ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2020
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

Нелокальные краевые задачи в дифференциальной и разностной трактовках для обобщенного нагруженного уравнения влагопереноса

М.Х.Бештоков
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Аннотация. Исследуются краевые задачи для одномерного по пространству нагруженного уравнения влагопереноса дробного порядка с нелокальными граничными условиями. Методом энергетических неравенств в предположении существования решения поставленной задачи выводятся априорные оценки решений нелокальных краевых задач в дифференциальной форме. Построены разностные схемы и для них доказываются аналоги априорных оценок в разностной форме, приводятся оценки погрешности в предположений достаточной гладкости решений уравнений. Из полученных априорных оценок следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи со скоростью равной порядку аппроксимации разностной задачи.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение влагопереноса, уравнение Аллера, нелокальные краевые задачи, априорная оценка, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто.

1 Введение

Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе (см. [1]-[3]) принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы от решения, в частности значения решения или его производных на многообразиях меньшей размерности. Исследование таких уравнений представляет интерес как с точки зрения построения общей теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений, причем приложений как в математическом моделировании, так и в собственно математике.

Особый интерес представляют краевые задачи с интегральными условиями. Из физических соображений условия такого вида совершенно естественны и возникают при математическом моделировании в тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекания с помощью непосредственных измерений или же когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины. Так, задачи с интегральными условиями могут служить математическими моделями физических явлений, связанных, например, с задачами, возникающими при изучении физики плазмы, при изучении движения почвенной влаги в капиллярно-пористых средах. На задачи подобного типа, как качественно новые и возникающие при решении современных проблем физики, указывает в своей статье А.А. Самарский [4] и приводит постановку задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности как пример одной из таких задач.

В настоящее время стало очевидным, что при решении многих задач в физике, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами которых могут служить сильно пористые среды, каковым, например, является почвогрунт. При решении таких задач возникает необходимость изучения краевых задач для дифференциальных уравнений с дробной производной [5] - [10].

Хорошо известно, что вопросы фильтрации жидкости в пористых средах [11], [12], передачи тепла в гетерогенной среде [13], [14], влагопереноса в почво-грунтах [15], (см. [16, с.137]) приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются дифференциальными уравнениями в частных производных третьего порядка.

$$u_{xxt} + du_t + \eta u_{xx} + au_x + bu = q(x,t), \qquad (*)$$

где $\eta = const,\ a = a(x),\ b = b(x)$.

Уравнение (*) часто называют псевдопараболическим уравнением или уравнением соболевского типа [17].

В работе [18] предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе этих моделей лежат псевдопараболические уравнения с дробной по времени производной.

Неклассичность рассматриваемых в работе задач заключается в том, что вместо первой производной по времени уравнение содержит производную дробного порядка в смысле Капуто, уравнения являются нагруженными, а краевые условия - граничными условиями интегрального вида. Эти неклассические направления актуальны в силу обилия разнообразных приложений, в которых возникают такие неклассические объекты.

Нелокальным краевым задачам для различных уравнений влагопереноса посвящены работы автора [19], [20], нагруженным уравнениям - [21]. Численным методам решения краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы [22]-[28].

2 Постановка нелокальной краевой задачи A

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u(x_0,t) + f(x,t),$$

$$0 < x < l,\ 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$-\Pi(l,t) = \beta(t)\int_0^l u(x,t)dx - \mu(t),\ 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le l, \tag{4}$$

где

$$u(x,t) \in C^{4,3}(\overline{Q}_T),\ k(x,t) \in C^{3,2}(\overline{Q}_T),\ \eta(x) \in C^3[0,l],$$

$$r(x,t), q(x,t), f(x,t) \in C^{2,2}(\overline{Q}_T),$$

$$0 < c_0 \le k(x,t), \eta(x) \le c_1,$$

$$|q(x,t)|,\ |r(x,t)|,\ |r_x(x,t)|,\ |k_x(x,t)|,\ |\beta(t)| \le c_2, \tag{5}$$

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau,$ – дробная производная в смысле Капуто порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1,\ c_i, i = 0,1,2-$ положительные постоянные числа, $\Pi(x,t) = ku_x + \partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta u_x\big)$, x_0- фиксированная точка из промежутка $(0,l)$, $C^{n,m}(\overline{Q}_T)$ –

класс функций, имеющих непрерывные на $\overline{Q}_T$ производные до порядка n по x и до порядка m по t включительно.

В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (1) $-$ (4) существует и обладает нужными по ходу изложения производными.

Заметим, что при построении разностной схемы требуется более высокая гладкость решения и коэффициентов уравнения для обеспечения нужного порядка аппроксимации разностной схемы [29].

В дальнейшем будем также использовать $M_i = const > 0,\ i = 1, 2, ...$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

3 Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1) - (4) в дифференциальной форме введём скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$\Big(a, b\Big) = \int_0^l abdx,\ \Big(a, a\Big) = \|a\|_0^2,\ \text{где}\ \ a, b - \text{заданные на } [0, l] \text{ функции.}$$

Умножим уравнение (1) скалярно на u:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha} u, u\Big) = \Big(\big(ku_x\big)_x, u\Big) + \Big(\partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta u_x\big)_x, u\Big) +$$

$$+\Big(ru_x, u\Big) - \Big(qu(x_0, t), u\Big) + \Big(f, u\Big). \tag{6}$$

Справедливы следующие

Лемма 1. [26]. *Для любой абсолютно непрерывной на* $[0, T]$ *функции* $\upsilon(t)$ *справедливо неравенство*

$$\upsilon(t)\partial_{0t}^{\alpha}\upsilon(t) \geq \frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\upsilon^2(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Лемма 2. [26]. *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция* $y(t)$ *удовлетворяет для почти всех* t *из [0,T] неравенству*

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(t) \leq c_1 y(t) + c_2(t),\ 0 \leq \alpha \leq 1,$$

где $c_1 > 0,\ c_2(t)$*−суммируемая на* $[0, T]$ *неотрицательная функция. Тогда*

$$y(t) \leq y(0)E_{\alpha}(c_1 t^{\alpha}) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1 t^{\alpha})D_{0t}^{-\alpha}c_2(t),$$

где $E_\alpha(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $E_{\alpha,\mu}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}-$ *функции Миттаг-Леффлера.*

Лемма 3. [27]. *Для любой функции* $y(t)$, *заданной на сетке* $\bar\omega_\tau$, *справедливо неравенство*

$$y^{(\sigma)}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\geq\frac{1}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y^2).$$

Лемма 4. [28] *Предположим, что неотрицательные последовательности* $y^j,\varphi^j, j=0,1,2,...$ *удовлетворяют неравенству*

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y^j\leq\lambda_1y^{j+1}+\lambda_2y^j+\varphi^j,\quad j\geq1$$

где $\lambda_1\geq0,\lambda_2\geq0-$ *константы, тогда существует такое* τ_0, *что если* $\tau\leq\tau_0$, *то*

$$y^{j+1}\leq2\Big(y^0+\frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leq j'\leq j}\varphi^{j'}\Big)E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha),\quad 1\leq j\leq j_0,$$

где $E_\alpha(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}-$ *функция Миттаг-Леффлера,* $\lambda=\lambda_1+\dfrac{\lambda_2}{2+2^{1-\alpha}}$.

