ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория нелинейных колебаний

Почти автоморфная динамика в почти периодических коциклах с одномерным инерциальным многообразием

Михаил Аникушин

Кафедра прикладной кибернетики, Математико-механический факультет,

Санкт-Петербургский государственный университет.

demolishka@gmail.com

Аннотация. В работе изучается структура ω-предельных и минимальных множеств систем косого произведения, ассоциированных с почти периодическими коциклами, имеющими одномерные инерциальные многообразия. Основной целью является распространение на такие коциклы широко известных результатов В. Шэня (W. Shen) и И. И (Y. Yi) о почти автоморфности минимальных множеств, возникающих в случае скалярных почти периодических ОДУ и скалярных почти периодических параболических уравнений в одномерных областях. Демонстрируются приложения к ОДУ, уравнениям с запаздыванием и полулинейным параболическим уравнениям. Условия существования инерциальных многообразий даются геометрической теорией, изложенной в смежных работах автора. В приложениях проверка этих условий проводится с помощью недавно полученных автором новых вариантов частотной теоремы.

Ключевые слова: почти автоморфное решение, почти периодический коцикл, инерциальное многообразие, частотная теорема.

1 Введение

В работе изучается структура минимальных и ω-предельных множеств систем косого произведения, ассоциированных с почти периодическими коциклами, порожденными дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{v}(t) = Av(t) + BF(t, Cv(t)) + W(t), \tag{1.1}$$

где A, B, C линейные операторы, а нелинейность F и функция W зависят от t почти периодическим образом. В этом введении мы не уточняем пространства и области определения операторов, так как они зависят от конкретного класса задач. Отметим лишь, что наша теория может быть применена для обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$, уравнений с запаздыванием в $\mathbb{R}^n$, полулинейных параболических уравнений, а также параболических уравнений с граничным управлением и/или запаздыванием.

Отметим, что в условиях единственности ограниченного решения первая теорема Фавара (см. [25]) обеспечивает его почти периодичность. Для проверки условий теоремы Фавара, начиная с работ Б. П. Демидовича, наиболее часто использовались разные проявления свойства сильной монотонности, которое гарантировало предельную динамику, как у скалярного уравнения

$$\dot{x}(t) = -x(t) + f(t) \tag{1.2}$$

с почти периодической функцией $f(\cdot)$, т. е. существование единственного экспоненциально притягивающего почти периодического решения. Подробное развитие этого подхода имеется в монографиях Б. М. Левитана и В. В. Жикова (для параболических уравнений) и А. А. Панкова [31] (для вариационных неравенств). Различные модификации метода сильно монотонных операторов, существенно расширяющие область приложений, возникли в связи с открытием и развитием частотной теоремы и рассмотрены в работах В. А. Якубовича [38]; Ю. Н. Калинина и Ф. Райтманна [23]; М. М. Аникушина, Ф. Райтманна и А. О. Романова [9]. Отметим, что наиболее сильная абстрактная версия (в случае, когда уравнение порождает почти периодический коцикл) содержится в нашей работе [4].

Попытка выйти за пределы строго монотонной ситуации, сохранив при этом разрешимость в классе почти периодических функций, привела к изучению равномерно положительно устойчивых систем. Первые результаты в этом направлении принадлежат В. В. Жикову [25]. Современное состояние изложено в монографии Д. Н. Чебана [12].

С другой стороны, многие классы уравнений не обладают ни строгой монотонностью, ни равномерной положительной устойчивостью. В попытке изучить такие классы уравнений, были предложены ослабления понятия почти периодичности, например, понятие почти автоморфной функции, предложенное С. Бохнером. Отметим, что по существу аналогичный класс N-почти периодических функций (теперь — почти периодических функций Левитана), но из других соображений, был введен Б. М. Левитаном почти на 20 лет раньше [25]. Были построены примеры скалярных линейных неоднородных почти периодических уравнений, у которых все решения ограничены, но нет почти периодических решений [25, 32]. Как потом оказалось, все эти решения лежат в классе почти автоморфных функций или почти периодических функций Левитана.

Со второй половины 80-х выяснилось, что в почти периодических системах наблюдается новый тип аттракторов: так называемые странные нехаотические аттракторы (см. монографию У. Фейдела, С. П. Кузнецова и А. Пиковского [17]). Они обладают нерегулярной структурой, но при этом старший ляпуновский показатель оказывается неположительным (или даже отрицательным). Во избежание заблуждений стоит сразу отметить, что отрицательность ляпуновского показателя совершенно не означает наличие какой-либо устойчивости (см. П. Глендиннинг, Т. Ягер и Г. Келлер [18]) и на практике системы с такими аттракторами как раз демонстрируют пусть не экспоненциальную, но степенную или неравномерную экспоненциальную неустойчивость по начальным данным, которая и является основной причиной возникновения "странности". Большинство результатов в этом направлении, включающих как строгое математическое обоснование, так и численные эксперименты, относятся к системам косого произведения с дискретным временем над тором или окружностью, имеющим преимущественно одномерные слои (см., например, [18, 22]). Трудности численного моделирования, связанные как с неустойчивостью по начальным данным, так и с теоретико-числовыми явлениями, компенсируются возможностью получить строгие математические результаты, обосновывающие наблюдаемую в экспериментах картину.

В последнее десятилетие странные нехаотические аттракторы были обнаружены численным или экспериментальным образом в разных системах с непрерывным временем, находящихся под влиянием почти периодических сил. Например, такие аттракторы были обнаружены в цепи Чуа (см. К. Суреш, А. Прасад, К. Тамилмаран [33]) или при наблюдении в телескоп за мерцанием звезд (см. Дж. Ф. Линднер и др. [28]). Таким образом, странные нехаотические аттракторы представляют естественную реакцию на воздействие почти периодических сил, которая во многих случаях оказывается более естественной, чем простая почти периодичность (хотя и в этой ситуации могут возникать интересные явления [9, 8]).

Более детальное изучение явления почти автоморфности (см. монографию В. Шэня и И. И [32]), в частности минимальных почти автоморфных потоков, привело к выявлению многих интересных свойств. Так, например, минимальные почти автоморфные, но не почти периодические, потоки не обязательно строго эргодические; соответствующие минимальные множества могут иметь странную топологическую структуру: быть связными, но не локально связными (т. е. быть “разрывными”); у таких потоков могут отсутствовать свойства равномерной устойчивости и гиперболичности (см. [32]). Известно, что в символьной динамике почти автоморфные потоки, как правило, имеют положительную топологическую энтропию. Таким образом, возникает естественный вопрос:

Какова роль почти автоморфной динамики в формировании странных нехаотических аттракторов?

Похожие и другие вопросы можно найти в обзоре И. И [39]. Для дискретных систем тесная связь почти автоморфности и странных нехаотических аттракторов исследована в работе А. Хорбы и др. [22], где показано, что при некоторых условиях, возникновение почти автоморфного минимального множества гарантирует существование связанного с ним странного нехаотического аттрактора.

