ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 1, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

К теории граничных задач для системы двух релятивистских кравнений Шредингера описывающей столкновение и распад бесспиновых частиц

Лагодинский В. М
Санкт-Петербургский Государственный Университет
аэрокосмического приборостроения
e-mail: lagodinskiy@mail.ru

Аннотация. Поставлены и решены две граничные задачи для системы двух релятивистских уравнений Шредингера, которые являются дифференциальными уравнениями бесконечного порядка. Эта система описывает взаимодействие бесспиновых частиц в релятивистской квантовой механике. Первая задача описывает рассеяние двух бесспиновых частиц друг на друге, сопровождающееся возникновением промежуточной бесспиновой частицы, а вторая — распад бесспиновой частицы. Показано, что поставленные граничные условия делают задачи самосопряженными и обеспечивают непрерывность потоков частиц, а спектры этих задач ограничены снизу. Таким образом, в отличие от теории, основанной на уравнении Клейна-Гордона, при данном подходе не возникают решения, соответствующие состояниям свободных частиц с отрицательными энергиями. Получены зависимости эффективного сечения двухчастичного рассеяния и постоянной распада бесспиновой частицы от энергии. Решения точны в рамках рассматриваемой модели.

Ключевые слова: функции операторов, дифференциальные уравнения бесконечного порядка, релятивистская квантовая механика, квантовая теория рассеяния.

1. Введение. Трудности релятивистской квантовой теории

Принято считать [1], что процессы, в которых состав участвующих в них элементарных частиц меняется, можно описывать только в рамках квантовой теории поля, с использованием формализма вторичного квантования. Уравнения этой теории являются нелинейными и решаются только с помощью теории возмущений, причем оказывается, что первое приближение хорошо согласуется с экспериментальными данными, но при попытке уточнить результаты, то есть при переходе к следующим приближениям, возникают расходимости. Для их устранения разработаны приемы, называемые перенормировками. В книге [2] этот формализм применяется к так называемой модели Ли, описывающей столкновение двух частиц, в результате которого на некоторое время возникает новая частица, затем распадающаяся на две исходные. При этом вводятся существенные ограничения: одна из исходных частиц считается во много раз легче, чем другая исходная и промежуточная, для этой частицы решается нерелятивистское уравнение Шредингера (НУШ), и считается, что этой частице не соответствует античастица. Используется формализм вторичного квантования, а от возникающих расходимостей избавляются с помощью перенормировок массы и заряда (которые сводятся просто к вычитанию из подынтегральных функций некоторых выражений), причем „голая масса“ полагается бесконечно большой.

Принципиально отличается подход, используемый в книге [3] для описания реакции между двумя электрически нейтральными π^0-мезонами, связанной с образованием промежуточной частицы — K^0-мезона. Хотя и здесь гамильтониан физической системы определяется с помощью операторов рождения и уничтожения, но с их помощью получается система двух дифференциальных уравнений (одно из которых — двухчастичное, а другое — одночастичное), то есть производится „вторичное деквантование“. При этом взаимодействие принимает вид дельта-потенциала. В результате задача получает точное решение. Однако приходится использовать существенные упрощения. Прежде всего — это нерелятивистское приближение (утвеждается, впрочем, что можно было бы использовать известное релятивистское уравнение — уравнение Клейна-Гордона (УКГ)). Кроме того, пространство считается одномерным.

Почему же используется НУШ? Причина этого состоит в том, что, во-первых, использование УКГ обязательно приводит к решениям, имеющим вид волновых функций физической системы, соответствующих отрицательным значениям энергии, во-вторых, двухчастичное УКГ невозможно (есть и другие трудности). А выбор одномерного пространства связан с тем, что для определения операторов вторичного квантования используется импульсное представление. Для трехмерной сферически симметричной задачи пришлось бы использовать оператор радиального ипульса, однако этот оператор не может быть определен как самосопряженный [4], хотя и является симметрическим (физики называют такие операторы эрмитовыми). Правда, в окончательной системе уравнений операторы рождения и уничтожения уже не фигурируют, они используются только для ее вывода. Но эту окончательную систему уравнений вместе с соответствующими граничными условиями можно постулировать.

Итак, реалистической постановке задачи о двухчастичной реакции мешают свойства УКГ. Легко понять их происхождение. НУШ получается, если в нерелятивистском выражении энергии ε свободной частицы через импульс $\mathbf{p}$ заменить физические величины операторами:

$$\varepsilon \to i\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad \mathbf{p} \to -i\nabla \tag{1}$$

(используем систему единиц, в которой постоянная Планка $\hbar$ и скорость света c равны единице). Но если такую замену произвести в соответствующем релятивистском выражении:

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \tag{2}$$

где $m > 0$ — масса покоя частицы, то получается необычное уравнение:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{m^2 - \nabla^2}\right)\Psi(t, \mathbf{r}) = 0. \tag{3}$$

Оно (или уравнение, ему аналогичное) приводится разными авторами, но чаще всего лишь для того, чтобы отвергнуть возможность признать это уравнение как основу релятивистской квантовой механики (РКМ). В книгах [5] и [6] утверждается, что это уравнение неприемлемо, поскольку, во-первых, несимметрично относительно времени и пространственных координат, во-вторых, не локально. Требование симметричности было бы справедливо, если бы время и пространство действительно были эквивалентны. Но этой эквивалентности на самом деле нет, существует лишь связь [7]. Это видно хотя бы из выражения для интервала:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{4}$$

Равенство (2) тоже несимметрично относительно временной и пространственных компонент 4-вектора энергии-импульса. На самом деле для инвариантности уравнения или системы уравнений относительно некоторых преобразований необходима и достаточна инвариантность относительно этих преобразований множества их решений [8]. Иначе говоря, чтобы уравнение или система уравнений были инвариантны относительно некоторых преобразований, необходимо и достаточно, чтобы любое решение преобразованного уравнения или преобразованной системы могло быть получено с помощью тех же преобразований из какого-либо решения исходных уравнения или системы соответственно. Что же касается утверждения о нелокальности уравнения (3), то оно связано с традиционным [9] определением функции оператора, согласно которому вещественнозначной функции комплексного переменного $f(z)$ и самосопряженному оператору A с собственными значениями α и собственными функциями φ_α ставится в соответствие самосопряженный оператор $f(A)$ с собственными значениями $f(\alpha)$ и собственными функциями φ_α. Иначе говоря, если E_t — разложение единицы самосопряженного оператора A:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t, \tag{5}$$

а $f(z)$ — вещественнозначная функция, то оператор

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) t dE_t \tag{6}$$

— самосопряженный [4].

Нетрудно видеть, что это определение есть просто обобщение определения функции эрмитовой матрицы. Однако разница между операторами квантовой механики и матрицами весьма существенна: матрицы — это ограниченные операторы, а многие операторы квантовой механики — неограниченные. Можно проверить, что к обыкновенным дифференциальным операторам это определение не всегда применимо. Действительно, пусть $f(z) = z^2$ и $A = -id/dx$. Тогда естественно считать, что $f(A) = -d^2/dx^2$. Но это неверно, вообще говоря, для самосопряженных вариантов этих операторов — они могут иметь разные разложения единицы, кроме того, на функциях, определенных на $[0, \infty)$, оператор $-id/dx$ не может быть определен как самосопряженный [4], а оператор $-d^2/dx^2$ может. При этом дифференциальному выражению $-d^2/dx^2$ может быть сопоставлено бесконечное несчетное множество самосопряженных операторов, различающихся промежутками, на которых заданы функции из области определения оператора, и граничными условиями. Но на самом деле только одно выражение d^2/dx^2 определяет оператор, который любой функции $u(x)$, дважды дифференцируемой на некотором промежутке $P \subset \mathbb{R}$, сопоставляет ее вторую производную $u''(x)$, определенную на P. Это линейный оператор, обладающий следующим свойством: если $u(x) = 0$ на некотором подпромежутке $Q \subset P$, то и $u''(x) = 0$ на Q.

Определение 1.

Пусть F — множество функций $u(x)$, определенных на открытом подмножестве $P \subset \mathbb{R}$. Оператор $A\colon F \to F$ называется локальным, если из $u(x) = 0$, $\forall x \in P_0 \subset P$ следует $(Au)(x) = 0$, $\forall x \in P_0$ при любом $P_0 \subset P$.

Нетрудно видеть, что любой самосопряженный оператор не является локальным. Действительно, для того, чтобы функция $u(x)$, определенная на $P \subset \mathbb{R}$, входила в область определения любого самосопряженного оператора, необходимо, чтобы она была квадратично интегрируема на P.

