ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N.2, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

О связи модальной управляемости по выходу динамической MIMO-системы и вида матриц с желаемыми спектрами

Зубов Н.Е[1,*], Лапин А.В.[1,**], Рябченко В.Н.[1,2,***]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, РФ
[2]АО «НТЦ ФСК ЕЭС», г. Москва, РФ

[*]Nik.Zubov@gmail.com
[**]AlexeyPoeme@yandex.ru
[***]Ryabchenko.VN@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача обеспечения модальной управляемости по выходу в линейных динамических системах при не полностью измеряемом векторе состояния с применением декомпозиционного метода синтеза управления, основанного на подходе Ван-дер-Воуда. Характерно, что при выполнении условия «размерность вектора управления плюс размерность вектора наблюдения больше размерности объекта управления» не для всех возможных видов матриц с желаемым спектром, назначаемых или рассчитываемых в рамках декомпозиции многомерных систем, обеспечивается модальная управляемость замкнутой системы в целом. Показано, что модальная управляемость по выходу определяется существованием матрицы с произвольным заданным спектром на нулевом уровне, обеспечивающей разрешимость линейного матричного уравнения связи между матрицами регуляторов по состоянию и по выходу.

Предлагается, сохраняя желаемые спектры, задавать указанные матрицы треугольными или рассчитывать их на основе определенным образом сформированных уравнений. При таком подходе обеспечивается модальная управляемость по выходу независимо от соотношений между параметрами системы и спектрами на верхних уровнях декомпозиции, а также упрощается расчет матриц с желаемыми спектрами на нижних уровнях.

Приведен пример использования описанного подхода при синтезе регулятора по выходу для линейной стационарной системы автоматического регулирования 6 порядка, содержащей 3 управляющих входа и 4 измеряемых выхода. Результаты математического моделирования подтверждают целесообразность применения предлагаемых подходов.

Ключевые слова: управление по выходу, обратная связь, декомпозиционный метод модального управления, матрица с желаемым спектром, модальная управляемость.

1. Введение

Одним из способов управления динамической системой при не полностью измеряемом векторе состояния является модальное управление с обратной связью по выходному (измеряемому) вектору, не требующее построения наблюдателей состояния. Задача модального управления по выходу формулируется следующим образом [1].

Пусть имеется непрерывная или дискретная линейная динамическая система, описываемая вещественными матрицами состояния, управления и наблюдения заданной размерности, соответственно,

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l\times n}, \tag{1}$$

причем

$$\operatorname{rank}\mathbf{B} = m\ (m < n), \quad \operatorname{rank}\mathbf{C} = l\ (l < n), \quad m + l > n. \tag{2}$$

Требуется синтезировать модальный регулятор с обратной связью по выходу, описываемый матрицей $\mathbf{F}$ и обеспечивающий матрице замкнутой системы «объект – регулятор» заданный спектр

$$\Lambda^* = \operatorname{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{BFC}). \tag{3}$$

Указанный регулятор может быть синтезирован, если система, описываемая матрицами (1), удовлетворяет критерию Калмана – необходимому и достаточному условию управляемости по состоянию, в том числе, модальной управляемости [2], которые для матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют соответственно вид

$$\operatorname{rank}[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-m}\mathbf{B}] = n$$
$$\operatorname{rank}[\lambda_i\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}] = n, \qquad \forall\lambda_i \in \Lambda = \operatorname{eig}\mathbf{A} = \{\lambda_1, \quad \dots, \quad \lambda_n\}.$$

В дальнейшем будет использоваться понятие модальной управляемости по выходу, которое определяет возможность обеспечения у динамической системы заданного спектра (3) посредством управления по выходу, т.е. удовлетворения условий

$$\forall\lambda_i^* \in \Lambda^* \quad \begin{cases}\operatorname{rank}(\lambda_i^*\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BFC}) < n,\\ \operatorname{rank}[\lambda_i^*\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BFC} \quad \mathbf{B}] = n.\end{cases} \tag{4}$$

Здесь и далее $\mathbf{I}_n$ – единичная матрица порядка n. При этом следует заметить, что для решения поставленной задачи управления в зависимости от того какой из методов синтеза применяется дополнительно, может существовать собственное достаточное условие модальной управляемости по выходу.