Для получения условий почти автоморфности в “порядковых[1] размерностях” больше единицы остро стоит проблема выбора так называемого максимального почти периодического фактора, так как базисный поток уже может не являться таковым. Более того, последнее замечание справедливо уже в случае периодических базисных систем и потоков на нетривиальном векторном расслоении ранга 1 над окружностью, которое, как известно, есть лента Мёбиуса (см. замечание 3.3). В более общей ситуации результаты М. Л. Картрайт и их обобщение, изложенное автором в монографии [24] (см. также [10]), подсказывают, что в $\mathbb{R}^n$ почти периодические решения могут иметь до $n-1$ дополнительной частоты и в этом случае соответствующий слой над элементом базисной системы будет фазовым пространтвом некоторого почти

[1]Хорошо известно, что некоторые скалярные параболические уравнения в одномерных областях, в силу наличия считающей нули функции Ляпунова и соответствующего порядка, демонстрируют такое же предельное поведение, как и скалярные уравнения на прямой.

периодического потока с $n-1$ частотой (аналог этого результата должен быть справедлив и для почти автоморфных решений). В отсутствие одномерности некоторый успех был достигнут В. Шэнем и И. И для линейно устойчивых минимальных множеств строго монотонных потоков (см. теорему 4.5 части 2 и теорему 4.6 части 3 в [32]), где максимальный фактор оказывается конечным расширением базисной системы. Здесь линейная устойчивость понимается как неположительность старшего ляпуновского показателя, что на практике служит критерием нехаотичности странного аттрактора. Тем не менее, нам неизвестны примеры (даже численного моделирования), показывающие возникновение странных нехаотических аттракторов в таких системах, хотя это может быть первый класс систем с непрерывным временем, в которых странные нехаотические аттракторы тесно связываются с почти автоморфностью. Другое направление связано с изучением монотонных выпуклых потоков в работе К. Нуньес, Р. Обайи и А. Санс [30], где получаются условия максимальности базисной системы для потока на минимальном множестве. Также некоторое описание удается получить в рамках равномерной положительной устойчивости [25, 10, 12]. Здесь уже возможна ситуация, при которой максимальный фактор не является конечным расширением базисной системы.

Основной целью этой работы является распространение результатов В. Шэня и И. И для скалярных почти периодических ОДУ и скалярных почти периодических параболических уравнений в одномерных областях (см. теоремы 3.4 и 3.5 главы 3 в [32]) на более широкий класс систем, допускающих одномерное инерциальное многообразие. При этом построение инерциальных многообразий опирается на результаты нашей работы [4], посвященной компактным коциклам в банаховых пространствах. В приложениях эта теория опирается на недавно полученные автором новые версии частотной теоремы для бесконечномерных стационарных задач [2, 7], которые существенно расширяют классические результаты А. Л. Лихтарникова и В. А. Якубовича [27, 26] и позволяют выявить связь многих работ по нелинейной динамике с частотными методами (см. раздел 4, а также [4, 5]). Отметим, что вариант частотной теоремы для нестационарных конечномерных задач был получен в работе Р. Фаббри, Р. Джонсона и К. Нуньес [16], а её обобщений на бесконечномерный случай до сих пор не проделано.

В приложениях мы не касаемся формулировок результатов для параболических уравнений с запаздыванием и/или граничным управлением, которые также покрываются нашей теорией (см. простой пример в [3]), ввиду отсутствия строгих подготовительных результатов общего типа связанных с той или иной постановкой таких задач, а также возможностью применения различных вариантов частотной теоремы. Из приведенных примеров в главе 4, а также работ [2, 7], легко прослеживается общая схема, которую необходимо реализовать для исследования этих классов задач.

Отметим, что простое описание структуры ω-предельных множеств (как периодических орбит) для одномерных периодических уравнений было впервые замечено Х. Л. Массерой [29], хотя по существу это описание представляет частный случай теоремы Пуанкаре-Бендиксона, так как в соответствующих системах косого произведения отсутствуют состояния равновесия. Первое развитие на не скалярные уравнения эти идеи получили с использованием частотных методов в работах Р. А. Смита [37], [36], обобщение которых проделано автором [3, 4]. В отличие от периодических уравнений, почти периодическая ситуация уже является менее тривиальной, что и будет продемонстрировано далее. Также отметим, что в автономной ситуации наш подход позволяет дать развитие теории Пуанкаре-Бендиксона (также зародившейся в работах Р. А. Смита [35, 34]), которое подробно изложено в [5].

Структура работы устроена следующим образом. В разделе 2 мы излагаем базовые сведения, касающиеся расширений динамических систем; понятий почти автоморфного и почти периодического потока, а также их связей. Далее мы рассматриваем понятие расслоения; коцикла и связанной с ним системы косого произведения, а также даём более конкретное доказательство теоремы В. Шэня и И. И для одномерных скалярных уравнений в случае расширений минимальных динамических систем с тривиально одномерным фазовым пространством (теорема 2.2). В разделе 3 мы кратко излагаем в удобной для нас форме основные результаты работы [4] по существованию инерциальных многообразий и обсуждаем связь с монотонной динамикой в случае одномерного инерциального многообразия. В разделе 4 мы приводим ряд приложений к обыкновенным дифференциальным уравнениям в $\mathbb{R}^n$, уравнениям с запаздыванием в $\mathbb{R}^n$ и полулинейным параболическим уравнениям, а также обсуждаем связь нашего подхода с другими работами.

2 Подготовительные сведения

Все необходимые нам понятия и факты из этого раздела можно найти в главе 1 монографии В. Шэня и И. И [32]. Поэтому все ссылки на леммы и теоремы из [32], приведенные без указания номера главы, относятся к главе 1.

2.1 Расширения динамических систем

Пусть $\vartheta^t\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, где $t \in \mathbb{R}$, есть динамическая система (поток) на полном метрическом пространстве $\mathcal{Q}$. В такой ситуации для потока будем использовать обозначение $(\mathcal{Q}, \vartheta)$. Напомним, что поток называется *минимальным*, если $\mathcal{Q}$ компактно и орбита всякой точки всюду плотна.

Для направленности α в $\mathbb{R}$ и точки $q \in \mathcal{Q}$ определим *обобщенный сдвиг* $T_\alpha q$ как

$$T_\alpha q := \lim_{t\in\alpha} \vartheta^t(q) \tag{2.1}$$

при условии, что указанный предел существует.

Точка $q \in \mathcal{Q}$ называется *почти периодической*, если для любых направленностей α' и β' в $\mathbb{R}$ существуют поднаправленности α и β соответственно такие, что для всех точек $q \in \mathcal{Q}$ сдвиги $T_\beta q$, $T_\alpha T_\beta q$ и $T_{\alpha+\beta} q$ существуют и $T_\alpha T_\beta q = T_{\alpha+\beta} q$. Здесь $\alpha + \beta$ есть сумма[2] направленностей. Хорошо известно, что замыкание орбиты почти периодической точки есть минимальное множество, каждая точка которого также почти периодическая.

Точка $q \in \mathcal{Q}$ называется *почти автоморфной*, если всякая направленность α' имеет поднаправленность α такую, что для всех $q \in \mathcal{Q}$ сдвиги $T_\alpha q$, $T_{-\alpha} T_\alpha q$ существуют и $T_{-\alpha} T_\alpha q = q$. Здесь $-\alpha := \{-t_k\}_{k\in A}$, если $\alpha = \{t_k\}_{k\in A}$ для направленного множества A. Поток $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ будем называть почти автоморфным, если $\mathcal{Q}$ компактно и существует почти автоморфная точка с всюду плотной орбитой. Отметим здесь, что всякий почти автоморфный поток минимален (см. предложение 2.13 в [32]). Ясно, что всякий минимальный почти периодический поток является почти автоморфным. Почти автоморфные точки почти автоморфного потока образуют остаточное множество (счетное пересечение открытых всюду плотных множеств). Если всякая точка в $\mathcal{Q}$ почти автоморфная, то такой поток является минимальным почти периодическим (обратное, очевидно, тоже справедливо).

