

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 1, 2021

Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>
e-mail: jodiff@mail.ru

*Теория обыкновенных
дифференциальных уравнений*

Дробно-полиномиальные дифференциальные уравнения: дискретные группы и решения через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве

Хакимова З.Н.^{1*}, Зайцев О.В.^{2**}

¹Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург

²БГТУ «Военмех» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург

e-mail:

*vka@mil.ru

**zaytsev_oleg1997@mail.ru

Аннотация. Для класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с дробно-полиномиальной правой частью проведен дискретно-групповой анализ. Найдены преобразования, замкнутые на этом классе уравнений или на его подклассах. Построена группа преобразований диэдра 12-го порядка и граф этой группы для класса уравнений с дробно-полиномиальной правой частью.

С помощью этой группы преобразований диэдра построена псевдогруппа преобразований 120-го порядка для 1-го уравнения Пенлеве, а также граф этой псевдогруппы. Найдены точные решения через 1-й трансцендент Пенлеве 119-ти уравнений полиномиального и дробно-полиномиального видов, связанных преобразованиями указанной псевдогруппы с 1-м уравнением Пенлеве.

Ключевые слова: Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка, дискретная группа, граф дискретной группы, группа диэдра, дискретная группа преобразований, псевдогруппа, дискретно-групповой анализ, 1-ое уравнение Пенлеве, ОДУ полиномиального вида, ОДУ дробно-полиномиального вида, точное решение ОДУ, 1-ый трансцендент Пенлеве, класс обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ).

1. Введение

Одной из важных задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) является поиск точных решений; эта задача остаётся актуальной и в настоящее время. Точные решения дифференциальных уравнений помогают понимать качественные особенности многих явлений и процессов. Точные решения модельных уравнений могут быть использованы для разработки новых численных и асимптотических методов. Точные решения уравнений из различных областей естествознания помогают планировать эксперименты для определения эмпирических параметров и функций, содержащихся в уравнениях. Если даже не очевиден физический смысл уравнений некоторого модельного класса, «просчитывание» его полезно, так как служит основой для нахождения решений уравнений более общих классов.

Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений, разработанный в конце 20-го столетия Зайцевым В.Ф. [1-8], позволил найти точные решения большого числа уравнений многих классов (см., например, [1,2,15-19]).

ОДУ с полиномиальной и дробно-полиномиальной правой частью, в частности уравнения Пенлеве, чаще всего возникают в нелинейной механике, но также и в других областях естествознания – в разных разделах физики, в астрофизике, химии, биологии и т.д.

В данной работе вначале сделан обзор результатов, полученных ранее авторами и другими исследователями (п.3 – п.6).

Проведен дискретно-групповой анализ классов ОДУ с полиномиальной и дробно-полиномиальной правой частью: указаны преобразования, замкнутые на этих классах уравнений; построены дискретные группы преобразований и их графы (п.7, п.8).

Результаты п.3 – п.8 применены к первому уравнению Пенлеве (п.9, п.10). Это позволило построить псевдогруппу преобразований и её граф 120-го порядка для первого уравнения Пенлеве. Выписаны 120 уравнений, соответствующих вершинам этого графа. Найдены точные решения всех этих уравнений через первый трансцендент Пенлеве.

Кроме того, указан способ нахождения решений уравнений с произвольными коэффициентами (п.11, теоремы 1,2).

Найден способ экономичного представления решений уравнений, когда граф псевдогруппы преобразований исследуемого класса уравнений есть декартово произведение графа-дерева и графа дискретной группы.

В статье использовались методы дискретно-группового анализа, в том числе метод расширения класса ОДУ до класса уравнений, в котором некоторое преобразование становится замкнутым; методы построения дискретной группы, псевдогруппы преобразований, замкнутых в данном классе дифференциальных уравнений; метод «размножения» разрешимых уравнений с помощью найденной группы или псевдогруппы преобразований.

2. Изучаемые классы уравнений

В данной статье изучаются классы ОДУ с полиномиальной правой частью:

$$y_{xx}'' = \sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (x y_x' - y)^{n_i}; \quad (1)$$

а также с дробно-полиномиальной правой частью – классы

$$y_{xx}'' = [\sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (x y_x' - y)^{n_i}]^{-1} \quad (2)$$

и

$$y_{xx}'' = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (xy_x' - y)^{n_i}}{\sum_{i=3}^4 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (xy_x' - y)^{n_i}}. \quad (3)$$

Классы уравнений (1) и (2) содержатся в (3).

Обозначим классы уравнений (1), (2) и (3) матрицами параметров либо суммой векторов параметров, соответственно:

$$\begin{bmatrix} k_1 & l_1 & m_1 & n_1 & A_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 & n_2 & A_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i),$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & l_1 & m_1 & n_1 & A_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 & n_2 & A_2 \end{bmatrix}^{-1} = [\sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)]^{-1},$$

$$\frac{\sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)}{\sum_{i=3}^4 (k_i, l_i, m_i, n_i | A_i)}.$$

Подкласс класса уравнений (1) при $n_1 = n_2 = 0$

$$y_{xx}'' = \sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i}, \quad (4)$$

обозначаемый

$$\begin{bmatrix} k_1 & l_1 & m_1 & 0 & A_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 & 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & l_1 & m_1 & A_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 & A_2 \end{bmatrix}$$

или

$$\sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i, 0 | A_i) = \sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i | A_i),$$

был исследован в работах [9-14].

Другой подкласс класса уравнений (1) с одним слагаемым в правой части, имеющий степенной вид

$$y_{xx}'' = Ax^k y^l (y_x')^m (xy_x' - y)^n, \text{ или } (k, l, m, n | A), \quad (5)$$

исследовался в работах [20-28].

Основу дискретно-группового анализа некоторого класса дифференциальных уравнений составляет нахождение преобразований \mathbf{d} , замкнутых на всём этом классе или на его подклассах:

$$y_{xx}'' = f(x, y, y_x', \bar{a}) \xrightarrow{\mathbf{d}} \ddot{u}_{tt} = f(t, u, \dot{u}_t, \bar{b}), \quad (6)$$

где \bar{a} и \bar{b} - векторы или матрицы параметров соответственно исходного и преобразованного уравнений.

В (6) \mathbf{d} : $x = \alpha(t, u, \bar{a})$, $y = \beta(t, u, \bar{a})$, если \mathbf{d} - точечное преобразование. В случае преобразования Беклунда \mathbf{d} : $x = \alpha(t, u, \dot{u}_t, \bar{a})$, $y = \beta(t, u, \dot{u}_t, \bar{a})$, $y_x' = \gamma(t, u, \dot{u}_t, \bar{a})$. Если преобразование \mathbf{d} не зависит от параметров \bar{a} исходного уравнения, то оно называется

независимым. Независимое преобразование Беклунда \mathbf{d} : $x = \alpha(t, u, \dot{u}_t)$, $y = \beta(t, u, \dot{u}_t)$, $y'_x = \gamma(t, u, \dot{u}_t)$ является касательным.

3. Дискретные группы преобразований класса уравнений (4)

Для класса уравнений (4) и его подклассов были найдены действующие на них преобразования [9-14], в том числе точечные

$$\mathbf{r}: \quad x = u, \quad y = t, \quad \sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i | A_i) \xrightarrow{\mathbf{r}} \sum_{i=1}^2 (l_i, k_i, 3 - m_i | -A_i), \quad (7)$$

$$\mathbf{s}: \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = -\frac{u}{t}, \quad \sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, 0 | A_i) \xrightarrow{\mathbf{s}} \sum_{i=1}^2 (-k_i - l_i - 3, l_i, 0 | (-1)^{l_i-1} \cdot A_i), \quad (8)$$

$$\mathbf{u}: \quad x = t^{\frac{1}{\sigma}}, \quad y = t^{\frac{1-\sigma}{2\sigma}} \cdot u + \frac{(k_1+2)(k_1+3)}{A_1} \cdot t^{-\frac{k_1+2}{\sigma}}, \quad \sigma = \sqrt{8k_1^2 + 40k_1 + 49},$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & 2 & 0 & | & A_1 \\ k_2 & 0 & 0 & | & A_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{u}} \begin{bmatrix} \frac{2k_1+5}{2\sigma} - \frac{5}{2} & 2 & 0 & | & \frac{A_1}{\sigma^2} \\ \frac{2k_2+3}{2\sigma} - \frac{3}{2} & 0 & 0 & | & \frac{A_2}{\sigma^2} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Преобразования \mathbf{r} и \mathbf{s} являются независимыми, \mathbf{u} зависит от параметров исходного уравнения. Преобразование \mathbf{r} замкнуто на всем классе уравнений (4), \mathbf{s} замкнуто на подклассе

$$\sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, 0 | A_i), \quad (10)$$

\mathbf{u} замкнуто на еще более узком подклассе уравнений

$$\begin{bmatrix} k_1 & 2 & 0 & | & A_1 \\ k_2 & 0 & 0 & | & A_2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Эти точечные преобразования являются образующими циклических групп 2-го порядка: $\mathbf{r}^2 = \mathbf{E}$, $\mathbf{s}^2 = \mathbf{E}$, $\mathbf{u}^2 = \mathbf{E}$.

Для класса уравнений (4) найдены также преобразования Беклунда, переводящие уравнения класса (4) в уравнения того же класса, среди них

$$\mathbf{g}_1: \quad x = u^{\frac{1}{k_1+1}}, \quad y = (\dot{u}_t)^{-\frac{1}{l_1}}, \quad y'_x = \frac{A_1}{k_1+1} \cdot t + \frac{A_2}{k_2+1} \cdot u^{\frac{k_2+1}{k_1+1}},$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & l & 0 & | & A_1 \\ k_2 & 0 & 0 & | & A_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{g}_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{k_1}{k_1+1} & \frac{2l+1}{l} & | & -\frac{l}{(k_1+1)^2} \cdot A_1 \\ 0 & \frac{k_2-k_1+1}{k_1+1} & \frac{2l+1}{l} & | & -\frac{l}{(k_1+1)(k_2+1)} \cdot A_2 \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$\mathbf{g}_1^{-1}: \quad x = \frac{l_1+1}{(2-m)A_1} \cdot \dot{u}_t - \frac{A_2}{A_1} t^{\frac{l_2-l_1}{l_1+1}}, \quad y = t^{\frac{1}{l_1+1}}, \quad y'_x = u^{2-m},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & l_1 & m & | & A_1 \\ 0 & l_2 & m & | & A_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{g}_1^{-1}} \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{l_1+1} & \frac{1}{m-2} & 0 & | & \frac{2-m}{(l_1+1)^2} \cdot A_1 \\ \frac{l_2-2l_1-1}{l_1+1} & 0 & 0 & | & \frac{(l_2-l_1)(2-m)}{(l_1+1)^2} \cdot A_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Преобразования \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_1^{-1} являются образующими псевдогрупп, они действуют внутри класса уравнений (4); \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_1^{-1} не замкнуты на своих исходных классах уравнений.

4. Дискретная псевдогруппа преобразований 1-го уравнения Пенлеве

Рассмотрим подкласс класса уравнений (4)

$$y''_{xx} = A_1 x^{k_1} y^2 + A_2 x^{k_2} \text{ или } \begin{bmatrix} k_1 & 2 & 0 & | & A_1 \\ k_2 & 0 & 0 & | & A_2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Класс уравнений (11) допускает применение преобразований \mathbf{r} , \mathbf{s} , \mathbf{u} , \mathbf{g}_1 и имеет псевдогруппу преобразований 16-го порядка, граф которой изображен на рис.1.

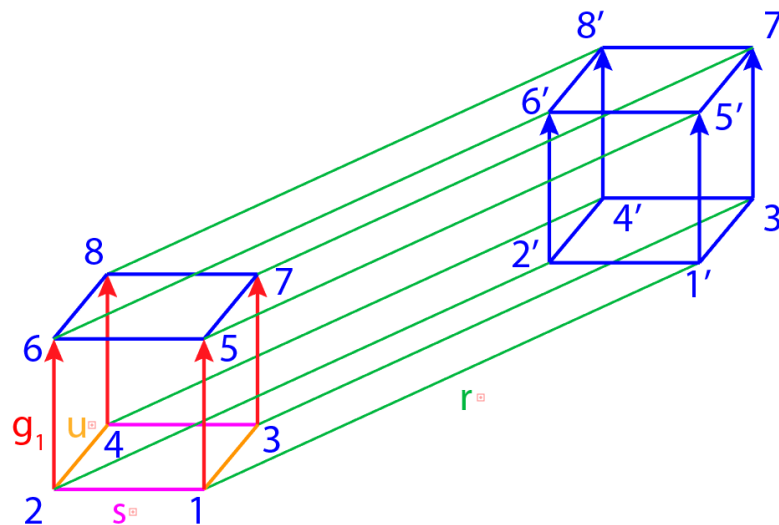


Рис. 1. Граф псевдогруппы преобразований 16-го порядка для класса уравнений (11)

Вершины графа на рис. 1 обозначают уравнения таблицы 1, где $\sigma = \sqrt{8k_1^2 + 40k_1 + 49}$, $\gamma_{\pm} = 2k_1 + 5 \pm 3\sigma$.