Будем рассматривать предложенный авторами модальный регулятор по выходу [3] – [9], основанный на развитии идеи Ван-дер-Воуда [4] и декомпозиционного метода полного размещения полюсов (ПРП) [5], [10]. Имеются, по крайней мере, два подхода к синтезу модального регулятора по выходу: прямой и дуальный. Дуальный подход получается из прямого подхода при соответствующей замене матриц (1)

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}^T, \quad \mathbf{B} \to \mathbf{C}^T, \quad \mathbf{C} \to \mathbf{B}^T.$$

Покажем, что в этом случае модальная управляемость по выходу определяется достаточным условием в виде существования матрицы с произвольным заданным спектром на нулевом уровне декомпозиции, обеспечивающей разрешимость линейного матричного уравнения связи между матрицами регуляторов по состоянию и выходу. Получим данное условие для прямого подхода.

2. Достаточное условие модальной управляемости по выходу

Прямой подход к расчету модального регулятора по выходу подразумевает синтез регулятора по состоянию с матрицей $\mathbf{K}$ для пары матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, обеспечивающий заданный спектр Λ^* матрице $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ и последующее определение матрицы $\mathbf{F}$ из уравнения

$$\mathbf{FC} = \mathbf{K}, \tag{5}$$

разрешимость которого достигается путем расчета матрицы с желаемым спектром с помощью построения наблюдателя по состоянию для определенной далее пары матриц.

Согласно теории, изложенной в [5], уравнение (5) разрешимо относительно матрицы $\mathbf{F}$, если

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{C}^{\perp R} \text{ не существует,} \\ \mathbf{KC}^{\perp R} - \text{ нулевая матрица,} \end{array}\right. \tag{6}$$

где индексом «$\perp R$» обозначен правый аннулятор максимального ранга. Соответствующее общее решение имеет вид

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{KC}^{+} - \mathbf{\Omega}_{\mathbf{C},\mathbf{K}}\mathbf{C}^{\perp L}, & \text{если } \mathbf{C}^{\perp L} \text{ существует,} \\ \mathbf{KC}^{+}, & \text{если } \mathbf{C}^{\perp L} \text{ не существует,} \end{cases} \tag{7}$$

где индексом «$\perp L$» обозначен левый аннулятор максимального ранга, индексом «+» – псевдообратная матрица Мура-Пенроуза, а $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{C},\mathbf{K}}$ – произвольная матрица соответствующей размерности.

В силу условия (2) задачи, т.е. когда измерения линейно независимы, а их количество меньше числа параметров состояния, справедливы утверждения о существовании аннулятора $\mathbf{C}^{\perp R}$ и отсутствии аннулятора $\mathbf{C}^{\perp L}$. Таким образом, первое утверждение в совокупности (6) заведомо не выполняется, а при выполнении второго утверждения решение определяется второй строкой системы (7), т.е. единственно:

$$\mathbf{F} = \mathbf{KC}^{+}. \tag{8}$$

Для того чтобы выполнялось второе условие в совокупности (6), матрица обратной связи по состоянию $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$, рассчитываемая с помощью декомпозиционного алгоритма ПРП [5], должна иметь специальный вид. Из формулы регулятора по состоянию в указанном алгоритме

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{B}_0^{-}\mathbf{A}_0 - \mathbf{\Phi}_0\mathbf{B}_0^{-} \tag{9}$$

на нулевом уровне декомпозиции

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{C}$$

видно, что для выполнения этого условия достаточно, чтобы матрица $\mathbf{\Phi}_0$ с заданным спектром назначалась не произвольно, а определялась из уравнения [4]

$$\mathbf{\Phi}_0 \mathbf{G}_0 = \mathbf{H}_0, \tag{10}$$

где матричные коэффициенты имеют вид

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{B}_0^- \mathbf{C}_0^{\perp R}, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0^- \mathbf{A}_0 \mathbf{C}_0^{\perp R}. \tag{11}$$

Уравнение (10) принадлежит к тому же классу линейных матричных алгебраических уравнений, что и уравнение (5). Оно разрешимо, по аналогии с (6), если