Итак, одному локальному оператору сопоставляется несчетное множество самосопряженных операторов. Отсюда следует, что гораздо экономнее сначала определить локальный дифференциальный оператор, а затем выяснять, какие необходимы граничные условия, определяющие самосопряженные операторы для интересующих нас физических задач. То есть упрек в нелокальности можно было бы сформулировать следующим образом: если самосопряженный дифференциальный оператор имеет конечный порядок, то его можно получить из локального оператора, но самосопряженный квадратный корень из дифференциального оператора нельзя получить из локального оператора, а необходимо пользоваться определением Дж. фон Неймана. Обычно такое определение реализуют в виде псевдодифференциального оператора [11], то есть используя импульсное представление, тождественное преобразованию Фурье. Это определение используется в ряде работ [12, 13], где это уравнение авторы называют бесспиновым уравнением Солпитера. Оно избавляет от „нижнего континуума“, но его нелокальность препятствует признанию его основой РКМ. Кроме того, наличие точек ветвления у функции

$$f(z) = \sqrt{m^2 + z^2} \tag{7}$$

существенно затрудняет использование этого определения.

Автором настоящей работы было предложено локальное определение функции дифференциального оператора [14] и была доказана релятивистская инвариантность уравнения (3), то есть инвариантность множества его решений относительно преобразований Лоренца. Там же построена спектральная теория граничных задач для соответствующего стационарного уравнения, которая оказалась вполне аналогичной теории граничных задач для стационарного НУШ. Такая теория невозможна для нелокального бесспинового уравнения Солпитера, следовательно, уравнение (3) с новым определением квадратного корня из дифференциального оператора уже не является уравнением Солпитера. Поскольку оно становится вполне анологичным НУШ, его теперь естественно называть релятивистским уравнением Шредингера (РУШ). Используя это уравнение, были решены некоторые физические задачи, применение к которым УКГ приводит к серьезным трудностям [15, 16, 17, 18]. По-видимому, РУШ позволяет построить релятивистскую квантовую механику (РКМ) [19] как непосредственное релятивистское обобщение нерелятивистской квантовой механики (НКМ) [20].

Трудности существуют и в квантовомеханическом описании распада нестабильной частицы, например, в теории альфа-распада. Казалось бы, этот процесс явно нестационарный: при его описании исходят из того, что в некоторый начальный момент исходная частица еще не распалась, и в этот момент включается взаимодействие, приводящие к распаду. В результате оказывается, что продукты распада в момент, как угодно близкий к начальному, можно обнаружить как угодно далеко от начального положения исходной частицы [21]. Это объясняют тем, что начальное состояние является суперпозицией состояний с как угодно большой энергией. Но в релятивистской теории такое объяснение не годится: скорость продуктов распада ограничена скоростью света.

В настоящей работе РКМ, основанная на РУШ, используется для описания реакции между двумя бесспиновыми электрически нейтральными частицами, сопровождающейся образованием промежуточной чатицы и распада бесспиновой частицы.

2. Основы математического формализма новой РКМ

Для облегчения понимания основного содержания работы приведем здесь основные элементы математического формализма новой РКМ [14].

Определение 2.

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, не имеющая других особых точек, кроме точек ветвления конечного порядка, область голоморфности которой включает некоторую окрестность нуля, а каждая точка ветвления соединена прямолинейным разрезом с бесконечно удаленной точкой, и продолжения всех разрезов за точки ветвления пересекаются в нуле, D — линейный дифференциальный оператор, а функция $u(x)$ вещественного *переменного x такова, что множество предельных точек последовательности*

$$\{\gamma_n(x)\} = \left\{ |(D^n u)(x)|^{1/n} \exp\left(i\frac{\varphi_n}{n}\right)\right\}, \tag{8}$$

где $\varphi_n = \arg(u^{(n)}(x))$, $\forall x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ *ограничено и включено в область аналитичности функции $f(z)$. Тогда оператором $f(D)$ называется отображение, сопоставляющее функции $u(x)$ аналитическое продолжение функции*

$$\sqrt{m^2 + \alpha D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(-i\alpha)^n (D^n u)(x) \tag{9}$$

по вещественному параметру α от $\alpha = 0$ до $\alpha = 1$.

В работе [14] показано, что такое определение приводит к локальному оператору. Используем только представление Шредингера, альтернативное представление Гейзенберга применяться не будет.

Примеры.

1) Пусть $f(z) = \sqrt{m^2 + z}$, $m > 0$, $f(0) = m$, разрез: $(-\infty, -m)$,

$$D = -\frac{d^2}{dx^2} \equiv -\partial_x^2, \qquad u(x) = \exp(ipx), \qquad \forall x \in (a,b), \tag{10}$$

тогда

$$f(D) = \sqrt{m^2 - \partial_x^2} \tag{11}$$

— это гамильтониан (то есть оператор, соответствующий энергии) частицы с массой m, движущейся вдоль оси x. Если $p \in \mathbb{R}$, то

$$\big(f(D)u\big)(x) = \sqrt{m^2 - \partial_x^2} u(x) = \sqrt{m^2 + p^2}\exp(ipx), \qquad \forall x \in (a,b), \tag{12}$$

если же $p = i\varkappa$, $\varkappa \in \mathbb{R}$, $|\varkappa| \geqslant m$, то функция $u(x)$ не принадлежит области определения оператора (11). Аналогично определяется и обратный оператор

$$f^{-1}(D) = (m^2 + D)^{-1/2} = (m^2 - \partial_x^2)^{-1/2} \tag{13}$$

(он существует!), который этой функции сопоставляет функцию

$$(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2} u(x) = (m^2 + p^2)^{-1/2}\exp(ipx), \qquad \forall x \in (a,b). \tag{14}$$

2) Пусть теперь $f(z) = -i\partial_x(m^2 + z^2)^{-1/2}$, $D = -i\partial_x$, разрезы по мнимой оси $(-i\infty, -im]$ и $[im, \infty)$. Тогда $f(D)$ — это оператор x-компоненты скорости частицы и он определяется коммутатором гамильтониана с умножением на

x, как и в нерелятивистской квантовой механике:

$$V_x e^{ipx} = i\left(\sqrt{m^2-\partial_x^2}\,x - x\sqrt{m^2-\partial_x^2}\right)e^{ipx} = \\ = -i\partial_x(m^2-\partial_x^2)^{-1/2}e^{ipx} = \frac{p}{\sqrt{m^2+p^2}}\,e^{ipx}. \quad (15)$$

Это вполне согласуется с теорией относительности. Заметим, что из УКГ оператор скорости получить нельзя — нет гамильтониана, а в уравнении Дирака, казалось бы, гамильтониан есть [5], но этот оператор приводит к странному выводу, что любая компонента скорости электрона и любой частицы со спином $1/2$ в любой момент времени по модулю равна скорости света!

3) Пусть функция $f(z)$ — та же, что и в первом примере, но

$$D = -r^{-1}\partial_r^2 r = -r^{-2}\partial_r r^2\partial_r \quad (16)$$

— радиальная часть лапласиана с обратным знаком в сферической системе координат. Тогда

$$f(D) = \sqrt{m^2 - r^{-1}\partial_r^2 r}\,. \quad (17)$$

Теперь легко получить, что если $v(r) = r^{-1}\exp(ipr)$, $\forall r \in (0,a) \subset \mathbb{R}_+$, где p^2 не принадлежит промежутку $(-\infty, -m]$, то

$$\big(f(D)v\big)(r) = \sqrt{m^2 - r^{-1}\partial_r^2 r}\,r^{-1}\exp(ipr) = \\ = \sqrt{m^2+p^2}\,r^{-1}\exp(ipr), \quad \forall r \in (0,a).$$

Имея определение квадратного корня из дифференциального оператора, нетрудно найти общее решение уравнения (3), удовлетворяющее условию ограниченности на $\mathbb{R}$:

$$\Psi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(p)\,dp \int_m^{\infty} d\varepsilon \exp[i(px-\varepsilon t)]\delta\big(\varepsilon - \sqrt{m^2+p^2}\,\big), \quad (18)$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака. Произведем в этом выражении преобразования Лоренца двухмерных псевдоевклидовых векторов (ε, p) и (t, x) в инерциальную систему отсчета, движущуюся со скоростью V относительно исходной. Эти преобразования имеют вид:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-V^2}}\,, \qquad t = \frac{t' + Vx'}{\sqrt{1-V^2}}\,, \quad (19)$$

$$p = \frac{p' + V\varepsilon'}{\sqrt{1-V^2}}\,, \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon' + Vp'}{\sqrt{1-V^2}}\,. \quad (20)$$

Используя инвариантность элемента объема $dp\,d\varepsilon$ и скалярного произведения $px - \varepsilon t$, а также известное свойство дельта-функции:

$$\delta(\alpha\xi) = |\alpha|^{-1}\delta(\xi), \tag{21}$$

получаем, что эти преобразования в функции (18) превращают ее в функцию:

$$\Psi'(t', x') = \int_{-\infty}^{\infty} dp' \int_{m}^{\infty} d\varepsilon' A'(p', \varepsilon') \exp[i(p'x' - \varepsilon' t')]\delta\big(\varepsilon' - \sqrt{m^2 + p'^2}\,\big), \tag{22}$$

где

$$A'(p', \varepsilon') = \sqrt{1 - V^2}\, A\left(\frac{p' + V\varepsilon'}{\sqrt{1 - V^2}}\right). \tag{23}$$

Очевидно, функция (22) удовлетворяет преобразованному уравнению (3), что и доказывает релятивистскую инвариантность уравнения (3) [8].