Таб. 1. Уравнения-вершины графа 16-го порядка для класса уравнений (11)

1	$(k_1, 2, 0 A_1) + (k_2, 0, 0 A_2)$	1'	$(2, k_1, 3 - A_1) + (0, k_2, 3 - A_2)$
2	$(-k_1 - 5, 2, 0 - A_1) + (-k_2 - 3, 0, 0 - A_2)$	2'	$(2, -k_1 - 5, 3 A_1) + (0, -k_2 - 3, 3 A_2)$
3	$\left(\frac{2k_1 + 5 - 5\sigma}{2\sigma}, 2, 0\left \frac{A_1}{\sigma^2}\right.\right) +$ $+ \left(\frac{2k_2 + 3 - 3\sigma}{2\sigma}, 0, 0\left \frac{A_2}{\sigma^2}\right.\right)$	3'	$\left(2, \frac{2k_1 + 5 - 5\sigma}{2\sigma}, 3\left -\frac{A_1}{\sigma^2}\right.\right) +$ $+ \left(0, \frac{2k_2 + 3 - 3\sigma}{2\sigma}, 3\left -\frac{A_2}{\sigma^2}\right.\right)$
4	$\left(-\frac{2k_1 + 5 + 5\sigma}{2\sigma}, 2, 0\left -\frac{A_1}{\sigma^2}\right.\right) +$ $+ \left(-\frac{2k_2 + 3 + 3\sigma}{2\sigma}, 0, 0\left -\frac{A_2}{\sigma^2}\right.\right)$	4'	$\left(2, -\frac{2k_1 + 5 + 5\sigma}{2\sigma}, 3\left \frac{A_1}{\sigma^2}\right.\right) +$ $+ \left(0, -\frac{2k_2 + 3 + 3\sigma}{2\sigma}, 3\left \frac{A_2}{\sigma^2}\right.\right)$

5	$\left(1, -\frac{k_1}{k_1+1}, \frac{5}{2} \middle -\frac{2A_1}{(k_1+1)^2}\right) +$ $+ \left(0, \frac{k_2-k_1+1}{k_1+1}, \frac{5}{2} \middle -\frac{2A_2}{(k_1+1)(k_2+1)}\right)$	5'	$\left(-\frac{k_1}{k_1+1}, 1, \frac{1}{2} \middle \frac{2A_1}{(k_1+1)^2}\right) +$ $+ \left(\frac{k_2-k_1+1}{k_1+1}, 0, \frac{1}{2} \middle \frac{2A_2}{(k_1+1)(k_2+1)}\right)$
6	$\left(1, -\frac{k_1+5}{k_1+4}, \frac{5}{2} \middle \frac{2A_1}{(k_1+4)^2}\right) +$ $+ \left(0, \frac{k_2-k_1-3}{k_1+4}, \frac{5}{2} \middle \frac{2A_2}{(k_1+4)(k_2+2)}\right)$	6'	$\left(-\frac{k_1+5}{k_1+4}, 1, \frac{1}{2} \middle -\frac{2A_1}{(k_1+4)^2}\right) +$ $+ \left(\frac{k_2-k_1-3}{k_1+4}, 0, \frac{1}{2} \middle -\frac{2A_2}{(k_1+4)(k_2+2)}\right)$
7	$\left(1, -\frac{2k_1+5-5\sigma}{\gamma_-}, \frac{5}{2} \middle -\frac{8A_1}{\gamma_-^2}\right) +$ $+ \left(0, \frac{2(k_2-k_1-1+2\sigma)}{\gamma_-}, \frac{5}{2} \middle \right.$ $\left. \middle -\frac{8A_2}{\gamma_- \cdot (2k_2+3-\sigma)}\right)$	7'	$\left(-\frac{2k_1+5-5\sigma}{\gamma_-}, 1, \frac{1}{2} \middle \frac{8A_1}{\gamma_-^2}\right) +$ $+ \left(\frac{2(k_2-k_1-1+2\sigma)}{\gamma_-}, 0, \frac{1}{2} \middle \right.$ $\left. \middle \frac{8A_2}{\gamma_- \cdot (2k_2+3-\sigma)}\right)$
8	$\left(1, -\frac{2k_1+5+5\sigma}{\gamma_+}, \frac{5}{2} \middle \frac{8A_1}{\gamma_+^2}\right) +$ $+ \left(0, \frac{2(k_2-k_1-1-2\sigma)}{\gamma_+}, \frac{5}{2} \middle \right.$ $\left. \middle \frac{8A_2}{\gamma_+ \cdot (2k_2+3+\sigma)}\right)$	8'	$\left(-\frac{2k_1+5+5\sigma}{\gamma_+}, 1, \frac{1}{2} \middle -\frac{8A_1}{\gamma_+^2}\right) +$ $+ \left(\frac{2(k_2-k_1-1-2\sigma)}{\gamma_+}, 0, \frac{1}{2} \middle \right.$ $\left. \middle -\frac{8A_2}{\gamma_+ \cdot (2k_2+3+\sigma)}\right)$

При $k_1 = 0, k_2 = 1, A_1 = 6, A_2 = 1$ уравнение (11) становится первым уравнением Пенлеве

$$y''_{xx} = 6y^2 + x \text{ или } \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & | & 6 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

допускающим дискретную псевдогруппу 32-го порядка, граф которой представлен на рис.2. Вершина с номером 1 обозначает первое уравнение Пенлеве.

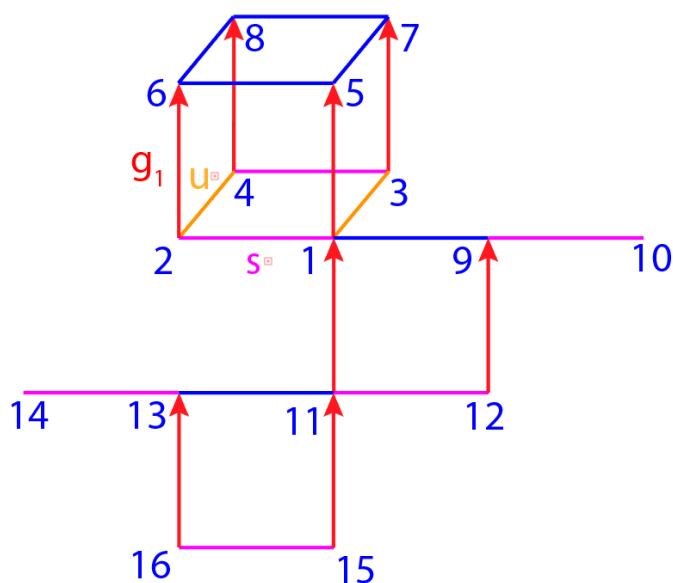


Рис. 2. Граф псевдогруппы преобразований 32-го порядка для 1-го уравнения Пенлеве

С целью экономии места образующая Γ , удваивающая граф, не показана на рис.2, поэтому на самом деле вершин не 16, как на этом рисунке, а 32.

В таблицу 2 вписаны уравнения 1-16, соответствующие вершинам 1-16 графа на рис.2. Уравнения 1'-16' таблицы 2 связаны попарно с соответствующими уравнениями 1-16 преобразованием Γ .

Таблица 2. Уравнения-вершины графа 32-го порядка (рис. 2) для 1-го уравнения Пенлеве

1	$(0,2,0 6) + (1,0,0 1)$	1'	$(2,0,3 -6) + (0,1,3 -1)$
2	$(-5,2,0 -6) + (-4,0,0 -1)$	2'	$(2,-5,3 6) + (0,-4,3 1)$
3	$\left(-\frac{15}{7}, 2,0 \frac{6}{49}\right) + \left(-\frac{8}{7}, 0,0 \frac{1}{49}\right)$	3'	$\left(2, -\frac{15}{7}, 3 -\frac{6}{49}\right) + \left(0, -\frac{8}{7}, 3 -\frac{1}{49}\right)$
4	$\left(-\frac{20}{7}, 2,0 -\frac{6}{49}\right) + \left(-\frac{13}{7}, 0,0 -\frac{1}{49}\right)$	4'	$\left(2, -\frac{20}{7}, 3 \frac{6}{49}\right) + \left(0, -\frac{13}{7}, 3 \frac{1}{49}\right)$
5	$\left(1,0,\frac{5}{2} -12\right) + \left(0,2,\frac{5}{2} -1\right)$	5'	$\left(0,1,\frac{1}{2} 12\right) + \left(2,0,\frac{1}{2} 1\right)$
6	$\left(1,-\frac{5}{4},\frac{5}{2} \frac{3}{4}\right) + \left(0,-\frac{1}{2},\frac{5}{2} \frac{1}{6}\right)$	6'	$\left(-\frac{5}{4}, 1,\frac{1}{2} -\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}, 0,\frac{1}{2} -\frac{1}{6}\right)$
7	$\left(1,-\frac{15}{8},\frac{5}{2} -\frac{3}{16}\right) + \left(0,-\frac{7}{4},\frac{5}{2} -\frac{1}{4}\right)$	7'	$\left(-\frac{15}{8}, 1,\frac{1}{2} \frac{3}{16}\right) + \left(-\frac{7}{4}, 0,\frac{1}{2} \frac{1}{4}\right)$
8	$\left(1,-\frac{20}{13},\frac{5}{2} \frac{12}{169}\right) + \left(0,-\frac{14}{13},\frac{5}{2} \frac{1}{39}\right)$	8'	$\left(-\frac{20}{13}, 1,\frac{1}{2} -\frac{12}{169}\right) + \left(-\frac{14}{13}, 0,\frac{1}{2} -\frac{1}{39}\right)$
9	$\left(0,\frac{1}{3},0 -\frac{8}{3}\right) + \left(1,-\frac{5}{3},0 \frac{4}{9}i\right)$	9'	$\left(\frac{1}{3}, 0,3 \frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}, 1,3 -\frac{4}{9}i\right)$
10	$\left(-\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, 0 (-1)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, 0 (-1)^{\frac{1}{6}} \cdot \frac{4}{9}\right)$	10'	$\left(\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}, 3 (-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 3 (-1)^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{4}{9}\right)$
11	$(1,0,0 24) + \left(0,-\frac{1}{2},0 2\right)$	11'	$(0,1,3 -24) + \left(-\frac{1}{2}, 0,3 -2\right)$
12	$(-4,0,0 -24) + \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0 2i\right)$	12'	$(0,-4,3 24) + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 3 -2i\right)$
13	$\left(1,-\frac{5}{3}, 0 \frac{32}{3}i\right) + \left(0,-\frac{4}{3}, 0 \frac{4}{3}\right)$	13'	$\left(-\frac{5}{3}, 1,3 -\frac{32}{3}i\right) + \left(-\frac{4}{3}, 0,3 -\frac{4}{3}\right)$
14	$\left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, 0 (-1)^{\frac{1}{6}} \cdot \frac{32}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, 0 (-1)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{4}{3}\right)$	14'	$\left(-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 3 (-1)^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{32}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 3 (-1)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{3}\right)$
15	$\left(0,-\frac{1}{2}, 0 48\right) + \left(-\frac{3}{2}, 0,0 -2\right)$	15'	$\left(-\frac{1}{2}, 0,3 -48\right) + \left(0,-\frac{3}{2}, 3 2\right)$
16	$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0 48i\right) + \left(-\frac{3}{2}, 0,0 2\right)$	16'	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 3 -48i\right) + \left(0,-\frac{3}{2}, 3 -2\right)$

16-вершинный граф на рис.1 расширился до 32-вершинного графа на рис.2 за счёт «кросс-эффекта»: повторное применение преобразования \mathbf{g}_1 возможно лишь благодаря перестановке строк (что не меняет уравнения):

$$15 \xrightarrow{g_1} 11 \xrightarrow{g_1} 1 \xrightarrow{g_1} 5$$

или

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 48 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{g_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{g_1} \\ & \xrightarrow{g_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{g_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -12 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Третье уравнение этой цепочки является первым уравнением Пенлеве.

5. Дискретная группа преобразований класса ОУЭФ

Класс обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (ОУЭФ), подробно исследованный в работах [1-8, 23, 24]:

$$y''_{xx} = Ax^k y^l (y'_x)^m, \text{ или } (k, l, m|A), \quad (15)$$

является подклассом обоих классов уравнений – (4) при $A_2 = 0$ и (5) при $n = 0$ (является пересечением этих классов).

На всём классе уравнений (15) замкнуты точечное преобразование

$$r: \quad x = u, y = t, (k, l, m|A) \xrightarrow{r} (l, k, 3 - m| - A), r^2 = E \quad (16)$$

и преобразование Беклунда

$$\begin{aligned} g: \quad x &= u^{\frac{1}{k+1}}, y = (\dot{u}_t)^{-\frac{1}{l}}, y'_x = t^{1-m}, \\ (k, l, m|A) &\xrightarrow{g} \left(\frac{1}{1-m}, -\frac{k}{k+1}, \frac{2l+1}{l} \left| -\frac{l}{k+1} \left(\frac{1-m}{k+1} A \right)^{\frac{1}{1-m}} \right. \right), g^3 = E. \end{aligned} \quad (17)$$

Преобразования r и g образуют дискретную группу преобразований диэдра

$$D_3 = \{E, g, g^2, r, gr, g^2r\} \quad (18)$$

6-го порядка, имеющую код $r^2 = g^3 = (gr)^2 = E$ и граф [29], изображённый на рис. 3.

Замечание 1. Преобразование g_1 (12) при $A_2 = 0$ является частным случаем преобразования g при $m = 0$.

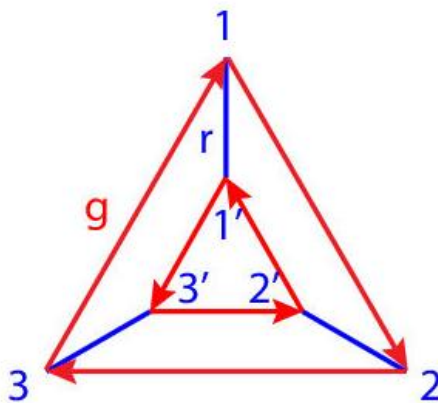


Рис. 3. Граф группы преобразований диэдра D_3 6-го порядка для ОУЭФ

Вершины графа на рис.3 обозначают уравнения таблицы 3.

Таблица 3. Уравнения-вершины графа 6-го порядка (рис. 3) для ОУЭФ

1	(k, l, m)	1'	$(l, k, 3 - m)$
2	$\left(\frac{1}{1 - m}, -\frac{k}{k + 1}, \frac{2l + 1}{l}\right)$	2'	$\left(-\frac{k}{k + 1}, \frac{1}{1 - m}, \frac{l - 1}{l}\right)$
3	$\left(-\frac{l}{l + 1}, \frac{1}{m - 2}, \frac{k - 1}{k}\right)$	3'	$\left(\frac{1}{m - 2}, -\frac{l}{l + 1}, \frac{2k + 1}{k}\right)$

Кроме того, имеются преобразования, замкнутые на подклассах класса ОУЭФ (15). Например, уже рассмотренное в (8) преобразование \mathbf{s} замкнуто на подклассе $m = 0$:

$$\mathbf{s}: \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = -\frac{u}{t}, \quad (k, l, 0|A) \xrightarrow{\mathbf{s}} (-k - l - 3, l, 0|(-1)^{l-1} \cdot A). \quad (19)$$

При $A_2 = 0$ (8) совпадает с (19).