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{G}_0^{\perp R} \text{ не существует,} \\ \mathbf{H}_0 \mathbf{G}_0^{\perp R} - \text{ нулевая матрица.} \end{array}\right. \tag{12}$$

Если уравнение (10) неразрешимо, то регулятор по выходу не может быть синтезирован на основании рассматриваемого подхода (в данном случае прямого аналитического). Если же выполняется (12), общее решение уравнения (10) по аналогии с (7) имеет вид

$$\mathbf{\Phi}_0 = \begin{cases} \mathbf{H}_0 \mathbf{G}_0^+ - \mathbf{\Omega}_{\mathbf{G}_0, \mathbf{H}_0} \mathbf{G}_0^{\perp L}, & \text{если } \mathbf{G}_0^{\perp L} \text{ существует,} \\ \mathbf{H}_0 \mathbf{G}_0^+, & \text{если } \mathbf{G}_0^{\perp L} \text{ не существует,} \end{cases} \tag{13}$$

где $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{G}_0, \mathbf{H}_0}$ – произвольная матрица соответствующей размерности. При выполнении верхнего условия в системе (13), изменяя значение матричного параметра $\mathbf{\Omega}_{\mathbf{G}_0, \mathbf{H}_0}$, можно управлять спектром матрицы $\mathbf{\Phi}_0$.

Для обеспечения матрице $\mathbf{\Phi}_0$ заданного спектра перепишем верхнее выражение системы (13) в виде

$$\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_0} - \mathbf{L}_{\mathbf{\Phi}_0} \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_0}, \tag{14}$$

где

$$\mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_0} = \mathbf{H}_0 \mathbf{G}_0^+, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_0} = \mathbf{G}_0^{\perp L}. \tag{15}$$

Если пара матриц (15) не существует (нижнее условие в (13)) либо не является полностью наблюдаемой, то регулятор по выходу, синтезированный на основании рассматриваемого подхода (в данном случае прямого аналитического), не сможет обеспечить матрице замкнутой системы произвольный заданный спектр.

При полной же наблюдаемости пары матриц (15) для этой пары можно с помощью декомпозиционного алгоритма ПРП в дуальной постановке синтезировать наблюдатель по состоянию с матрицей обратной связи $\mathbf{L}_{\mathbf{\Phi}_0}$, обеспечивающий матрице (14) заданный спектр. Далее по формуле (14) рассчитывается сама матрица $\mathbf{\Phi}_0$. Она используется при определении матрицы обратной связи по состоянию $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}$ в (9), после чего согласно (8) рассчитывается искомая матрица обратной связи по выходу $\mathbf{F}$.

Таким образом, достаточное условие управляемости по выходу формируется из условий (12) разрешимости уравнения (10) и условия Калмана полной наблюдаемости пары матриц (15):

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \mathbf{G}_0^{\perp R} \text{ не существует}, \\ \mathbf{H}_0\mathbf{G}_0^{\perp R} - \text{ нулевая матрица}; \end{array}\right. \\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\Phi}_0} \\ \mathbf{C}_{\boldsymbol{\Phi}_0}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Phi}_0} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{\boldsymbol{\Phi}_0}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\Phi}_0}^{m-1} \end{bmatrix} = m, \end{cases} \tag{16}$$

где матрицы $\mathbf{G}_0$ и $\mathbf{H}_0$ определяются из (11).

3. Параметризация достаточного условия модальной управляемости по выходу

Практика показывает, что не любая полностью управляемая по состоянию система в смысле критерия Калмана оказывается полностью модально управляемой по выходу в смысле достаточного условия (16). На выполнение критерия (16) оказывают влияние конкретные значения ряда матриц, назначаемых или рассчитываемых в рамках декомпозиции многомерных систем неоднозначно. Это правые и левые аннуляторы, а также матрицы с желаемыми спектрами.