Рассмотрим другое метрическое пространство $\mathcal{X}$ и пусть $\pi^t\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, где $t \in \mathbb{R}_+$ (соотв. $t \in \mathbb{R}$), есть полупоток (соотв. поток) на $\mathcal{X}$. Будем говорить, что $(\mathcal{X}, \pi)$ является расширением динамической системы $(\mathcal{Q}, \vartheta)$, если существует сюръективное непрерывное отображение $p\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Q}$ (*проекция расширения*) такое, что

$$p(\pi^t(x)) = \vartheta^t(p(x)) \tag{2.2}$$

выполнено для всех $x \in \mathcal{X}$ и $t \geq 0$ (соотв. $t \in \mathbb{R}$). Если при этом $(\mathcal{X}, \pi)$

[2]Пусть $\alpha = \{t_k\}_{k\in A}$ и $\beta = \{s_m\}_{m\in B}$, где A и B — направленные множества. Тогда очевидно $A \times B$ есть направленное множество и можно положить $\alpha + \beta := \{t_k + t_m\}_{(k,m)\in A\times B}$.

и $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ суть минимальные потоки и существует точка $q_0 \in \mathcal{Q}$ такая, что прообраз $p^{-1}(q_0)$ состоит из одной точки, то расширение $(\mathcal{X}, \pi)$ называется *почти автоморфным*. Почти автоморфный поток характеризуется тем свойством, что он является почти автоморфным расширением некоторого минимального почти периодического потока (см. теорему 2.14 в [32]). Последний в свою очередь называется *максимальным фактором* для $(\mathcal{X}, \pi)$ и является единственным с точностью до топологического сопряжения. Расширение называется *почти однозначным*[3], если $p^{-1}(q)$ состоит из одной точки для всех q из некоторого остаточного множества.

Пусть поток $(\mathcal{S}, \pi)$ является расширением потока $(\mathcal{Q}, \pi)$. Рассмотрим множество $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Q}$, определяемое как

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_0 := \{q_0 \in \mathcal{Q} \mid \text{для всех } x \in \mathcal{S}_{q_0}, q \in \mathcal{Q} \text{ и последовательности } t_k \in \mathbb{R} \\ \text{такой, что } \vartheta^{t_k}(q) \to q_0 \text{ найдется последовательность } x_k \in \mathcal{S}_q \\ \text{такая, что } \pi^{t_k}(x_k) \to x \text{ при } k \to +\infty\}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Если пространства $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Q}$ компактны, то множество $\mathcal{Y}_0$ является остаточным и инвариантным (см. лемму 2.16 в [32]). Следующая теорема устанавливает основной принцип получения почти автоморфности расширений минимальных почти периодических потоков (см. следствия 2.15 и 2.17 в [32]).

Теорема 2.1. *Минимальный поток $(\mathcal{S}, \pi)$ почти автоморфный тогда и только тогда, когда он является почти однозначным расширением некоторого минимального почти периодического потока $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ (максимального фактора). Кроме того, пусть $p\colon \mathcal{S} \to \mathcal{Q}$ есть проекция такого расширения. Тогда следующие условия равносильны:*

1. *Точка $x \in \mathcal{S}$ почти автоморфна.*
2. *$p(x) \in \mathcal{Y}_0$, где множество $\mathcal{Y}_0$ определено в* (2.3).
3. *$p^{-1}(p(x)) = \{x\}$.*
4. *$p(x)$ есть точка непрерывности отображения $\mathcal{Q} \ni q \mapsto p^{-1}(q) \in 2^{\mathcal{S}}$.*

В приложениях минимальный поток $(\mathcal{S}, \pi)$ получается сужением некоторого полупотока на минимальное множество, содержащееся (в силу известной теоремы Биркгофа) в компактном инвариантном множестве, на котором имеет место единственность продолжения траекторий. Для дальнейшего особенно важна характеризация почти автоморфных точек, которая доставляется пунктом 2 теоремы. Так как множество $\mathcal{Y}_0$ имеет динамическое описание

[3] От англ. *almost* 1-1.

(2.3), то для получения условий существования почти автоморфной динамики достаточно предоставить условия того, что в каждом слое над $q \in \mathcal{Y}_0$ имеется не более одной точки. В хорошо изученных ситуациях роль максимального фактора $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ играет базисный поток или некоторое его конечное расширение, что достигается путем наложения условий одномерности или различных вариантов монотонности, линейной устойчивости и выпуклости (см. [32, 30]). Случай, когда максимальный почти периодический фактор не является конечным расширением базисного потока, частично поддается изучению в рамках равномерной положительной устойчивости (см. [25, 12, 10]).

2.2 Коциклы и системы косого произведения

Пусть $p \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Q}$ есть непрерывное сюръективное отображение. Тогда тройка $(\mathcal{X}, \mathcal{Q}, p)$ называется *расслоением*, причем $\mathcal{X}$ называется *тотальным пространством* расслоения, $\mathcal{Q}$ называется *базой* расслоения, а p называется *проекцией*. Множество $\mathcal{X}_q := p^{-1}(q)$ называется *слоем* над q. Если все слои $\mathcal{X}_q$ суть векторные пространства, то расслоение называется *векторным*. (Векторное) расслоение называется *локально тривиальным*, если существует (банахово) пространство $\mathbb{F}$ такое, что для каждой точки $q \in \mathcal{Q}$ найдется открытая окрестность $\mathcal{U}$ и гомеоморфизм $\xi \colon p^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times \mathbb{F}$ (линейный по слоям в случае векторных расслоений). В этом случае ξ называется *локальной тривиализацией*, а окрестность $\mathcal{U}$ называется *тривиализующей окрестностью*. Если можно обойтись одной окрестностью $\mathcal{U} = \mathcal{X}$, то такое расслоение называется *тривиальным*.

Если полупоток (или поток) $(\mathcal{X}, \pi)$ есть расширение потока $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ и $p \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Q}$ есть проекция расширения, то $(\mathcal{X}, \mathcal{Q}, p)$ является расслоением. В случае, когда это расслоение тривиально, такая динамическая система называется *системой косого произведения* (иногда этот термин используется и в общем случае).

Пусть $\mathbb{E}$ есть вещественное банахово пространство и, как прежде, $\vartheta^t \colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, где $t \in \mathbb{R}$, есть поток на полном метрическом пространстве $\mathcal{Q}$. Семейство отображений $\psi^t(q, \cdot) \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, где $q \in \mathcal{Q}$ и $t \geq 0$, называется *коциклом* в $\mathbb{E}$ над базисной динамической системой $(\mathcal{Q}, \vartheta)$, если оно удовлетворяет свойствам

1. $\psi^0(q, v) = v$ и $\psi^{t+s}(q, v) = \psi^t(\vartheta^s(q), \psi^s(q, v))$ для всех $v \in \mathbb{E}$, $q \in \mathcal{Q}$, и $t, s \geq 0$.

2. Отображение $(t, q, v) \mapsto \psi^t(q, v)$ непрерывно как отображение из $\mathbb{R}_+ \times$

$\mathcal{Q} \times \mathbb{E}$ в $\mathbb{E}$.