Замечание 2. По поводу преобразования \mathbf{u} можно сказать совершенно аналогичное.

6. Дискретная группа преобразований класса уравнений (5)

Класс уравнений (5) обобщает класс ОУЭФ (15) при помощи добавления новой скобки $(xu'_x - y)^n$. Эта скобка была введена для пополнения класса уравнений (15) с тем, чтобы преобразование \mathbf{u} , не замкнутое в классе уравнений (15), стало замкнутым в (5):

$$\mathbf{s}: \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = -\frac{u}{t}, \quad (k, l, m, n|A) \xrightarrow{\mathbf{s}} (-k - l - 3, l, n, m|(-1)^{l-1} \cdot A).$$

Преобразование \mathbf{r} замкнуто не только в (15), но также и в (5):

$$\mathbf{r}: \quad x = u, \quad y = t, \quad (k, l, m, n|A) \xrightarrow{\mathbf{r}} (l, k, 3 - m - n, n|(-1)^{n-1} \cdot A).$$

Приятным сюрпризом явился тот факт, что известное касательное преобразование Лежандра также оказалось замкнутым в (5):

$$\mathbf{l}: x = \dot{u}_t, y = t\dot{u}_t - u, y'_x = t, (k, l, m, n|A) \xrightarrow{\mathbf{l}} (-m, -n, -k, -l|A), \mathbf{l}^2 = \mathbf{E}. \quad (20)$$

Композиция $\mathbf{h} = \mathbf{l}\mathbf{r}$ образует дискретную циклическую группу преобразований 6-го порядка:

$$\mathbf{h}: x = \frac{1}{\dot{u}_t}, y = -\frac{t\dot{u}_t - u}{\dot{u}_t}, y'_x = u, \quad (21)$$

$$(k, l, m, n|A) \xrightarrow{\mathbf{h}} (-n, -m, k + l + 3, -l|(-1)^{l-1} \cdot A), \mathbf{h}^6 = \mathbf{E}.$$

Преобразования \mathbf{r} и \mathbf{h} образуют дискретную группу преобразований диэдра 12-го порядка

$$D_6 = \{\mathbf{E}, \mathbf{h}, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^3, \mathbf{h}^4, \mathbf{h}^5, \mathbf{r}, \mathbf{hr}, \mathbf{h}^2\mathbf{r}, \mathbf{h}^3\mathbf{r}, \mathbf{h}^4\mathbf{r}, \mathbf{h}^5\mathbf{r}\}, \quad (22)$$

имеющую код $\mathbf{r}^2 = \mathbf{h}^6 = (\mathbf{rh})^2 = \mathbf{E}$ и граф [29], изображенный на рис. 4.

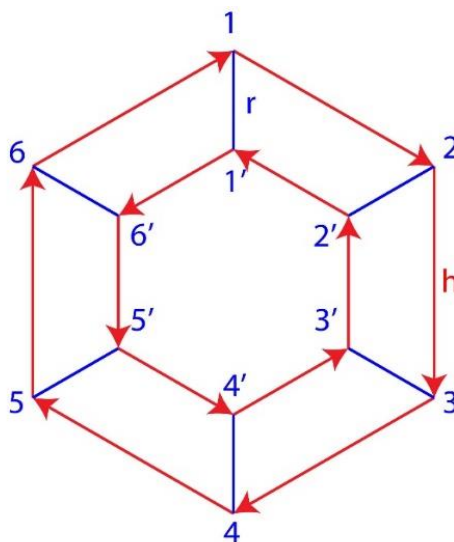


Рис. 4. Граф группы диэдра D_6 12-го порядка для класса уравнений (5)

Вершины графа на рис.4 обозначают уравнения таблицы 4.

Таблица 4. Уравнения-вершины графа группы D_6 для класса уравнений (5)

1	$(k, l, m, n A)$	1'	$(l, k, -m - n + 3, n (-1)^{n-1} \cdot A)$
2	$(-n, -m, k + l + 3, -l (-1)^{1-l} \cdot A)$	2'	$(-m, -n, -k, -l A)$
3	$(l, -k - l - 3, -m - n + 3, m (-1)^{l+m} \cdot A)$	3'	$(-k - l - 3, l, n, m (-1)^{l-1} \cdot A)$
4	$(-m, m + n - 3, -k, k + l + 3 (-1)^{-k-m} \cdot A)$	4'	$(m + n - 3, -m, -l, k + l + 3 (-1)^{-l-m} \cdot A)$
5	$(-k - l - 3, k, n, -m - n + 3 (-1)^{k+n} \cdot A)$	5'	$(k, -k - l - 3, m, -m - n + 3 (-1)^{k+m} \cdot A)$
6	$(m + n - 3, -n, -l, -k (-1)^{1-n} \cdot A)$	6'	$(-n, m + n - 3, k + l + 3, -k (-1)^{-k-n} \cdot A)$

Подгруппой группы преобразований D_6 является группа точечных преобразований $D_3 = \{\mathbf{E}, \mathbf{t}, \mathbf{t}^2, \mathbf{r}, \mathbf{tr}, \mathbf{t}^2\mathbf{r}\} = \{\mathbf{E}, \mathbf{h}^2, \mathbf{h}^4, \mathbf{r}, \mathbf{h}^2\mathbf{r}, \mathbf{h}^4\mathbf{r}\}$ с образующими элементами \mathbf{r} и $\mathbf{t} = \mathbf{h}^2 = \mathbf{sr}$, имеющая код: $\mathbf{r}^2 = \mathbf{t}^3 = (\mathbf{tr})^2 = \mathbf{E}$.

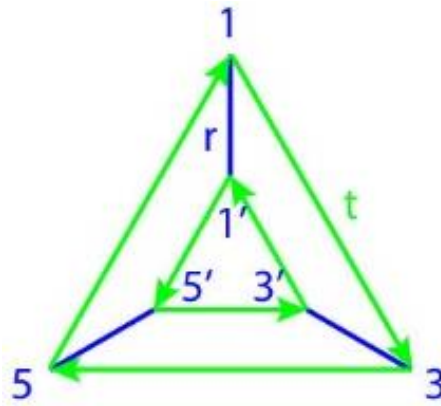


Рис. 5. Граф группы диэдра D_3 - подгруппы D_6

Граф этой группы D_3 , изображенный на рис. 5, – тот же, что и на рис. 3. Отличие рис. 5 от рис. 3 состоит лишь в том, что вместо образующей \mathbf{g} 3-го порядка ($\mathbf{g}^3 = \mathbf{E}$), на рис. 5 образующая \mathbf{t} (также 3-го порядка: $\mathbf{t}^3 = \mathbf{E}$).

Интересно, что $\mathbf{l} = \mathbf{hr}$, $\mathbf{s} = \mathbf{h}^2\mathbf{r}$, $\mathbf{sr} = \mathbf{h}^2$, $\mathbf{rs} = (\mathbf{sr})^2 = \mathbf{h}^2$, т.е. $1 \xrightarrow{\mathbf{l}} 2'$, $1 \xrightarrow{\mathbf{s}} 3'$, $1 \xrightarrow{\mathbf{sr}} 3$, $1 \xrightarrow{\mathbf{rs}} 5$.

Уравнения, соответствующие вершинам графа на рис.5, указаны в таблице 4.

7. Применение D_6 к классу уравнений (3)

Попытка применить D_6 (21) к классу уравнений (1) потерпела неудачу, так как преобразование \mathbf{h} не замкнуто в (1): $(1) \xrightarrow{\mathbf{h}} (2)$.

Классы (1) и (2) являются подклассами класса уравнений (3), в котором D_6 замкнута, так как оказались замкнутыми в нём образующие \mathbf{r} , \mathbf{h} (также и остальные преобразования – элементы группы D_6):

$$y_{xx}'' = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}}{\sum_{i=3}^4 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}} \xrightarrow{\mathbf{r}(x=u, y=t)} \ddot{u}_{tt} = \frac{\sum_{i=1}^2 (-1)^{n_i-1} A_i x^{l_i} y^{k_i} (y'_x)^{-m_i-n_i+3} (xy'_x - y)^{n_i}}{\sum_{i=3}^4 (-1)^{n_i-1} A_i x^{l_i} y^{k_i} (y'_x)^{-m_i-n_i+3} (xy'_x - y)^{n_i}}, \quad (23)$$

$$y_{xx}'' = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}}{\sum_{i=3}^4 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}} \xrightarrow{\mathbf{h}: x=\frac{1}{\dot{u}_t}, y=-\frac{t\dot{u}_t-u}{\dot{u}_t}, y'_x=u} \ddot{u}_{tt} = \frac{\sum_{i=1}^2 (-1)^{l_i-1} A_i x^{n_i} y^{m_i} (y'_x)^{-k_i-l_i-3} (xy'_x - y)^{l_i}}{\sum_{i=3}^4 (-1)^{l_i-1} A_i x^{n_i} y^{m_i} (y'_x)^{-k_i-l_i-3} (xy'_x - y)^{l_i}}. \quad (24)$$

Применение D_6 к классу уравнений (3) приводит к следующему списку вершин-уравнений таблицы 5, соответствующих тому же графу на рис. 4.

Таблица 5. Уравнения-вершины графа D_6 для класса уравнений (3)

1	$\frac{\sum_{i=1}^2 (k_i, l_i, m_i, n_i A_i)}{\sum_{i=3}^4 (k_i, l_i, m_i, n_i A_i)}$	1'	$\frac{\sum_{i=1}^2 (l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i (-1)^{n_i-1} A_i)}{\sum_{i=3}^4 (l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i (-1)^{n_i-1} A_i)}$
---	---	----	---

2	$\frac{\sum_{i=3}^4 (n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i (-1)^{l_i-1} A_i)}{\sum_{i=1}^2 (n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i (-1)^{l_i-1} A_i)}$	2'	$\frac{\sum_{i=3}^4 (m_i, n_i, k_i, l_i A_i)}{\sum_{i=1}^2 (m_i, n_i, k_i, l_i A_i)}$
3	$\frac{\sum_{i=1}^2 (l_i, -k_i - l_i - 3, -m_i - n_i + 3, m_i (-1)^{l_i+m_i} A_i)}{\sum_{i=3}^4 (l_i, -k_i - l_i - 3, -m_i - n_i + 3, m_i (-1)^{l_i+m_i} A_i)}$	3'	$\frac{\sum_{i=1}^2 (-k_i - l_i - 3, l_i, n_i, m_i (-1)^{l_i-1} A_i)}{\sum_{i=3}^4 (-k_i - l_i - 3, l_i, n_i, m_i (-1)^{l_i-1} A_i)}$
4	$\frac{\sum_{i=3}^4 (m_i, -m_i - n_i + 3, k_i, -k_i - l_i - 3 (-1)^{k_i+m_i} A_i)}{\sum_{i=1}^2 (m_i, -m_i - n_i + 3, k_i, -k_i - l_i - 3 (-1)^{k_i+m_i} A_i)}$	4'	$\frac{\sum_{i=3}^4 (-m_i - n_i + 3, m_i, l_i, -k_i - l_i - 3 (-1)^{l_i+m_i} A_i)}{\sum_{i=1}^2 (-m_i - n_i + 3, m_i, l_i, -k_i - l_i - 3 (-1)^{l_i+m_i} A_i)}$
5	$\frac{\sum_{i=1}^2 (-k_i - l_i - 3, k_i, n_i, -m_i - n_i + 3 (-1)^{k_i+n_i} A_i)}{\sum_{i=3}^4 (-k_i - l_i - 3, k_i, n_i, -m_i - n_i + 3 (-1)^{k_i+n_i} A_i)}$	5'	$\frac{\sum_{i=1}^2 (k_i, -k_i - l_i - 3, m_i, -m_i - n_i + 3 (-1)^{k_i+m_i} A_i)}{\sum_{i=3}^4 (k_i, -k_i - l_i - 3, m_i, -m_i - n_i + 3 (-1)^{k_i+m_i} A_i)}$
6	$\frac{\sum_{i=3}^4 (-m_i - n_i + 3, n_i, l_i, k_i (-1)^{n_i-1} A_i)}{\sum_{i=1}^2 (-m_i - n_i + 3, n_i, l_i, k_i (-1)^{n_i-1} A_i)}$	6'	$\frac{\sum_{i=3}^4 (n_i, -m_i - n_i + 3, -k_i - l_i - 3, k_i (-1)^{k_i+n_i} A_i)}{\sum_{i=1}^2 (n_i, -m_i - n_i + 3, -k_i - l_i - 3, k_i (-1)^{k_i+n_i} A_i)}$

Замечание 3. Дискретная группа преобразований D_6 (21) замкнута и на классе (3*) уравнений с дробно-полиномиальной правой частью с любым конечным числом ν слагаемых в числителе и знаменателе:

$$y_{xx}'' = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (xy_x' - y)^{n_i}}{\sum_{i=\nu+1}^{2\nu} A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (xy_x' - y)^{n_i}} \quad (3^*)$$

Таким образом, формулы (23), (24) и таблица 5 верны для любого конечного числа ν слагаемых в числителе и знаменателе.

8. Применение D_6 к классам уравнений (1) и (2)

Классы уравнений (1) и (2) являются подклассами класса уравнений (3). Класс уравнений (1), так же как и класс уравнений (2), замкнут относительно преобразований $\mathbf{t} = \mathbf{h}^2$, $\mathbf{t}^2 = \mathbf{h}^4$ и относительно всей дискретной группы диэдра точечных преобразований D_3 (22), граф которой изображён на рис. 5.