Определяющим является вид матриц $\boldsymbol{\Phi}_1$, $\boldsymbol{\Phi}_2$, ... с желаемыми спектрами на верхних (первом, втором и т.д.) уровнях декомпозиции. Обычно с целью возможного разделения каналов управления, а также уменьшения нормы результирующей матрицы регулятора назначаются диагональные матрицы с желаемыми спектрами. Но их диагональный вид может не обеспечивать замкнутой системе модальную управляемость по выходу или обеспечивать ее не при любых значениях параметров системы и полюсов в заданном спектре. С целью выполнения условия (16) на примере динамической системы с тремя органами управления и числом уравнений, описывающим объект, шесть, девять, и т.д. предлагается:

а) назначать матрицы Φ_1, Φ_2, ... с треугольной (блочно-треугольной) или клеточной структурой с сохранением собственных значений в блоках главной диагонали, например,

$$\forall \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R} \quad \operatorname{eig}\begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 \\ \kappa_3 & \phi_2 & \kappa_1 \\ \kappa_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} = \operatorname{eig}\begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \kappa_2 \\ \kappa_3 & \phi_2 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} = \operatorname{eig}\begin{bmatrix} \phi_1 & \kappa_3 & \kappa_2 \\ 0 & \phi_2 & \kappa_1 \\ 0 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{eig}\begin{bmatrix} \phi_1 & \kappa_3 & \kappa_2 \\ 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \kappa_1 & \phi_3 \end{bmatrix} = \operatorname{eig}\begin{bmatrix} \phi_1 & \kappa_3 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 \\ \kappa_2 & \kappa_1 & \phi_3 \end{bmatrix} = \operatorname{eig}\begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 \\ \kappa_3 & \phi_2 & 0 \\ \kappa_2 & \kappa_1 & \phi_3 \end{bmatrix} = \{\phi_1, \quad \phi_2, \quad \phi_3\}$$

б) рассчитывать матрицы Φ_1, Φ_2, ... с помощью декомпозиционного алгоритма ПРП [4] из уравнений, схожих по форме записи с уравнением (10), добиваясь желаемых значений (соответственно G_0^* или H_0^*) матричных коэффициентов (11) и сохраняя спектры $\operatorname{eig}\Phi_1$, $\operatorname{eig}\Phi_2$, ..., например (при размерности объекта управления, равной шести),

$$\begin{cases} \mathbf{B}_0^-\mathbf{C}_0^{\perp R} = \mathbf{G}_0^*, \\ \mathbf{B}_0^- = \mathbf{B}_0^+ + \mathbf{K}_1\mathbf{B}_0^{\perp L}, \\ \mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^-\mathbf{A}_1 - \boldsymbol{\Phi}_1\mathbf{B}_1^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_1\mathbf{G}_1 = \mathbf{H}_1, \\ \mathbf{G}_1 = \mathbf{B}_1^-\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{C}_0^{\perp R}, \\ \mathbf{H}_1 = (\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{B}_1^-\mathbf{A}_1\mathbf{B}_0^{\perp L})\mathbf{C}_0^{\perp R} - \mathbf{G}_0^*; \end{cases} \tag{17}$$

или

$$\begin{cases} \mathbf{B}_0^- \mathbf{A}_0 \mathbf{C}_0^{\perp R} = \mathbf{H}_0^*, \\ \mathbf{B}_0^- = \mathbf{B}_0^+ + \mathbf{K}_1 \mathbf{B}_0^{\perp L}, \\ \mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^- \mathbf{A}_1 - \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{B}_1^- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{G}_1 = \mathbf{H}_1, \\ \mathbf{G}_1 = \mathbf{B}_1^- \mathbf{B}_0^{\perp L} \mathbf{A}_0 \mathbf{C}_0^{\perp R}, \\ \mathbf{H}_1 = (\mathbf{B}_0^+ + \mathbf{B}_1^- \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_0^{\perp L}) \mathbf{A}_0 \mathbf{C}_0^{\perp R} - \mathbf{H}_0^*. \end{cases} \quad (18)$$

При таких подходах (особенно при втором подходе) во многих случаях обеспечивается модальная управляемость по выходу независимо от соотношений между параметрами системы и полюсов на верхних уровнях декомпозиции, а также упрощается расчет матриц с желаемыми спектрами на нижних уровнях декомпозиции.

4. Пример

Рассмотрим линейную динамическую систему с матрицами состояния, управления и наблюдения, соответственно равными

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{63} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $a_{42}, a_{52}, a_{63} > 0$. С помощью декомпозиционного алгоритма ПРП [5] рассчитаем регулятор по состоянию $\mathbf{K}$ для пары матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, обеспечивающий матрице $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ заданный спектр $\Lambda^* = \{\phi_1, \quad \phi_2, \quad \dots, \quad \phi_6\}$.