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (6), пользуясь неравенством Коши с ε:

$$\Big(\partial^\alpha_{0t}u,u\Big)\geq\frac{1}{2}\Big(1,\partial^\alpha_{0t}u^2\Big)=\frac{1}{2}\partial^\alpha_{0t}\|u\|_0^2,\tag{7}$$

$$\Big(\big(ku_x\big)_x,u\Big)=\int_0^l u\Big(ku_x\Big)_xdx=uku_x|_0^l-\int_0^l ku_x^2dx,\tag{8}$$

$$\Big(\partial^\alpha_{0t}\big(\eta u_x\big)_x,u\Big)=\int_0^l u\partial^\alpha_{0t}\Big(\eta u_x\Big)_xdx=u\partial^\alpha_{0t}(\eta u_x)|_0^l-\int_0^l\eta(x)u_x\partial^\alpha_{0t}u_xdx\leq$$

$$\leq u\partial^\alpha_{0t}(\eta u_x)|_0^l-\frac{1}{2}\int_0^l\eta(x)\partial^\alpha_{0t}(u_x)^2dx,\tag{9}$$

$$\Big(ru_x,u\Big)=\int_0^l ruu_xdx\leq\frac{c_2}{2}\int_0^l u^2dx+\frac{c_2}{2}\int_0^l u_x^2dx\leq\frac{c_2}{2}\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big).\tag{10}$$

$$-\Big(qu(x_0,t),u\Big)=-\int_0^l qu(x_0,t)udx=-u(x_0,t)\int_0^l qudx\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}u^2(x_0,t)+\frac{1}{2}\bigg(\int_0^l qudx\bigg)^2\leq M_1\big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\big),\tag{11}$$

$$\Big(f,u\Big)=\int_0^l fudx\leq\frac{1}{2}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\|f\|_0^2.\tag{12}$$

Учитывая преобразования (7)-(12), из (6) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\int_0^l\eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+c_0\|u_x\|_0^2\le$$

$$u\Pi(x,t)\Big|_0^l+M_2\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+\frac{1}{2}\|f\|_0^2. \tag{13}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (13) с учетом (2), (3)

$$u\Pi(x,t)\Big|_0^l=\Pi(l,t)u(l,t)-\Pi(0,t)u(0,t)=u(l,t)\bigg(\mu(t)-\beta(t)\int_0^l u(x,t)dx\bigg)=$$

$$=\mu(t)u(l,t)-\beta(t)u(l,t)\int_0^l u(x,t)dx\le M_3u^2(l,t)+\frac{1}{2}\mu^2(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\bigg(\int_0^l u(x,t)dx\bigg)^2\le M_4\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+\frac{1}{2}\mu^2(t). \tag{14}$$

Из (13) с учетом (14) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+\|u_x\|_0^2\le M_5\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_6\Big(\|f\|_0^2+\mu^2(t)\Big). \tag{15}$$

где $\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}=\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2$.

Применяя к обеим частям (15) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\int_0^l\eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\le$$

$$\le M_5D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_7\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big), \tag{16}$$

где $=const>0$, зависящее только от входных данных задачи (1)-(4), $D_{0t}^{-\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0<\alpha<1$.

На основании Леммы 2 оценим первое слагаемое в правой части (16).

Пусть $y(t)=D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}$, $\partial_{0t}^{\alpha}y(t)=\|u(x,t)\|^2_{W_2^1(0,l)}$, тогда получаем

$$D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}\le M_7\Big(D_{0t}^{-2\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big). \tag{17}$$

Так как для любой неотрицательной интегрируемой на $[0,T]$ функции $g(t)$ справедливо неравенство

$$D_{0t}^{-2\alpha}g(t)\le\frac{t^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}D_{0t}^{-\alpha}g(t), \tag{18}$$

то из (16) с учетом (17) и (18) находим априорную оценку

$$\|u\|^2_{W^1_2(0,l)} + D^{-\alpha}_{0t}\|u_x\|^2_0 \le M\Big(D^{-\alpha}_{0t}\Big(\|f\|^2_0 + \mu^2(t)\Big) + \|u_0(x)\|^2_{W^1_2(0,l)}\Big), \tag{19}$$

где $M = const > 0$, зависящая от входных данных задачи (1)-(4).

Теорема 1.

Если $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T),\ \eta(x) \in C^1[0,l],\ r(x,t), q(x,t), f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}\big(Q_T\big) \cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big),\ \partial^\alpha_{0t}u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ *и выполнены условия (5), тогда для решения задачи (1)-(4) справедлива априорная оценка (19).*

Из априорной оценки (19) следуют единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)-(4) от входных данных.

4 Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1)-(4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$:

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y = \varkappa^j_i\Big(a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\Big)_{x,i} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_i y_{\bar{x}}\Big)_{x,i} + b^{-j}_i a^j_i y_{\bar{x},i} + b^{+j}_i a^j_{i+1} y^{(\sigma)}_{x,i} -$$

$$-d^j_i\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big) + \varphi^j_i,\ (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \tag{20}$$

$$y^{(\sigma)}_0 = 0, \tag{21}$$

$$-\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\Big)\Big) =$$

$$= \beta\sum_{i=0}^{N} y^{(\sigma)}_i \hbar + 0.5hd^j_N\Big(y^{(\sigma)}_{i_0}x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1}x^+_{i_0}\Big) + 0.5h\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N - \tilde{\mu}, \tag{22}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{23}$$

где $\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum\limits_{s=0}^{j} c^{(\alpha,\sigma)}_{j-s} y^s_t$ - дискретный аналог дробной производной Капуто порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$ [27].

