

Бифуркации и управление синхронизацией в двух связанных двумерных системах Хиндмарш-Роуз

Разноглазова Ю.В.^{1,*}, Плотников С.А.^{2,3,**}

¹Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

²Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН)

³Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

e-mail:

* 3janvar-julia@mail.ru

** waterwalf@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассматриваются локальные бифуркации двумерной системы Хиндмарш-Роуз, описывающей динамику электрической активности отдельного биологического нейрона. Решается задача управления синхронизацией двух связанных двумерных систем Хиндмарш-Роуз; разрабатываются алгоритм управления с известными параметрами систем Хиндмарш-Роуз и адаптивный алгоритм с неизвестными параметрами систем на основе метода скоростного градиента.

Ключевые слова: бифуркации, синхронизация, адаптивное управление, алгоритм скоростного градиента, система Хиндмарш-Роуз.

1. Введение

Синхронизация является фундаментальным явлением и играет важную роль в различных областях науки и техники [1,2]. Часто она встречается в биологических системах: наблюдается на уровне отдельных клеток, физиологических подсистем, организмов и даже на уровне популяций [3,4]. Это явление необходимо для нормального функционирования различных систем организма, например, для работы легких или сердца, когда клетки синхронно сокращаются, и таким образом вырабатывают макроскопический ритм, который управляет дыханием, сокращением сердца [5] и т.д. Также оно играет ключевую роль в

функционировании головного мозга, где оно тесно связано с различными когнитивными способностями [6]. С другой стороны, появление областей синхронной активности нейронов может привести к тяжелой патологии, например, в случае болезни Паркинсона блокировка многих нейронов приводит к треморной активности [7]. Важная роль синхронизации в процессах обработки информации в мозге делает её актуальной темой исследований в медицинской и вычислительной нейронауке. В частности, актуальной темой является разработка алгоритмов управления синхронизацией в связанных моделях нейронов и их популяций.

Нейронные сети характеризуются большим числом входящих в них нейронов, которые могут быть неидентичными. Поэтому представляет интерес разработка адаптивных алгоритмов управления, учитывающих неизвестные параметры. Для управления синхронизацией связанных осцилляторов из различных моделей нейронов зарекомендовал себя алгоритм скоростного градиента, предложенный А.Л. Фрадковым [8,9]. Он успешно применялся для управления синхронизацией в связанных осцилляторах Стюарта-Ландау [10], системах Рёсслера [11], неоднородных системах ФитцХью-Нагумо [12,13], неоднородных системах Хиндмарш-Роуз [14,15].

В данной работе синтезируются алгоритмы управления синхронизацией в двух связанных двумерных системах Хиндмарш-Роуз, уравнения которых получаются путем обнуления медленной переменной $z(t)$, описывающей динамику калиевого тока в модели Хиндмарш-Роуз [16]. Представляет интерес задача синхронизации в колебательных системах, поэтому сначала проводится анализ бифуркаций в двумерной системе Хиндмарш-Роуз с целью поиска параметров, при которых система пребывает в колебательном режиме. Отметим, что бифуркационный анализ трехмерной системы Хиндмарш-Роуз проводился в работах [17,18], а анализ несколько другой двумерной системы Хиндмарш-Роуз – в работе [19].

2. Предварительные сведения

2.1 Описание двумерной модели Хиндмарш-Роуз

Изначально система Хиндмарш-Роуз описывалась нелинейной системой дифференциальных уравнений второго порядка и являлась упрощенным вариантом модели Ходжкина-Хаксли [20]. Однако после ряда экспериментов были обнаружены новые режимы функционирования нейронов, которые не учитывались в модели [21]. Поэтому авторы модели, Джеймс Хиндмарш и Мальком Роуз, включили третье уравнение, что позволило учесть большинство новых режимов поведения биологического нейрона.

Система Хиндмарш-Роуз представляет собой модель биологического нейрона и описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка [16]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - ax^3(t) + bx^2(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) = c - dx^2(t) - y(t) \\ \dot{z}(t) = \varepsilon (s(x(t) - r) - z(t)) \end{cases} . \quad (1)$$

Переменная $x(t)$ описывает динамику мембранного потенциала нейрона, переменные $y(t)$ и $z(t)$ описывают динамику ионных токов. Поскольку скорость изменения переменной $z(t)$ определяется малым параметром $0 < \varepsilon \ll 1$, то $z(t)$ описывает динамику медленного калиевого тока, а $y(t)$ – быстрого натриевого тока. a, b, c, d, r, s – постоянные параметры.