Нулевой уровень декомпозиции имеет вид

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}.$$

Т.к. $\operatorname{rank}(\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{6\times 3}) = 3$, переходим к следующему уровню с помощью

$$\mathbf{B}_0^{\perp L} = [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_{3\times 3}], \quad \mathbf{B}_0^{\perp L+} = \mathbf{B}_0^{\perp LT} (\mathbf{B}_0^{\perp L} \mathbf{B}_0^{\perp LT})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3\times 3} \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее $\mathbf{0}_{a\times b}$ – нулевая матрица размерности $a \times b$.

Первый уровень декомпозиции имеет вид

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp L} \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^{\perp L+} = \mathbf{0}_{3\times 3}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0^{\perp L} \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0 = \mathbf{I}_3.$$

Т.к. $\operatorname{rank}(\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}) = 3$, переходим к расчету регуляторов.

Первый уровень декомпозиции является крайним верхним, поэтому матрица регулятора на этом уровне рассчитывается по формуле

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{A}_1 - \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{B}_1^{-1} = -\mathbf{\Phi}_1,$$

где $\mathbf{\Phi}_1$ – матрица с желаемым спектром $\mathrm{eig}\mathbf{\Phi}_1 = \{\phi_1, \ \phi_2, \ \phi_3\}$. Т.к. модификации на первом уровне нет, перейдем к нулевому уровню.

Рассчитав соответственно псевдообратную и вспомогательную матрицы

$$\mathbf{B}_0^+ = (\mathbf{B}_0^T\mathbf{B}_0)^{-1}\mathbf{B}_0^T = [\mathbf{0}_{3\times 3} \quad \mathbf{I}_3], \quad \mathbf{B}_0^- = \mathbf{B}_0^+ + \mathbf{K}_1\mathbf{B}_0^{\perp L} = [-\mathbf{\Phi}_1 \quad \mathbf{I}_3],$$

получим значение матрицы регулятора на нулевом уровне декомпозиции

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{B}_0^-\mathbf{A}_0 - \mathbf{\Phi}_0\mathbf{B}_0^- = [\mathbf{A}_{[2,1]} + \mathbf{\Phi}_0\mathbf{\Phi}_1 \quad -\mathbf{\Phi}_0 - \mathbf{\Phi}_1],$$

где

$$\mathbf{A}_{[2,1]} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{42} & 0 \\ 0 & -a_{52} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{63} \end{bmatrix},$$

а $\mathbf{\Phi}_0$ – матрица с желаемым спектром $\mathrm{eig}\mathbf{\Phi}_0 = \{\phi_4, \ \phi_5, \ \phi_6\}$. Т.к. модификации на нулевом уровне нет, получена искомая матрица регулятора $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$.

Для формирования критерия (16) запишем правый аннулятор для матрицы наблюдения $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}$

$$\mathbf{C}_0^{\perp R} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

и рассчитаем коэффициенты (11) в уравнении (10)

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{B}_0^-\mathbf{C}_0^{\perp R} = \mathbf{\Phi}_1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0^-\mathbf{A}_0\mathbf{C}_0^{\perp R} = \begin{bmatrix} a_{42} & 0 \\ a_{52} & 0 \\ 0 & a_{63} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Из формул (19) видно, что в рассматриваемой задаче правая часть уравнения (10) неизменна, а коэффициент при рассчитываемой матрице $\mathbf{\Phi}_0$ в левой части может меняться в зависимости от значения матрицы $\mathbf{\Phi}_1$. Рассмотрим, как вид матрицы $\mathbf{\Phi}_1$ с желаемым спектром на первом (верхнем) уровне декомпозиции влияет на модальную управляемость по выходу в смысле достаточного условия (16).