Введем обозначения:

$$\sqrt{m^2 - \partial_x^2} = H_{mx}, \qquad (m^2 - \partial_x^2)^{-1/2} = H_{mx}^{-1}. \tag{24}$$

Из уравнения (3) следует уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}, \tag{25}$$

где

$$\rho(t, x) = |\Psi(t, x)|^2 + m^2 \left|(H_{mx}^{-1}\Psi)(t, x)\right|^2 + \left|(H_{mx}^{-1}\partial_x\Psi)(t, x)\right|^2, \tag{26}$$

$$j(t, x) = -i\left(\Psi^*(t, x)(H_{mx}^{-1}\partial_x\Psi)(t, x) - \Psi(t, x)(H_{mx}^{-1}\partial_x\Psi^*)(t, x)\right), \tag{27}$$

Заметим, что функция $\rho(t, x)$ — положительно определенная, а функция $j(t, x)$ точно соответствует релятивистскому определению оператора скорости (15). Напомним, что из УКГ следует уравнение непрерывности, в котором функция $\rho(t, x)$ может принимать значения разных знаков, а функция $j(t, x)$ имеет нерелятивистский вид.

Используя подстановку:

$$\Psi(t, x) = \psi(x) \exp(-i\varepsilon t), \quad \forall x \in (a, b) \subset \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

получаем стационарное одномерное РУШ:

$$\left(\varepsilon - \sqrt{m^2 - \partial_x^2}\right)\psi(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b). \tag{29}$$

Теория граничных задач для этого уравнения также построена в [14]. Она основана на следующей теореме.

Теорема 1.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — решения уравнения (29) с одним и тем же ε, тогда

$$\frac{d}{dx}\left[u(x)\frac{\partial_x}{\sqrt{m^2-\partial_x^2}}\,v(x)-v(x)\frac{\partial_x}{\sqrt{m^2-\partial_x^2}}\,u(x)\right]=0,\quad \forall x\in(a,b). \tag{30}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
0 &= u(x)\sqrt{m^2-\partial_x^2}\,v(x)-v(x)\sqrt{m^2-\partial_x^2}\,u(x)=\\
&= u(x)(m^2-\partial_x^2)(m^2-\partial_x^2)^{-1/2}v(x)-v(x)(m^2-\partial_x^2)(m^2-\partial_x^2)^{-1/2}u(x)=\\
&= -u(x)\partial_x^2(m^2-\partial_x^2)^{-1/2}v(x)+v(x)\partial_x^2(m^2-\partial_x^2)^{-1/2}u(x)=\\
&= -\frac{d}{dx}\left[u(x)\frac{\partial_x}{\sqrt{m^2-\partial_x^2}}\,v(x)-v(x)\frac{\partial_x}{\sqrt{m^2-\partial_x^2}}\,u(x)\right]+\\
&\quad +\frac{du}{dx}\,\frac{\partial_x}{\sqrt{m^2-\partial_x^2}}\,v(x)-\frac{dv}{dx}\,\frac{\partial_x}{\sqrt{m^2-\partial_x^2}}\,u(x).
\end{aligned}$$

Но, поскольку

$$(m^2-\partial_x^2)^{-1/2}u(x)=\varepsilon^{-1}u(x),\quad (m^2-\partial_x^2)^{-1/2}v(x)=\varepsilon^{-1}v(x),\quad \forall x\in(a,b), \tag{31}$$

то

$$\frac{du}{dx}\,\frac{\partial_x}{\sqrt{m^2-\partial_x^2}}\,v(x)-\frac{dv}{dx}\,\frac{\partial_x}{\sqrt{m^2-\partial_x^2}}\,u(x)=0. \tag{32}$$

Теорема доказана. Очевидно, выражение

$$u(x)\frac{\partial_x}{\sqrt{m^2-\partial_x^2}}\,v(x)-v(x)\frac{\partial_x}{\sqrt{m^2-\partial_x^2}}\,u(x) \tag{33}$$

играет в теории уравнения (29) ту же роль, что и определитель Вронского в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка [22].

Для настоящей работы очень важным является вопрос, какие граничные условия должны быть поставлены для одномерного стационарного РУШ со ступенчатым потенциалом:

$$\left[\varepsilon-U(x)-\sqrt{m^2-\partial_x^2}\right]\psi(x)=0,\quad \forall x\in[a,b]\subset\mathbb{R}, \tag{34}$$

где

$$U(x)=\begin{cases}-U_0, & \forall x\in[a,0],\\ 0, & \forall x\in(0,b],\end{cases}\qquad a<0,\quad b>0. \tag{35}$$

Будем считать, что $0 < U_0 < m$. Поставим следующие граничные условия:

$$\psi(a) = \psi(b) = 0, \lim_{\delta\to 0}[\psi(\delta) - \psi(-\delta)] = \lim_{\delta\to 0}[(H_m^{-1}\psi')(\delta) - (H_m^{-1}\psi')(-\delta)] = 0. \tag{36}$$

Покажем, что эти граничные условия определяют самосопряженную задачу с чисто точечным спектром для уравнения (34), то есть все собственные значения этой задачи вещественны, а собственные функции, соответствующие разным собственным значениям, взаимно ортогональны. Пусть $\psi_n(x)$ — решения уравнения (34) с $\varepsilon = \varepsilon_n$. $n = 1,\, 2$, удовлетворяющие условиям (36). Тогда

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\psi_1(x)\psi_2(x) = \psi_2(x)\sqrt{m^2 - \partial_x^2}\psi_1(x) - \psi_1(x)\sqrt{m^2 - \partial_x^2}\psi_2(x). \tag{37}$$

Преобразуем правую часть этого равенства:

$$\begin{aligned}
&\psi_2(x)\sqrt{m^2 - \partial_x^2}\psi_1(x) - \psi_1(x)\sqrt{m^2 - \partial_x^2}\psi_2(x) = \\
&= \psi_2(x)(m^2 - \partial_x^2)(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi_1(x) - \psi_1(x)(m^2 - \partial_x^2)(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi_2(x) = \\
&\qquad = m^2\left[\psi_2(x)(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi_1(x) - \psi_1(x)(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi_2(x)\right] - \\
&\qquad\qquad - \psi_2(x)\partial_x^2(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi_1(x) - \psi_1(x)\partial_x^2(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&\psi_2(x)\partial_x^2(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi_1(x) - \psi_1(x)\partial_x^2(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2} = \\
&\qquad = \frac{d}{dx}\left[\psi_2(x)\partial_x(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi_1(x) - \psi_1(x)\partial_x(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\right] - \\
&\qquad\qquad - \psi_2'\partial_x(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi_1(x) - \psi_1'(x)\partial_x(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2},
\end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование по x, и

$$\psi_n(x) = \varepsilon_n(m^2 - \partial_x^2)^{-1/2}\psi_n(x), \quad \forall x \in [a, b], \quad n = 1,\, 2. \tag{39}$$

Поэтому из равенства (38) получаем:

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)[\psi_1(x)\psi_2(x) + m^2(H_m^{-1}\psi_1)(x)(H_m^{-1}\psi_2)(x) + \\
&\quad + (H_m^{-1}\psi_1')(x)(H_m^{-1}\psi_2')(x)] = -\frac{d}{dx}\left[\psi_2(x)(H_m^{-1}\psi_1')(x) - \psi_2(x)(H_m^{-1}\psi_1')(x)\right].
\end{aligned} \tag{40}$$