Предположим, что мы рассматриваем динамику быстрой подсистемы системы (1) на достаточно малом промежутке времени, тогда можно положить $\varepsilon = 0$. В этом случае мы получим уравнения двумерной системы Хиндмарш-Роуз:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - ax^3(t) + bx^2(t) \\ \dot{y}(t) = c - dx^2(t) - y(t) \end{cases} . \quad (2)$$

2.2 Метод скоростного градиента

Метод скоростного градиента применяется для решения задач управления непрерывными по времени системами $\dot{x}(t) = F(x(t), u(t), t)$, в которых цель управления задана при помощи целевой функции. Цель управления задается соотношением

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0, \quad (3)$$

где $Q(x, t)$ – гладкая целевая функция.

Для построения алгоритма вычисляется скалярная функция $\dot{Q} = \omega(x, u, t)$ – скорость изменения величины $Q_t = Q(x(t), t)$, в силу уравнения объекта:

$$\omega(x, u, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + [\nabla_x Q(x, t)]^T F(x, u, t). \quad (4)$$

Далее находится градиент функции $\omega(x, u, t)$ по входным переменным

$$\nabla_u \omega(x, u, t) = \left[\frac{\partial \omega}{\partial u} \right]^T = \left[\frac{\partial F}{\partial u} \right]^T \nabla_x Q(x, t). \quad (5)$$

Наконец, задается алгоритм изменения $u(t)$ дифференциальным уравнением

$$\frac{du}{dt} = -\Gamma \nabla_u \omega(x, u, t), \quad (6)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ – симметрическая положительно определенная матрица, например $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, $\gamma_i > 0$.

3. Бифуркационный анализ двумерной системы Хиндмарш-Роуз

Для системы (2) выберем стандартные значения параметров $a=1$, $b=3$, $d=5$ (см., например, [16,17]), а параметр c будем считать неизвестным, тогда система (2) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) - x^3(t) + 3x^2(t), \\ \dot{y}(t) = c - 5x^2(t) - y(t) \end{cases}, \quad (7)$$

Сначала найдем положения равновесия системы (7), для этого оба уравнения приравняем к нулю и выразим $y(t) = c - 5x^2(t)$, тогда получим следующее кубическое уравнение.

$$x^3(t) + 2x^2(t) - c = 0. \quad (8)$$

Решение кубического уравнения можно найти, используя формулу Кардано: Любое кубическое уравнение общего вида

$$\alpha x^3(t) + \beta x^2(t) + \gamma x(t) + \delta = 0 \quad (9)$$

при помощи замены переменной

$$x = v - \frac{\beta}{3\alpha} = v - \frac{2}{3} \quad (10)$$

может быть приведено к канонической форме

$$v^3(t) + pv + q = 0 \quad (11)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} p &= \frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{3\alpha^2} = -\frac{4}{3} \\ q &= \frac{2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma + 27\alpha^2\delta}{27\alpha^3} = \frac{16 - 27c}{27} \end{aligned} \quad (12)$$

Определим величину

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{729c^2 - 864c}{2916}. \quad (13)$$

При $Q > 0$ уравнение (8) имеет один вещественный корень при $c \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{32}{27}; +\infty\right)$:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}c - \frac{8}{27} + \sqrt{\frac{729c^2 - 864c}{2916}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}c - \frac{8}{27} - \sqrt{\frac{729c^2 - 864c}{2916}}} - \frac{2}{3}. \quad (14)$$

Линеаризуем систему (7) возле полученного положения равновесия, вычислив Якобиан

$$J = \begin{bmatrix} -3x^2(t) + 6x(t) & 1 \\ -10x(t) & -1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

и подставив в него положение равновесия, тем самым найдя матрицу линеаризованной системы. Используя вычислительные методы, определим тип положения равновесия с помощью вычисления собственных чисел матрицы линеаризованной системы. На промежутке $c \in (-\infty; 0)$ положением равновесия является устойчивый узел. При $c \in \left(\frac{32}{27}; 12.593\right)$ положением равновесия является неустойчивый фокус, который обретает устойчивость при дальнейшем увеличении c примерно до значения 56.268. При значениях $c > 56.269$ на фазовой плоскости имеется единственный устойчивый узел.