4.1. Вариант первый. Диагональный вид

Назначим матрицу $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}_{1(1)}$, имеющую диагональный вид:

$$\mathbf{\Phi}_{1(1)} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix}.$$

Для этой матрицы коэффициенты из (19)

$$\mathbf{G}_{0(1)} = \mathbf{\Phi}_{1(1)}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} a_{42} & 0 \\ a_{52} & 0 \\ 0 & a_{63} \end{bmatrix}$$

при $\phi_2\phi_3 \neq 0$ в соответствии с (12) приводят к разрешимому относительно $\mathbf{\Phi}_0$ уравнению (10), но пара матриц (15)

$$\mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_{0(1)}} = \mathbf{H}_0\mathbf{G}^{+}_{0(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a_{42}}{\phi_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{52}}{\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{a_{63}}{\phi_3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(1)}} = \mathbf{G}^{\perp L}_{0(1)} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

не является полностью наблюдаемой, т.к.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(1)}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(1)}}\mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_{0(1)}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(1)}}\mathbf{A}^2{}_{\mathbf{\Phi}_{0(1)}} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, в данном варианте модальная управляемость по выходу в смысле достаточного условия (16) отсутствует.

4.2. Вариант второй. Верхний треугольный вид

Назначим матрицу $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}_{1(2)}$, имеющую верхний треугольный вид:

$$\mathbf{\Phi}_{1(2)} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix}, \quad \kappa_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Для этой матрицы коэффициенты из (19)

$$\mathbf{G}_{0(2)} = \mathbf{\Phi}_{1(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2 \\ \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} a_{42} & 0 \\ a_{52} & 0 \\ 0 & a_{63} \end{bmatrix}$$

при $\phi_2 \neq 0$ в соответствии с (12) приводят к разрешимому относительно $\mathbf{\Phi}_0$ уравнению (10), а пара матриц (15)

$$\mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_{0(2)}} = \mathbf{H}_0\mathbf{G}^{+}_{0(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{a_{42}}{\phi_2} & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{52}}{\phi_2} & 0 \\ \dfrac{\kappa_2 a_{63}}{\phi_3^2 + \kappa_2^2} & 0 & \dfrac{\phi_3 a_{63}}{\phi_3^2 + \kappa_2^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(2)}} = \mathbf{G}^{\perp L}_{0(2)} = [-\phi_3 \quad 0 \quad \kappa_2]$$

является полностью наблюдаемой только при определенном условии, т.к.

$$\left|\begin{matrix}\mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(2)}}\\ \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(2)}}\mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_{0(2)}}\\ \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(2)}}\mathbf{A}^2{}_{\mathbf{\Phi}_{0(2)}}\end{matrix}\right| = \frac{\kappa_2 a_{42} a_{63}}{\phi_2^2}(\phi_2 a_{63} - \phi_3 a_{52}) \neq 0$$

при

$$a_{52}\phi_3 \neq a_{63}\phi_2.$$

Таким образом, в данном варианте модальная управляемость по выходу в смысле достаточного условия (16) имеет место при условии

$$\begin{cases}\phi_2 \neq 0,\\ a_{52}\phi_3 \neq a_{63}\phi_2.\end{cases}$$

4.3. Вариант третий. Специальный вид

Назначим желаемое значение переменного коэффициента $\mathbf{G}_0$ из (19)

$$\mathbf{G}_0^* = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Покажем, что оно может быть получено при соответствующем выборе матрицы $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}_{1(3)}$. Для этого по схеме (17) составим уравнение

$$\mathbf{\Phi}_{1(3)}\mathbf{G}_1 = \mathbf{H}_1,$$

где

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0^{\perp L}\mathbf{C}_0^{\perp R} = -\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = (\mathbf{B}_0^{+} + \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_0^{\perp L})\mathbf{C}_0^{\perp R} - \mathbf{G}_0^* = -\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Т.к. $\mathrm{rank}(\mathbf{G}_1 \in \mathbb{R}^{3\times 2}) = 2$, это уравнение разрешимо. Для обеспечения матрице $\mathbf{\Phi}_{1(3)}$ заданного спектра $\{\phi_1, \quad \phi_2, \quad \phi_3\}$ сформируем пару матриц

$$\mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}} = \mathbf{H}_1\mathbf{G}_1^{+} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}} = \mathbf{G}_1^{\perp L} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