Поскольку функции $\psi_n(x)$ и $(H_m^{-1}\psi_n)(x)$ непрерывны, то из (40) и условий при $x = a$ и $x = b$ следует

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\int_a^b [\psi_1(x)\psi_2(x) + m^2(H_m^{-1}\psi_1)(x)(H_m^{-1}\psi_2)(x) + \\ + (H_m^{-1}\psi_1')(x)(H_m^{-1}\psi_2')(x)]\,dx = 0. \quad (41)$$

Пусть $\psi_2(x) \equiv \psi_1^*(x)$, тогда $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^*$. Равенство (41) превращается в следующее:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^*)\int_a^b [|\psi_1(x)|^2 + m^2|(H_m^{-1}\psi_1)(x)|^2 + |(H_m^{-1}\psi_1')(x)|^2]\,dx = 0. \quad (42)$$

Так как интеграл строго положителен, то отсюда следует вещественность спектра нашей задачи. Пусть теперь $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Тогда функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ взаимно ортогональны:

$$\int_a^b [\psi_1^*(x)\psi_2(x) + m^2(H_m^{-1}\psi_1^*)(x)(H_m^{-1}\psi_2)(x) + \\ + (H_m^{-1}{\psi'}_1^*)(x)(H_m^{-1}\psi_2')(x)]\,dx = 0$$

в смысле скалярного произведения:

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_a^b [|\psi_1(x)|^2 + m^2|(H_m^{-1}\psi_1)(x)|^2 + |(H_m^{-1}\psi_1')(x)|^2]\,dx. \quad (43)$$

Мы получаем новое гильбертово пространство L_2', теория которого окаывается, как это ни странно, проще, чем теория известного пространства квадратично интегируемых функций L_2. Действительно, для того, чтобы функция $\psi(x)$ принадлежала к L_2', необходимо и достаточно, чтобы она была квадратично интегрируема, и чтобы были квадратично интегрируемы функции $(H_m^{-1}\psi)(x)$ и $(H_m^{-1}\psi')(x)$, но вторая из них является производной первой, следовательно [4], обе они кусочно непрерывны, а значит, элементы L_2' — это не обобщенные функции, как элементы L_2, а кусочно непрерывные функции.

Можно показать, что спектр задачи, заданной уравнением (34) и граничными условиями (36), чисто точечный, ограниченный снизу (значений спектра, меньших, чем $-U_0$, нет) и не ограниченный сверху. При возрастании b спектральные значения, превышающие m, сближаются друг с другом, и в пределе $b \to \infty$ спектр приобретает непрерывную часть, а точечная часть может быть пустой. Если в (34) и (35) перейти к пределу $b \to \infty$ с заменой квадратной скобки на круглую, то условия (36) заменятся на следующие:

$$\psi(a) = 0, \lim_{\delta\to 0}[\psi(\delta) - \psi(-\delta)] = \lim_{\delta\to 0}[(H_m^{-1}\psi')(\delta) - (H_m^{-1}\psi')(-\delta)] = 0, \qquad (44)$$

с добавлением к ним условие ограниченности решения. Вещественность спектра сохраняется. Как следует из определения оператора H_m, любое значение $\varepsilon < -U_0$ не может принадлежать спектру нашей задачи, значит спетр оганичен снизу. Если

$$a > \frac{m - U_0}{\sqrt{m^2 - (m - U_0)^2}}, \qquad (45)$$

то существует единственное собственное значение $\varepsilon_0 \in (-U, 0)$. В диапазоне энергий $\varepsilon \in (m - U_0, m)$ существует столько собственных значений, сколько раз там помещаются промежутки

$$\left(\sqrt{m^2 + k^2\pi^2(2a)^{-2}}, \sqrt{m^2 + (k+1)^2\pi^2(2a)^{-2}}\right), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots. \qquad (46)$$

Множество значений $\varepsilon \geqslant m$ составляет непрерывный спектр нашей задачи, каждое его значение — однократное. Если уравнение (34) задано на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ $(a \to -\infty, b \to \infty)$, то вместо условий при $x = a$ и $x = b$ должны выполняться условия ограниченности решения. В этом случае точечный спектр пуст, а непрерывный спектр есть множество $\varepsilon \geqslant m - U_0$, при этом значения $\varepsilon \in [m - U_0, m)$ однократные, а значения $\varepsilon \geqslant m$ — двукратные. В этом последнем случае решение запишем в виде:

$$\psi(x) = \exp(ipx) + A\exp(-ipx), \quad \forall x \leqslant 0, \psi(x) = B\exp(iqx), \quad \forall x > 0, \qquad (47)$$

где $A,\ B \in \mathbb{C}$, $p = \sqrt{(\varepsilon + U_0)^2 - m^2}$, $q = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$. Используя условия (44), получим:

$$A = \frac{p\sqrt{m^2+q^2} - q\sqrt{m^2+p^2}}{p\sqrt{m^2+q^2} + q\sqrt{m^2+p^2}}, \quad B = \frac{2p\sqrt{m^2+q^2}}{p\sqrt{m^2+q^2} + q\sqrt{m^2+p^2}}. \qquad (48)$$

Легко проверить равенство:

$$|A|^2 + \frac{q\sqrt{m^2+p^2}}{p\sqrt{m^2+q^2}}|B|^2 = 1. \qquad (49)$$

Оно позволяет интерпретировать величину $|A|^2$ как вероятность отражения частицы от потенциального скачка, а величину

$$\frac{q\sqrt{m^2+p^2}}{p\sqrt{m^2+q^2}}|B|^2 \qquad (50)$$

— как вероятность прохождения. Их сумма равна единице, таким образом падающий поток не интерферирует с отраженным. Это совсем не похоже на отражение звуковой волны от препятствия.

В работе [18] было сформулировано и исследовано двухчастичное РУШ:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{m_1^2 - \partial_{x_1}^2} - \sqrt{m_2^2 - \partial_{x_2}^2}\right)\Psi(t, x_1, x_2) = 0, \tag{51}$$

Можно показать [18], что из этого уравнения следует уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t, x_1, x_2) = -\sum_{k=1,2}\partial_{x_k} j(t, x_1, x_2), \tag{52}$$

где

$$\begin{aligned}\rho(t, x_1, x_2) = |\Psi(t, x_1, x_2)|^2 + \\ + \sum_{k=1,2}\left[m_k^2\left|(H_{m_k x_k}^{-1}\Psi)(t, x_1, x_2)\right|^2 + \left|(H_{m_k x_k}^{-1}\partial_{x_k}\Psi(t, x_1, x_2)\right|^2\right],\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}j(t, x_1, x_2) = -i\sum_{k=1,2}[\Psi^*(t, x_1, x_2)(H_{m_k x_k}^{-1}\partial_{x_k}\Psi)(t, x_1, x_2) - \\ - \Psi(t, x_1, x_2)(H_{m_k x_k}^{-1}\partial_{x_k}\Psi^*)(t, x_1, x_2)].\end{aligned} \tag{54}$$

В настоящей работе уравнения (3) и (51) используются для постановки и решения задач о реакции между двумя нейтральными бесспиновыми частицами с образованием промежуточной частицы и о распаде бесспиновой частицы на две бесспиновые.