Для того чтобы найти все вещественные корни уравнения (8) на промежутке $c \in \left(0; \frac{32}{27}\right)$, воспользуемся тригонометрической формулой Виета:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{4}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(1 - \frac{27}{16}c\right)\right) - \frac{2}{3}; \\ x_2 &= -\frac{4}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(1 - \frac{27}{16}c\right) + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{2}{3}; \\ x_3 &= -\frac{4}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(1 - \frac{27}{16}c\right) - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогичным образом найдем матрицы линеаризованных систем для каждого из полученных положений равновесия и определим тип положений равновесия. При $c \in \left(0; \frac{32}{27}\right)$ положение равновесия (x_1, y_1) является устойчивым узлом; положение равновесия (x_2, y_2) является неустойчивым фокусом; а положение равновесия (x_3, y_3) является седлом.

Проведем моделирование системы (7) в среде MATLAB/Simulink. Варьируя параметр c , построим фазовые портреты системы при разных значениях этого параметра. При отрицательных значениях параметра c на фазовой плоскости имеется единственное положение равновесия – устойчивый узел (см. Рис. 1). В данном случае система является глобально устойчивой, все траектории сходятся к положению равновесия. При увеличении значения параметра c от 0 до $\frac{32}{27}$ возникает еще два положения равновесия: неустойчивый фокус и седло (см. Рис 2). Затем, при достижении параметра c значения $\frac{32}{27}$ устойчивый узел и седло сливаются и исчезают. При дальнейшем увеличении параметра c до значения

12.593 единственным положением равновесия является неустойчивый фокус, при этом рождается устойчивый предельный цикл, и система (7) становится колебательной (см. Рис. 3). При изменении параметра c от 12.593 до 56.268 фокус становится устойчивым и колебания исчезают (см. Рис. 4), тогда как при значениях $c > 56.269$ устойчивый фокус превращается в устойчивый узел, соответственно, меняются и траектории систем (см. Рис. 5).

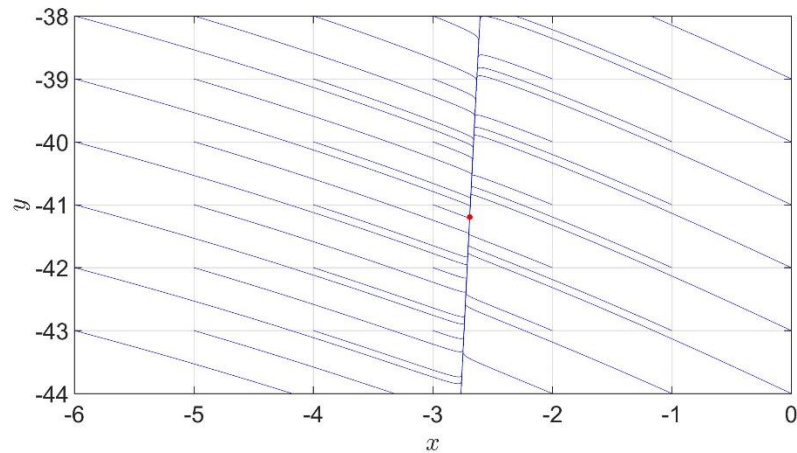


Рис. 1 – Фазовый портрет системы (7) при $c = -5$: единственное положение равновесия типа «устойчивый узел»

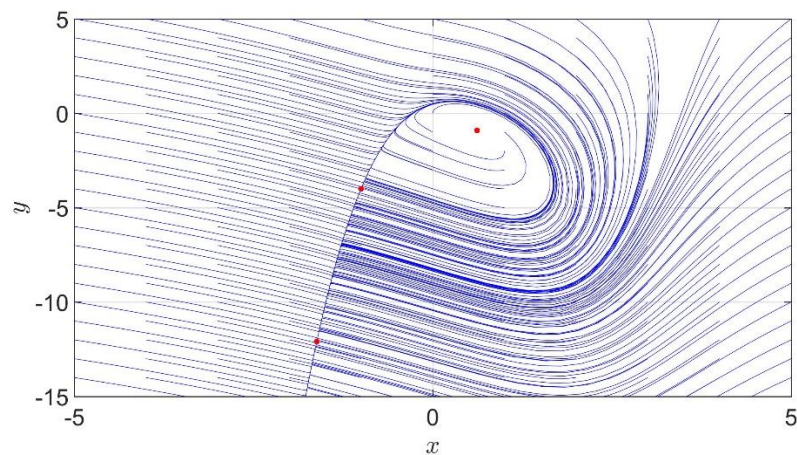


Рис. 2 – Фазовый портрет системы (7) при $c = 1$: имеются три положения равновесия следующих типов: «устойчивый узел», «седло», «неустойчивый фокус» (снизу вверх)