Для краткости коцикл будем обозначать как (ψ, ϑ). Легко видеть, что с каждым коциклом в $\mathbb{E}$ связана система косого произведения (полупоток) на тривиальном расслоении $\mathcal{X} = \mathcal{Q} \times \mathbb{E}$, которая определяется соотношением $\pi^t(q, v) = (\vartheta^t(q), \psi^t(q, v))$ для $v \in \mathbb{E}$, $q \in \mathcal{Q}$ и $t \geq 0$. Ясно, что сужение такой системы на инвариантные подмножества (в частности на инерциальные многообразия) дает примеры систем расширения на нетривиальных расслоениях над $\mathcal{Q}$. В важных для нас ситуациях это сужение обладает обратимостью и получаемая динамическая система является потоком. Известно, что таким свойством обладают ω-предельные множества в случае параболических уравнений и уравнений с запаздыванием (см. [32]), а также инерциальные многообразия (см. [4, 3]).

Расслоение $(\mathcal{X}, \mathcal{Q}, p)$ будем называть *тривиально одномерным*, если оно изоморфно (как расслоение) тривиальному векторному расслоению $\mathcal{D}$ с базой $\mathcal{Q}$ и одномерными слоями, т. е. существует гомеоморфизм $\Pi \colon \mathcal{X} \to \mathcal{D}$ такой, что $\Pi(\mathcal{X}_q) = \mathcal{D}_q$ для всех $q \in \mathcal{Q}$.

Следующая теорема является частным случаем теоремы 3.4 из главы 3 в [32]. Для удобства читателя и дальнейшего обсуждения мы приведем здесь более конкретное доказательство пункта 1 и близких к нему фактов, демонстрирующих применение одномерной монотонности и принципа, заложенного в теорему 2.1. Для простоты мы не обсуждаем включение частотных модулей, которое также есть проявление одномерности (см. [10, 24]), и имеет место в рамках теоремы 2.2.

Теорема 2.2. *Пусть поток $(\mathcal{X}, \pi)$ есть расширение минимального потока $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ и $\mathcal{X}$ тривиально одномерно. Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ есть компактное минимальное множество для π. Тогда*

1. *Поток $(\mathcal{S}, \pi)$ является почти однозначным расширением потока $(\mathcal{Q}, \vartheta)$.*

2. *Поток $(\mathcal{S}, \pi)$ почти автоморфный тогда и только тогда, когда поток $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ почти автоморфный.*

3. *Поток $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ строго эргодический тогда и только тогда, когда $(\mathcal{S}, \pi)$ строго эргодический и $\mu(\mathcal{Y}_0) = 1$, где μ есть единственная эргодическая мера на $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Y}_0 = \{q \in \mathcal{Q} \mid \#(p^{-1}(q) \cap \mathcal{S}) = 1\}$.*

Кроме того, ω-предельное (соотв. α-предельное) множество всякой ограниченной вперед (соотв. назад) траектории содержит не более двух различных минимальных множеств.

Доказательство. Пусть $p\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Q}$ есть проекция расширения. Так как $\mathcal{X}$ тривиально одномерно, то существует гомеоморфизм $h\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Q} \times \mathbb{R}$ такой, что $h(X_q) = \{q\} \times \mathbb{R}$ для всех $q \in \mathcal{Q}$. Тогда в слое $\mathcal{X}_q = p^{-1}(q)$ есть естественный линейный порядок[4] "$\leqslant$", индуцируемый из $h(X_q)$. Заметим, что π является строго монотонным относительно этого порядка в том смысле, что из того, что точки $x, y \in \mathcal{X}_q$ различны и $x \leq y$ следует[5] $\pi^t(x) < \pi^t(y)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Также заметим, что порядок непрерывен.

Сужение π на $\mathcal{S}$ есть поток $(\mathcal{S}, \pi)$. Рассмотрим множество $\mathcal{Y}_0$, определенное в (2.3). Покажем, что $p^{-1}(q) \cap \mathcal{S}$ состоит из одной точки для всех $q \in \mathcal{Y}_0$. Предполагая противное, имеем $q_0 \in \mathcal{Y}_0$ и хотя бы две различные точки в $\mathcal{S}_{q_0} = p^{-1}(q_0) \cap \mathcal{S}$, скажем x_1 и x_2. Не умаляя общности, будем считать, что $x_1 < x_2$. Пусть $x \in \mathcal{S}_{q_0}$ есть произвольная точка. В силу минимальности потока $(\mathcal{S}, \pi)$, имеется последовательность $t_k \to -\infty$ такая, что $\pi^{t_k}(x) \to x_1$ при $k \to +\infty$. Также, по определению множества $\mathcal{Y}_0$, найдется последовательность точек $x_k \in \mathcal{S}_{q_0}$ такая, что $\pi^{t_k}(x_k) \to x_2$ при $k \to +\infty$. Так как $x_1 < x_2$, то при всех достаточно больших k будет выполнено $\pi^{t_k}(x) < \pi^{t_k}(x_k)$, а значит, в силу упомянутой строгой монотонности, $x < x_k$. Таким образом, для всех $x \in \mathcal{S}_{q_0}$ множество точек $y \in \mathcal{S}_{q_0}$ со свойством $x < y$ не пусто. Но это противоречит тому, что в $\mathcal{S}_{q_0}$, в силу компактности, есть максимальный элемент. Таким образом $\mathcal{S}_q$ для всех $q \in \mathcal{Y}_0$ состоит из одной точки. Тогда поток $(\mathcal{S}, \pi)$ почти автоморфный в силу теоремы 2.1, что доказывает пункт 1 исходной теоремы.

Докажем пункт 2 теоремы. Очевидно, что из почти автоморфности $(\mathcal{S}, \pi)$ следует почти автоморфность $(\mathcal{Q}, \vartheta)$. Для доказательства обратного рассмотрим максимальный почти периодический фактор $(\mathcal{A}, \xi)$ для $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ и проекцию соответствующего расширения $\hat{p}\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{A}$. Пусть $\hat{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Q}$ есть остаточное множество почти автоморфных точек. Тогда множество $\hat{\mathcal{Y}} \cap \mathcal{Y}_0$ тоже остаточное. Отсюда легко видеть, что $p^{-1}(\hat{p}^{-1}(z)) \cap \mathcal{S}$ для всех $z \in \hat{p}(\hat{\mathcal{Y}})$ состоит из одной точки и поэтому $(\mathcal{S}, \pi)$ будет почти автоморфным расширением минимального почти периодического потока $(\mathcal{A}, \xi)$. Таким образом, поток $(\mathcal{S}, \pi)$ почти автоморфный.

[4] В общей ситуации рассматривается частичный порядок с некоторыми дополнительными свойствами.

[5] В данном случае строгое неравенство означает просто не совпадение и упорядоченность точек, хотя в более общей ситуации оно может описываться принадлежностью внутренности некоторого конуса.

Пункт 3 теоремы доказывается аналогично теореме 3.4 главы 3 в [32].