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0,1,...,m,\ m\tau = T\},$$

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,...,N,\ Nh = l\},$$

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \big\{(x_i,t_j),\ x \in \overline{\omega}_h,\ t \in \overline{\omega}_\tau\big\},$$

$$a_0^{(\alpha,\sigma)}=\sigma^{1-\alpha},\ a_l^{(\alpha,\sigma)}=\Big(l+\sigma\Big)^{1-\alpha}-\Big(l-1+\sigma\Big)^{1-\alpha},\ l\geq 1,$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)}=\frac{1}{2-\alpha}\Big[(l+\sigma)^{2-\alpha}-(l-1+\sigma)^{2-\alpha}\Big]-\frac{1}{2}\Big[(l+\sigma)^{1-\alpha}+(l-1+\sigma)^{1-\alpha}\Big],\ l\geq 1,$$

$$\text{при } j=0,\quad c_0^{(\alpha,\sigma)}=a_0^{(\alpha,\sigma)};$$

$$\text{при } j>0,\quad c_s^{(\alpha,\sigma)}=\begin{cases}a_0^{(\alpha,\sigma)}+b_1^{(\alpha,\sigma)},\ s=0,\\ a_s^{(\alpha,\sigma)}+b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)}-b_s^{(\alpha,\sigma)},\ 1\leq s\leq j-1,\\ a_j^{(\alpha,\sigma)}-b_j^{(\alpha,\sigma)},\ s=j,\end{cases}$$

$$a_i^j=k\big(x_{i-0.5},t^{j+\sigma}\big),\ \gamma_i=\eta(x_{i-0.5}),\ b_i^j=\frac{r(x,t^{j+\sigma})}{k(x_i,t^{j+\sigma})},\ \varphi_i^j=f(x_i,t^{j+\sigma}),\ \sigma=1-\frac{\alpha}{2},$$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)}>\frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha}>0,\ y^{(\sigma)}=\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j,\ d_i^j=d(x_i,t^{j+\sigma}),$$

$$x_{i_0}^-=\frac{x_{i_0+1}-x_0}{h},\ x_{i_0}^+=\frac{x_0-x_{i_0}}{h},\ x_{i_0}\leq x_0\leq x_{i_0+1},$$

$$\hbar=\begin{cases}\dfrac{h}{2}, & i=0,\ i=N,\\ h, & i\neq 0,\ i\neq N,\end{cases}\quad \tilde{\mu}(t_{j+\sigma})=\mu(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_N.$$

Априорную оценку найдем методом энергетических неравенств, для этого введем скалярные произведения и норму:

$$\big(u,v\big)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih,\ \big(u,v\big]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih,\ \big(u,u\big)=\big(1,u^2\big)=\|u\|_0^2,\ \big(1,u^2\big]=\|u]|_0^2.$$

Умножим теперь (20) скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y,y^{(\sigma)}\Big)=\Big(\varkappa\big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x,y^{(\sigma)}\Big)+\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\gamma_iy_{\bar{x}}\Big)_x,y^{(\sigma)}\Big)+\Big(b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\Big)+$$

$$+\Big(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\Big)-\Big(d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big),y^{(\sigma)}\Big)+\Big(\varphi,y^{(\sigma)}\Big).\qquad(24)$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (24), с учетом (21), (22) и Леммы 3

$$\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y,y^{(\sigma)}\Big)\geq\frac{1}{2}\Big(1,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(y^2\big)\Big);\qquad(25)$$

$$\Big(\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x,y^{(\sigma)}\Big)=\varkappa ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big|_0^N-\Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},(\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\Big]=$$

$$=\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}y_N^{(\sigma)}-\Big(a\varkappa_{\bar{x}},y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big]-\Big(a\varkappa^{(-1)},(y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big]\leq$$

$$\le \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} y^{(\sigma)}_N - \Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y^{(\sigma)}_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\Big] - \frac{1}{(1+hM_1)}\Big(a\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2\Big]; \qquad (26)$$

$$\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma y_{\bar{x}}\big)_x, y^{(\sigma)}\Big) = y^{(\sigma)} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma y_{\bar{x}}\big)\big|_0^N - \Big(\gamma, y^{(\sigma)}_{\bar{x}} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_{\bar{x}})\Big] \le$$

$$\le y^{(\sigma)}_N \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\big) - \Big(\frac{\gamma_i}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y_{\bar{x}})^2\Big] \le$$

$$\le y^{(\sigma)}_N \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\big) - \frac{c_0}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2; \qquad (27)$$

Принимая во внимание преобразования (25)-(27), из (24) находим

$$\Big(\frac{1}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y^2)\Big) + \frac{1}{(1+hM_1)}\Big(a\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2\Big] + \frac{c_0}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \le$$

$$\le y^{(\sigma)}_N\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\big)\Big) - \Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y^{(\sigma)}_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\Big]$$

$$+\Big(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, y^{(\sigma)}\Big) - \Big(d\Big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\Big), y^{(\sigma)}\Big) +$$

$$+\Big(\varphi, y^{(\sigma)}\Big) \le y^{(\sigma)}_N\Big(\tilde{\mu} - \beta\sum_{i=0}^{N} y^{(\sigma)}_i \hbar - 0.5hd_N\Big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\Big) - 0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\Big) -$$

$$-\Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y^{(\sigma)}_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\Big] + \Big(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, y^{(\sigma)}\Big) -$$

$$-\Big(d\Big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\Big), y^{(\sigma)}\Big) + \Big(\varphi, y^{(\sigma)}\Big). \qquad (28)$$

Преобразуем второе, третье и четвертое слагаемые в правой части (28). Тогда получим

$$-\Big(a\varkappa_{\bar{x}}, y^{(\sigma)}_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\Big] + \Big(b^- a, y^{(\sigma)}_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_x, y^{(\sigma)}\Big) \le$$

$$\le M_2\Big(\|y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2\Big). \qquad (29)$$

Учитывая (29), из (28) получаем

$$\Big(\frac{1}{2}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(y^2)\Big] + \frac{1}{(1+hM_1)}\Big(a\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2\Big] + \frac{c_0}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \le$$

$$\le M_2\Big(\|y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2\Big) + y^{(\sigma)}_N\Big(\mu - \beta\sum_{i=0}^{N} y^{(\sigma)}_i \hbar\Big) -$$

$$-\Big(d\Big(y^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + y^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\Big), y^{(\sigma)}\Big] + \Big(\varphi, y^{(\sigma)}\Big]. \qquad (30)$$

Преобразуя второе, третье и четвертое слагаемые в правой части (30), находим

$$y_N^{(\sigma)}\Big(\mu-\beta\sum_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar\Big)-\Big(d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big),y^{(\sigma)}\Big]+\Big(\varphi,y^{(\sigma)}\Big]\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\mu^2+M_3\Big(y_N^{(\sigma)}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(d,y^{(\sigma)}\Big]^2+$$

$$+M_4\|y^{(\sigma)}]|_0^2+\frac{1}{2}\|\varphi]|_0^2\leq M_5\Big(\|y^{(\sigma)}]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)+\frac{1}{2}\Big(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\Big). \qquad (31)$$

Учитывая (31), из (30) получаем

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y]|_{W_2^1(0,l)}^2+\|y_{\bar{x}}^{\sigma}]|_0^2\leq M_6\|y^{\sigma}]|_{W_2^1(0,l)}^2+M_7\Big(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\Big). \qquad (32)$$

где $\|y]|_{W_2^1(0,l)}^2=\|y]|_0^2+\|y_{\bar{x}}]|_0^2$.