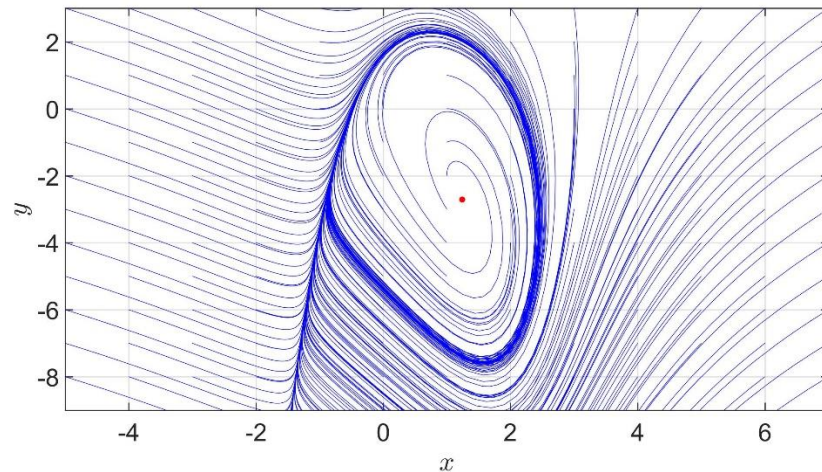


Рис.3 – Фазовый портрет системы (7) при $c = 5$: единственным положением равновесия является неустойчивый фокус, тогда как траектории системы сходятся к предельному циклу

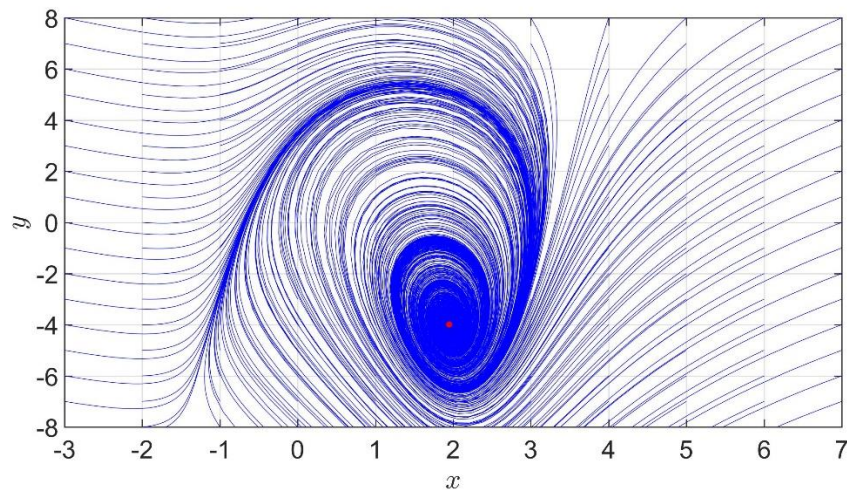


Рис. 4 – Фазовый портрет системы (7) при $c = 15$: единственным положением равновесия является устойчивый фокус

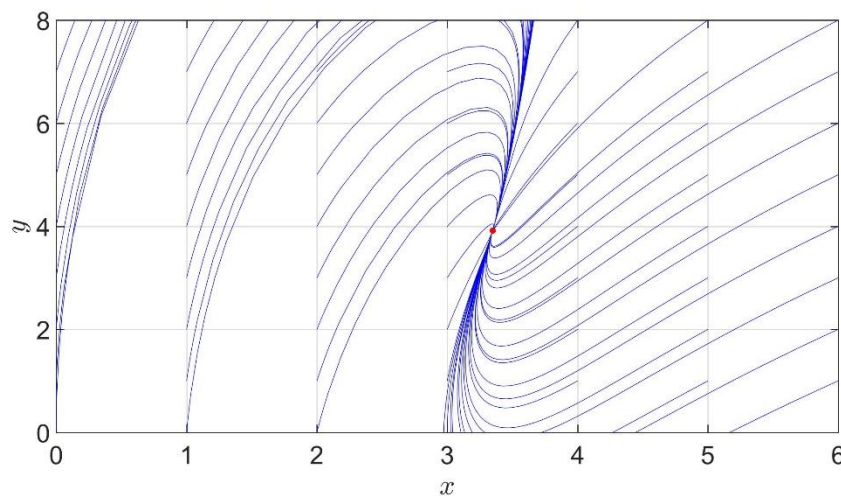


Рис. 5 – Фазовый портрет системы (7) при $c = 57$: единственным положением равновесия является устойчивый узел

Наиболее интересным для нас является колебательный режим двумерной системы Хиндмарш-Роуз (7), поэтому значения параметра c будем выбирать из интервала $\left(\frac{32}{27}; 12.593\right)$.