и по формуле Аккермана [5], [11], [12] рассчитаем для нее модальный наблюдатель

$$\mathbf{L}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}} = \prod_{i=1}^{3}(\mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}} - \phi_i\mathbf{I}_3)\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}}\\ \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}}\mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}}\\ \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}}\mathbf{A}^2{}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$
$$= [-\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 \quad \phi_1\phi_2 + \phi_2\phi_3 + \phi_3\phi_1 \quad -\phi_1\phi_2\phi_3]^T.$$

Итак, задается матрица $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}_{1(3)}$, имеющая специальный вид:

$$\mathbf{\Phi}_{1(3)} = \mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}} - \mathbf{L}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}}\mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{1(3)}} = \begin{bmatrix} \phi_1+\phi_2+\phi_3 & 1 & 0 \\ -\phi_1\phi_2-\phi_2\phi_3-\phi_3\phi_1 & 0 & 1 \\ \phi_1\phi_2\phi_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для этой матрицы коэффициенты из (19)

$$\mathbf{G}_{0(3)} = \mathbf{G}_0^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} a_{42} & 0 \\ a_{52} & 0 \\ 0 & a_{63} \end{bmatrix}$$

в соответствии с (12) приводят к разрешимому относительно $\mathbf{\Phi}_0$ уравнению (10), а пара матриц (15)

$$\mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_{0(3)}} = \mathbf{H}_0\mathbf{G}_{0(3)}^+ = \begin{bmatrix} a_{42} & 0 & 0 \\ a_{52} & 0 & 0 \\ 0 & a_{63} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(3)}} = \mathbf{G}_{0(3)}^{\perp L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

является полностью наблюдаемой, т.к.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(3)}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(3)}}\mathbf{A}_{\mathbf{\Phi}_{0(3)}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{\Phi}_{0(3)}}\mathbf{A}^2{}_{\mathbf{\Phi}_{0(3)}} \end{vmatrix} = -a_{52}a_{63}^2 < 0.$$

Таким образом, в данном варианте модальная управляемость по выходу в смысле достаточного условия (16) имеет место всегда.

Третий вариант показал, что рассматриваемая тройка матриц $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ полностью модально управляема по выходу. При назначении диагональной $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}_{1(1)}$ и верхней треугольной $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}_{1(2)}$ матриц этот факт был неочевиден. Для доказательства полной модальной управляемости по выходу потребовалось получить специальный вид матрицы $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{\Phi}_{1(3)}$.

5. Заключение

На основании идеи Ван-дер-Воуда и аналитического декомпозиционного метода полного размещения полюсов в работе получено достаточное условие модальной управляемости по выходу линейных динамических систем при применении декомпозиционного метода управления по выходу. Показано, что это условие зависит от вида матриц с желаемыми спектрами на верхних (первом, втором и т.д.) уровнях декомпозиции. Диагональный вид этих матриц зачастую не обеспечивает модальной управляемости по выходу. Предложены варианты назначения данных матриц в треугольном или клеточном виде (с сохранением собственных значений на главной диагонали), а также их расчета из специальных матричных уравнений. Эти варианты позволяют получить полную модальную управляемость по выходу как при некоторых ограничениях на полюса в желаемом спектре и их комбинации с параметрами системы, так и без каких-либо ограничений. Результаты математического моделирования подтверждают целесообразность применения предлагаемых подходов.

Литература

[1] Леонов, Г.А., Шумафов, М.М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб: Изд-во СПбГУ, 2005.

[2] Гаджиев, М.Г., Мисриханов, М.Ш., Рябченко, В.Н., Шаров, Ю.В. Матричные методы анализа и управления переходными процессами в электроэнергетических системах. М: Издательский Дом МЭИ, 2019.

[3] Zubov, N.E., Zybin, E.Y., Mikrin, E.A., Misrikhanov, M.Sh., Proletarskii, A.V., and Ryabchenko, V.N. Output Control of a Spacecraft Motion Spectrum. J. Comput. Syst. Sci. Int., vol. 53, iss. 4, p. 576-586, 2014. DOI: 10.1134/S1064230714040170.

[4] Zubov, N.E., Lapin, A.V., Mikrin, E.A., and Ryabchenko, V.N. Output Control of the Spectrum of a Linear Dynamic System in Terms of the Van der Woude Method. Doklady Mathematics, vol. 96, iss. 2, p. 457-460, 2017. DOI: 10.1134/S1064562417050179.