3. Система уравнений и граничные условия

Рассматриваемая нами физическая система в некоторые моменты времени представляет из себя две частицы с массами покоя m_1 и m_2, а в другие — одну частицу с массой покоя M. Будем считать, что $M > m_1 + m_2$ и частицу с массой M называть M-частицей, а частицы с массами m_1 и m_2 — m-частицами. Будем рассматривать процесс в системе центра импульсов налетающих m-частиц, тогда это будет также системой покоя для M-частицы. Очевидно, она все время остается в начале координат. Будем считать, что она удерживается там прямоугольной сферически симметричной потенциальной ямой вида

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & \forall r \in [0, a], \\ 0, & \forall r > a, \end{cases}, \qquad U_0 > 0. \tag{55}$$

Непосредственное взаимодействие m-частиц между собой будем считать потенциальным и притягивающим, имеющим также вид прямоугольной сферически симметричной потенциальной ямы:

$$W(r) = \begin{cases} -W_0, & \forall r \in [0, a], \\ 0, & \forall r > a, \end{cases}, \qquad U_0 > 0. \tag{56}$$

Будем пока предполагать, что $U_0 < M$, $W_0 < m_1 + m_2$. Полагая радиус ямы a очень малым, можно считать полный угловой момент нашей физической системы нулевым. Сопоставим рассматриваемой физической системе систему двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка, двух РУШ, одно из которых одночастичное, а другое — двухчастичное.

$$\left[i\partial_t - U(r) - \sqrt{M^2 - r^{-1}\partial_r^2 r}\right]\Psi(t,r) = 0, \quad \forall r \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}, \tag{57}$$

$$\left[i\partial_t - W(r) - \sum_{k=1,2}\sqrt{m_k^2 - r^{-1}\partial_r^2 r}\right]\Phi(t,r) = 0, \quad \forall r \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}, \tag{58}$$

Заметим, что время — одно и то же во всей системе, многовременной формализм Дирака-Фока-Подольского [4] нам не нужен, у нас одни часы — в нашей лаборатории. Более того, и пространственная координата r одна и та же в обоих уравнениях. Введем функции:

$$\psi(t,r) \equiv r\Psi(t,r), \qquad \varphi(t,r) \equiv r\Phi(t,r). \tag{59}$$

Нетрудно получить:

$$\sqrt{m^2 - r^{-1}\partial_r^2 r}\, u(r) \equiv r^{-1}\sqrt{m^2 - \partial^2}\,[ru(r)], \tag{60}$$

поэтому из системы (57), (58) следует система:

$$\left[i\partial_t - U(r) - \sqrt{M^2 - \partial_r^2}\right]\psi(t,r) = 0, \quad \forall r \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}, \tag{61}$$

$$\left[i\partial_t - W(r) - \sum_{k=1,2}\sqrt{m_k^2 - \partial_r^2}\right]\varphi(t,r) = 0, \quad \forall r \geqslant 0, \forall t \in \mathbb{R}, \tag{62}$$

Теперь

$$H_m \equiv \sqrt{m^2 - \partial_r^2}. \tag{63}$$

Рассматривая уравнения (61), (62) как описание одной физической системы, можно из них получить общее уравнение непрерывности:

$$\partial_t \rho(t,r) = -\partial_r j(t,r), \tag{64}$$

где

$$\rho(t,r) = |\psi(t,r)|^2 + M^2|(H_M^{-1}\psi)(t,r)|^2 + |(H_M^{-1}\partial_r\psi)(t,r)|^2|^2 + \\ + 2^{-1}\sum_{k=1,2}[|\varphi(t,r)|^2 + m_k^2|(H_{m_k}^{-1}\varphi)(t,r)|^2 + |(H_{m_k}^{-1}\partial_r\varphi)(t,r)|^2], \quad (65)$$

$$j(t,r) = -i[\psi^*(t,r)(H_M^{-1}\partial_r\psi)(t,r) - \psi(t,r)(H_M^{-1}\partial_r\psi^*)(t,r)] - \\ - 2^{-1}i\sum_{k=1,2}[\varphi^*(t,r)(H_{m_k}^{-1}\partial_r\varphi)(t,r) - \varphi(t,r)(H_{m_k}^{-1}\partial_r\varphi^*)(t,r)]. \quad (66)$$

Коэффициент 2^{-1} здесь появляется из-за того, что пара m-частиц превращается в M-частицу и наоборот.

В системе (61), (62) время отделяется подстановкой:

$$\psi(t,r) = \psi_\varepsilon(r)e^{-i\varepsilon t}, \qquad \varphi(t,r) = \varphi_\varepsilon(r)e^{-i\varepsilon t}. \quad (67)$$

Энергия ε здесь одна и та же в обоих уравнениях: она сохраняется, поскольку мы рассматриваем замкнутую физическую систему. Из системы уравнений (61,62) получаем:

$$[\varepsilon - U(r) - H_M]\psi_\varepsilon(r) = 0, \quad \Big(\varepsilon - W(r) - \sum_{k=1,2} H_{m_k}\Big)\varphi_\varepsilon(r) = 0. \quad \forall r \geqslant 0. \quad (68)$$

Необходимо еще поставить граничные условия. Они должны обеспечивать непрерывность волновых функций и общей плотности потока (66) на границе ямы. Поставим следующие граничные условия:

$$\psi_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon(0) = 0, \quad (69)$$

$$\lim_{\delta\to 0}[\psi_\varepsilon(a+\delta) - \psi_\varepsilon(a-\delta)] = \lim_{\delta\to 0}[\varphi_\varepsilon(a+\delta) - \varphi_\varepsilon(a-\delta)] = 0, \quad (70)$$

$$\lim_{\delta\to 0}[(H_M^{-1}\psi'_\varepsilon)(a-\delta) - (H_M^{-1}\psi'_\varepsilon)(a+\delta)] - g\varphi_\varepsilon(a) = 0, \quad (71)$$

$$\lim_{\delta\to 0}\Big[\sum_{k=1,2}(H_{m_k}^{-1}\varphi'_\varepsilon)(a+\delta) - \sum_{k=1,2}(H_{m_k}^{-1}\varphi'_\varepsilon)(a-\delta)\Big] - 2g\lim_{\delta\to 0}\psi_\varepsilon(a+\delta) = 0, \quad (72)$$

где $g \in \mathbb{R}$ — некоторая конкретная величина. Кроме того, решение нашей системы должно быть ограниченным. Можно показать, что эти условия обеспечивают непрерывность суммы потоков:

$$\lim_{\delta\to 0}\Big[j_M(a+\delta) + 2^{-1}\sum_{k=1,2} j_{m_k}(a+\delta) - j_M(a-\delta) - 2^{-1}\sum_{k=1,2} j_{m_k}(a-\delta)\Big] = 0, \quad (73)$$

где

$$j_M(r) = -i[\psi_\varepsilon^*(r)(H_M^{-1}\psi_\varepsilon')(r) - \psi_\varepsilon(r)(H_M^{-1}\psi'^*_\varepsilon)(r)] \tag{74}$$

$$j_{m_k}(r) = -i[\varphi_\varepsilon^*(r)(H_{m_k}^{-1}\varphi_\varepsilon')(r) - \varphi_\varepsilon(r)(H_{m_k}^{-1}\varphi'^*_\varepsilon)(r)]. \tag{75}$$

То, что граничные условия (69)–(72) определяют граничную задачу с вещественным спектром, доказывается вполне аналогично тому, как это было доказано для уравнения (34) с граничными условиями (36). Можно считать набор $\mathbf{F}_\varepsilon(r) = \{\psi_\varepsilon(r), \varphi_\varepsilon(r)\}$ вектором некоторого линейного пространства. Это пространство несколько похоже на пространство Фока [4], однако есть существенные различия: во-первых, наше пространство только двухмерно, во-вторых, вторая компонента вектора соответствует наличию двух, вообще говоря, разных частиц, в-третьих, каждая из компонент не обязательно принадлежит гильбертову пространству. Тогда систему (68) можно представить в виде:

$$(\varepsilon - \mathbf{H})\mathbf{F}_\varepsilon(r) = 0, \qquad \forall r \geqslant 0, \tag{76}$$

где $\mathbf{H}$ — матричный оператор:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_M + U(r) & 0 \\ 0 & H_{m_1} + H_{m_2} + W(r) \end{pmatrix}. \tag{77}$$

4. Точечный спектр поставленной граничной задачи

Легко проверить, что если одновременно $\varepsilon < -U_0$ и $\varepsilon < -W_0$, то ни одно из уравнений (68) не имеет нетривиальных решений, поэтому проблемы с неограниченностью спектра снизу, которая появляется при использовании УКГ и УД, не возникает. Можно показать, что при достаточно малых по модулю g граничная задача, заданная системой (68) и граничными условиями (69)–(72), не имеет собственных значений, заключенных в промежутке $(0, m_1 + m_2 - W_0) \cap (0, M - U_0)$. Это и будем предполагать, поскольку физическая интерпретация такого собственного значения затруднительна. Пусть $\varepsilon \in (M - U_0, M) \cap (m_1 + m_2 - W_0, m_1 + m_2)$, тогда решения системы (68) имеют вид:

$$\psi_\varepsilon(r) = A_1 \sin q_1 r, \quad \forall r \in [0, a], \quad \psi_\varepsilon(r) = B_1 \exp[-\mu_1(r - a)], \quad \forall r > a, \tag{78}$$

$$\varphi_\varepsilon(r) = A_2 \sin q_2 r, \quad \forall r \in [0, a], \quad \varphi_\varepsilon(r) = B_2 \exp[-\mu_2(r - a)], \quad \forall r > a, \tag{79}$$