4. Синхронизация двух связанных двумерных систем с известными параметрами

Рассмотрим две связанные двумерные системы Хиндмарш-Роуз в колебательном режиме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = y_1(t) - ax_1^3(t) + bx_1^2(t) + l(x_2(t) - x_1(t)) + u(t) \\ \dot{y}_1(t) = c - dx_1^2(t) - y_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = y_2(t) - ax_2^3(t) + bx_2^2(t) + l(x_1(t) - x_2(t)) \\ \dot{y}_2(t) = c - dx_2^2(t) - y_2(t) \end{cases}, \quad (17)$$

где $x(t) = \text{col}(x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t))$ – вектор состояний связанных систем (18), l – сила связи между нейронами.

Введем следующие обозначения

$$\delta_1(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad \delta_2(t) = y_1(t) - y_2(t). \quad (18)$$

Теперь, чтобы гарантировать синхронизацию систем (17), необходимо обеспечить устойчивость системы ошибок. Это достигается посредством управления, определяемого функцией $u(t)$. Очевидно, что выбор конкретного вида синхронизации определяет вид цели управления, а значит и функции $u(t)$. В настоящей работе сформулируем цель управления следующим образом:

$$|\delta_1(t)| \rightarrow 0, \quad |\delta_2(t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Последовательно вычитаем третье уравнение из первого и четвертое из второго, получаем следующую систему из ошибок синхронизации:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1(t) = -(a\mu(t) - b\varphi(t) + 2l)\delta_1(t) + \delta_2(t) + u(t) \\ \dot{\delta}_2(t) = -d\varphi(t)\delta_1(t) - \delta_2(t) \end{cases}, \quad (20)$$

где $\delta(t) = \text{col}(\delta_1(t), \delta_2(t))$ – вектор состояния системы (20); $\mu(t) = x_1^2(t) + x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t)$, $\varphi(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

Для исследования устойчивости системы ошибок (20), введем функцию Ляпунова:

$$V(\delta(t)) = \frac{1}{2}(\delta_1^2(t) + \delta_2^2(t)). \quad (21)$$

Найдем производную $\dot{V}(\delta(t))$ в силу системы (20), и получим следующее уравнение:

$$\dot{V}(\delta(t)) = -(a\mu(t) - b\varphi(t) + 2l)\delta_1^2(t) + (1 - d\varphi(t))\delta_1(t)\delta_2(t) - \delta_2^2(t) + u(t)\delta_1(t). \quad (22)$$

В виду того, что функция $\mu(t)$ неотрицательна $\forall t \geq 0$, производную (23) можно оценить сверху:

$$\dot{V}(\delta(t)) \leq -(2l - b\varphi(t))\delta_1^2(t) + (1 - d\varphi(t))\delta_1(t)\delta_2(t) - \delta_2^2(t) + u(t)\delta_1(t). \quad (23)$$

Зададим следующий закон управления:

$$u(t) = -(\gamma + b\varphi(t))\delta_1(t) + d\varphi(t)\delta_2(t), \quad (24)$$

где γ - коэффициент усиления. Подставляя закон управления (24) в оценку (23), получаем

$$\dot{V}(\delta(t)) \leq -(\gamma + 2l)\delta_1^2(t) + \delta_1(t)\delta_2(t) - \delta_2^2(t). \quad (25)$$

Выделим полный квадрат, тогда неравенство (25) представится в следующем виде:

$$\dot{V}(\delta(t)) \leq -\left(\sqrt{\gamma + 2l}\delta_1(t) - \frac{\delta_2(t)}{2}\right)^2 - \frac{3\delta_2^2(t)}{4}. \quad (26)$$

Данное неравенство будет выполнено, если коэффициент усиления больше следующей величины:

$$\gamma > -2l. \quad (27)$$

Таким образом, полученный алгоритм управления $u(t)$ в виде (26), где $\gamma > -2l$, а δ_1 и δ_2 выражаются формулами (18), обеспечивает заданную цель управления (19). Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть l – сила связи между системами (17), а γ – коэффициент усиления в законе управления $u(t)$. Тогда $\forall x(0)$ системы (17), закон управления в форме (24) обеспечивает цель управления (19), если выполнено условие (27).