Перепишем (32) в другой форме

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y]|_{W_2^1(0,l)}^2\leq M_8^{\sigma}\|y^{j+1}]|_{W_2^1(0,l)}^2+M_9^{\sigma}\|y^j]|_{W_2^1(0,l)}^2+M_{10}\Big(\|\varphi]|_0^2+\mu^2\Big). \quad (33)$$

На основании Леммы 4 из (33) получаем

$$\|y^{j+1}]|_{W_2^1(0,l)}^2\leq M\left(\|y^0]|_{W_2^1(0,l)}^2+\max_{0\leq j'\leq j}\Big(\|\varphi^{j'}]|_0^2+\mu^2\Big)\right). \qquad (34)$$

где $M=const>0$, не зависящая от h и τ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (5), тогда существует такое τ_0, что если $\tau\leq\tau_0$, то для решения разностной задачи (20)-(23) справедлива априорная оценка (34).*

Из априорной оценки (34) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (20)-(23) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи $(1)-(4)$, $y(x_i,t_j)=y_i^j$-решение разностной задачи $(20)-(23)$. Для оценки точности разностной схемы $(20)-(23)$ рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения $(20)-(23)$, получаем задачу для функции z

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}z=\varkappa_i^j\Big(a_i^jz_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_{x,i}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\gamma_iz_{\bar{x}}\Big)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^jz_{\bar{x},i}+b_i^{+j}a_{i+1}^jz_{x,i}^{(\sigma)}-$$

$$-d_i^j\Big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big)+\Psi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \qquad (35)$$

$$z_0^{(\sigma)} = 0, \tag{36}$$

$$-\Big(\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\gamma_N z_{\bar{x},N}\Big)\Big) =$$

$$= \beta \sum_{i=0}^{N} z_i^{(\sigma)} \hbar + 0.5hd_N\Big(z_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^{-} + z_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^{+}\Big) + 0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} z_N - \tilde{\nu}, \tag{37}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{38}$$

где $\Psi = O\Big(h^2 + \tau^2\Big),\ \tilde{\nu} = O\Big(h^2 + \tau^2\Big)$ - погрешности аппроксимации дифференциальной задачи $(1) - (4)$ разностной схемой $(20) - (23)$ в классе решении $u = u(x,t)$ задачи $(1) - (4)$.

Применяя априорную оценку (34) к решению задачи $(35) - (38)$, получаем неравенство

$$\|z^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} \le M \max_{0 \le j' \le j} \left(\|\Psi^{j'}]|_0^2 + \nu^2\right), \tag{39}$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (39) следует сходимость решения разностной задачи $(20) - (23)$ к решению дифференциальной задачи $(1) - (4)$ в смысле нормы $\|z^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau \le \tau_0$ справедлива оценка

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}]|_{W_2^1(0,l)} \le M\Big(h^2 + \tau^2\Big).$$

5 Постановка нелокальной краевой задачи Б и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим теперь следующую нелокальную краевую задачу для уравнения (1)

$$\begin{cases} \Pi(0,t) = \beta_1(t)u(0,t) - \mu_1(t), \\ -\Pi(l,t) = \beta_2(t)\int\limits_0^l u(x,t)dx - \mu_2(t), \end{cases} \tag{40}$$

где

$$0 < c_0 \le k, \eta \le c_1,\ |\beta_1, \beta_2, r, q, r_x, k_x| \le c_2. \tag{41}$$

Умножим уравнение (1) скалярно на u:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha} u, u\Big) = \Big(\big(ku_x\big)_x, u\Big) + \Big(\partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta u_x\big)_x, u\Big) +$$

$$+\Big(ru_x, u\Big) - \Big(qu(x_0,t), u\Big) + \Big(f, u\Big). \qquad (42)$$

Учитывая преобразования (7)-(12) из (42) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^l \eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx + c_0\|u_x\|_0^2 \leq$$

$$\leq u\Pi(x,t)\Big|_0^l + M_1\Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big) + M_2\|f\|_0^2. \qquad (43)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (43)

$$u\Pi(x,t)\Big|_0^l = \Pi(l,t)u(l,t) - \Pi(0,t)u(0,t) =$$

$$= u(l,t)\left(\mu_2(t) - \beta_2(t)\int_0^l u(x,t)dx\right) + u(0,t)\Big(\mu_1(t) - \beta_1(t)u(0,t)\Big) =$$

$$= \mu_2(t)u(l,t) - \beta_2(t)u(l,t)\int_0^l u(x,t)dx - \beta_1(t)u^2(0,t) +$$

$$+\mu_1(t)u(0,t) \leq M_3\Big(u^2(0,t) + u^2(l,t)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_0^l u(x,t)dx\right)^2 \leq M_4\Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big). \qquad (44)$$

Учитывая (44), из (43) получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \int_0^l \eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx2 + \|u_x\|_0^2 \leq$$

$$\leq M_5\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + M_6\Big(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big). \qquad (45)$$

Применяя к обеим частям неравенства (45) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, и повторяя рассуждения (16)-(19) из (45) находим априорную оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2 \leq M\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t)\Big) + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right), \quad (46)$$

где $M = const > 0$, зависящая от входных данных задачи (1),(40),(4).

Теорема 3.

Если $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0,l]$, $r(x,t), q(x,t), f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}\big(Q_T\big) \cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ *и выполнены условия (5), (41), тогда для решения задачи (1), (40), (4) справедлива априорная оценка (46).*

Из априорной оценки (46) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

6 Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1), (40), (4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\varkappa_i^j\Big(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_{x,i}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_i y_{\bar{x}}\Big)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^j y_{\bar{x},i}+b_i^{+j}a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}-$$

$$-d_i^j\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big)+\varphi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{47}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_1 y_{\bar{x},0}\Big)=$$

$$=\beta_1 y_0^{(\sigma)}+0.5hd_0^j\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big)+0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0-\tilde{\mu}_1,\ x=0, \tag{48}$$

$$-\Big(\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\Big)\Big)=$$

$$=\beta_2\sum_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar+0.5hd_N^j\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big)+0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N-\tilde{\mu}_2, \tag{49}$$

$$y(x,0)=u_0(x), \tag{50}$$

где

$$\tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma})=\mu_1(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_0,\quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma})=\mu_2(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_N.$$

