_1(z) \geq \frac{8\epsilon}{(b-z)^2}.$$

Для того, чтобы для этого уравнения левая граница интервала была недостижима, достаточно, чтобы функция B_1 была неотрицательной на (a, b), невозрастающей на некотором интервале (a, y_0) ($y_0 \in (a, b)$), а также для любого $z \in (a, y_0]$ выполнялось неравенство

$$B_1(z) \geq \frac{8\epsilon}{(z-a)^2}.$$

7. Интерпретация

В работе [7] рассматривался случай недостижимости границ интервала значений диффузионного процесса $X(t)$ без остановки, соответствующего уравнению

$$\frac{1}{2}y'' + A(x)y' = 0.$$

Процесс $X(t)$ в рассмотренном случае — это марковский диффузионный процесс без обрыва с областью определения $[0,\infty)$ и областью значений (a,b), где $-\infty < a < b < \infty$. Множитель $1/2$ в данном выражении обычно сохраняется как напоминание об уравнении Колмогорова о диффузионном марковском процессе (см., например, [2], с.215). Недостижимость границ интервала (a,b) достигалась за счёт роста абсолютной величины коэффициента A при приближении значения процесса к этим границам (к левой границе со знаком плюс, к правой границе — минус). В книге Гихмана и Скорохода [8] изучалась задача недостижимости границ интервала в терминах стохастических дифференциальных уравнений. В книге Чёрного и Энгельберта [9] подводился итог исследованиям в этой области, где проблеме недостижимости границ диффузионным процессом посвящена вторая глава, в которой исследуется поведение процесса в односторонних окрестностях сингулярных точек стохастических дифференциальных уравнений.

Рассмотрим случайный процесс, соответствующий уравнению

$$\frac{1}{2}y'' + A(x)y' - B(x)y = 0, \tag{19}$$

где функции B неотрицательна на интервале (a,b), а её максимум на этом интервале положителен. Такое предположение допускает возможность бесконечной остановки диффузионного полумарковского процесса $X(t)$ (см. ниже) внутри этого интервала до момента первого выхода из него (см., например, [3]), для которого бесконечная остановка имеет смысл и определяется в терминах полумарковских переходных функций. Для марковского диффузионного процесс обычно предполагается (см., например, [2], с.15), что такой процесс обрывается в некоторый случайный марковский момент времени, т.е. его значение в этот момент равно некоторому $\delta \notin (-\infty,\infty)$ (процесс выходит из любого интервала, а не остаётся в нём навсегда).

Одномерный диффузионный полумарковский процесс. Процесс $X(t)$ определён на полупрямой $[0,\infty)$ со значениями в $\mathcal{R} \equiv (-\infty,\infty)$ (если не рассматривается какое-либо ограничение области значений). Процесс однороден во времени и полностью определяется набором всех своих полумарковских переходных функций $Y_{(a,b)}(S,\, a\,|\,x)$ и $Y_{(a,b)}(S,\, b\,|\,x)$, где $x \in (a,b)$, $S \subset (0,\infty)$. Выражение $Y_{(a,b)}(S,\, \gamma\,|\,x)$ определяется как условная вероятность при условии, что $X(0) = x$, события $\{$момент первого выхода из интервала (a,b) принадлежит множеству S, причём точка первого выхода — это γ $\}$. Здесь γ — одно из двух значений $\gamma = a$ или $\gamma = b$. Для одномерного диффузионного полумарковского процесса эти условные вероятности согласованы двумя условиями:

$$Y_{(a,b)}((0,t),\, a\,|\,x) = \int_0^t Y_{(c,d)}(dy,\, c\,|\,x) Y_{(a,b)}((0,t-y),\, a\,|\,c) + \int_0^t Y_{(c,d)}(dy,\, d\,|\,x) Y_{(a,b)}((0,t$$

$$Y_{(a,b)}((0,t),\, b\,|\,x) = \int_0^t Y_{(c,d)}(dy,\, c\,|\,x) Y_{(a,b)}((0,t-y),\, b\,|\,c) + \int_0^t Y_{(c,d)}(dy,\, d\,|\,x) Y_{(a,b)}((0,t-$$

где $(c,d) \subset (a,b)$. Обозначив

$$g_{(a,b)}(x) \equiv Y_{(a,b)}((0,\infty),\, a\,|\,x), \qquad h_{(a,b)}(x) \equiv Y_{(a,b)}((0,\infty),\, b\,|\,x),$$

мы получаем для семейства этих функций условия согласования (5) и (6).