5. Адаптивный алгоритм синхронизации двух связанных двумерных систем с неизвестными параметрами

Теперь рассмотрим случай, когда параметры l, a, b, c, d системы (17) неизвестны. Закон управления (24), обеспечивающий синхронизацию систем (17), зависит от неизвестных параметров b, d . Для оценки неизвестных параметров воспользуемся методом скоростного градиента. В качестве целевой функции возьмем функцию Ляпунова (21). Выберем управление в следующем виде:

$$u(t) = -(\gamma_0 + \theta_1(t)\varphi(t))\delta_1(t) + \theta_2(t)\varphi(t)\delta_2(t), \quad (28)$$

где γ_0 – коэффициент усиления, а $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ – настраиваемые параметры, которые необходимы для оценки неизвестных параметров b, d . Подставим управление (28) в систему (20), получим уравнения замкнутой системы:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1(t) = -(a\mu(t) - b\varphi(t) + 2l + \gamma_0 + \theta_1(t)\varphi(t))\delta_1(t) + (1 + \theta_2(t)\varphi(t))\delta_2(t) \\ \dot{\delta}_2(t) = -d\varphi(t)\delta_1(t) - \delta_2(t) \end{cases}. \quad (29)$$

Вычислим производную целевой функции (21) в силу системы (29), а затем найдем градиент по вектору настраиваемых параметров $\theta = \text{col}(\theta_1, \theta_2)$. Тогда настройка параметров будет осуществляться по следующему алгоритму:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(t) = \gamma\varphi(t)\delta_1^2(t), \\ \dot{\theta}_2(t) = -\gamma\varphi(t)\delta_1(t)\delta_2(t), \end{cases} \quad (30)$$

где $\gamma > 0$ - коэффициент усиления.

Для анализа устойчивости замкнутой системы ошибок (29), введем функцию Ляпунова в следующем виде:

$$V(\delta(t)) = \frac{1}{2}(\delta_1^2(t) + \delta_2^2(t)) + \frac{1}{2\gamma}(\theta_1(t) - b)^2 + \frac{1}{2\gamma}(\theta_2(t) - d)^2, \quad (31)$$

найдем ее производную в силу системы (29), (30):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\delta(t)) &= -(a\mu(t) - b\varphi(t) + 2l + \gamma_0 + \theta_1(t)\varphi(t))\delta_1^2(t) + (1 + \theta_2(t)\varphi(t))\delta_1(t)\delta_2(t) - \\ &- d\varphi(t)\delta_1(t)\delta_2(t) - \delta_2^2(t) + (\theta_1(t) - b)\varphi(t)\delta_1^2(t) - (\theta_2(t) - d)\varphi(t)\delta_1(t)\delta_2(t) \leq \\ &\leq -\left(\sqrt{\gamma_0 + 2l}\delta_1(t) - \frac{\delta_2(t)}{2}\right)^2 - \frac{3\delta_2^2(t)}{4}. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, управление $u(t)$ в виде (28), (30) где $\gamma > 0$, $\gamma_0 > -2l$, обеспечивает цель управления (19). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть l – сила связи между системами (17), а γ – коэффициент усиления в законе управления $u(t)$. Тогда $\forall x(0)$ системы (17) управление $u(t)$ в виде (28), (30), где $\gamma > 0$, $\gamma_0 > -2l$, а δ_1 и δ_2 выражаются формулами (18), обеспечивает цель управления (19).

Для проверки работоспособности синтезированных алгоритмов проведем моделирование системы в среде MATLAB/Simulink со следующими параметрами $a=1$, $b=3$, $c=3$, $d=5$, $l=0,01$. На Рис. 6 представлены переходные процессы системы ошибок с известными параметрами с управлением (24) и без него. На Рис. 7 представлены переходные процессы системы ошибок с неизвестными параметрами и управлением (28) и без него. По графикам видно, что без управления система из ошибок синхронизации является колебательной, а это значит, что две связанные системы Хиндмарш-Роуз не синхронизированы. При наличии управляющего воздействия система ошибок становится устойчивой, следовательно, две связанные системы синхронизируются.