Перепишем (47)-(50) в операторной форме

$$\begin{cases}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\overline{\delta}(t)y+\overline{\Phi},\\ y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h,\end{cases} \tag{51}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}=$$

$$=\begin{cases}\tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)}=\varkappa\Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x+b^{-}ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}+b^{+}a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}-d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big),\\ \Lambda^{-}y_0^{(\sigma)}=\dfrac{\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}-\beta_1 y_0^{(\sigma)}-0.5hd_0^j\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big)}{0.5h},\ i=0,\\ \Lambda^{+}y_N^{(\sigma)}=\dfrac{-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\beta_2\sum\limits_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar-0.5hd_N^j\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big)}{0.5h},\ i=N,\end{cases}$$

$$\overline{\delta}y=\begin{cases}\delta y_i=\Big(\gamma_i y_{\bar{x}}\Big)_x,\ i=\overline{1,N-1},\\ \delta^{-}y_0=\frac{2}{h}\Big(\gamma_1 y_{x,0}\Big)_t,\ i=0,\\ \delta^{+}y_N=-\frac{2}{h}\Big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\Big)\ i=N,\end{cases}\qquad \overline{\Phi}=\begin{cases}\varphi=\varphi_i,\ i=\overline{1,N-1},\\ \varphi^{-}=\frac{2}{h}\tilde{\mu}_1,\ i=0,\\ \varphi^{+}=\frac{2}{h}\tilde{\mu}_2,\ i=N,\end{cases}$$

$$\varkappa^* = \begin{cases} \varkappa = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r|}{k}}, \\ \varkappa_0 = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}},\ r_0 \le 0, \\ \varkappa_N = \frac{1}{1+\frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}},\ r_N \ge 0, \end{cases} \qquad t^* = t^{j+1/2}.$$

Умножим (51) теперь скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)}\Big] = \Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big] + \Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \overline{\delta} y, y^{(\sigma)}\Big] + \Big[\Phi, y^{(\sigma)}\Big], \tag{52}$$

где $\big[u, v\big] = \sum\limits_{i=0}^{N} u_i v_i \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h, i = 0, N, \\ h, i \ne 0, N, \end{cases} \quad [u, u] = [1, u^2] = |[u]|_0^2,\ (u, v) = \sum\limits_{i=1}^{N} u_i v_i h.$

Оценим суммы, входящие в (52)

$$\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, y^{(\sigma)}\Big] \ge \frac{1}{2}\Big[1, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} (y^2)\Big], \tag{53}$$

$$\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big] = \Big(\tilde{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) + 0.5h y_0^{(\sigma)} \Lambda^- y_0^{(\sigma)} + 0.5h y_N^{(\sigma)} \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} =$$
$$= \Big(\varkappa\big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^- a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)} y_x^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big) -$$
$$-\Big(d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\Big), y^{(\sigma)}\Big) + \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} y_0^{(\sigma)} - \beta_1 \big(y_0^{(\sigma)}\big)^2 -$$
$$-0.5h d_0^j y_0^{(\sigma)} \Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\Big) - \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} y_N^{(\sigma)} - \beta_2 y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)} \hbar -$$
$$-0.5h d_N y_N^{(\sigma)} \Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\Big) = -\Big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\Big] +$$
$$+\Big(b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big) -$$
$$-\Big[d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)} x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)} x_{i_0}^+\Big), y^{(\sigma)}\Big] - \beta_1 (y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)} \hbar. \tag{54}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (54)

$$-\Big(a y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \big(\varkappa y^{(\sigma)}\big)_{\bar{x}}\Big] + \Big(b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big) + \Big(b^+ a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big) =$$
$$= -\Big(a \varkappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big] - \Big(a \varkappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big] + \Big(b^- a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)}\Big) +$$

$$+\Big(b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big) \leq -\Big(\frac{\varkappa a}{1+hM_1}, (y_{\bar{x}}^{\sigma})^2\Big] + M_1\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big), \tag{55}$$

$$-\Big[d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big), y^{(\sigma)}\Big] - \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)}\sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)}\hbar \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big[d, y^{(\sigma)}\Big]^2 +$$

$$+M_2\Big(\big(y_0^{(\sigma)}\big)^2 + \big(y_N^{(\sigma)}\big)^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)}\hbar\Big)^2 \leq M_3\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big). \tag{56}$$

Учитывая (55),(56), из (54) находим

$$\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big] \leq -M_4\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 + M_5\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big). \tag{57}$$

$$\Big[\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\overline{\delta}y, y^{(\sigma)}\Big] = \Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\delta y, y^{(\sigma)}\Big) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\delta^- y_0 + 0.5hy_N^{(\sigma)}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\delta^+ y_N =$$

$$= -\Big(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma_i y_{\bar{x}})\Big] \leq -\Big(\frac{\gamma}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(y_{\bar{x}})^2\Big] \leq -\frac{c_0}{2}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\|y_{\bar{x}}]|_0^2. \tag{58}$$

$$\Big[\overline{\Phi}, y^{(\sigma)}\Big] = (\varphi, y^{(\sigma)}) + 0.5hy_0^{(\sigma)}\varphi^- + 0.5hy_N^{(\sigma)}\varphi^+ = [\varphi, y^{(\sigma)}] + \mu_1 y_0^{(\sigma)} + \mu_2 y_N^{(\sigma)} \leq$$

$$\leq M_6\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) + M_7\Big(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^{j2} + \mu_2^{j2}\Big). \tag{59}$$

Принимая во внимание преобразования (53)-(59), из (52) находим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}|[y]|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_3\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \leq M_8|[y^{(\sigma)}]|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_7\Big(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big). \tag{60}$$

где $|[y]|_{W_2^1(0,l)}^2 = |[y]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2$.

Повторяя рассуждения (32)-(34), из (60) на основании Леммы 4 находим априорную оценку

$$|[y^{j+1}]|_{W_2^1(0,l)}^2 \leq M\left(|[y^0]|_{W_2^1(0,l)}^2 + \max_{0\leq j'\leq j}\Big(|[\varphi^{j'}]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\right), \tag{61}$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (5), (41), тогда существует такое τ, что если $\tau \leq \tau_0$ то для решения разностной задачи (47)-(50) справедлива априорная оценка (61).*

Из априорной оценки (61) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи $(1),(40),(4)$, $y(x_i,t_j)=y_i^j$-решение разностной задачи $(47)-(50)$. Для оценки точности разностной схемы $(47)-(50)$ рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения $(47)-(50)$, получаем задачу для функции z

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}z=\varkappa_i^j\Big(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_{x,i}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_i z_{\bar{x}}\Big)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^j z_{\bar{x},i}+b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)}-$$

$$-d_i^j\Big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)+\Psi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{62}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_1 z_{\bar{x},0}\Big)=$$

$$=\beta_1 z_0^{(\sigma)}+0.5hd_0^j\Big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)+0.5h\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}z_0-\tilde{\nu}_1,\ x=0, \tag{63}$$

$$-\Big(\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_N z_{\bar{x},N}\Big)\Big)=$$

$$=\beta_2\sum_{i=0}^{N}z_i^{(\sigma)}\hbar+0.5hd_N^j\Big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)+0.5h\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}z_N-\tilde{\nu}_2, \tag{64}$$

$$z(x,0)=0, \tag{65}$$

где $\Psi=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_1=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_2=O\big(h^2+\tau^2\big)$ - погрешности аппроксимации дифференциальной задачи $(1),(40),(4)$ разностной схемой $(47)-(50)$ в классе решении $u=u(x,t)$ задачи $(1),(40),(4)$.