где q_1, q_2, μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$:

$$q_1 = \sqrt{(\varepsilon + U_0)^2 - M^2}\,, \quad q_2 = [\frac{\sqrt{[(\varepsilon + U_0)^2 - m_1^2 - m_2^2]^2 - 4m_1^2 m_2^2}}{2(\varepsilon + U_0)}\,, \tag{80}$$

$$\mu_1 = \sqrt{M^2 - \varepsilon^2}\,, \qquad \mu_2 = (2\varepsilon)^{-1}\sqrt{4m_1^2 m_2^2 - (\varepsilon^2 - m_1^2 - m_2^2)^2}. \tag{81}$$

Используя условия (69)–(72), получаем:

$$B_1(P_1 + Q_1) + gB_2 = 0, \quad 2gB_1 + B_2(P_2 + Q_2) = 0, \tag{82}$$

где

$$P_1 = \frac{\mu_1}{\sqrt{M^2 - \mu_1^2}}\,, \qquad P_2 = \mu_2 \sum_{k=1,2} (m_k^2 - \mu_2^2)^{-1/2}, \tag{83}$$

$$Q_1 = \frac{q_1 \operatorname{ctg} q_1 a}{\sqrt{M^2 + q_1^2}}\,, \qquad Q_2 = q_2 \operatorname{ctg} q_2 a \sum_{k=1,2} (m_k^2 + q_2^2)^{-1/2}. \tag{84}$$

Таким образом, для того, чтобы точечная часть спектра не была пустой, необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$D = (P_1 + Q_1)(P_2 + Q_2) - 2g^2 = 0. \tag{85}$$

Пара m-частиц локализована в потенциальной яме, если $\mu_2 > 0$. Рассмотрим предельный случай $\mu_2 = 0$. Равенство (85) принимает вид:

$$q_2 \operatorname{ctg} q_2 a \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{M^2 - \mu_1^2}} + \frac{q_1 \operatorname{ctg} q_1 a}{\sqrt{M^2 + q_1^2}} \right) \sum_{k=1,2} (m_k^2 + q_2^2)^{-1/2} = 2g^2. \tag{86}$$

При $q_2 \to 0$ и постоянном q_1 (его постоянство можно обеспечить соответствующим изменением величины U_0) левая часть этого равенства монотонно стремится к величине

$$Z = a^{-1}(P_1 + Q_1) \sum_{k=1,2} (m_k^2 + q_2^2)^{-1/2} > 0, \tag{87}$$

а при $q_2 \to \pi/2$ она монотонно стремится к нулю, принимая все положительные значения, не превосходящие Z, по одному разу. Поэтому, если $2g^2 < Z$, то на промежутке $(0, \pi/2)$ существует единственное значение $q_2 = q_{20}$, которое удовлетворяет уравнению (86), оно может быть найдено численно. Соответствующее значение энергии $\varepsilon = m_1 + m_2$ (поскольку $\mu_2 = 0$). Тогда из непрерывности левой части равенства (86) как функции q_2 следует, что при

$$W_0 > \sqrt{m_1^2 + q_{20}^2} + \sqrt{m_1^2 + q_{20}^2} - m_1 - m_2. \tag{88}$$

существует такое достаточно малое $\delta > 0$, что число $q_2 = q_{20} + \delta$ является корнем уравнения (85). Таким образом, точечный спектр нашей задачи не пуст, лишь если справедливо неравенство (88). Так как при $q_2 > \pi/2$ левая часть равенства (86) отрицательна, то если

$$\sqrt{m_1^2 + (q_{20}+\delta)^2} + \sqrt{m_1^2 + (q_{20}+\delta)^2} - m_1 - m_2 < W_0 < \\ < \sqrt{m_1^2 + (\pi/2)^2} + \sqrt{m_1^2 + (\pi/2)^2} - m_1 - m_2 \quad (89)$$

собственное значение точечного спектра $\varepsilon = \varepsilon_0$ будет единственным. Обозначим:

$$\sqrt{\varepsilon_0^2 - M^2} = q_{10}. \quad (90)$$

Чтобы при этом было $q_{10} \in \mathbb{R}$, необходимо, чтобы $U_0 > M - \varepsilon_0$.

Перейдем теперь к приближению точечного взаимодействия, то есть будем уменьшать радиус ямы a и увеличивать U_0 и W_0 так, чтобы единственное значение точечного спектра $\varepsilon = \varepsilon_0$ не менялось. Очевидно, при очень больших U_0 и W_0 $q_1 \sim U_0$, $q_2 \sim W_0$,

$$q_1(M^2 + q_1^2)^{-1/2} \sim 1, \qquad q_2 \sum_{k=1,2} (m_k^2 + q_2^2)^{-1/2} \sim 1, \quad (91)$$

поэтому для того, чтобы при таком предельном переходе сохранялось собственное значение $\varepsilon = \varepsilon_0$, надо, чтобы сохранялись произведения $\beta_1 = q_{10}a$ и $\beta_2 = (g_{20} + \delta)a$, при этом U_0 и W_0 должны возрастать как a^{-1}.Теперь вместо системы (68) получаем систему:

$$\left(\varepsilon - \sqrt{M^2 - \partial_r^2}\right)\psi_\varepsilon(r) = 0, \quad \left(\varepsilon - \sum_{k=1,2} \sqrt{m_k^2 - \partial_r^2}\right)\varphi_\varepsilon(r) = 0, \quad \forall r \geqslant 0. \quad (92)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\psi_\varepsilon(r) = B_1 \exp(-\mu_1 r), \qquad \varphi_\varepsilon(r) = B_2 \exp(-\mu_2 r), \qquad \forall r \geqslant 0. \quad (93)$$

Зададим граничные условия так, чтобы собственное значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ осталось тем же, что и раньше. Эти граничные условия должны иметь вид:

$$(H_M^{-1}\partial_r\psi_\varepsilon)(0) = h_1\psi_\varepsilon(0) + g\varphi_\varepsilon(0), \quad \sum_{k=1,2} (H_{m_k}^{-1}\partial_r\varphi_\varepsilon)(0) = 2g\psi_\varepsilon(0) + h_2\varphi_\varepsilon(0), \quad (94)$$

где h_1, $h_2 \in \mathbb{R}$. Такие граничные условия соответствуют самосопряженному расширению задачи, определенной нулевыми условиями в нуле. Используя условия (94), получим систему:

$$-\frac{\mu_1}{\sqrt{M^2-\mu_1^2}}B_1 = h_1 B_1 + gB_2, \quad -\mu_2 \sum_{k=1,2}(m_k^2-\mu_2^2)^{-1/2}B_2 = h_2 B_2 + 2gB_1. \tag{95}$$

Сравнив эту систему с системой (82), получим, что она приведет к тому же собственному значению точечного спектра, что и последняя, если положить $h_1 = \operatorname{ctg}\beta_1$, $h_2 = \operatorname{ctg}\beta_2$.

Получается, что наша физическая система, обладая энергией $\varepsilon = \varepsilon_0$, локализована в начале координат, хотя функции, описывающие ее: $\psi_\varepsilon(r)$, $\varphi_\varepsilon(r)$ отличны от нуля во всем пространстве. По-видимому, вряд ли такое состояние физической системы можно рассматривать как M-частицу, окруженную облаком виртуальных частиц, скорее это говорит о том, что при более высокой энергии частица распадется. Рассматривамая нами физическая система состоит в разные моменты времени либо из одной M-частицы, либо из двух m-частиц, облаку виртуальных частиц неоткуда взяться: когда исчезают две m-частицы, возникает одна M-частица и наоборот. Физики различают „голую“и „физическую“массы частицы, при этом, чтобы „физическая“масса совпадала с экспериментальной, им приходится „голую“массу считать бесконечно большой [2]. Очевидно, у нас M — это „голая “масса, а ε — „физическая“, но они обе конечны.

5. Решение задачи о двухчастичной реакции

Рассеянию m-частиц друг на друге с образованием промежуточной M-частицы соответствует диапазон энергий $\varepsilon \in (m_1+m_2,\ M)$. Решение выберем в виде:

$$\psi_\varepsilon(r) = A_1 \sin q_1 r, \qquad \varphi_\varepsilon(r) = A_2 \sin q_2 r, \qquad \forall r \in [0,a], \tag{96}$$

$$\psi_\varepsilon(r) = B_1 e^{-\mu_1(r-a)}, \qquad \varphi_\varepsilon(r) = e^{-ip(r-a)} + B_2 e^{ip(r-a)}, \qquad \forall r > a, \tag{97}$$

где

$$p = (2\varepsilon)^{-1}\sqrt{(\varepsilon^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}\,, \tag{98}$$

а q_1, q_2 и μ_1 определяются формулами (80) и (81) соответственно.