Докажем последнее утверждение про ω-предельные множества. Для начала заметим, что любые два минимальных множества $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ упорядочены, т. е. для всех $q \in \mathcal{Q}$ и $x_i \in \mathcal{S}_i \cap p^{-1}(q)$, где $i \in \{1, 2\}$, одновременно выполняется либо $x_1 < x_2$, либо $x_2 < x_1$. Будем писать $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$ в первом случае и, соответственно, $\mathcal{S}_2 < \mathcal{S}_1$ во втором. Действительно, пусть для данного $q \in \mathcal{Q}$, например, выполнены соотношения $x_1^- < x_2$ и $x_2 < x_1^+$, где $x_1^-, x_2^+ \in \mathcal{S}_1 \cap p^{-1}(q)$ есть минимальный и максимальный элементы соответственно, а точка $x_2 \in \mathcal{S}_2 \cap p^{-1}(q)$ выбрана произвольно. В силу минимальности, найдется последовательность $t_k \to +\infty$ такая, что $\pi^{t_k}(x_1^+) \to x_1^-$ при $k \to +\infty$. Считаем, переходя к подпоследовательности (если это необходимо), что $\pi^{t_k}(x_2) \to \overline{x}_2$ и $\pi^{t_k}(x_1^-) \to \overline{x}_1$ для некоторых $\overline{x}_i \in \mathcal{S}_i \cap p^{-1}(q)$. Тогда из монотонности $\pi^{t_k}(x_1^-) < \pi^{t_k}(x_2) < \pi^{t_k}(x_1^+)$ и непрерывности порядка заключаем, что $\overline{x}_1 < \overline{x}_2 < x_1^-$, что противоречит минимальности x_1^-. Таким образом, $x_1 < x_2$ для всех $x_i \in \mathcal{S}_i \cap p^{-1}(q)$. Из непрерывности порядка, монотонности и минимальности также очевидно, что это неравенство одинаковое для всех $q \in \mathcal{Q}$, т. е. $\mathcal{S}_1 < \mathcal{S}_2$. Отсюда (аналогичным образом) легко вывести, что ω-предельное множество всякой ограниченной полутраектории не может содержать более двух различных минимальных множеств. $\square$

Замечание 2.1. Заметим, что если векторное расслоение $\mathcal{D}$ из определения тривиальной одномерности заменить на локально тривиальное, то на $\mathcal{X}$ не получится задать порядок глобально. Глобальность порядка существенна, например, в доказательстве пункта 1 теоремы 2.2: иначе не получится гарантировать то, что при возвращении на слой точки не сменят порядок на противоположный.

Замечание 2.2. В условиях теоремы 2.2 и в случае, когда $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ есть минимальный σ-периодический поток, всякое ω-предельное множество состоит из единственной σ-периодической траектории. Это утверждение известно как теорема конвергентности Массеры [29], которая получила развитие для не скалярных уравнений в работах Р. А. Смита [37, 36] и автора [3, 4]. Далее в замечании 3.3 мы покажем, что для σ-периодических систем при локально тривиальном $\mathcal{D}$ с одномерными слоями всякое ω-предельное множество будет состоять из, вообще говоря, 2σ-периодической траектории, что иллюстрирует проблему, описанную в замечании 2.1.

Замечание 2.3. Известно, что условия теоремы 2.2 в некотором смысле оптимальны. Приведем некоторые сведения из главы 3 в [32] на этот счет. Среди скалярных почти периодических ОДУ существуют примеры, когда поток на минимальном множестве почти автоморфный, но не почти периодический; когда ω-предельное множество содержит два минимальных множества; когда ω-предельное множество не минимально и содержит ровно одно минимальное подмножество; когда поток на минимальном множестве не строго эргодичен. В последнем (не строго эргодическом) случае из пункта 3 теоремы 2.2 вытекает, что множество почти автоморфных точек имеет нулевую меру по отношению к любой эргодической мере. Также известны примеры, когда наряду с этим свойством имеется сложная топологическая структура связного, но не локально связного множества. Заметим также, что в рамках теоремы 2.2 свойства равномерной устойчивости и гиперболичности (при предположениях гладкости) потока на минимальном множестве обеспечивают его почти периодичность. Поэтому почти автоморфные, но не почти периодические, потоки не обладают этими свойствами. Все это наводит на указанные во введении соображения о роли почти автоморфной динамики в формировании странных нехаотических аттракторов.

3 Инерциальные многообразия

В этом разделе мы будем рассматривать коцикл $\psi^t(q,\cdot)\colon \mathbb{E}\to\mathbb{E}$ в вещественном банаховом пространстве $\mathbb{E}$ над базисной динамической системой $(\mathcal{Q},\vartheta)$. Нам потребуется теорема существования инерциального многообразия для таких коциклов. Далее мы кратко изложим некоторые основные результаты нашей работы [4].

Через $\langle v,f\rangle := f(v)$ будем обозначать естественное спаривание между вектором $v\in\mathbb{E}$ и функционалом $f\in\mathbb{E}^*$. Назовем оператор $P\in\mathcal{L}(\mathbb{E};\mathbb{E}^*)$ *симметричным*, если $\langle v_1,Pv_2\rangle = \langle v_2,Pv_1\rangle$ для всех $v_1,v_2\in\mathbb{E}$. Для линейного подпространства $\mathbb{L}\subset\mathbb{E}$ скажем, что P *положительный* (соотв. *отрицательный*) на $\mathbb{L}$, если $\langle v,Pv\rangle>0$ (соотв. $\langle v,Pv\rangle<0$) для всех ненулевых векторов $v\in\mathbb{L}$.

Рассмотрим следующие предположения.

(H1) Для всех $q\in\mathcal{Q}$ найдется симметричный оператор $P(q)\in\mathcal{L}(\mathbb{E};\mathbb{E}^*)$ и разложение $\mathbb{E}$ в прямую сумму $\mathbb{E}=\mathbb{E}^+(q)\oplus\mathbb{E}^-(q)$ так, что $P(q)$ положителен на $\mathbb{E}^+(q)$ и отрицателен на $\mathbb{E}^-(q)$. Кроме того, нормы $P(q)$ в $\mathcal{L}(\mathbb{E};\mathbb{E}^*)$ равномерно ограничены:

$$\sup_{q\in\mathcal{Q}}\|P(q)\| = M_P < +\infty. \tag{3.1}$$

(H2) Для некоторого целого $j \geq 0$ мы имеем $\dim \mathbb{E}^-(q) = j$ при всех $q \in \mathcal{Q}$.

В рамках условия **(H1)** определим квадратичную форму $V_q(v) := \langle v, P(q)v \rangle$ для $q \in \mathcal{Q}$ и $v \in \mathbb{E}$.