Оба класса уравнений (1) и (2) не замкнуты относительно касательных преобразований \mathbf{h} , \mathbf{h}^3 , \mathbf{h}^5 . Пусть вершина-уравнение 1 принадлежит классу уравнений (1), тогда вершины-уравнения с нечётными номерами – 1, 3, 5, 1', 3', 5' – принадлежат (1), а с чётными номерами – 2, 4, 6, 2', 4', 6' – принадлежат (2). В таблице 6 приведён список вершин-уравнений, соответствующих тому же графу группы D_6 на рис. 4, в которой видно действие точечного преобразования \mathbf{r} и касательного преобразования \mathbf{h} на классе уравнений (1):

$$y_{xx}'' \xrightarrow[\mathbf{r}: x=u, y=t]{\mathbf{r}: x=u, y=t} \sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (xy_x' - y)^{n_i} \xrightarrow{\mathbf{r}: x=u, y=t} \sum_{i=1}^2 (-1)^{n_i-1} A_i x^{l_i} y^{k_i} (y_x')^{-m_i-n_i+3} (xy_x' - y)^{n_i}; \quad (25)$$

$$y_{xx}'' \xrightarrow[\mathbf{h}: x=\frac{1}{u_t}, y=-\frac{tu_t-u}{u_t}, y_x'=u]{\mathbf{h}: x=\frac{1}{u_t}, y=-\frac{tu_t-u}{u_t}, y_x'=u} \sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y_x')^{m_i} (xy_x' - y)^{n_i} \xrightarrow{\mathbf{h}: x=\frac{1}{u_t}, y=-\frac{tu_t-u}{u_t}, y_x'=u} [\sum_{i=1}^2 (-1)^{l_i-1} A_i x^{n_i} y^{m_i} (y_x')^{-k_i-l_i-3} (xy_x' - y)^{l_i}]^{-1} \quad (26)$$

Замечание 4. Формулы (25), (26) и таблица 6 актуальны и для любого конечного числа слагаемых.

Таблица 6. Уравнения орбиты класса полиномиальных уравнений: уравнения с нечётными номерами принадлежат (1), с чётными – (2).

1	$\sum_{i=1}^2(k_i, l_i, m_i, n_i A_i)$	1'	$\sum_{i=1}^2(l_i, k_i, -m_i - n_i + 3, n_i (-1)^{n_i-1} A_i)$
2	$[\sum_{i=1}^2(n_i, m_i, -k_i - l_i - 3, l_i (-1)^{l_i-1} A_i)]^{-1}$	2'	$[\sum_{i=1}^2(m_i, n_i, k_i, l_i A_i)]^{-1}$
3	$\sum_{i=1}^2(l_i, -k_i - l_i - 3, -m_i - n_i \pm + 3, m_i (-1)^{l_i+m_i} A_i)$	3'	$\sum_{i=1}^2(-k_i - l_i - 3, l_i, n_i, m_i (-1)^{l_i-1} A_i)$
4	$[\sum_{i=1}^2(m_i, -m_i - n_i + 3, k_i, -k_i - l_i - - 3 (-1)^{k_i+m_i} A_i)]^{-1}$	4'	$[\sum_{i=1}^2(-m_i - n_i + 3, m_i, l_i, -k_i - l_i - - 3 (-1)^{l_i+m_i} A_i)]^{-1}$
5	$\sum_{i=1}^2(-k_i - l_i - 3, k_i, n_i, -m_i - n_i + + 3 (-1)^{k_i+n_i} A_i)$	5'	$\sum_{i=1}^2(l_i, -k_i - l_i - 3, -m_i - n_i + + 3, m_i (-1)^{l_i+m_i} A_i)$
6	$[\sum_{i=1}^2(-m_i - n_i + 3, n_i, l_i, k_i (-1)^{n_i-1} A_i)]^{-1}$	6'	$[\sum_{i=1}^2(n_i, -m_i - n_i + 3, -k_i - l_i - - 3, k_i (-1)^{k_i+n_i} A_i)]^{-1}$

9. Расширение дискретной группы преобразований первого уравнения Пенлеве с помощью D_6

На рис. 2 вершина 1 – это 1-е уравнение Пенлеве (14), решение которого – известный ряд [2,15-19], который называют 1-ый трансцендент Пенлеве (или трансцендент 1-го уравнения Пенлеве).

Замечание 5. Иногда трансцендентами Пенлеве называют сами уравнения Пенлеве. Но в данной статье трансцендентами Пенлеве мы будем называть решения этих уравнений, как это делается, например, в справочнике 2018 года [19].

Таким образом, все 32 уравнения, соответствующие вершинам графа на рис. 2, разрешимы через 1-й трансцендент Пенлеве.

Преобразование \mathbf{s} замкнуто не только в классе уравнений (8), но и в (1):

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i} \xrightarrow{\mathbf{s}: x=\frac{1}{t}, y=-\frac{u}{t}} y''_{xx} = \sum_{i=1}^2 (-1)^{l_i-1} A_i x^{-k_i-l_i-3} y^{l_i} (y'_x)^{n_i} (xy'_x - y)^{m_i},$$

поэтому в графе на рис. 2 от вершин 5, 6, 7, 8 можно провести ребро « \mathbf{s} » так же, как от остальных вершин. Таким образом, на рис. 2 можно проставить не 16, а 20 вершин, связанных попарно преобразованием \mathbf{s} .

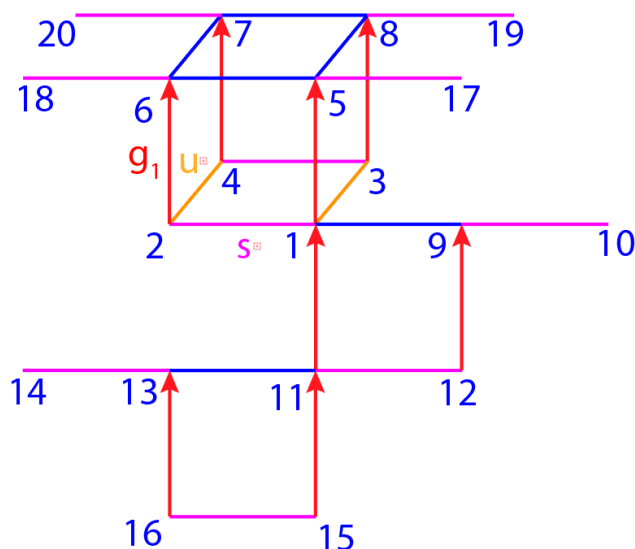


Рис. 6. Граф псевдогруппы преобразований 40-го порядка для 1-го уравнения Пенлеве (преобразование g , удваивающее граф, отсутствует)

С помощью преобразования g граф удваивается, он соответствует псевдогруппе преобразований 40-го порядка. Все 40 уравнений-вершин имеют полиномиальный вид (1), и их решения выражаются через 1-й трансцендент Пенлеве.

Таким образом, расширением таблицы 2 является таблица 7, куда добавлены уравнения (17)-(20), связанные преобразованием s с вершинами, соответственно, 5-8; 4-я компонента вектора параметров остальных уравнений равна нулю.

Таблица 7. Уравнения-вершины графа 40-го порядка (рис. 6). Уравнение под номером 1 – это 1-е уравнение Пенлеве

1	$(0,2,0,0 6) + (1,0,0,0 1)$	1'	$(2,0,3,0 -6) + (0,1,3,0 -1)$
2	$(-5,2,0,0 -6) + (-4,0,0,0 -1)$	2'	$(2,-5,3,0 6) + (0,-4,3,0 1)$
3	$(-\frac{15}{7}, 2,0,0 \frac{6}{49}) + (-\frac{8}{7}, 0,0,0 \frac{1}{49})$	3'	$(2,-\frac{15}{7}, 3,0 -\frac{6}{49}) + (0,-\frac{8}{7}, 3,0 -\frac{1}{49})$
4	$(-\frac{20}{7}, 2,0,0 -\frac{6}{49}) + (-\frac{13}{7}, 0,0,0 -\frac{1}{49})$	4'	$(2,-\frac{20}{7}, 3,0 \frac{6}{49}) + (0,-\frac{13}{7}, 3,0 \frac{1}{49})$
5	$(1,0,\frac{5}{2}, 0 -12) + (0,2,\frac{5}{2}, 0 -1)$	5'	$(0,1,\frac{1}{2}, 0 12) + (2,0,\frac{1}{2}, 0 1)$
6	$(1,-\frac{5}{4},\frac{5}{2}, 0 \frac{3}{4}) + (0,-\frac{1}{2},\frac{5}{2}, 0 \frac{1}{6})$	6'	$(-\frac{5}{4}, 1,\frac{1}{2}, 0 -\frac{3}{4}) + (-\frac{1}{2}, 0,\frac{1}{2}, 0 -\frac{1}{6})$
7	$(1,-\frac{15}{8},\frac{5}{2}, 0 -\frac{3}{16}) + (0,-\frac{7}{4},\frac{5}{2}, 0 -\frac{1}{4})$	7'	$(-\frac{15}{8}, 1,\frac{1}{2}, 0 \frac{3}{16}) + (-\frac{7}{4}, 0,\frac{1}{2}, 0 \frac{1}{4})$
8	$(1,-\frac{20}{13},\frac{5}{2}, 0 \frac{12}{169}) + (0,-\frac{14}{13},\frac{5}{2}, 0 \frac{1}{39})$	8'	$(-\frac{20}{13}, 1,\frac{1}{2}, 0 -\frac{12}{169}) + (-\frac{14}{13}, 0,\frac{1}{2}, 0 -\frac{1}{39})$
9	$(0,\frac{1}{3}, 0,0 \frac{8}{3}) + (1,-\frac{5}{3}, 0,0 \frac{4}{9}i)$	9'	$(\frac{1}{3}, 0,3,0 \frac{8}{3}) + (-\frac{5}{3}, 1,3,0 -\frac{4}{9}i)$
10	$(-\frac{10}{3},\frac{1}{3}, 0,0 (-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{8}{3}) +$ $+ (-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, 0,0 (-1)^{-\frac{1}{6}} \cdot \frac{4}{9})$	10'	$(\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}, 3,0 (-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{8}{3}) +$ $+ (-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 3,0 (-1)^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{4}{9})$

11	$(1,0,0,0 24) + (0, -\frac{1}{2}, 0,0 2)$	11'	$(0,1,3,0 -24) + (-\frac{1}{2}, 0,3,0 -2)$
12	$(-4,0,0,0 -24) + (-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0,0 2i)$	12'	$(0, -4,3,0 24) + (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 3,0 -2i)$
13	$(1, -\frac{5}{3}, 0,0 \frac{32}{3}i) + (0, -\frac{4}{3}, 0,0 \frac{4}{3})$	13'	$(-\frac{5}{3}, 1,3,0 -\frac{32}{3}i) + (-\frac{4}{3}, 0,3,0 -\frac{4}{3})$
14	$(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, 0,0 (-1)^{-\frac{1}{6}} \cdot \frac{32}{3}) +$ $+ (-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, 0,0 (-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{4}{3})$	14'	$(-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 3,0 (-1)^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{32}{3}) +$ $+ (-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 3,0 (-1)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{3})$
15	$(0, -\frac{1}{2}, 0,0 48) + (-\frac{3}{2}, 0,0,0 -2)$	15'	$(-\frac{1}{2}, 0,3,0 -48) + (0, -\frac{3}{2}, 3,0 2)$
16	$(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0,0 48i) + (-\frac{3}{2}, 0,0,0 2)$	16'	$(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 3,0 -48i) + (0, -\frac{3}{2}, 0,0 -2)$
17	$(-4,0,0,\frac{5}{2} 12) + (-5,2,0,\frac{5}{2} 1)$	17'	$(0, -4,\frac{1}{2},\frac{5}{2} -12i) + (2, -5,\frac{1}{2},\frac{5}{2} -i)$
18	$(-\frac{11}{4}, -\frac{5}{4}, 0,\frac{5}{2} (-1)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{4}) +$ $+ (-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0,\frac{5}{2} \frac{1}{6}i)$	18'	$(-\frac{5}{4}, -\frac{11}{4}, \frac{1}{2},\frac{5}{2} (-1)^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{4}) +$ $+ (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2},\frac{5}{2} \frac{1}{6})$
19	$(-\frac{17}{8}, -\frac{15}{8}, 0,\frac{5}{2} (-1)^{\frac{1}{8}} \cdot \frac{3}{16}) +$ $+ (-\frac{5}{4}, -\frac{7}{4}, 0,\frac{5}{2} (-1)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4})$	19'	$(-\frac{15}{8}, -\frac{17}{8}, \frac{1}{2},\frac{5}{2} (-1)^{-\frac{3}{8}} \cdot \frac{3}{16}) +$ $+ (-\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{2},\frac{5}{2} (-1)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4})$
20	$(-\frac{32}{13}, -\frac{20}{13}, 0,\frac{5}{2} (-1)^{-\frac{7}{13}} \cdot \frac{12}{169}) +$ $+ (-\frac{25}{13}, -\frac{14}{13}, 0,\frac{5}{2} (-1)^{-\frac{1}{13}} \cdot \frac{1}{39})$	20'	$(-\frac{20}{13}, -\frac{32}{13}, \frac{1}{2},\frac{5}{2} (-1)^{\frac{25}{26}} \cdot \frac{12}{169}) +$ $+ (-\frac{14}{13}, -\frac{25}{13}, \frac{1}{2},\frac{5}{2} (-1)^{\frac{15}{26}} \cdot \frac{1}{39})$

Вместе с $\mathbf{s} = \mathbf{h}^2 \mathbf{r}$ в классе уравнений (3) замкнуты все преобразования группы D_6 (21), поэтому вместо 10 ребер «S» (рис. 6) можно изобразить 10 12-вершинных графов группы D_6 (рис. 4). В результате получается граф псевдогруппы 1-го уравнения Пенлеве 120-го порядка, изображенный на рис. 7.