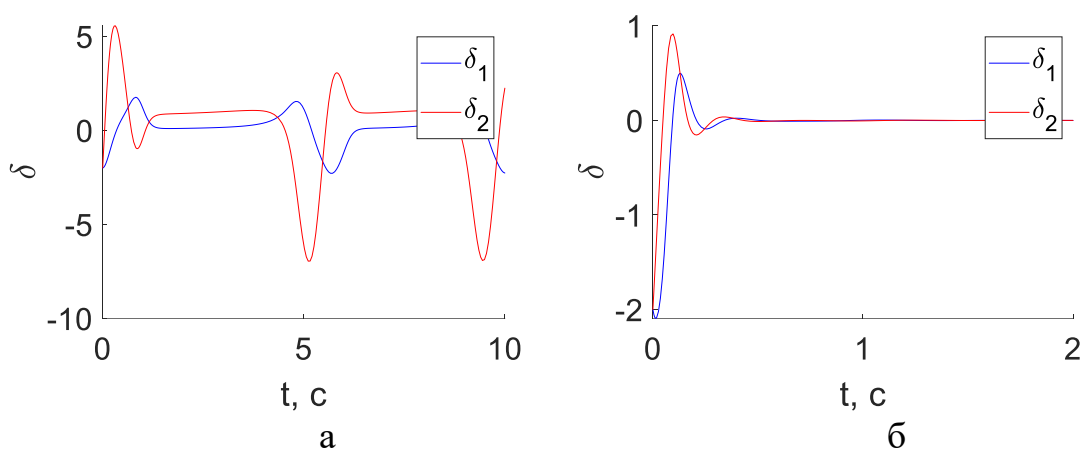


Рис. 6 – Переходные процессы синхронизации системы ошибок с известными параметрами: без управления (а); с управлением (б)

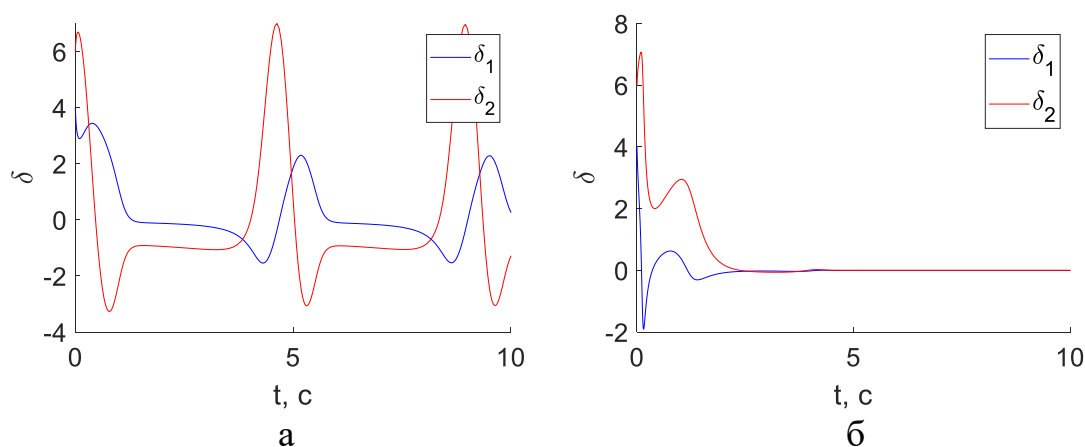


Рис. 7 – Переходные процессы синхронизации системы ошибок с неизвестными параметрами: без управления (а); с управлением (б)

6. Заключение

В данной работе была исследована динамика двумерной системы Хиндмарш-Роуз в зависимости от параметров. Был проведен анализ бифуркаций в данной системе, и найдены значения параметров, при которых система находится в колебательном режиме.

Решена задача управления синхронизацией двух связанных систем Хиндмарш-Роуз с известными параметрами с помощью внешнего управления и неизвестными параметрами с помощью адаптивного алгоритма, основанного на методе скоростного градиента. Аналитически доказана достижимость цели управления при использовании предложенных алгоритмов. В дальнейшем планируется провести анализ синхронизации сети из двумерных систем Хиндмарш-Роуз, а также разработать алгоритмы управления синхронизацией для случая нескольких связанных систем.

Благодарности

Синтез алгоритмов управления синхронизацией выполнен в Университете ИТМО при поддержке Правительства Российской Федерации (Грант № 08-08).

Анализ бифуркаций двумерной системы Хиндмарш-Роуз выполнен в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 19-72-10128).