Замечание 3.1. Рассмотрим оператор $P \in \mathcal{L}(\mathbb{E}; \mathbb{E}^*)$ и предположим, что $\mathbb{E}$ распадается в прямую сумму $\mathbb{E} = \mathbb{E}^+ \oplus \mathbb{E}^-$ так, что P положителен на $\mathbb{E}^+$ и отрицателен на $\mathbb{E}^-$. Предположим, что $\mathbb{E}^-$ конечномерно. Рассмотрим квадратичную форму $V(v) := \langle v, Pv \rangle$ оператора P. Определим V-ортогональный проектор $\Pi \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}^-$ следующим образом. Так как P симметричен и отрицателен на $\mathbb{E}^-$, то билинейная форма $(v_1, v_2) \mapsto -\langle v_1, v_2 \rangle$ задает скалярное произведение на $\mathbb{E}^-$. Всякому $v \in \mathbb{E}$ соответствует линейный функционал $\langle \cdot, Pv \rangle$ на $\mathbb{E}^-$ и, по теореме Риса, существует единственный элемент $\Pi v \in \mathbb{E}^-$ такой, что $\langle \cdot, Pv \rangle = \langle \cdot, P\Pi v \rangle$. Отсюда и из того, что норма $\sqrt{-V(\cdot)}$ эквивалентна норме $\| \cdot \|_{\mathbb{E}}$ на $\mathbb{E}^-$, мы получаем ограниченность проектора Π. Кроме того, $\mathbb{E} = \operatorname{Ker} \Pi \oplus \mathbb{E}^-$ и $V(v) = V(v^+) + V(v^-)$, где $v = v^+ + v^-$ есть единственное разложение с $v^+ \in \operatorname{Ker} \Pi$ и $v^- \in \mathbb{E}^-$. Также ясно, что P положителен на $\operatorname{Ker} \Pi$. Таким образом, в рамках **(H1)** и **(H2)** мы всегда можем построить новые пространства $\mathbb{E}^+(q)$ и $\mathbb{E}^-(q)$, которые будут V_q-ортогональны (в указанном выше смысле) и соответствующий V_q-ортогональный проектор Π_q ограничен.

Пусть пространство $\mathbb{E}$ непрерывно вложено в некоторое гильбертово пространство $\mathbb{H}$. Будем отождествлять элементы $\mathbb{E}$ и $\mathbb{H}$ при таком вложении. Основным предположением будет следующее свойство сжатия относительно семейства квадратичных форм V_q.

(H3) Для некоторых чисел $\nu > 0, \delta > 0$ и $\tau_V \geq 0$ неравенство

$$e^{2\nu r} V_{\vartheta^r(q)}(\psi^r(q, v_1) - \psi^r(q, v_2)) - e^{2\nu l} V_{\vartheta^l(q)}(\psi^l(q, v_1) - \psi^l(q, v_2)) \leq \\ \leq -\delta \int_l^r e^{2\nu s} |\psi^s(q, v_1) - \psi^s(q, v_2)|^2_{\mathbb{H}} ds \tag{3.2}$$

выполнено для всех $q \in \mathcal{Q}$, $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$ и $r, l \geq 0$ таких, что $r - l \geq \tau_V$.

Замечание 3.2. Для нас несущественен тот факт, что пространство $\mathbb{H}$ гильбертово (достаточно банаховой структуры), но так удобно считать для обсуждений и приложений (в силу того, что во всех известных примерах $\mathbb{H}$ действительно оказывается гильбертовым пространством).

Следующее свойство равномерной липшицевости существенно для установления свойств экспоненциального притяжения.

(ULIP) Найдется константа $\tau_S \geq 0$ такая, что для всех $T > 0$ найдутся константы $C'_T > 0$ и $C''_T > 0$ такие, что при всех $q \in \mathcal{Q}$ и $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$ имеем

$$\|\psi^t(q, v_1) - \psi^t(q, v_2)\|_{\mathbb{E}} \leq C'_T |v_1 - v_2|_{\mathbb{H}} \text{ для } t \in [t_S, t_S + T] \tag{3.3}$$

и также

$$\|\psi^t(q, v_1) - \psi^t(q, v_2)\|_{\mathbb{E}} \leq C''_T \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}} \text{ для } t \in [0, T]. \tag{3.4}$$

Следующее условие мы будем называть *равномерной компактностью* коцикла. В приложениях оно вытекает из условия **(ULIP)** и сглаживающих свойств уравнений.

(UCOM) Найдется константа $\tau_{ucom} > 0$ такая, что множество $\psi^{\tau_{ucom}}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ предкомпактно (в $\mathbb{E}$) для всякого предкомпактного $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$ и ограниченного $\mathcal{B} \subset \mathbb{E}$.

Предположение **(UCOM)** вместе со следующим условием используется для установления непрерывной зависимости слоев инерциального многообразия от $q \in \mathcal{Q}$ (или, другими словами, структуры локально-тривиального расслоения).

(CD) Операторы $P(q)$ из **(H1)** зависят непрерывно от $q \in \mathcal{Q}$ в норме $\mathcal{L}(\mathbb{E}; \mathbb{E}^*)$ и проекторы $\Pi^d_q \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}^-(q)$ относительно разложения $\mathbb{E} = \mathbb{E}^+(q) \oplus \mathbb{E}^-(q)$ из **(H1)** зависят непрерывно от $q \in \mathcal{Q}$ в норме $\mathcal{L}(\mathbb{E})$.

Заметим, что в условии **(CD)** мы не предполагаем, что проекторы Π^d_q являются V_q-ортогональными. На практике пространства $\mathbb{E}^+(q)$ и $\mathbb{E}^-(q)$ получаются из экспоненциальной дихотомии некоторой линейной задачи. Поэтому мы называем проектор Π^d_q *проектором дихотомии* над q. Непрерывная зависимость проекторов Π^d_q от q гарантирует, что $\mathcal{D} = \bigcup_{q \in \mathcal{Q}} \{q\} \times \mathbb{E}^-(q)$ есть локально тривиальное векторное расслоение.

Как и **(CD)**, следующее условие используется для доказательства непрерывной зависимости слоев от $q \in \mathcal{Q}$.

(BA) Для всех $q \in \mathcal{Q}$ имеется ограниченная в прошлом траектория (над q) $w^*_q(\cdot)$ и константа $M_b > 0$ такая, что $\sup_{t \leq 0} \|w^*_q(t)\|_{\mathbb{E}} \leq M_b$ для всех $q \in \mathcal{Q}$.

Простой критерий проверки условия **(BA)** имеет место в случае, когда базисная система минимальна, и дается следующей известной леммой, доказательство которой мы приводим здесь для полноты.

Лемма 3.1. *Пусть поток* $(\mathcal{Q},\vartheta)$ *минимален. Предположим, что для некоторого* $q_0 \in \mathcal{Q}$ *и* $v_0 \in \mathbb{E}$ *имеется компактная полутраектория* $v_0(t) = \psi^t(q_0,v_0)$, *где* $t \geq 0$, *содержащаяся в некотором компакте* $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$. *Тогда для каждого* $q \in \mathcal{Q}$ *существует ограниченная полная траектория, содержащаяся в* $\mathcal{K}$.