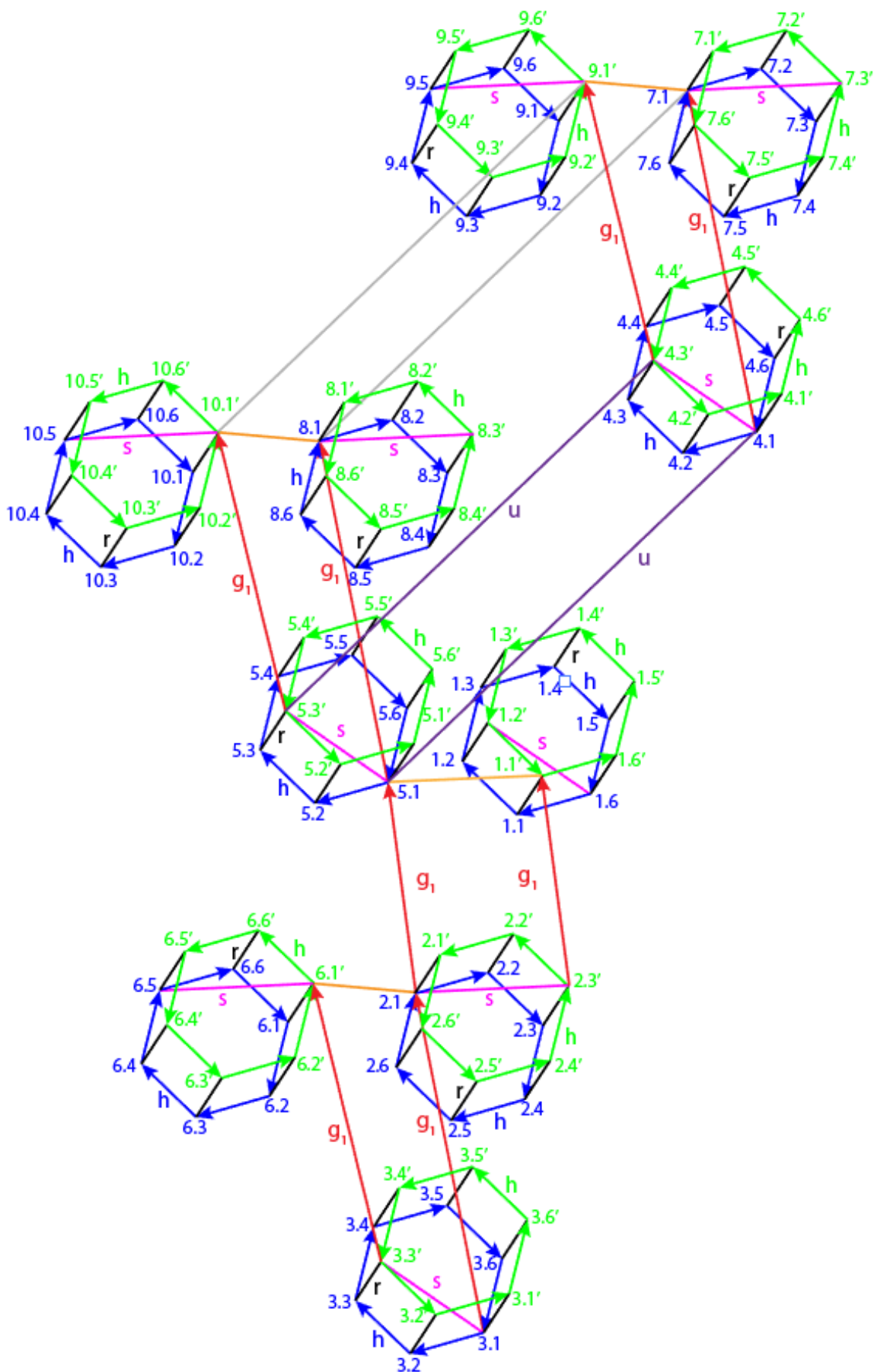


Рис. 7. Расширенный граф (с помощью графа группы D_6) псевдогруппы 120-го порядка для 1-го уравнения Пенлеве. Вершина 5.1 обозначает 1-е уравнение Пенлеве

120 уравнений-вершин графа на рис. 7 записаны в таблице 8.

Таблица 8. 120 уравнений – расширенная орбита 1-го уравнения Пенлеве

1.1	$\left(\frac{1}{3}, 0, 3, 0 \mid \frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{5}{3}, 1, 3, 0 \mid -\frac{4}{9}i\right)$	1.1'	$\left(0, \frac{1}{3}, 0, 0 \mid -\frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(1, -\frac{5}{3}, 0, 0 \mid \frac{4}{9}i\right)$
1.2	$\left[\left(0, 3, -\frac{10}{3}, 0 \mid -\frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(0, 3, -\frac{7}{3}, 1 \mid -\frac{4}{9}i\right)\right]^{-1}$	1.2'	$\left[\left(3, 0, \frac{1}{3}, 0 \mid \frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(3, 0, -\frac{5}{3}, 1 \mid -\frac{4}{9}i\right)\right]^{-1}$
1.3	$\left(0, -\frac{10}{3}, 0, 3 \mid -\frac{8}{4}\right) +$ $+ \left(1, -\frac{7}{3}, 0, 3 \mid -\frac{4}{9}i\right)$	1.3'	$\left(-\frac{10}{3}, 0, 0, 3 \mid -\frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{7}{3}, 1, 0, 3 \mid -\frac{4}{9}i\right)$
1.4	$\left[\left(3, 0, \frac{1}{3}, -\frac{10}{3} \mid (-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(3, 0, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3} \mid (-1)^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{4}{9}\right)\right]^{-1}$	1.4'	$\left[\left(0, 3, 0, -\frac{10}{3} \mid -\frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(0, 3, 1, -\frac{7}{3} \mid -\frac{4}{9}i\right)\right]^{-1}$
1.5	$\left(-\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0 \mid (-1)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 0 \mid (-1)^{-\frac{1}{6}} \cdot \frac{4}{9}\right)$	1.5'	$\left(\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}, 3, 0 \mid (-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 3, 0 \mid (-1)^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{4}{9}\right)$
1.6	$\left[\left(0, 0, 0, \frac{1}{3} \mid \frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(0, 0, 1, -\frac{5}{3} \mid \frac{4}{9}i\right)\right]^{-1}$	1.6'	$\left[\left(0, 0, -\frac{10}{3}, \frac{1}{3} \mid (-1)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{8}{3}\right) +$ $+ \left(0, 0, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3} \mid (-1)^{-\frac{1}{6}} \cdot \frac{4}{9}\right)\right]^{-1}$
2.1	$(1, 0, 0, 0 \mid 24) +$ $+ \left(0, -\frac{1}{2}, 0, 0 \mid 2\right)$	2.1'	$(0, 1, 3, 0 \mid -24) +$ $+ \left(-\frac{1}{2}, 0, 3, 0 \mid -2\right)$
2.2	$[(0, 0, -4, 0 \mid -24) +$ $+ \left(0, 0, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \mid 2i\right)]^{-1}$	2.2'	$[(0, 0, 1, 0 \mid 24) +$ $+ \left(0, 0, 0, -\frac{1}{2} \mid 2\right)]^{-1}$
2.3	$(0, -4, 3, 0 \mid 24) +$ $+ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 3, 0 \mid -2i\right)$	2.3'	$(-4, 0, 0, 0 \mid -24) +$ $+ \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0 \mid -2i\right)$
2.4	$[(0, 3, 1, -4 \mid -24) +$ $+ \left(0, 3, 0, -\frac{5}{2} \mid 2\right)]^{-1}$	2.4'	$[(3, 0, 0, -4 \mid 24) +$ $+ \left(3, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2} \mid -2i\right)]^{-1}$
2.5	$(-4, 1, 0, 3 \mid -24) +$ $+ \left(-\frac{5}{2}, 0, 0, 3 \mid 2\right)$	2.5'	$(1, -4, 0, 3 \mid -24) +$ $+ \left(0, -\frac{5}{2}, 0, 3 \mid 2\right)$

2.6	$\left[(3, 0, 0, 1 \mid -24) + \left(3, 0, -\frac{1}{2}, 0 \mid -2 \right) \right]^{-1}$	2.6'	$\left[(0, 3, -4, 1 \mid -24) + \left(0, 3, -\frac{5}{2}, 0 \mid 2 \right) \right]^{-1}$
3.1	$\left(0, -\frac{1}{2}, 0, 0 \mid 48 \right) + \left(-\frac{3}{2}, 0, 0, 0 \mid -2 \right)$	3.1'	$\left(-\frac{1}{2}, 0, 3, 0 \mid -48 \right) + \left(0, -\frac{3}{2}, 3, 0 \mid 2 \right)$
3.2	$\left[\left(0, 0, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \mid 48i \right) + \left(0, 0, -\frac{3}{2}, 0 \mid 2 \right) \right]^{-1}$	3.2'	$\left[\left(0, 0, 0, -\frac{1}{2} \mid 48 \right) + \left(0, 0, -\frac{3}{2}, 0 \mid -2 \right) \right]^{-1}$
3.3	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 3, 0 \mid -48i \right) + \left(0, -\frac{3}{2}, 3, 0 \mid -2 \right)$	3.3'	$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0 \mid -48i \right) + \left(-\frac{3}{2}, 0, 0, 0 \mid 2 \right)$
3.4	$\left[\left(0, 3, 0, -\frac{5}{2} \mid 48 \right) + \left(0, 3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \mid -2i \right) \right]^{-1}$	3.4'	$\left[\left(3, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2} \mid -48i \right) + \left(3, 0, 0, -\frac{3}{2} \mid -2 \right) \right]^{-1}$
3.5	$\left(-\frac{5}{2}, 0, 0, 3 \mid 48 \right) + \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 3 \mid -2i \right)$	3.5'	$\left(0, -\frac{5}{2}, 0, 3 \mid 48 \right) + \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 3 \mid -2i \right)$
3.6	$\left[\left(3, 0, -\frac{1}{2}, 0 \mid -48 \right) + \left(3, 0, 0, -\frac{3}{2} \mid 2 \right) \right]^{-1}$	3.6'	$\left[\left(0, 3, -\frac{5}{2}, 0 \mid 48 \right) + \left(0, 3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \mid -2i \right) \right]^{-1}$
4.1	$\left(-\frac{15}{7}, 2, 0, 0 \mid \frac{6}{49} \right) + \left(-\frac{8}{7}, 0, 0, 0 \mid \frac{1}{49} \right)$	4.1'	$\left(2, -\frac{15}{7}, 3, 0 \mid -\frac{6}{49} \right) + \left(0, -\frac{8}{7}, 3, 0 \mid -\frac{1}{49} \right)$
4.2	$\left[\left(0, 0, -\frac{20}{7}, 2 \mid -\frac{6}{49} \right) + \left(0, 0, -\frac{13}{7}, 0 \mid -\frac{1}{49} \right) \right]^{-1}$	4.2'	$\left[\left(0, 0, -\frac{15}{7}, 2 \mid \frac{6}{49} \right) + \left(0, 0, -\frac{8}{7}, 0 \mid \frac{1}{49} \right) \right]^{-1}$
4.3	$\left(2, -\frac{20}{7}, 3, 0 \mid \frac{6}{49} \right) + \left(0, -\frac{13}{7}, 3, 0 \mid \frac{1}{49} \right)$	4.3'	$\left(-\frac{20}{7}, 2, 0, 0 \mid -\frac{6}{49} \right) + \left(-\frac{13}{7}, 0, 0, 0 \mid -\frac{1}{49} \right)$
4.4	$\left[\left(0, 3, -\frac{15}{7}, -\frac{20}{7} \mid (-1)^{-\frac{1}{7}} \cdot \frac{6}{49} \right) + \left(0, 3, -\frac{8}{7}, -\frac{13}{7} \mid (-1)^{\frac{6}{7}} \cdot \frac{1}{49} \right) \right]^{-1}$	4.4'	$\left[\left(3, 0, 2, -\frac{20}{7} \mid (-1)^{-\frac{1}{7}} \cdot \frac{6}{49} \right) + \left(3, 0, 0, -\frac{13}{7} \mid (-1)^{\frac{6}{7}} \cdot \frac{1}{49} \right) \right]^{-1}$