Применяя априорную оценку (61) к решению задачи $(62)-(65)$, получаем неравенство

$$|[z^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}\le M\max_{0\le j'\le j}\Big(|[\Psi^{j'}]|_0^2+\nu_1^{j'2}+\nu_2^{j'2}\Big), \tag{66}$$

где $M=const>0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (66) следует сходимость решения разностной задачи $(47)-(50)$ к решению дифференциальной задачи $(1),(40),(4)$ в смысле нормы $|[z^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau\le\tau_0$ справедлива оценка

$$|[y^{j+1}-u^{j+1}]|_{W_2^1(0,l)}\le M\Big(h^2+\tau^2\Big).$$

7 Постановка нелокальной краевой задачи B и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим теперь следующую нелокальную краевую задачу для уравнения (1)

$$\begin{cases} \Pi(0,t)=\beta_1(t)u(0,t)-\mu_1(t), \\ -\Pi(l,t)=\beta_2(t)u(0,t)+\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau-\mu_2(t), \end{cases} \tag{67}$$

где

$$0<c_0\le k,\eta\le c_1,\ |\beta_1,\beta_2,\rho,r,q,r_x,k_x|\le c_2. \tag{68}$$

Умножим уравнение (1) скалярно на u:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u,u\Big)=\Big(\big(ku_x\big)_x,u\Big)+\Big(\partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta u_x\big)_x,u\Big)+$$

$$+\Big(ru_x,u\Big)-\Big(qu(x_0,t),u\Big)+\Big(f,u\Big). \tag{69}$$

Учитывая преобразования (7)-(12) из (69) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\frac{1}{2}\int_0^l \eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+c_0\|u_x\|_0^2\le$$

$$\le u\Pi(x,t)\Big|_0^l+M_1\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+M_2\|f\|_0^2. \tag{70}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (70)

$$u\Pi(x,t)\Big|_0^l=\Pi(l,t)u(l,t)-\Pi(0,t)u(0,t)=$$

$$=u(l,t)\Big(\mu_2(t)-\beta_2(t)u(0,t)-\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau\Big)+u(0,t)\Big(\mu_1(t)-\beta_1(t)u(0,t)\Big)=$$

$$=\mu_2(t)u(l,t)-\beta_2(t)u(l,t)u(0,t)-u(l,t)\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau-$$

$$-\beta_1(t)u^2(0,t)+\mu_1(t)u(0,t)\le M_3\Big(u^2(0,t)+u^2(l,t)\Big)+\frac{1}{2}\Big(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\int\limits_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)d\tau\Big)^2\le M_4\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+M_5\int\limits_0^t\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big). \tag{71}$$

Учитывая (71), из (70) получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2+\int_0^l \eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(u_x)^2dx+\|u_x\|_0^2\leq$$

$$\leq M_6\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_7\int\limits_0^t\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}d\tau+M_8\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big). \tag{72}$$

Применяя к обеим частям (72) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, из (72) находим

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\leq M_9D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_{10}D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}d\tau+$$

$$+M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \tag{73}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (73) следующим образом

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^\tau\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}\int_s^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big(-\frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha}\Big|_s^t\Big)ds=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^\alpha\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t(t-\tau)^\alpha\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}d\tau\leq\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-\tau)\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\leq$$

$$\leq\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}.$$

Итак, получаем

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}d\tau\leq\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}. \tag{74}$$

С помощью (74) из (73) находим

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\leq M_{12}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+$$

$$+M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \qquad (75)$$

Повторяя рассуждения (16)-(19), из (75) находим априорную оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\|u_x\|_0^2\le M\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right), \quad (76)$$

где $M=const>0$, зависящая от входных данных задачи (1), (67), (4).

Теорема 5.

Если $k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x)\in C^1[0,l]$, $r(x,t),q(x,t),f(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,0}\big(Q_T\big)\cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (5), (68), тогда для решения задачи (1), (67), (4) справедлива априорная оценка (76).

Из априорной оценки (76) следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным.

8 Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1), (67), (4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y=\varkappa_i^j\Big(a_i^jy_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_{x,i}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\gamma_iy_{\bar{x}}\Big)_{x,i}+b_i^{-j}a_i^jy_{\bar{x},i}+b_i^{+j}a_{i+1}^jy_{x,i}^{(\sigma)}-$$

$$-d_i^j\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big)+\varphi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \qquad (77)$$

$$\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\gamma_1y_{\bar{x},0}\Big)=$$

$$=\beta_1y_0^{(\sigma)}+0.5hd_0^j\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big)+0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0-\tilde{\mu}_1,\ x=0, \qquad (78)$$

$$-\Big(\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\gamma_Ny_{\bar{x},N}\Big)\Big)=\beta_2y_0^{(\sigma)}+\sum_{s=0}^{j}\rho_s^jy_0^s\bar{\tau}+$$

$$+0.5hd_N\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^{-}+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^{+}\Big)+0.5h\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N-\tilde{\mu}_2,\ x=N, \qquad (79)$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h, \qquad (80)$$

где

$$\tilde{\beta}_1(t_{j+\sigma})=\beta_1(t_{j+\sigma})+0.5hd_0^j,\quad \tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma})=\mu_1(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_0,$$

$$\tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma})=\mu_2(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_N.$$