[5] Зубов, Н.Е., Микрин, Е.А., Рябченко, В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 666 с.

[6] Zubov, N.E., Ryabchenko, V.N., Mikrin, E.A., and Misrikhanov, M.Sh. Output Control of the Spectrum of a Descriptor Dynamical System. Doklady Mathematics, vol. 93, iss. 3, p. 259-261, 2016. DOI: 10.1134/S106456241603008X.

[7] Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Misrikhanov, M.Sh., and Ryabchenko, V.N. Stabilization of Coupled Motions of an Aircraft in the Pitch-Yaw Channels in the Absence of Information about the Sliding Angle: Analytical Synthesis. J. Comput. Syst. Sci. Int., vol. 54, iss. 1, p. 93-103, 2015. DOI: 10.1134/S1064230715010153.

[8] Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Misrikhanov, M.Sh., and Ryabchenko, V.N. Output control of the Longitudinal Motion of a Flying Vehicle. J. Comput. Syst. Sci. Int., vol. 54, iss. 5, p. 825-837, 2015. DOI: 10.1134/S1064230715040140.

[9] Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Ryabchenko, V.N., and Fomichev, A.V. Synthesis of Control Laws for Aircraft Lateral Motion at the Lack of Data on the Slip Angle: Analytical Solution. Russian Aeronautics, vol. 60, iss. 1, p. 64-73, 2017. DOI: 10.3103/S106879981701010X.

[10] Zubov, N.E., Mikrin, E.A., Ryabchenko, V.N., and Proletarskii, A.V. Analytical Synthesis of Control Laws for Lateral Motion of Aircraft. Russian Aeronautics, vol. 58, iss. 3, p. 263-270, 2015. DOI: 10.3103/S1068799815030034.

[11] Zubov, N.E., Vorob'eva, E.A., Mikrin, E.A., Misrikhanov, M.Sh., Ryabchenko, V.N., and Timakov, S.N. Synthesis of Stabilizing Spacecraft Control Based on Generalized Ackermann's Formula. J. Comput. Syst. Sci. Int., vol. 50, iss. 1, p. 93-103, 2011. DOI: 10.1134/S1064230711010199.

[12] Микрин, Е.А., Зубов, Н.Е., Лапин, А.В., Рябченко В.Н. Аналитическая формула вычисления регулятора для линейной SIMO-системы. Дифференциальные уравнения и процессы управления, № 1, с. 1-11, 2020.

On relation between modal controllability of dynamic MIMO-system by output and a type of matrices with desirable spectra

Zubov N.E.[1,*], Lapin A.V.[1,**], Ryabchenko V.N.[1,2,***]

[1]Bauman MSTU, Moscow, Russia
[2]AJSC «RDC at FGC of UES», Moscow, Russia

[*]Nik.Zubov@gmail.com
[**]AlexeyPoeme@yandex.ru
[***]Ryabchenko.VN@yandex.ru

Abstract. We consider a task of providing the modal controllability by output vector in linear dynamic systems at not completely measured vector of state applying decomposition method of control synthesis based on Van der Woude approach. It is typical that at meeting the condition «dimension of vector of control plus dimension of vector of observe is more than dimension of object of control» modal controllability of closed-loop system as a whole is provided not for all possible types of matrices with desirable spectrum which are assigned or calculated within decomposition of multi-dimension systems. It is shown that modal controllability by output is determined by whether a matrix with whatever desirable spectrum at zero level exists which provides a solvability of linear matrix equation of relation between matrices of controllers by state and by output.

We offer keeping the desirable spectra to set specified matrices in triangular form or to calculate them basing on equations formed in a certain way. At such approach modal controllability by output is provided regardless of ratios between the parameters of system and spectra at top levels of decomposition and calculation of matrices with desirable spectra is simplified at bottom levels.

An example of applying the described approach is given at synthesis of controller by output for linear stationary automatic control system of 6th order containing 3 control inputs and 4 measured outputs. The results of mathematical simulation confirm the feasibility of application of suggested approaches.

Keywords: control by output vector, feedback, decomposition method of modal control, matrix with desirable spectrum, modal controllability.