4.5	$\left(-\frac{20}{7}, -\frac{15}{7}, 0, 3 \mid (-1)^{-\frac{1}{7}} \cdot \frac{6}{49}\right) +$ $+ \left(-\frac{13}{7}, -\frac{8}{7}, 0, 3 \mid (-1)^{\frac{6}{7}} \cdot \frac{1}{49}\right)$	4.5'	$\left(-\frac{15}{7}, -\frac{20}{7}, 0, 3 \mid (-1)^{-\frac{1}{7}} \cdot \frac{6}{49}\right) +$ $+ \left(-\frac{8}{7}, -\frac{13}{7}, 0, 3 \mid (-1)^{\frac{6}{7}} \cdot \frac{1}{49}\right)$
4.6	$\left[\left(3, 0, 2, -\frac{15}{7} \mid -\frac{6}{49}\right) +$ $+ \left(3, 0, 0, -\frac{8}{7} \mid -\frac{1}{49}\right)\right]^{-1}$	4.6'	$\left[\left(0, 3, -\frac{20}{7}, -\frac{15}{7} \mid (-1)^{-\frac{1}{7}} \cdot \frac{6}{49}\right) +$ $+ \left(0, 3, -\frac{13}{7}, -\frac{8}{7} \mid (-1)^{\frac{6}{7}} \cdot \frac{1}{49}\right)\right]^{-1}$
5.1	$(0, 2, 0, 0 \mid 6) +$ $+ (1, 0, 0, 0 \mid 1)$	5.1'	$(2, 0, 3, 0 \mid -6) +$ $+ (0, 1, 3, 0 \mid -1)$
5.2	$[(0, 0, -5, 2 \mid -6) +$ $+ (0, 0, -4, 0 \mid -1)]^{-1}$	5.2'	$[(0, 0, 0, 2 \mid 6) +$ $+ (0, 0, 1, 0 \mid 1)]^{-1}$
5.3	$(2, -5, 3, 0 \mid 6) +$ $+ (0, -4, 3, 0 \mid 1)$	5.3'	$(-5, 2, 0, 0 \mid -6) +$ $+ (-4, 0, 0, 0 \mid -1)$
5.4	$[(0, 3, 0, -5 \mid 6) +$ $+ (0, 3, 1, -4 \mid -1)]^{-1}$	5.4'	$[(3, 0, 2, -5 \mid 6) +$ $+ (3, 0, 0, -4 \mid 1)]^{-1}$
5.5	$(-5, 0, 0, 3 \mid 6) +$ $+ (-4, 1, 0, 3 \mid -1)$	5.5'	$(0, -5, 0, 3 \mid 6) +$ $+ (1, -4, 0, 3 \mid -1)$
5.6	$[(3, 0, 2, 0 \mid -6) +$ $+ (3, 0, 0, 1 \mid -1)]^{-1}$	5.6'	$[(0, 3, -5, 0 \mid 6) +$ $+ (0, 3, -4, 1 \mid -1)]^{-1}$
6.1	$\left(-\frac{5}{3}, 1, 3, 0 \mid -\frac{32}{3}i\right) +$ $+ \left(-\frac{4}{3}, 0, 3, 0 \mid -\frac{4}{3}\right)$	6.1'	$\left(1, -\frac{5}{3}, 0, 0 \mid \frac{32}{3}i\right) +$ $+ \left(0, -\frac{4}{3}, 0, 0 \mid \frac{4}{3}\right)$
6.2	$\left[\left(0, 3, -\frac{7}{3}, 1 \mid -\frac{32}{3}i\right) +$ $+ \left(0, 3, -\frac{5}{3}, 0 \mid \frac{4}{3}\right)\right]^{-1}$	6.2'	$\left[\left(3, 0, -\frac{5}{3}, 1 \mid -\frac{32}{3}i\right) +$ $+ \left(3, 0, -\frac{4}{3}, 0 \mid -\frac{4}{3}\right)\right]^{-1}$
6.3	$\left(1, -\frac{7}{3}, 0, 3 \mid -\frac{32}{3}i\right) +$ $+ \left(0, -\frac{5}{3}, 0, 3 \mid \frac{4}{3}\right)$	6.3'	$\left(-\frac{7}{3}, 1, 0, 3 \mid -\frac{32}{3}i\right) +$ $+ \left(-\frac{5}{3}, 0, 0, 3 \mid \frac{4}{3}\right)$
6.4	$\left[\left(3, 0, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3} \mid (-1)^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{32}{3}\right) +$ $+ \left(3, 0, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3} \mid (-1)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{3}\right)\right]^{-1}$	6.4'	$\left[\left(0, 3, 1, -\frac{7}{3} \mid -\frac{32}{3}i\right) +$ $+ \left(0, 3, 0, -\frac{5}{3} \mid \frac{4}{3}\right)\right]^{-1}$
6.5	$\left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 0 \mid (-1)^{-\frac{1}{6}} \cdot \frac{32}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0 \mid (-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{4}{3}\right)$	6.5'	$\left(-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 3, 0 \mid (-1)^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{32}{3}\right) +$ $+ \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 3, 0 \mid (-1)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{4}{3}\right)$

6.6	$\left[\left(0, 0, 1, -\frac{5}{3} \mid \frac{32}{3}i \right) + \left(0, 0, 0, -\frac{4}{3} \mid \frac{4}{3} \right) \right]^{-1}$	6.6'	$\left[\left(0, 0, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3} \mid (-1)^{-\frac{1}{6}} \cdot \frac{32}{3} \right) + \left(0, 0, -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \mid (-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{4}{3} \right) \right]^{-1}$
7.1	$\left(1, -\frac{15}{8}, \frac{5}{2}, 0 \mid -\frac{3}{16} \right) + \left(0, -\frac{7}{4}, \frac{5}{2}, 0 \mid -\frac{1}{4} \right)$	7.1'	$\left(-\frac{15}{8}, 1, \frac{1}{2}, 0 \mid \frac{3}{16} \right) + \left(-\frac{7}{4}, 0, \frac{1}{2}, 0 \mid \frac{1}{4} \right)$
7.2	$\left[\left(0, \frac{5}{2}, -\frac{17}{8}, -\frac{15}{8} \mid (-1)^{\frac{1}{8}} \cdot \frac{3}{16} \right) + \left(0, \frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{7}{4} \mid (-1)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} \right) \right]^{-1}$	7.2'	$\left[\left(\frac{5}{2}, 0, 1, -\frac{15}{8} \mid -\frac{3}{16} \right) + \left(\frac{5}{2}, 0, 0, -\frac{7}{4} \mid -\frac{1}{4} \right) \right]^{-1}$
7.3	$\left(-\frac{15}{8}, -\frac{17}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \mid (-1)^{-\frac{3}{8}} \cdot \frac{3}{16} \right) + \left(-\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \mid (-1)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} \right)$	7.3'	$\left(-\frac{17}{8}, -\frac{15}{8}, 0, \frac{5}{2} \mid (-1)^{\frac{1}{8}} \cdot \frac{3}{16} \right) + \left(-\frac{5}{4}, -\frac{7}{4}, 0, \frac{5}{2} \mid (-1)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} \right)$
7.4	$\left[\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{17}{8} \mid \frac{3}{16}i \right) + \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{5}{4} \mid -\frac{1}{4}i \right) \right]^{-1}$	7.4'	$\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{15}{8}, -\frac{17}{8} \mid (-1)^{-\frac{3}{8}} \cdot \frac{3}{16} \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{7}{4}, -\frac{5}{4} \mid (-1)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} \right) \right]^{-1}$
7.5	$\left(-\frac{17}{8}, 1, 0, \frac{1}{2} \mid \frac{3}{16} \right) + \left(-\frac{5}{4}, 0, 0, \frac{1}{2} \mid -\frac{1}{4} \right)$	7.5'	$\left(1, -\frac{17}{8}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \mid \frac{3}{16}i \right) + \left(0, -\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \mid -\frac{1}{4}i \right)$
7.6	$\left[\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{15}{8}, 1 \mid \frac{3}{16} \right) + \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{7}{4}, 0 \mid \frac{1}{4} \right) \right]^{-1}$	7.6'	$\left[\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{17}{8}, 1 \mid \frac{3}{16} \right) + \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, 0 \mid -\frac{1}{4} \right) \right]^{-1}$
8.1	$\left(1, 0, \frac{5}{2}, 0 \mid -12 \right) + \left(0, 2, \frac{5}{2}, 0 \mid -1 \right)$	8.1'	$\left(0, 1, \frac{1}{2}, 0 \mid 12 \right) + \left(2, 0, \frac{1}{2}, 0 \mid 1 \right)$
8.2	$\left[\left(0, \frac{5}{2}, -4, 0 \mid 12 \right) + \left(0, \frac{5}{2}, -5, 2 \mid 1 \right) \right]^{-1}$	8.2'	$\left[\left(\frac{5}{2}, 0, 1, 0 \mid -12 \right) + \left(\frac{5}{2}, 0, 0, 2 \mid -1 \right) \right]^{-1}$
8.3	$\left(0, -4, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \mid -12i \right) + \left(2, -5, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \mid -i \right)$	8.3'	$\left(-4, 0, 0, \frac{5}{2} \mid 12 \right) + \left(-5, 2, 0, \frac{5}{2} \mid 1 \right)$
8.4	$\left[\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, -4 \mid 12i \right) + \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, -5 \mid -i \right) \right]^{-1}$	8.4'	$\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0, -4 \mid -12i \right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 2, -5 \mid -i \right) \right]^{-1}$

8.5	$\left(-4, 1, 0, \frac{1}{2} \mid 12\right) +$ $+ \left(-5, 0, 0, \frac{1}{2} \mid -1\right)$	8.5'	$\left(1, -4, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \mid 12i\right) +$ $+ \left(0, -5, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \mid -i\right)$
8.6	$\left[\left(\frac{1}{2}, 0, 0, 1 \mid 12\right) +$ $+ \left(\frac{1}{2}, 0, 2, 0 \mid 1\right)\right]^{-1}$	8.6'	$\left[\left(0, \frac{1}{2}, -4, 1 \mid 12\right) +$ $+ \left(0, \frac{1}{2}, -5, 0 \mid -1\right)\right]^{-1}$
9.1	$\left(-\frac{20}{13}, 1, \frac{1}{2}, 0 \mid -\frac{12}{169}\right) +$ $+ \left(-\frac{14}{13}, 0, \frac{1}{2}, 0 \mid -\frac{1}{39}\right)$	9.1'	$\left(1, -\frac{20}{13}, \frac{5}{2}, 0 \mid \frac{12}{169}\right) +$ $+ \left(0, -\frac{14}{13}, \frac{5}{2}, 0 \mid \frac{1}{39}\right)$
9.2	$\left[\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{32}{13}, 1 \mid -\frac{12}{169}\right) +$ $+ \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{25}{13}, 0 \mid \frac{1}{39}\right)\right]^{-1}$	9.2'	$\left[\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{20}{13}, 1 \mid -\frac{12}{169}\right) +$ $+ \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{14}{13}, 0 \mid -\frac{1}{39}\right)\right]^{-1}$
9.3	$\left(1, -\frac{32}{13}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \mid \frac{12}{169}i\right) +$ $+ \left(0, -\frac{25}{13}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \mid -\frac{1}{39}\right)$	9.3'	$\left(-\frac{32}{13}, 1, 0, \frac{1}{2} \mid -\frac{12}{169}\right) +$ $+ \left(-\frac{25}{13}, 0, 0, \frac{1}{2} \mid \frac{1}{39}\right)$
9.4	$\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{20}{13}, -\frac{32}{13} \mid (-1)^{-\frac{1}{26}} \cdot \frac{12}{169}\right) +$ $+ \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{14}{13}, -\frac{25}{13} \mid (-1)^{\frac{11}{26}} \cdot \frac{1}{39}\right)\right]^{-1}$	9.4'	$\left[\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{32}{13} \mid \frac{12}{169}i\right) +$ $+ \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{25}{13} \mid -\frac{1}{39}i\right)\right]^{-1}$
9.5	$\left(-\frac{32}{13}, -\frac{20}{13}, 0, \frac{5}{2} \mid (-1)^{-\frac{7}{13}} \cdot \frac{12}{169}\right) +$ $+ \left(-\frac{25}{13}, -\frac{14}{13}, 0, \frac{5}{2} \mid (-1)^{-\frac{1}{13}} \cdot \frac{1}{39}\right)$	9.5'	$\left(-\frac{20}{13}, -\frac{32}{13}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid (-1)^{-\frac{1}{26}} \cdot \frac{12}{169}\right) +$ $+ \left(-\frac{14}{13}, -\frac{25}{13}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \mid (-1)^{\frac{11}{26}} \cdot \frac{1}{39}\right)$
9.6	$\left[\left(\frac{5}{2}, 0, 1, -\frac{20}{13} \mid \frac{12}{169}\right) +$ $+ \left(\frac{5}{2}, 0, 0, -\frac{14}{13} \mid \frac{1}{39}\right)\right]^{-1}$	9.6'	$\left[\left(0, \frac{5}{2}, -\frac{32}{13}, -\frac{20}{13} \mid (-1)^{-\frac{7}{13}} \cdot \frac{12}{169}\right) +$ $+ \left(0, \frac{5}{2}, -\frac{25}{13}, -\frac{14}{13} \mid (-1)^{-\frac{1}{13}} \cdot \frac{1}{39}\right)\right]^{-1}$
10.1	$\left(1, -\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, 0 \mid \frac{3}{4}\right) +$ $+ \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0 \mid \frac{1}{6}\right)$	10.1'	$\left(-\frac{5}{4}, 1, \frac{1}{2}, 0 \mid -\frac{3}{4}\right) +$ $+ \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \mid -\frac{1}{6}\right)$
10.2	$\left[\left(0, \frac{5}{2}, -\frac{11}{4}, -\frac{5}{4} \mid (-1)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{4}\right) +$ $+ \left(0, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \mid \frac{1}{6}i\right)\right]^{-1}$	10.2'	$\left[\left(\frac{5}{2}, 0, 1, -\frac{5}{4} \mid \frac{3}{4}\right) +$ $+ \left(\frac{5}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2} \mid \frac{1}{6}\right)\right]^{-1}$
10.3	$\left(-\frac{5}{4}, -\frac{11}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \mid (-1)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{4}\right) +$ $+ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \mid \frac{1}{6}i\right)$	10.3'	$\left(-\frac{11}{4}, -\frac{5}{4}, 0, \frac{5}{2} \mid (-1)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{4}\right) +$ $+ \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2} \mid \frac{1}{6}i\right)$

10.4	$\left[\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, -\frac{11}{4} \mid -\frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{5}{2} \mid \frac{1}{6}i\right)\right]^{-1}$	10.4'	$\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{11}{4} \mid (-1)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2} \mid \frac{1}{6}\right)\right]^{-1}$
10.5	$\left(-\frac{11}{4}, 1, 0, \frac{1}{2} \mid -\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{5}{2}, 0, 0, \frac{1}{2} \mid \frac{1}{6}\right)$	10.5'	$\left(1, -\frac{11}{4}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \mid -\frac{3}{4}i\right) + \left(0, -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \mid \frac{1}{6}i\right)$
10.6	$\left[\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{5}{4}, 1 \mid -\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0 \mid -\frac{1}{6}\right)\right]^{-1}$	10.6'	$\left[\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{11}{4}, 1 \mid -\frac{3}{4}\right) + \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 0 \mid \frac{1}{6}\right)\right]^{-1}$

Сравнивая графы на рис. 6 и рис. 7, установим под какими номерами уравнения таблицы 7 (рис. 6) входят в таблицу 8 (рис. 7):

№ уравнения в табл. 7(рис. 6)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ уравнения в табл. 8(рис. 7)	5.1	5.3'	4.1	4.3'	8.1	10.1'	7.1	9.1'	1.1'	1.5
№ уравнения в табл. 7(рис. 6)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
№ уравнения в табл. 8(рис. 7)	2.1	2.3'	6.1'	6.5	3.1	3.3'	8.3'	10.5	7.3'	9.5
№ уравнения в табл. 7(рис. 6)	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	10'
№ уравнения в табл. 8(рис. 7)	5.1'	5.3	4.1'	4.3	8.1'	10.1	7.1'	9.1	1.1	1.5'
№ уравнения в табл. 7(рис. 6)	11'	12'	13'	14'	15'	16'	17'	18'	19'	20'
№ уравнения в табл. 8(рис. 7)	2.1'	2.3	6.1	6.5'	3.1'	3.3	8.3	10.5'	7.3	9.5'

Нумерацию вершин на рис. 6 невозможно было сохранить на рис. 7, так как на рис. 7 каждая шестиугольная призма группы D_6 имеет свой номер от 1 до 10, а вершин на рис. 7 – 20, они попарно входят в каждую шестиугольную призму (соединенные преобразованием s).