Доказательство. Рассмотрим $q \in \mathcal{Q}$. В силу минимальности потока $(\mathcal{Q},\vartheta)$ найдется последовательность $t_k \to +\infty$ такая, что $\vartheta^{t_k}(q_0) \to q$ при $k \to +\infty$. По условию леммы, для некоторого компактного множества $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}$ имеем $v_0(t) \in \mathcal{K}$ при всех $t \geq 0$. Положим $v_k(t) := v_0(t+t_k)$ для $t \geq -t_k$. Так как $v_k(t) \in \mathcal{K}$ при всех $t \geq -t_k$, то можно выделить подпоследовательность (мы сохраняем индекс k) такую, что $v_k(l)$ сходится к некоторому $\overline{v}_l \in \mathcal{K}$ при $k \to +\infty$ для всех $l = -1,-2,\ldots$. Легко видеть, что функция $v^*(t) := \psi^{t+l}(q,\overline{v}_l)$ для $t \geq l$ корректно определена и является полной траекторией коцикла в q, причем $v_k(t) \to v^*(t)$ при $k \to +\infty$ и всех $t \in \mathbb{R}$. Отсюда $v^*(t) \in \mathcal{K}$ при всех $t \geq 0$ и траектория $v^*(\cdot)$ — искомая. □

Обозначим через $p_{\mathcal{Q}}\colon \mathcal{Q}\times\mathbb{E} \to \mathcal{Q}$ и $p_{\mathbb{E}}\colon \mathcal{Q}\times\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ естественные проекции на $\mathcal{Q}$ и $\mathbb{E}$ соответственно. Пусть ϱ есть метрика на $\mathcal{Z} := \mathcal{Q}\times\mathbb{E}$, определенная как сумма метрик на $\mathcal{Q}$ и $\mathbb{E}$. Через $(\mathcal{Z},\pi)$ обозначим систему косого произведения (полупоток), ассоциированную с коциклом (ψ,ϑ). Рассмотрим также множество $\mathcal{D} = \bigcup_{q\in\mathcal{Q}}\{q\}\times\mathbb{E}^-(q)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть поток* $(\mathcal{Q},\vartheta)$ *минимален и для коцикла* (ψ,ϑ) *выполнены условия* ***(H1)***, ***(H2)***, ***(H3)***, ***(UCOM)***, ***(ULIP)*** *и* ***(CD)***. *Предположим, что полупоток* $(\mathcal{Z},\pi)$ *имеет ограниченную в будущем траекторию. Тогда существует подмножество* $\mathfrak{A} \subset \mathcal{Z}$, *удовлетворяющее свойствам*

1. *Всякий слой* $\mathfrak{A}_q = p_{\mathcal{Q}}^{-1}(q)\cap\mathfrak{A}$ *является* j*-мерным липшицевым подмногообразием в* $\mathcal{Z}_q$, *причем* V_q*-ортогональный проектор* $\Pi_q\colon p_{\mathbb{E}}(\mathfrak{A}_q) \to \mathbb{E}^-(q)$ *осуществляет билипшицев гомеоморфизм и непрерывно зависит от* q *в* $\mathcal{L}(\mathbb{E})$.

2. *Множество* $\mathfrak{A}$ *инвариантно и сужение* π *на* $\mathfrak{A}$ *есть поток* $(\mathfrak{A},\pi)$.

3. *Отображение* $\Pi\colon \mathfrak{A} \to \mathcal{D}$, *действующее по правилу* $(q,v) \mapsto (q,\Pi_q v)$, *задает изоморфизм между* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathcal{D}$ *как расслоений над* $\mathcal{Q}$ *с естественной проекцией* $p_{\mathcal{Q}}$.

4. Существует константа $M_{track} > 0$ *такая, что для всякого* $x \in \mathcal{Z}$ *имеется* $x^* \in \mathfrak{A}_{p_{\mathcal{Q}}(x)}$ *такой, что*

$$\varrho(\pi^t(x), \pi^t(x^*)) \leq M_{track} \cdot \operatorname{dist}(x, \mathfrak{A}_{p_{\mathcal{Q}}(x)})e^{-\nu t} \text{ для всех } t \geq 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из результатов работы [4]. Существование множества $\mathfrak{A}$ и пункт 1 теоремы вытекает из теоремы 2.3.1 (существование), леммы 3.1.1 (липшицевость) и леммы 3.2.1 (непрерывная зависимость Π_q). Пункт 2 вытекает из теоремы 3.3.2. Пункт 3 вытекает из леммы 3.2.3 и теоремы 3.2.1. Пункт 4 получается из теоремы 3.1.1 и следствия 3.2.1. □

Множество $\mathfrak{A}$ из теоремы 3.1 будем называть инерциальным многообразием полупотока $(\mathcal{Z}, \pi)$. Заметим, что в силу пункта 3 теоремы при $j = 1$ инерциальное многообразие $\mathfrak{A}$ будет тривиально одномерным если и только если $\mathcal{D}$ есть тривиальное векторное расслоение. Мы уже отмечали (см. замечание 2.1), что эта тривиальность существенна для задания глобального порядка. Посмотрим на это с другой стороны.

При $j = 1$ множество $\mathcal{C}_q = \{v \in \mathbb{E} \mid V_q(v) \leq 0\}$ есть одномерный квадратичный конус в $\mathbb{E}$, который представляется в виде объединения двух своих симметричных частей C_q^+ и C_q^-, которые являются замкнутыми выпуклыми конусами. Каждый из этих конусов, например C_q^+, задает частичный порядок в $\mathbb{E}$ (или в соответствующем слое $\mathcal{Z}_q$): будем писать $v \leqslant w$, если $w - v \in \mathcal{C}_q^+$ и $v < w$, если $w - v \in \operatorname{Int} C_q^+$. Для задания (с помощью этих конусов) в каждом слое $\mathcal{Z}_q = \{q\} \times \mathbb{E}$ частичного порядка, который был бы согласован с топологией, мы должны выбрать семейство конусов C_q^+, непрерывно зависящее от $q \in \mathcal{Q}$. Это равносильно тому, чтобы выбрать в каждом пространстве $\mathbb{E}^-(q)$ по ненулевому вектору ξ_q, непрерывно зависящему от q. Но последнее равносильно тривиальности векторного расслоения $\mathcal{D}$. В случае возможности задания глобального порядка условие **(H3)** (при $\tau_V = 0$) гарантирует строгую монотонность коцикла (или соответствующего полупотока) относительно этого порядка и мы имеем ситуацию, встречающуюся в монотонной динамике [32].

Замечание 3.3. В случае нетривиального расслоения $\mathcal{D}$ некоторые проблемы возникают уже для периодических базисных систем: $\mathcal{D}$ (и, как следствие, $\mathfrak{A}$) может оказаться лентой Мёбиуса и потому отображение Пуанкаре не будет кусочно монотонным. Тем не менее, используя поднятие на двулистное накрытие, можно показать, что всякое ω-предельное множество состоит из единственной периодической траектории, которая возможно будет субгармонической с вдвое большим, чем у базисной системы, периодом. Действительно, пусть $(\mathcal{Q},\vartheta)$ есть минимальный σ-периодический поток, а расслоение $\mathfrak{A}$ (с одномерными слоями) топологически устроено как лента Мёбиуса. Тогда существует двулистное накрытие $\hat{p}\colon \mathcal{Q}\times\mathbb{R}\to\mathfrak{A}$. Причем, можно считать, что слои отображаются в слои (но над разными точками базы!) и для фиксированного $q_0\in\mathcal{Q}$ выполнено $\hat{p}(\{q_0\}\times\mathbb{R})=\mathfrak{A}_{q_0}$. Пусть $x_0\in\mathfrak{A}_{q_0}$ и траектория $x(t)=\pi^t(q_0,x_0)$, где $t\geq 0$, не периодическая (ни с каким периодом). Тогда её поднятие (для любого из прообразов) $\hat{x}(t)$ не имеет самопересечений в силу тождества $\hat{p}(\hat{x}(t))=x(t)$ для всех $t\geq 0$. Значит последовательность её возвращений на слой $\{q_0\}\times\mathbb{R}$ (можно считать, что возвращение происходит в моменты времени $t=2\sigma k$, где $k=0,1,2,\dots$) монотонна и ограничена. Пусть $\overline{x}\in\{q_0\}\times\mathbb{R}$ есть предельная точка этой последовательности. Из того, что $x(t+2\sigma k)=\pi^t(\hat{p}(\hat{x}(2\sigma k)))\to\pi^t(\hat{p}(\overline{x})$ равномерно по $t\in[0,2\sigma]$, очевидно, что $\hat{p}(\overline{x})$ соответствует 2σ-периодической орбите потока $(\mathfrak{A},\pi)$, совпадающей с ω-предельным множеством точки x_0. Если же точка x_0 была периодической, то рассмотрение поднятия показывает, что 2σ является её периодом.