Теперь система, следующая из условий (69)–(72), — неоднородная:

$$B_1(P_1+Q_1) + gB_2 = -g, \qquad -2gB_1 + B_2(iR - Q_2) = iR + Q_2, \tag{99}$$

где P_1, Q_1 и Q_2 определяются формулами (83) и (84), а

$$R = p\sum_{k=1,2}(m_k^2+p^2)^{-1/2}\,. \tag{100}$$

Определитель этой системы:

$$D = (P+Q_1)(iR-Q_2)+2g^2 \tag{101}$$

не равен нулю, следовательно, значения ε этого диапазона составляют непрерывный спектр нашей задачи, решение системы (99) существует и единственно:

$$B_1 = \frac{2ig}{(P_1+Q_1)(iR-Q_2)+2g^2)}\,, \quad B_2 = \frac{(P_1+Q_1)(iR+Q_2)-2g^2}{(P_1+Q_1)(iR-Q_2)+2g^2}\,. \tag{102}$$

Таким образом, для функции $\varphi_\varepsilon(r)$ получаем выражение:

$$\varphi_\varepsilon(r) = \frac{2iR(P_1+Q_1)}{(P_1+Q_1)(iR-Q_2)+2g^2}\,\frac{\sin q_2 r}{\sin q_2 a}\,, \qquad \forall r\in[0,a], \tag{103}$$

$$\varphi_\varepsilon(r) = e^{-ip(r-a)} + \frac{(P_1+Q_1)(iR+Q_2)-2g^2}{(P+Q_1)(iR-Q_2)+2g^2}\,e^{ip(r-a)}, \qquad \forall r>a. \tag{104}$$

В соответствие с обычной квантовомеханической теорией рассеяния [20] выражение для $\varphi_\varepsilon(r)$ при $r>a$ запишем в виде:

$$\varphi_\varepsilon(r) \sim \exp[-ip(r-a)] - S_0\exp[ip(r-a)], \qquad \forall r\geqslant a, \tag{105}$$

где

$$S_0 = \exp(2i\delta_0) = \frac{2g^2-(P_1+Q_1)(iR+Q_2)}{2g^2+(P+Q_1)(iR-Q_2)}. \tag{106}$$

— элемент матрицы рассеяния, соответствующий нулевому орбитальному моменту. Отсюда получаем выражение для амплитуды рассеяния:

$$f(\theta) = \frac{1}{2ip}(S_0-1) = p^{-1}\frac{R(P+Q_1)}{2|g|^2+(P+Q_1)(iR-Q_2)} \tag{107}$$

и для полного сечения рассеяния:

$$\sigma = 2\pi\int_0^\pi |f(\theta)|^2\sin\theta\,d\theta = 4\pi p^{-2}\frac{R^2(P+Q_1)^2}{[2g^2-Q_2(P+Q_1)]^2+R^2(P+Q_1)^2}\,. \tag{108}$$

Нетрудно видеть, что рассеяние имеет резонансный характер, резонансная энергия близка к значению, обращающему в нуль разность $2g^2-Q_2(P+$

$+Q_1)$. Обозначим это значение энергии через ε_1, оно, очевидно, близко к собственному значению точечного спектра ε_0. Приравнивая их, можно перейти к приближению точечного взаимодействия, устремив $a \to 0$, $U_0 \to \infty$, $W_0 \to \infty$ так, чтобы значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ оставалось неизменным. Снова получим систему уравнений (92), но в данном диапазоне энергий ее решение запишется в виде:

$$\psi_\varepsilon(r) = B_1 \exp(-\mu_1 r), \qquad \varphi_\varepsilon(r) = \exp(-ipr) + B_2 \exp(ipr), \qquad \forall r \geqslant 0. \tag{109}$$

Подчинив это решение условиям (94), получим систему:

$$B_1(h_1 + P) + gB_2 = -g, \qquad -2gB_1 + B_2(iR - h_2) = iR + h_2. \tag{110}$$

Решение ее имеет вид:

$$B_1 = \frac{gh_2}{(h_1 + P)(iR - h_2) + 2g^2}\,, \qquad B_2 = \frac{(iR + h_2)(h_1 + P) - 2g^2}{(h_1 + P)(iR - h_2) + 2g^2}. \tag{111}$$

Теперь элемент матрицы рассеяния:

$$S_0 = \exp(2i\delta_0) = \frac{2g^2 - (P + Q_1)(iR + h_2)}{2g^2 + (P + h_1)(iR - h_2)}. \tag{112}$$

Это выражение отличается от (106) только заменой Q_1 на h_1, а Q_2 — на h_2, то есть h_1 — это Q_1 при $\varepsilon = \varepsilon_0$, а h_2 — это Q_2 при $\varepsilon = \varepsilon_0$.

6. Решение задачи о распаде бесспиновой частицы

Постановка задачи о распаде частицы требует дополнительного рассмотрения. Казалось бы, процесс явно нестационарный, причем из эксперимента мы знаем, что закон распределения случайной величины — времени жизни частицы T — показательный, то есть плотность вероятности того, что частица распадется в момент времени t определяется известной формулой:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda t), & \forall t \geqslant 0, \\ 0, & \forall t < 0, \end{cases} \tag{113}$$

где λ — величина, обратная среднему времени жизни частицы. Покажем, что такой закон распределения можно получить, решая стационарную систему уравнений со стационарными граничными условиями. Однако стационарность надо обеспечить. В книге [23] это делается заданием фиктивного потока частиц, падающих из бесконечности. В результате экспоненциальный закон распада получается, однако автор книги, Я.И. Френкель, справедливо замечает, что приходится пренебрегать отражением падающих частиц от потенциального скачка. Обойти эту трудность можно, предполагая наличие фиктивного источника M-частиц в начале координат. Вернемся снова к системе (68). Граничные условия выберем в виде (70)–(72), а вместо (69) потребуем только

$$\varphi_\varepsilon(0) = 0 \tag{114}$$

(источника m-частиц нет). Теперь решение запишем в виде:

$$\psi_\varepsilon(r) = \begin{cases} e^{iq_1 r} + A_1 e^{-iqr}, & \forall r \in [0,a], \\ B_1 e^{-\mu_1(r-a)}, & \forall r > a, \end{cases} \qquad \varphi_\varepsilon(r) = \begin{cases} A_2 \sin q_2 r, & \forall r \in [0,a], \\ B_2 e^{ip(r-a)}, & \forall r > a, \end{cases} \tag{115}$$

где q_1, q_2, μ_1 и p определяются формулами (80), (86) и (98) соответственно, а A_1, A_2, B_1, B_2 — новые функции энергии ε.

Используя граничные условия (114), (70)–(72) получим:

$$e^{iq_1 a} + A_1 e^{-iq_1 a} = B_1, \qquad -PB_1 - iQ_1(e^{iq_1 a} - A_1 e^{-iq_1 a}) = gB_2, \tag{116}$$

$$A_2 \sin q_2 a = B_2, \qquad iRB_2 - Q_2 B_2 = 2gB_1, \tag{117}$$

где A_1, A_2, B_1, $B_2 \in \mathbb{C}$, функции Q_1, Q_2, R определяются формулами (83), (84) и (100). Отсюда получаем неоднородную систему:

$$A_1 e^{-iq_1 a}(P - iQ_1) + gB_2 = -(P + iQ_1)e^{iq_1 a}, \tag{118}$$

$$-2gA_1 e^{-iq_1 a} + B_2(iR - Q_2) = 2ge^{iq_1 a}. \tag{119}$$

Ее определитель

$$D = e^{-iqa}[(P - iQ_1)(iR - Q_2) + 2g^2] \tag{120}$$

не равен нулю, и система имеет ровно одно решение:

$$A_1 = \frac{(P + iQ_1)(iR - Q_2) + 2g^2}{(P - iQ_1)(iR - Q_2) + 2g^2} \exp(2iq_l a) \tag{121}$$

$$B_2 = \frac{4igQ_1}{(P - iQ_1)(iR - Q_2) + 2g^2}\,. \tag{122}$$

Таким образом, плотность потока вероятности на один радиан, выходящего из начала координат, равна $j_0(r) = Q_1$, плотность потока, отраженного от границы ямы:

$$j_1 = Q_1|A|^2 = Q_1 \frac{(2g^2 - RQ_1 - PQ_2)^2 + (RP - Q_1 Q_2)^2}{(2g^2 + RQ_1 - PQ_2)^2 + (RP + Q_1 Q_2)^2}\,, \tag{123}$$