10. Решение 120 уравнений через трансцендент 1-го уравнения Пенлеве

Уравнения Пенлеве встречаются в различных областях теоретической физики. Они появились в результате решения задачи о выделении классов уравнений вида [2, 15-19]

$$u''_{xx} = R(x, y, u'_x),$$

интегралы которых не имеют подвижных критических точек (R – рациональная функция аргументов x , y и y'_x с аналитическими коэффициентами). Эта задача решена в работах П. Пенлеве и Б. Гамбье [30]. Всего выделено 50 уравнений, причем общее решение 44 уравнений выражаются через элементарные функции, либо через решения некоторых линейных уравнений, либо уравнений первого порядка, либо через решения остальных шести уравнений.

Шесть не проинтегрированных П. Пенлеве и Б. Гамбье уравнений называются неприводимыми уравнениями Пенлеве (кратко – уравнениями Пенлеве), а их решения – трансцендентными функциями Пенлеве, мы будем называть их трансцендентами Пенлеве, в соответствии с замечанием 5 п. 9. Отсутствие подвижных критических точек дает возможность использовать решения уравнений Пенлеве в качестве основы для описания решений других нелинейных дифференциальных уравнений (наряду с представлениями решений с помощью специальных функций, которые выражаются через решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами).

Решением первого уравнения Пенлеве

$$y''_{xx} = 6y^2 + x \tag{14}$$

является однозначная функция аргумента x . В окрестности подвижного полюса x_0 оно представимо в виде ряда

$$y = (x - x_0)^{-2} + \frac{x_0}{10}(x - x_0)^2 - \frac{1}{6}(x - x_0)^3 + C(x - x_0)^4 + \frac{x_0^2}{300}(x - x_0)^6 + \sum_{j=7}^{\infty} a_j(x - x_0)^j,$$

где x_0 и C – произвольные постоянные коэффициенты; коэффициенты a_j ($j \geq 7$) однозначно определяются через x_0 и C .

Обозначим через $P(x, C_1, C_2)$ указанный выше ряд, где $C_1 = x_0$, $C_2 = C$. Решение 1-го уравнения Пенлеве $y = P(x, C_1, C_2)$ можно записать в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \tau \\ y = P(\tau, C_1, C_2) \end{cases} \tag{27}$$

На рис. 7 удалось построить 120-вершинный граф, вершина 5.1 которого обозначает 1-ое уравнение Пенлеве.

Этот граф наглядно показывает, с помощью каких композиций «базовых» преобразований \mathbf{g}_1 , \mathbf{u} , \mathbf{h} , \mathbf{r} каждая из остальных 119 вершин связана с вершиной 5.1. Этими же преобразованиями связаны и решения 119 уравнений с решением уравнения Пенлеве (14).

Пример 1. По графу на рис. 7 можно установить, что, например, уравнение 9.4 (см. таблицу 8):

$$y''_{xx} = \left[(-1)^{-\frac{1}{26}} \cdot \frac{12}{169} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{5}{2}} (y'_x)^{-\frac{20}{13}} (x y'_x - y)^{-\frac{32}{13}} + (-1)^{\frac{11}{26}} \cdot \frac{1}{39} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{5}{2}} (y'_x)^{-\frac{14}{13}} (x y'_x - y)^{-\frac{25}{13}} \right]^{-1}$$

связано с уравнением 5.1:

$$\ddot{u}_{tt} = 6u^2 + t \tag{14}$$

с помощью преобразования $\mathbf{r}h^3\mathbf{g}_1^{-1}\mathbf{u}h^2\mathbf{r} = \mathbf{h}sg_1^{-1}\mathbf{u}\mathbf{s}$ ($\mathbf{s} = \mathbf{h}^2\mathbf{r} = \mathbf{r}h^4$), которое имеет следующий параметрический вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{36(t^2u-1)^2}{t^{13}(78t^3\dot{u}_t-36t^4u^2-240t^2u-13t^5+432)}, \\ y &= -\frac{36}{t(78t^3\dot{u}_t-36t^4u^2-240t^2u-13t^5+432)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Композиция (28) и (27*):

$$\begin{cases} t = \tau \\ u = P(\tau, C_1, C_2) \end{cases} \quad (27^*)$$

даёт решение уравнения 9.4:

$$\begin{aligned} x &= \frac{36(\tau^2P-1)^2}{\tau^{13}(78\tau^3\dot{P}-36\tau^4P^2-240\tau^2P-13\tau^5+432)}, \\ y &= -\frac{36}{\tau(78\tau^3\dot{P}-36\tau^4P^2-240\tau^2P-13\tau^5+432)}. \end{aligned}$$

Выписать 119 преобразований, связывающих 119 уравнений с 1-м уравнением Пенлеве (14), трудоёмко. Для облегчения этих вычислений можно использовать следующие соображения. В каждой шестиугольной призме 12 уравнений связаны одними и теми же преобразованиями. 10 призм связаны между собой, согласно графу на рис. 7, преобразованиями $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1^{-1}, \mathbf{u}$. Поэтому достаточно из каждой призмы выбрать по 1 ключевой вершине и вычислить решения 10-ти ключевых уравнений. Получение решений остальных уравнений можно автоматизировать, так как преобразования призмы – графа D_6 – являются независимыми преобразованиями, то есть в записи этих преобразований отсутствуют параметры уравнений, к которым они применяются.

В качестве ключевых выберем вершины 1.1-10.1 графа на рис. 7, в таблице 8. Только 6 из них есть на рис. 6: 2.1-5.1, 7.1, 8.1; остальные 4 – на той части графа, которая получается удвоением числа вершин с помощью преобразования \mathbf{r} ; они не показаны на рис. 6, но есть в таблице 7: 1.1, 6.1, 9.1, 10.1.

Вычислим решения 10 ключевых уравнений, результаты поместим в таблицу 9. Кроме x и y , в таблице 9 помещены также y'_x и $xy'_x - y$; необходимость этого будет понятна далее.

Таблица 9. Решения 10-ти ключевых уравнений орбиты 1-го уравнения Пенлеве

1.1	$x = P^{\frac{3}{2}}, y = (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{4} [2P(2P^2 + \tau) - \dot{P}^2], y'_x = (-1)^{\frac{3}{2}} P^{\frac{1}{2}} \dot{P}^{-1},$ $xy'_x - y = (-1)^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{3}{4} [2P(2P^2 + \tau) - \dot{P}^2] + P^2 \cdot \dot{P}^{-1} \right\}$
2.1	$x = P, y = \dot{P}^2, y'_x = 2(6P^2 + \tau),$ $xy'_x - y = 2P(6P^2 + \tau) - \dot{P}^2$
3.1	$x = \dot{P}^2, y = 4(6P^2 + \tau)^2, y'_x = 4(\dot{P}^{-1} + 12P),$ $xy'_x - y = 4[\dot{P}(12\dot{P}P + 1) - (6P^2 + \tau^2)]$
4.1	$x = \tau^7, y = \tau^3P - \tau = \tau(\tau^2P - 1), y'_x = \frac{1}{7}\tau^{-6}(\tau^3\dot{P} + 3\tau^2P - 1),$ $xy'_x - y = \frac{1}{7}\tau(\tau^3\dot{P} - 4\tau^2P + 6)$
5.1	$x = \tau, y = P, y'_x = \dot{P}, xy'_x - y = \tau\dot{P} - P$

6.1	$x = \dot{P}^3, y = (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{8} [2\dot{P}(6\dot{P}P + 1) - (6P^2 + \tau)], y'_x = (-1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dot{P}(6P^2 + \tau)^{-1},$ $xy'_x - y = (-1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} [4\dot{P}^4(6P^2 + \tau)^{-1} + 2\dot{P}(6\dot{P}P + 1) - (6P^2 + \tau)]$
7.1	$x = -\frac{4}{3} \cdot \tau^{-6} (\tau^3 \dot{P} + 3\tau^2 P + \tau^5 - 1), y = \tau^{-8}, y'_x = \tau^{-2} (\tau^2 P - 1)^{-2},$ $xy'_x - y = -\frac{1}{3} \tau^{-8} (\tau^2 P - 1)^{-2} [4\tau^3 \dot{P} + 3(\tau^2 P + 1)^2 + 4(\tau^5 - 1)]$
8.1	$x = \frac{1}{12} (2\dot{P} - \tau^2), y = \tau, y'_x = P^{-2}, xy'_x - y = \frac{1}{12} P^{-2} (2\dot{P} - \tau^2) - \tau$
9.1	$x = \tau^{13}, y = \frac{13}{36} \tau (6\tau^3 \dot{P} - 24\tau^2 P - \tau^5 + 36), y'_x = \tau^{-12} (\tau^2 P - 1)^{-2},$ $xy'_x - y = -\frac{1}{36} \tau (78\tau^3 \dot{P} - 36\tau^4 P^2 - 240\tau^2 P - \tau^5 + 432)$
10.1	$x = \tau^4, y = \frac{2}{9} [3(\tau \dot{P} - P) - \tau^3], y'_x = \tau^{-2} P^2, xy'_x - y = \tau^2 P^2 - \frac{2}{9} [3(\tau \dot{P} - P) - \tau^3]$

Если функции в решении ключевого уравнения $i.1$ ($i = 1, \dots, 10$) в таблице 9 обозначить через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$x = \alpha, y = \beta, y'_x = \gamma, xy'_x - y = \delta,$$

то, вычислив преобразования, связывающие остальные уравнения $i.2, \dots, i.6, i.1', \dots, i.6'$ с уравнением $i.1$, получим решения этих уравнений $i.2, \dots, i.6, i.1', \dots, i.6'$, аналогично рассмотренному в примере 1. Результаты поместим в таблицу 10. Решения всех 120 уравнений таблицы 8 получаются, если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, взятые из таблицы 9, подставить в таблицу 10. В таблице 9 записаны решения ключевых уравнений.

Таблица 10. Решения уравнений $i.2, \dots, i.6, i.1', \dots, i.6'$ через решение уравнения $i.1$ ($i = 1, \dots, 10$) из орбиты 1-го уравнения Пенлеве

i.1	$x = \alpha, y = \beta, y'_x = \gamma, xy'_x - y = \delta$	i.1'	$x = \beta, y = \alpha, y'_x = \frac{1}{\gamma}, xy'_x - y = -\frac{\delta}{\gamma}$
i.2	$x = \delta, y = \gamma, y'_x = \frac{1}{\alpha}, xy'_x - y = -\frac{\beta}{\alpha}$	i.2'	$x = \gamma, y = \delta, y'_x = \alpha, xy'_x - y = \beta$
i.3	$x = -\frac{\beta}{\alpha}, y = \frac{1}{\alpha}, y'_x = \frac{1}{\delta}, xy'_x - y = -\frac{\gamma}{\delta}$	i.3'	$x = \frac{1}{\alpha}, y = -\frac{\beta}{\alpha}, y'_x = \delta, xy'_x - y = \gamma$
i.4	$x = -\frac{\gamma}{\delta}, y = \frac{1}{\delta}, y'_x = -\frac{\delta}{\gamma}, xy'_x - y = \frac{1}{\gamma}$	i.4'	$x = \frac{1}{\delta}, y = -\frac{\gamma}{\delta}, y'_x = -\frac{\beta}{\alpha},$ $xy'_x - y = \frac{1}{\alpha}$
i.5	$x = \frac{1}{\beta}, y = -\frac{\alpha}{\beta}, y'_x = -\frac{\delta}{\gamma}, xy'_x - y = \frac{1}{\gamma}$	i.5'	$x = -\frac{\alpha}{\beta}, y = \frac{1}{\beta}, y'_x = -\frac{\gamma}{\delta},$ $xy'_x - y = \frac{1}{\delta}$
i.6	$x = \frac{1}{\gamma}, y = -\frac{\delta}{\gamma}, y'_x = \beta, xy'_x - y = \alpha$	i.6'	$x = -\frac{\delta}{\gamma}, y = \frac{1}{\gamma}, y'_x = \frac{1}{\beta},$ $xy'_x - y = -\frac{\alpha}{\beta}$

Итак, проведен дискретно-групповой анализ подклассов уравнений, принадлежащих классам (1) и (2), связанных с 1-м уравнением Пенлеве. В результате проведенного анализа получены

решения 120 уравнений полиномиального вида (1) и дробно-полиномиального вида (2) через 1-й трансцендент Пенлеве.

11. Получение решений 120 уравнений таблицы 8 с произвольными коэффициентами

Для получения решений уравнений таблицы 8 с произвольными коэффициентами A_i необходимо выполнить операцию масштабирования: $x \rightarrow ax, y \rightarrow by$.

Пример 2. Для 1-го уравнения Пенлеве

$$y''_{xx} = 6y^2 + x \quad (14)$$

решение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \tau \\ y = P(\tau, C_1, C_2) \end{cases}, \quad (27)$$

где $P(\tau)$ – 1-й трансцендент Пенлеве.