Перепишем (77)-(80) в операторной форме

$$\begin{cases}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\overline{\delta}(t)y+\overline{\Phi},\\ y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h,\end{cases}\tag{81}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}=$$

$$=\begin{cases}\tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)}=\varkappa\Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x+b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}+b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}-d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big),\\ \Lambda^-y_0^{(\sigma)}=\dfrac{\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}-\beta_1y_0^{(\sigma)}-0.5hd_0^j\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)}{0.5h},\\ \Lambda^+y_N^{(\sigma)}=\dfrac{-\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\beta_2y_0^{(\sigma)}-\sum\limits_{s=0}^{j}\rho_s^jy_0^s\bar{\tau}-0.5hd_N\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)}{0.5h},\end{cases}$$

$$\overline{\delta}y=\begin{cases}\delta y_i=\Big(\gamma_iy_{\bar{x}}\Big)_x,\ i=\overline{1,N-1},\\ \delta^-y_0=\frac{2}{h}\Big(\gamma_1y_{x,0}\Big)_t,\ i=0,\\ \delta^+y_N=-\frac{2}{h}\Big(\gamma_Ny_{\bar{x},N}\Big)\ i=N,\end{cases}\qquad \overline{\Phi}=\begin{cases}\varphi=\varphi_i,\ i=\overline{1,N-1},\\ \varphi^-=\frac{2}{h}\tilde{\mu}_1,\ i=0,\\ \varphi^+=\frac{2}{h}\tilde{\mu}_2,\ i=N,\end{cases}$$

$$\varkappa^*=\begin{cases}\varkappa=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r|}{k}},\\ \varkappa_0=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}},\ r_0\le 0,\\ \varkappa_N=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}},\ r_N\ge 0,\end{cases}\qquad t^*=t^{j+1/2}.$$

Умножим (81) теперь скалярно на $y^{(\sigma)}$:

$$\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\Big]=\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\Big]+\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\overline{\delta}y,y^{(\sigma)}\Big]+\Big[\Phi,y^{(\sigma)}\Big],\tag{82}$$

где $\big[u,v\big]=\sum\limits_{i=0}^{N}u_iv_i\hbar,\ [u,u]=[1,u^2]=|[u]|_0^2,\ (u,v)=\sum\limits_{i=1}^{N}u_iv_ih.$

Оценим первое слагаемое в правой части (82)

$$\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\Big]=\Big(\tilde{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\Big)+0.5hy_0^{(\sigma)}\Lambda^-y_0^{(\sigma)}+0.5hy_N^{(\sigma)}\Lambda^+y_N^{(\sigma)}=$$

$$=\Big(\varkappa\big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big)_x,y^{(\sigma)}\Big)+\Big(b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\Big)+\Big(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},y^{(\sigma)}\Big)-$$

$$-\Big(d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big),y^{(\sigma)}\Big)+\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)}-\beta_1\big(y_0^{(\sigma)}\big)^2-$$

$$-0.5hd_0^jy_0^{(\sigma)}\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^-+y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)-\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}y_N^{(\sigma)}-\beta_2y_N^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)}-y_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j}\rho_s^jy_0^s\bar{\tau}-$$

$$-0.5hd_N y_N^{(\sigma)}\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big) = -\Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\varkappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}}\Big] + \Big(b^-a, y_{\bar{x}}^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big)+$$

$$+\Big(b^+a^{(+1)}, y_x^{(\sigma)}y^{(\sigma)}\Big) - \Big[d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big), y^{(\sigma)}\Big]-$$

$$-\beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} - y_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j y_0^s\bar{\tau}. \qquad (83)$$

Преобразуем слагаемые в правой части (83)

$$-\Big[d\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big), y^{(\sigma)}\Big] - \beta_1(y_0^{(\sigma)})^2 - \beta_2 y_N^{(\sigma)}y_0^{(\sigma)} - y_N^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j y_0^s\bar{\tau} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\Big(y_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + y_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big[d, y^{(\sigma)}\Big]^2 + M_1\Big(\big(y_0^{(\sigma)}\big)^2 + \big(y_N^{(\sigma)}\big)^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{s=0}^{j}\rho_s^j y_0^s\bar{\tau}\Big)^2 \le$$

$$\le M_2\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) + M_3\sum_{s=0}^{j}\Big(|[y]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2\Big)\bar{\tau}. \qquad (84)$$

Учитывая (55),(84), из (83) находим

$$\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\Big] \le -M_4\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+$$

$$+M_5\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big) + M_6\sum_{s=0}^{j}\Big(|[y]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2\Big)\bar{\tau}. \qquad (85)$$

Принимая во внимание преобразования (53), (58), (59), (85), из (82) находим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}|[y]|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_4\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2 \le M_7|[y^{(\sigma)}]|_{W_2^1(0,l)}^2+$$

$$+M_8\sum_{s=0}^{j}|[y]|_{W_2^1(0,l)}^2\bar{\tau} + M_9\Big(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big). \qquad (86)$$

где $|[y]|_{W_2^1(0,l)}^2 = |[y]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2$.

Обозначая через $F = M_8\sum_{s=0}^{j}|[y]|_{W_2^1(0,l)}^2\bar{\tau} + M_9\Big(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)$ и повторяя рассуждения (32)-(34), из (86) получим

$$|[y^{j+1}]|_{W_2^1(0,l)}^2 \le$$

$$\le M_{10}\left(|[y^0]|_{W_2^1(0,l)}^2 + \max_{0\le j'\le j}\left(\sum_{s=0}^{j}|[y]|_{W_2^1(0,l)}^2\bar{\tau} + |[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right)\right). \qquad (87)$$

Введя обозначение $g^j = \max\limits_{0\le j'\le j} |[y]|^2_{W_2^1(0,l)}$, с учетом

$$|[y]|^2_{W_2^1(0,l)} = |[y]|_0^2 + \|y_{\bar{x}}]|_0^2,$$

$$\max_{0\le j'\le j} \sum_{s=0}^{j'} |[y^s]|^2_{W_2^1(0,l)}\bar{\tau} \le \sum_{j'=0}^{j} \max_{0\le s\le j'} |[y^s]|^2_{W_2^1(0,l)}\bar{\tau} \le \sum_{j'=0}^{j} \max_{0\le s\le j'} |[y^s]|^2_{W_2^1(0,l)}\tau$$

из (87) получим

$$g^{j+1} \le M_{11} \sum_{s=0}^{j} g^s\tau + M_{12}F_1^j, \tag{88}$$

где

$$F_1^j = |[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)} + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0\le j'\le j} \Big(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big).$$

На основании леммы 4 (см.[30, стр.171]) из (88) получаем априорную оценку

$$|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} \le M\left(|[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)} + \max_{0\le j'\le j}\Big(|[\varphi^{j'}]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\right), \tag{89}$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (5), (68), тогда существует такое τ, что если $\tau \le \tau_0$ то для решения разностной задачи (77)-(80) справедлива априорная оценка (89).*

Из априорной оценки (89) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи $(1),(67),(4)$, $y(x_i,t_j) = y_i^j$-решение разностной задачи $(77)-(80)$. Для оценки точности разностной схемы $(77)-(80)$ рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения $(77)-(80)$, получаем задачу для функции z