а плотность потока пар m-частиц вне ямы:

$$j_2 = R|B|^2 = \frac{16g^2Q_1^2R}{(2g^2+RQ_1-PQ_2)^2+(RP+Q_1Q_2)^2}\,, \tag{124}$$

Нетрудно проверить, что $j_0 = j_1 + 2^{-1}j_2$. Это можно понимать следующим образом: если в единицу времени в точке $r = 0$ рождается N M-частиц, то они разлетаются сферически симметрично и число образовавшихся пар m-частиц равно $2\pi N j_2$ (надо умножить j_2 на полное число радиан), что равно числу распадающихся за единицу времени M-частиц. Значит, если действие источника в точке $r = 0$ прекращается, то скорость убывания числа M-частиц равна $2\pi N j_2$. Итак, мы получаем закон распада в виде дифференциального уравнения:

$$\frac{dN}{dt} = -2\pi N j_2 = -\frac{32\pi g^2Q_1^2R}{(2g^2+RQ_1-PQ_2)^2+(RP+Q_1Q_2)^2}\,N. \tag{125}$$

Решение этого уравнения приводит к закону распределения (113) с

$$\lambda = \frac{32\pi g^2Q_1^2R}{(2g^2+RQ_1-PQ_2)^2+(RP+Q_1Q_2)^2}\,. \tag{126}$$

Таким образом, величина λ зависит от энергии, и эта зависимость имеет колокообразный вид с точкой максимума и шириной, которые могут быть получены численно. Здесь аналогия с так называемой естественной шириной спектральных линий. Обычно существование этой ширины связывают с принципом неопределенности энергия-время. Однако из нашего рассмотрения видно, что значение энергии m-частиц, возникших в результате распада равно энергии M-частицы, в точности равно энергии налетающих m-частиц. Переход к пределу точечного взаимдействия совершается аналогично тому, как это сделано при решении предыдущей задачи.

7. Заключение

Итак, использование системы двух релятивистских уравнений Шредингера (двухчастичного и одночастичного), однородных линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка, позволяет поставить и решить задачи о двухчастичной реакции, связанной с рождением промежуточной частицы и о распаде частицы. Конечно, такой подход имеет феноменологический характер, однако приводит к решениям, описывающим свойства реальных процессов. При этом не используется формализм вторичного квантования, который обычно считается необходимым для таких задач, но приводит к нелинейным уравнениям, решить которые точно невозможно, а приближенные методы (теория возмущений) приводят к расходящимся рядам и интегралам. На самом деле некоторое сходство с этим формализмом можно усмотреть в предлагаемом подходе: используется система уравнений, то есть решение состоит из двух функций, набор которых можно ассоциировать с вектором пространства, аналогичного известному пространству Фока. Но в уравнения не входят операторы взаимодействия, превращающего пару m-частиц в M-частицу и обратно, это взаимодействие определяется граничными условиями. Так задачи, связанные с взаимопревращениями частиц, становятся линейными и, следовательно, точно разрешимыми. И то двухмерное функциональное пространство, которое (неявно) используется в этой работе, отличается от пространства Фока во-первых, тем, что оно двухмерно, а не бесконечномерно, как пространство Фока, во-вторых, его компоненты не представляют собой просто состояний с определенным количеством частиц одного сорта, а являются решениями уравнений системы, причем среди этих уравнений одно двухчастичное. Еще одно отличие предлагаемого подхода состоит в том, что определяются стационарные волновые функции. Казалось бы, это противоречит очевидной нестционарности процесса, однако связано со стационарностью внешних условий, замкнутостью физической системы и следующим из этого законом сохранения энергии. Стремление решать нестационарные уравнения Шредингера связано с убеждением, что уравнение Шредингера полностью описывает состояние определенной физической системы. Традиционный подход не приводит к экспоненциальному закону распада нестабильной физической системы и закону сохранения энергии. По мнению автора настоящей работы, уравнение Шредингера с граничными условиями описывает только законы, действующие для замкнутой физической системы данного типа (геометрию пространства-времени этой ситемы). При таком понимании квантовой механики устраняются все трудности ее интерпретации. Очевидно, предлагаемый подход оставляет место для более глубокой теории, которая должна описывать взаимопревращения частиц менее формальным образом, чем в этой работе. Необходим ли в такой теории формализм вторичного квантования и перенормировки, покажет будущее.

Список литературы

[1] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. Т. 1. М.: Мир, 1984. 448 с.

[2] Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971. 544 с.

[3] Липкин Г. Квантовая механика. Новый подход к некоторым проблемам. М.: Мир, 1977. 592 с.

[4] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982. 486 с.

[5] Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979. 408 с.

[6] Бьеркен Дж., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория, Т.1. Релятивистская квантовая механика. М.: Наука, 1978. 297 с.

[7] Эйнштейн А.. Сущность теории относительности. М.: ИЛ, 1955. 160 с.

[8] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1989. 639 с.

[9] Нейман И. фон Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 367 с.

[10] Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и операторов Фурье. Т. 1. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1984. 359 с.

[11] Дубинский Ю.А. Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложение к математической физике // УМН, 1982. Т. 37. Вып. 5. С. 97-138.

[12] Gara A., Durand L. Matrix method for the numerical solution of relativistic wave equation // J. Math. Phys., 1990. Vol. 31. P. 2237-2246.

[13] Lucha W., Rupprecht H., Schoberl F.F. Spinless Salpeter equation as a simple matrix eigenvalue problem // Phys. Rev. D. 1992. Vol. 45. P. 1233-1245.

[14] Лагодинский В.М. Функции операторов и дифференциальные уравнения бесконечного порядка. – Saarbrucken, Germany: LAMBERT Academic Publishing, 2011. 110 с.

[15] Лагодинский В.М. О возможности инвариантного описания двухчастичного локального взаимодействия в релятивистской квантовой механике. Дифференциальные уравнения и процессы управления // 2017. № 4. http://www.math.spbu/diffjournal/pdf/lagodinskiy.pdf

[16] Головин А.В., Лагодинский В.М. Задача об S-состояниях пионного атома в релятивистской квантовой механике без учета сильного взаимодействия. Вестник СПбГУ. Сер. 4, Физика, Химия, 2009. № 2, с. 143-155.

[17] Головин А.В., Лагодинский В.М. Задача о столкновении бесспиновой частицы с идеальным зеркалом конечной массы в релятивистской квантовой механике. Вестник СПбГУ сер. 4, Физика, Химия, 2012, № 4, с. 3-13.

[18] Лагодинский В.М. К теории двухчастичного релятивистского уравнения Шредингера. Материалы научной конференции "ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ". СПб Изд. РГПУ 2017. с. 75.

[19] Golovin A.V., Lagodinskiy V.M. On the possibility of constructing relativistic quantum mechanics on the basis of the difinition of the function of differential operators. J. Phys.: Conf. Ser. 2019. **1205** 012019.

[20] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, нерелятивистская теория. М. "ФИЗМАТЛИТ". 2001. 803 с.

[21] Нуссенцвейг Х.М. Причинность и дисперсионные соотношения. М.: Мир, 1976, 461 с.

[22] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. ЛКИ, 473 с.

[23] Френкель Я.И. Волновая механика. Т. 1. М: ГТТИ, 1934. 388 с.

On the theory of boundary problems for a system of two relativistic Schrodinger equations describing collision and decay of spinless particles

Lagodinskiy Vladimir Meerovich
Saint-Petersburg State University of aerospace instrumentation
e-mail: lagodinskiy@mail.ru

Abstract. Two boundary value problems for a system of two relativistic Schrodinger equations, which are differential equations of infinite order, are set and solved. This system describes the interaction of spinless particles in relativistic quantum mechanics. The first problem describes the scattering of two spinless particles accompanied by the appearance of an intermediate spinless particle, and the other problem – the decay of a spinless particle. It is shown that under the set boundary conditions the problems are self-adjoint, the particle flows are continuous, and the spectra of these problems are bounded below. Thus, unlike the theory based on the Klein-Gordon equation, in this approach the solutions corresponding to the states of free particles with negative energies do not occur. The dependences of the effective cross-section of two-particle scattering and the decay constant of a spinless particle on the energy are obtained. The solutions are accurate within the accepted model.

Keywords: functions of operators, differential equations of infinite order, relativistic quantum mechanics, quantum scattering theory