Из (14) с помощью масштабирующего преобразования

$$\begin{cases} x \rightarrow ax, & a = \left(\frac{A_1 A_2}{6}\right)^{\frac{1}{5}} \\ y \rightarrow by, & b = \left(\frac{A_1^3}{216 A_2^2}\right)^{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

получается уравнение типа Пенлеве

$$y''_{xx} = A_1 y^2 + A_2 x \quad (29)$$

с произвольными коэффициентами A_1, A_2 .

Соответственно, и решения уравнения (29) масштабируются совершенно аналогично, т.е. решение уравнения (29) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = a\tau, & a = \left(\frac{A_1 A_2}{6}\right)^{\frac{1}{5}} \\ y = bP(\tau, C_1, C_2), & b = \left(\frac{A_1^3}{216 A_2^2}\right)^{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть из некоторого уравнения класса

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (x y'_x - y)^{n_i} \quad (1)$$

с помощью масштабирующего преобразования

$$x \rightarrow ax, y \rightarrow by$$

получается уравнение этого же класса уравнений

$$y''_{xx} = \sum_{i=1}^2 B_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i}. \quad (1^*)$$

Тогда

$$a = \left(\frac{A_1}{B_1}\right)^{-\frac{L_2}{\Delta}} \cdot \left(\frac{A_2}{B_2}\right)^{\frac{L_1}{\Delta}}, b = \left(\frac{A_1}{B_1}\right)^{\frac{K_2}{\Delta}} \cdot \left(\frac{A_2}{B_2}\right)^{-\frac{K_1}{\Delta}},$$

где

$$K_i = k_i - m_i + 2, L_i = l_i + m_i + n_i - 1 \quad (i = 1, 2), \Delta = K_1 L_2 - K_2 L_1. \quad (30)$$

Пусть решение полученного уравнения из класса уравнений (1*) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \alpha(\tau, C_1, C_2) \\ y = \beta(\tau, C_1, C_2) \end{cases} \quad (31)$$

тогда решение уравнения (1) отличается лишь множителями a и b :

$$\begin{cases} x = a\alpha(\tau, C_1, C_2) \\ y = b\beta(\tau, C_1, C_2) \end{cases} \quad (32)$$

где a и b указаны в (30).

Таким образом, если уравнение класса (1*) – это одно из 60-ти уравнений полиномиального вида (с нечётными номерами), содержащееся в таблице 8, тогда уравнение класса (1) – уравнение с теми же показателями, но с произвольными коэффициентами A_1, A_2 .

Теорема 2. Пусть из некоторого уравнения класса

$$y''_{xx} = \left[\sum_{i=1}^2 A_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i} \right]^{-1} \quad (2)$$

с помощью масштабирующего преобразования

$$x \rightarrow ax, y \rightarrow by$$

получается уравнение этого же класса уравнений

$$y''_{xx} = \left[\sum_{i=1}^2 B_i x^{k_i} y^{l_i} (y'_x)^{m_i} (xy'_x - y)^{n_i} \right]^{-1}. \quad (2^*)$$

Тогда

$$a = \left(\frac{A_1}{B_1}\right)^{-\frac{\tilde{L}_2}{\tilde{\Delta}}} \cdot \left(\frac{A_2}{B_2}\right)^{\frac{\tilde{L}_1}{\tilde{\Delta}}}, b = \left(\frac{A_1}{B_1}\right)^{\frac{\tilde{K}_2}{\tilde{\Delta}}} \cdot \left(\frac{A_2}{B_2}\right)^{-\frac{\tilde{K}_1}{\tilde{\Delta}}}, \quad (33)$$

где

$$\tilde{K}_i = k_i - m_i - 2, \tilde{L}_i = l_i + m_i + n_i + 1 \quad (i = 1, 2), \tilde{\Delta} = \tilde{K}_1 \tilde{L}_2 - \tilde{K}_2 \tilde{L}_1.$$

Пусть (31) – решение уравнения класса (2*). Тогда (32) – решение уравнения класса (2), где a и b указаны в (33).

Теорема 2 дает способ получения решений уравнений вида (2) с произвольными коэффициентами из решений уравнений таблицы 8 с фиксированными коэффициентами (имеющих в таблице 8 чётные номера).

12. Экономичное представление решений с помощью «декартова произведения» таблиц

Граф орбиты первого уравнения Пенлеве на рис.7 является декартовым произведением графа-дерева, изображенного на рис.8, и графа дискретной группы диэдра D_6 , изображенного на рис.4.

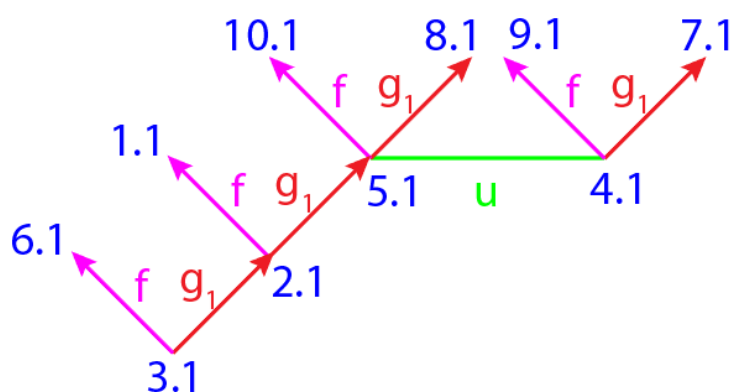


Рис. 8. Граф-дерево, вершины которого обозначают «ключевые» уравнения орбиты 1-го уравнения Пенлеве, где $\mathbf{f} = \mathbf{sg}_1 \mathbf{r}$

Образующие группы D_6 (22) \mathbf{r} и \mathbf{h} не зависят от параметров уравнений:

$$\mathbf{r}: \quad x = u, y = t; \tag{7}$$

$$\mathbf{h}: \quad x = \frac{1}{\dot{u}_t}, y = -\frac{t\dot{u}_t - u}{\dot{u}_t}, y'_x = u. \tag{21}$$

Поэтому все преобразования группы D_6 также являются независимыми.

По этой причине и решения уравнений орбиты 1-го уравнения Пенлеве находятся из декартова произведения таблиц 9 и 10: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ надо взять из решений ключевых уравнений $i.1$ в таб. 9 ($i = 1, \dots, 10$), затем подставить их в таблицу 10 – в результате получим решения уравнений $i.j$, где $j = 1, \dots, 6; 1', \dots, 6'$.

Эти рассуждения имеют достаточно широкое обобщение.

А именно: если граф псевдогруппы преобразований подкласса некоторого класса уравнений является декартовым произведением графа-дерева, вершины которого обозначают «ключевые» уравнения данного подкласса, и графа некоторой дискретной группы независимых преобразований, тогда решения уравнений находятся из декартова произведения двух таблиц решений – решений ключевых уравнений и решений уравнений упомянутой дискретной группы.

13. Заключение

Подведем итоги исследований, проведенных в данной статье.

1. Проведен дискретно-групповой анализ ОДУ 2-го порядка с полиномиальной и дробно-полиномиальной правой частью.

2. Применение этих результатов к 1-му уравнению Пенлеве дало возможность построить псевдогруппу 120-го порядка для 1-го уравнения Пенлеве, граф которой изображен на рис.7, а сами уравнения орбиты 1-го уравнения Пенлеве помещены в таблицу 8.

3. Приведены решения всех 120-ти уравнений орбиты 1-го уравнения Пенлеве через 1-й трансцендент Пенлеве (табл. 9, 10).

4. Сформулированы теоремы 1 и 2, позволяющие находить решение уравнения класса (1) либо (2) с произвольными коэффициентами A_i , если известно решение соответствующего уравнения с фиксированными коэффициентами A_i . Таким образом, можно выписать решения всех уравнений таблицы 8 с произвольными коэффициентами в слагаемых. Теоремы 1 и 2 обобщаются на любое число слагаемых.

5. На примере орбиты 1-го уравнения Пенлеве найден способ экономичного представления решений уравнений некоторого класса, соответствующих вершинам графа псевдогруппы, если выполняются следующие два условия:

1) Граф псевдогруппы преобразований является декартовым произведением графа-дерева с вершинами – «ключевыми уравнениями» и графа некоторой дискретной группы преобразований;

2) Преобразования упомянутой выше дискретной группы являются независимыми (функциональная запись этих преобразований не содержит параметров уравнений).

Список литературы:

- [1] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 464с.
- [2] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: точные решения. – М.: Физматлит, 1995. – 560с.
- [3] Зайцев В.Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1989, т.25, №3. – С. 379-387.
- [4] Зайцев В.Ф. О дискретно-групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР, 1988, т.299, №3. С. 542-545.
- [5] Зайцев В.Ф. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч.1. – Л.: ЛГУ, 1982. – 130с.
- [6] Зайцев В.Ф., Кормилицина Т.В. Дискретно-групповые методы теории дифференциальных уравнений, ч.2. – Л.: ЛГУ, 1985. – 150с.
- [7] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Дискретно-групповой метод интегрирования уравнений нелинейной механики. – М.: Препринт ИП Мех АН СССР, №339. – 1988. – 44с.
- [8] Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Л.: ЛИИА АН СССР, 1991. – 240с.
- [9] Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В., Хакимова З.Н. Дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. Точные решения уравнения. – Л.: Препринт ЛИИА АН СССР, №105, 1989. – 61с.
- [10] Зайцев В.Ф., Хакимова З.Н. О дискретно-групповом анализе уравнения $y''_{xx} = A_1 x^{n_1} y^{m_1} (y'_x)^{l_1} + A_2 x^{n_2} y^{m_2} (y'_x)^{l_2}$. – Л.: ЛГУ, 1986. – 31с.
- [11] Зайцев В.Ф., Хакимова З.Н. О преобразованиях Беклунда, замкнутых на одном классе уравнений // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи, межвузовский сборник научных трудов. – Тула: ТулПИ, 1990. – С. 5-12.

- [12] Хакимова З.Н. О преобразованиях уравнения Пенлеве // Дифференциальные уравнения с частной производной., межвузовский сборник научных трудов. – Л.: ЛГПИ, 1989. – С. 150-158.
- [13] Хакимова З.Н. О точечных преобразованиях одного нелинейного уравнения 2-го порядка // Дифференциальные уравнения с частной производной, межвузовский сборник научных трудов. – Л.: ЛГПИ, 1988. – С. 85-90.
- [14] Хакимова З.Н. Дискретно-групповой анализ нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с алгебраической правой частью. Диссертация. – СПб: РГПУ, 1997. – 119с.
- [15] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- [16] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Факториал, 1997. – 512с.
- [17] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. CRC Press, Boca Raton–New York, 2003.
- [18] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения в 2 частях. Справочник для академического бакалавриата. – 2-е издание, исправленное и дополненное. – М.: Юрайт, 2018.
- [19] Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. – CRC Press. Boca Raton – London, 2018.
- [20] Хакимова З.Н., Зайцев О.В. Классификация новых разрешимых случаев в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Актуальные вопросы современной науки, №3. – СПб., 2014. – С. 3-11.
- [21] Хакимова З.Н. Интегрирование дискретных инвариантов в классе полиномиальных дифференциальных уравнений 2-го класса // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского, 2014 – С. 8-16.
- [22] Зайцев О.В. О дискретных симметриях и новых разрешимых случаях в классе полиномиальных дифференциальных уравнений // Наука XXI века: новый подход: материалы IX молодежной международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – СПб.: науч.-изд. центр «Открытие», 2014. – С. 8-16.
- [23] Зайцев В.Ф., Зайцев О.В. Об одном применении метода вложения // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2015». – СПб.: РГПУ, 2014. – С. 30-33.
- [24] Хакимова З.Н. Выбор класса дифференциальных уравнений для нахождения новых разрешимых случаев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2017». – СПб.: РГПУ, 2017. – С. 112-117.
- [25] Хакимова З.Н. Преобразование типа Лежандра и новые разрешимые дифференциальные уравнения 2-го и 3-го порядков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2018». – СПб.: РГПУ, 2018. – С. 119-122.
- [26] Хакимова З.Н. Дифференциальные уравнения степенного вида, интегрируемые в полиномах // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2019». – СПб.: РГПУ, 2019. – С. 97-101.
- [27] Хакимова З.Н. Об интегрировании дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции «Герценовские чтения – 2020». – СПб.: РГПУ, 2020. – С. 115-118.

- [28] Линчук Л. В. Параметрические полиномиальные решения одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы науч. конф. «Герценовские чтения – 2018». – СПб.: РГПУ, 2018. – С. 85-90.
- [29] H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser, Generators and relations for discrete groups. Fourth edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], 14. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980. ix+169 pp.
- [30] Ince, Edward L. Ordinary differential equations. – Dover Publications, New York, 1926.

Fractional polynomial differential equations: discrete groups and solutions throw the transcendent of the 1st Painleve equation

Khakimova Z.N.^{1*}, Zaytsev O.V.^{2**}

¹Mozhaisky Military Space Academy, Saint-Petersburg

²BSTU «VOENMEH» named after D.F. Ustinov, Saint-Petersburg

e-mail:

*vka@mil.ru

**zaytsev_oleg1997@mail.ru

Abstract. For a class of the second-order ordinary differential equations with fractional polynomial right-hand side, discrete group analysis is carried out. Transformations are found that are closed on this class of equations or on its subclasses. The dihedral group of transformations of the 12th order and the graph of this group for the class of equations with fractional polynomial right-hand side are constructed.

Using this transformation dihedral group a transformation pseudogroup of the 120th order for the 1st Painlevé equation, as well as the graph of this pseudogroup, are constructed. Exact solutions through the 1st Painlevé transcendent are found for 119 equations of polynomial and fractional polynomial types related with the 1st Painlevé equation by transformations of this pseudogroup.

Keywords: Ordinary differential equation (ODE) of the 2nd order, discrete group, graph of a discrete group, dihedral group, discrete group of transformations, pseudogroup, discrete group analysis, the 1st Painlevé equation, ODE of polynomial form, ODE of fractional polynomial form, exact solution of ODE, the 1st Painlevé transcendent, the class of the generalized Emden-Fowler equations (GEFE).