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} z = \varkappa_i^j\Big(a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_{x,i} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_i z_{\bar{x}}\Big)_{x,i} + b_i^{-j}a_i^j z_{\bar{x},i} + b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} -$$

$$-d_i^j\Big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big) + \Psi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{90}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_1 z_{\bar{x},0}\Big) =$$

$$= \beta_1 z_0^{(\sigma)} + 0.5hd_0^j\Big(z_{i_0}^{(\sigma)}x_{i_0}^- + z_{i_0+1}^{(\sigma)}x_{i_0}^+\Big) + 0.5h\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} z_0 - \tilde{\nu}_1,\ x=0, \tag{91}$$

$$-\Big(\varkappa_N a_N z^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_N z_{\bar{x},N}\Big)\Big) = \beta_2 z^{(\sigma)}_0 + \sum_{s=0}^{j} \rho^j_s z^s_0 \bar{\tau} +$$

$$+0.5hd_N\Big(z^{(\sigma)}_{i_0} x^-_{i_0} + z^{(\sigma)}_{i_0+1} x^+_{i_0}\Big) + 0.5h\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} z_N - \tilde{\nu}_2,\ x = N, \tag{92}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{93}$$

где $\Psi = O\big(h^2+\tau^2\big),\ \tilde{\nu}_1 = O\big(h^2+\tau^2\big),\ \tilde{\nu}_2 = O\big(h^2+\tau^2\big)$ - погрешности аппроксимации дифференциальной задачи $(1), (67), (4)$ разностной схемой $(77) - (80)$ в классе решении $u = u(x,t)$ задачи $(1), (67), (4)$.

Применяя априорную оценку (89) к решению задачи $(90)-(93)$, получаем неравенство

$$|[z^{j+1}]|^2_{W^1_2(0,l)} \le M \max_{0\le j'\le j}\Big(|[\Psi^{j'}]|^2_0 + \nu_1^{j'2} + \nu_2^{j'2}\Big), \tag{94}$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (94) следует сходимость решения разностной задачи $(77)-(80)$ к решению дифференциальной задачи $(1), (67), (4)$ в смысле нормы $|[z^{j+1}]|^2_{W^1_2(0,l)}$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau \le \tau_0$ справедлива оценка

$$|[y^{j+1} - u^{j+1}]|_{W^1_2(0,l)} \le M\Big(h^2 + \tau^2\Big).$$

Замечание. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда:

1) Условие (3) заменяется условием вида:

$$\partial^{\alpha}_{0t}\int_0^l u(x,t)dx = \mu(t),\ 0 \le t \le T.$$

2) Уравнение (1) имеет вид:

$$\partial^{\alpha}_{0t} u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \partial^{\alpha}_{0t}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \sum_{s=1}^{p} q_s(x,t)u(x_s,t) + f(x,t),$$

$$0 < x < l,\ 0 < t \le T,$$

если потребовать выполнения условия $|q_s| \le c_2$.

Список литературы

[1] Нахушев, А.М. Уравнения математической биологии. М: Высш. школа, 1995.

[2] Дженалиев, М.Т. О квадратичном функционале в задаче Коши для нагруженнного дифференциально-операторного уравнения первого порядка. I // Дифференц. уравнения. 31:12 (1995), 2029-2037; II // 32:4 (1996), 518-522.

[3] Cannon, J.R., Yin, H.M. On a class of nonlinear nonclassical parabolic problems // J. Different. Equat, 79 (1989), 266-288.

[4] Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения, 16:11 (1980), 1925-1935.

[5] Учайкин, В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008.

[6] Mandelbrot, B.B. The Fractal Geometry of Nature. New York: W.H. Freeman and Company, 1982.

[7] Podlubny, I. Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[8] Чукбар, К.В. Стохастический перенос и дробные производные // ЖЭТФ, 108:5(11) (1995), 1875 - 1884.

[9] Кочубей, А.Н. Диффузия дробного порядка // Дифференц. уравнения, 26:4 (1990), 660 - 670.

[10] Nigmatullin, R.R. Fractional integral and its physical interpretation // Theoret. and Math. Phys., 90:3 (1992), 242-251.

[11] Баренблат, Г.И., Желтов, Ю.П., Кочина, И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика, 25:5 (1960), 852-864.

[12] Дзекцер, Е.С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // ДАН СССР, 220:3 (1975), 540-543.

[13] Рубинштейн, Л.И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН СССР, сер. геогр., 12:1 (1948), 27-45.

[14] Ting, T.W. A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction, J. Math. Anal. Appl, 45:9 (1974).

[15] Hallaire, M. On a theory of moisture-transfer // Inst. Rech. Agronom., 3 (1964), 60-72.

[16] Чудновский, А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.

[17] Свешников, А.А., Альшин, А.Б., Корпусов, М.О. Плетнер, Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

[18] Беданокова, С.Ю. Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки, 4 (2007), 68-71.

[19] Бештоков, М.Х. О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения // Дифференц. уравнения, 52:10 (2016), 1393-1406.

[20] Бештоков, М.Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 56:10 (2016), 1780-1794.

[21] Бештоков, М.Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 57:12 (2017), 2021-2041.

[22] Бештоков, М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля // Дифференц. уравнения, 54:6 (2018), 763-778.

[23] Бештоков, М.Х. Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто // Дифференц. уравнения, 55:7 (2019), 919-928.

[24] Таукенова, Ф.И., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 46:10 (2006), 1871-1881.

[25] Diethelm, K. Walz, G. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation, Numer. Algorithms, 16 (1997), 231-253.

[26] Алиханов, А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения, 46:5 (2010), 660-666.

[27] Alikhanov, A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation.// Journal of Computational Physics, 280 (2015), 424-438.

[28] Бештоков, М.Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова-Капуто // Известия вузов. Математика, 10 (2018), 3-16.

[29] Самарский, А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

[30] Самарский, А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

Nonlocal boundary value problems in differential and difference interpretations for the generalized loaded moisture transfer equation

M.KH. Beshtokov

Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkaria Scientific Center of the Russian Academy of Sciences

Abstract. We study boundary value problems for a spatially one-dimensional loaded moisture transfer equation of fractional-order with nonlocal boundary conditions. Using the method of energy inequalities, and assuming the existence of a solution of the problem, we derive a priori estimates for the solutions of nonlocal boundary value problems in differential form. Difference schemes are constructed and analogues of a priori estimates in difference form are proved for them; error estimates are given under the assumption of sufficient smoothness of the solutions of the equation. From the obtained a priori estimates, the uniqueness and stability of the solution with respect to the initial data and the right-hand side follow, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem at the rate equal to the approximation order of the difference problem.

Keywords: loaded equation, moisture transfer equation, Hallaire's equation, nonlocal boundary value problems, a priori estimate, fractional differential equation, Caputo fractional derivative.