Список литературы

- [1] Блехман. И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. – 352 с.
- [2] Osipov, G.V., Kurths, J., Zhou, C. Synchronization in oscillatory networks. Berlin: Springer-Verlag, 2007. – 370 p.
- [3] Glass, L. Synchronization and rhythmic processes in biology // Nature, 2001. – V. 410. – P. 277-284.
- [4] Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J. Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – 433 p.
- [5] Pessenhofer, H., Kenner, T. Zur Methodik der kontinuierlichen Bestimmung der Phasenbeziehung zwischen Herzschlag und Atmung // Pflügers Arch., 1975. – V. 355., Issue 1. – P. 77-83.
- [6] Fries, P. A mechanism for cognitive dynamics: Neuronal communication through neuronal coherence // Trends Cogn. Sci., 2005. – Vol. 9, Issue 10. – P. 474-480.
- [7] Hammond. C., Bergman, H., Brown. P. Pathological synchronization in Parkinson's disease: networks, models and treatments // Trends in Neurosciences, 2007. – Vol. 30, Issue 7. – P. 357-364.
- [8] Фрадков, А.Л. Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // Автомат. и телемех., 1979. – № 9. – С. 90-101.
- [9] Фрадков, А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. – 208 с.
- [10] Selivanov, A.A., Lehnert, J., Dahms, T., Hövel, P., Fradkov, A.L., Schöll, E. Adaptive synchronization in delay-coupled networks of Stuart-Landau oscillators // Phys. Rev. E, 2012. – Vol. 85. – 016201.
- [11] Guzenko, P.Y., Lehnert, J. Schöll, E. Application of adaptive methods to chaos control of networks of Rössler systems // Cybernetics and Physics, 2013. – Vol. 2. – P. 15-24.
- [12] Plotnikov, S.A. Control of synchronization in two delay-coupled FitzHugh-Nagumo systems with heterogeneities // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnLine), 2015. – Vol. 48, Issue 11. – P. 887-891.

- [13] Plotnikov, S.A., Lehnert J., Fradkov A.L., Schöll E. Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh-Nagumo nodes // *Int. J. Bifur. Chaos*, 2016. – Vol. 26, Issue 4. – 1650058.
- [14] Семенов, Д.М. Управление синхронизацией двух связанных неидентичных систем Хиндмарш–Роуз // *Управление большими системами*, 2018. – Том 75. – С. 30-49.
- [15] Semenov, D.M., Fradkov A.L. Adaptive synchronization of two coupled non-identical Hindmarsh-Rose systems by the Speed Gradient method // *IFAC-PapersOnLine*, 2018. – Vol. 11, Issue 33. – P. 12-14.
- [16] Hindmarsh, J.L., Rose, R.M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // *Royal Society*, 1984. – Vol. 221, Issue 1222. – P. 87-102.
- [17] Коломиец, М., Шильников, А. Методы качественной теории для модели Хиндмарш–Роуз // *Нелинейная динам.*, 2010. – Т. 6, № 1. – С. 23-52.
- [18] Storace, M., Lınaro, D., de Lange, E. The Hindmarsh–Rose neuron model: Bifurcation analysis and piecewise-linear approximations // *Chaos*, 2008. – Vol. 18. – 033128.
- [19] Tsuji, S., Ueta, T., Kawakami, H., Fujii, H., Aihara, K. Bifurcations in two-dimensional Hindmarsh-Rose type model // *Int. J. Bifur. Chaos*, 2007. – Vol. 17, Issue 3. – P. 985-998.
- [20] Hodgkin, A.L., Huxley, A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *The Journal of Physiology*, 1952. – V. 117. – P. 500-544.
- [21] Hindmarsh, J.L., Rose, R.M. A model of the nerve impulse using two first-order differential equations // *Nature*, 1982. – Vol. 296. – P. 162-164.

Bifurcation and synchronization control of two coupled two-dimensional Hindmarsh-Rose systems

Raznoglazova J.V.^{1,*}, Plotnikov S.A.^{2,3,**}

¹ITMO University, St. Petersburg, Russia

²Institute for Problems in Mechanical Engineering, RAS (IPME RAS)

³Lobachevski State University, Nizhny Novgorod, Russia

e-mail:

* 3janvar-julia@mail.ru

** waterwalf@gmail.com

Abstract. In this paper we consider local bifurcations of the two-dimensional Hindmarsh-Rose system describing the dynamics of electrical activity of an individual biological neuron. The problem of synchronization control of two coupled two-dimensional Hindmarsh-Rose systems is solved. The control algorithm with known parameters of the Hindmarsh-Rose systems and the based on the speed gradient method adaptive algorithm for the systems with unknown parameters are designed.

Key words: bifurcations, synchronization, adaptive control, speed-gradient algorithm, Hindmarsh-Rose system.

Acknowledgments

The synthesis of synchronization control algorithm was performed in ITMO University with the support of the government of the Russian Federation (Grant № 08-08).

The analysis of the bifurcations of two-dimensional Hindmarsh-Rose system is performed in Lobachevski State University with the support of Russian Scientific Fund (project № 19-72-10128).