Заметим, что условие 1 выполняется для полумарковского процесса по определению, так как решение задачи Дирихле для него с функцией ϕ на границе интервала совпадает с математическим ожиданием значения ϕ процесса в точках первого выхода из интервала. Одномерный непрерывный полумарковский процесс называется диффузионным, если в окрестности точки x существуют функции: $A(x)$ непрерывно дифференцируемая и $B(x)$ неотрицательная непрерывная, — такие, что при $r > 0$, $r \to 0$

$$g_{(x-r,x+r)}(x) = \frac{1}{2}(1 - A(x)r - B(x)r^2) + o(r^2), \tag{20}$$

$$h_{(x-r,x+r)}(x) = \frac{1}{2}(1 + A(x)r - B(x)r^2) + o(r^2). \tag{21}$$

Легко проверить следующее утверждение: если эти условия выполняются для любой точки $x \in (a,b)$, то функции $g_{(a,b)}(x)$, $h_{(a,b)}(x)$ удовлетворяют на этом интервале дифференциальному уравнению.

$$\frac{1}{2}\, y'' + A(x)y' - B(x)y = 0.$$

Таким образом, недостижимость в терминах дифференциальных уравнений совпадает с недостижимостью в терминах одномерных диффузионных полумарковских процессов. Условие 2 для диффузионного процесса выполняется благодаря тому, что значения $h_{(c,d)}(c)$ и $g_{(c,d)}(d)$ определяются в этом случае по непрерывности: $h_{(c,d)}(x) \to 0$ при $x > c$, $x \to c$ и $g_{(c,d)}(x) \to 0$ при $x < d$, $x \to d$. Этот факт хорошо известен в теории диффузионных процессов. При постоянных коэффициентах он доказывается путём непосредственного решения уравнения. Для уравнения с переменными коэффициентами обосновывается предельный переход с использованием марковского свойства относительно моментов первого выхода. Условия 3, 4, 5 входят непосредственно в условия теорем 1 и 2.

8. Заключение

Исследованы свойства недостижиимости границ интервала для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, зависящие от коэффициентов этого уравнения. Найдены достаточные условия односторонне - нулевых решений задачи Дирихле, представимого в ядерном виде (см. Условие 1). Главной чертой недостижимости границ является быстрое стремление к бесконечности коэффициента $B(x)$ при приближении аргумента этого коэффициента к границе интервала.

Приведена интерпретация полученных результатов в терминах диффузионного полумарковского процесса, областью значений которого является данный интервал. Недостижимость границ интервала диффузионным процессом объясняет свойства реальных процессов в физике, геологии, социологии и других областях, состоящие в накоплении массы диффундирующего вещества вблизи границ интервала. Это становится понятным ввиду того, что коэффициент $B(x)$ уравнения характеризует бесконечную остановку процесса внутри интервала.

Интересным следствием доказанных теорем является существование таких коэффициентов уравнения, для которых решение задачи Дирихле тождественно равно нулю. Для диффузионного полумарковского процесса это соответствует недостижимости обеих границ. В условии теоремы 1, например, это может быть реализовано за счёт выбора $x_0 = y_0$ и стремления коэффициента $B(x)$ к бесконечности при стремлении x к границам интервала (U-образная функция).

Список литературы

[1] Гильбарг, Д., Трудингер, Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М. Наука, 1989.

[2] Дынкин, Е.Б. Марковские процессы. М: ФМ, 1963.

[3] Харламов, Б.П. Непрерывные полумарковские процессы. СПб: Наука, 2001.

[4] Соболев, С.Л. Уравнения математической физики. М.: Техиздат, 1954.

[5] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Физматгиз, 1959.

[6] Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М: Наука, 1971.

[7] Харламов, Б.П. О недостижимой границе интервала значений диффузионного процесса: полумарковский подход. Записки научных семинаров ПОМИ, т.466, 2017, 313–330.

[8] Гихман, И.И, Скороход, А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.

[9] Cherny, A.S., Engelbert, H.-J. Singular Stochastic Differential Equations. Shpringer, Berlin-Heidelberg-New York, 2005.

On some boundary property of Dirichlet operator family for the second order ordinary differential equation

Harlamov B.P.

Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS, Saint-Petersburg, Russia

e-mail:
b.p.harlamov@gmail.com

Abstract. An ordinary differential equation of the second order is considered. Coefficients of the equation are assumed to provide a unique Dirichlet problem solution on every finite interval. A consistency condition with respect to convolution of operators Dirichlet family of this equation is defined. The Dirichlet problem solutions representing in a kernel form are investigated. In one-dimensional case such a sub-probability kernel is reduced to two functions (left and right) corresponding to two boundaries of the interval. The left (right) boundary of the initial interval is said to be unattainable if the the left (right) sub-probability is equal to zero. In terms of the initial differential equation some sufficient conditions are derived for the left (right) boundary to be unattainable. One can control these conditions by a constructive method. As interpretation of obtain results unattainable boundaries of a diffusion semi-Markov process are demonstrated

Key words: ordinary differential equation of the second order, Dirichlet problem, sub-probability kernel, integral equation, diffusion semi-Markov process.