Таким образом, в случае нетривиального векторного расслоения $\mathcal{D}$ и σ-периодических потоков $(\mathcal{Q},\vartheta)$ всякое ω-предельное множество $\mathcal{S}$ ограниченной траектории состоит из, вообще говоря, 2σ-периодической орбиты. Если 2σ есть минимальный период такой орбиты, то каждый слой $\mathcal{S}_q$ состоит из двух точек. В терминах теоремы 2.1 это означает, что $(\mathcal{Q},\vartheta)$ не является максимальным почти периодическим фактором для $(\mathcal{S},\pi)$. Поэтому на тривиальную одномерность, заложенную в теорему 2.1, можно смотреть так: она гарантирует, что $(\mathcal{Q},\vartheta)$ будет максимальным почти периодическим фактором для сужения потока на всякое минимальное множество.

4 Приложения к дифференциальным уравнениям

В этом разделе мы рассмотрим приложения к коциклам, порожденным обыкновенными дифференциальными уравнениями в $\mathbb{R}^n$ (подраздел 4.1), уравнениями с запаздыванием в $\mathbb{R}^n$ (подраздел 4.2), полулинейными параболическими уравнениями (подраздел 4.3). Построение коцикла связано с компактификацией уравнения посредством рассмотрения предельных (в некотором смысле) векторных полей, составляющих компактное множество $\mathcal{Q}$. Оператор сдвига на этих предельных векторных полях есть поток (поток Бебутова), который в случае почти периодических уравнений играет роль минимального (почти периодического) потока $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ из предыдущих разделов.

Отметим, что используемое далее понятие почти периодической функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{F}$ понимается в смысле Бора, т. е. из всякой последовательности $\{t_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{s_k\}$ такую, что $f(t+s_k)$ сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}$ к некоторой функции. Функция $f(\cdot)$ называется *почти автоморфной*, если для всякой последовательности $\{t_k\}$ найдется подпоследовательность $\{s_k\}$ такая, что для некоторой функции $g(\cdot)$ пределы

$$\lim_{k\to+\infty} f(t+s_k) = g(t) \quad \text{и} \quad \lim_{k\to+\infty} g(t-s_k) = f(t) \tag{4.1}$$

существуют поточечно. Если $f(\cdot)$ вдобавок равномерно непрерывна и ограничена, то она называется *равномерной почти автоморфной* функцией.

Во всех следующих подразделах будут получены частотные условия существования постоянного оператора P, удовлетворяющего **(H1)** относительно постоянного разложения $\mathbb{E} = \mathbb{E}^+ \oplus \mathbb{E}^-$ (в частности, расслоение $\mathcal{D} = \mathcal{Q} \times \mathbb{E}^-$ есть тривиальное расслоение), а также условиям **(H2)** с некоторым j и **(H3)**. Отсюда в случае $j = 1$ можно заключить, что всякое минимальное множество ассоциированного с коциклом полупотока $(\mathcal{Q} \times \mathbb{E}, \pi)$ почти автоморфно и ω-предельное множество всякой ограниченной в будущем траектории содержит не более двух минимальных множеств. Действительно, существование минимального множества или ограниченной в будущем траектории вместе с теоремой 3.1 гарантируют существование одномерного инерциального многообразия $\mathfrak{A}$, которое одномерно тривиально в силу тривиальности $\mathcal{D}$. Из пункта 4 теоремы 3.1 легко видеть, что $\mathfrak{A}$ содержит все компактные инвариантные множества. В силу пункта 2 этой же теоремы, сужение π на $\mathfrak{A}$, т. е. $(\mathfrak{A}, \pi)$, есть поток. Применение теоремы 2.2 к этому потоку и дает требуемое. В силу теоремы Биркгофа, всякое компактное инвариантное множество потока $(\mathfrak{A}, \pi)$ содержит минимальное и потому наличие ограниченной в будущем траектории влечет существование почти автоморфного минимального множества. Пусть x есть почти автоморфная точка из этого множества и рассмотрим соответствующую ей $\mathbb{E}$-значную функцию $v(t) := p_{\mathbb{E}}(\pi^t(x))$, где $t \in \mathbb{R}$. В рассматриваемых примерах эта функция окажется равномерно почти автоморфным решением соответствующего точке $p_{\mathcal{Q}}(x) \in \mathcal{Q}$ предельного уравнения. Заметим, что это не обязательно влечет существование равномерно почти автоморфных решений исходного уравнения, так как элемент $q_0 \in \mathcal{Q}$, соответствующий этому исходному уравнению, может не попадать в остаточное множество (см. теорему 2.1) элементов q, над которыми проходит почти автоморфная орбита. Это еще раз подчеркивает важность рассмотрения совокупности всех предельных уравнений в рамках неавтономной динамики.

Приведенные ниже результаты существенно опираются на недавно полученные автором новые версии частотной теоремы, охватывающие полулинейные параболические уравнения [7] и уравнения с запаздыванием [2]. Отметим, что для построения квадратичных функционалов в случае уравнений с запаздыванием необходимо изучение постановки таких уравнений в подходящем гильбертовом пространстве, несмотря на то, что получаемый функционал во всем этом пространстве, вообще говоря, не определен. Другая польза от такой постановки заключается в получении оценок размерности с помощью геометрии гильбертова пространства (см. [6]).

Для сведений из общей теории C_0-полугрупп мы отсылаем читателя к монографии К. Энгеля и Р. Нагеля [15]. Базовые сведения, касающиеся параболических уравнений, рассмотрены в монографии Д. Хенри [21]. Более современный взгляд и обзор работ по бесконечномерным динамическим системам содержится в монографии И. Д. Чуешова [14]. Классический подход к уравнениям с запаздываниям изложен в монографии Дж. Хейла [19]. Теория полугрупп для линейных уравнений с запаздыванием в гильбертовых пространствах изложена в монографии А. Баткаи и С. Пьяеццеры [11]. Обзор работ и подход для нелинейных уравнений с запаздыванием содержится в работе автора [6].

4.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим следующий класс ОДУ в $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{v}(t) = Av(t) + BF(t, Cv(t)) + W(t), \tag{4.2}$$

где A, B, C суть $n \times n$, $m \times n$ и $r \times n$ матрицы соответственно; $W \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ почти периодична (в смысле Бора), а $F \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$ есть нелинейная функция такая, что для некоторого $\Lambda > 0$ мы имеем

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)|_{\Xi} \leq \Lambda |y_1 - y_2|_{\mathbb{M}} \text{ при всех } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^r, t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Здесь пространства $\Xi = \mathbb{R}^m$ и $\mathbb{M} = \mathbb{R}^r$ снабжены некоторыми (не обязательно евклидовыми) скалярными произведениями.

Кроме того, мы предполагаем, что $F(t, y)$ почти периодична по t равномерно по y из компактных подмножеств в $\mathbb{R}^r$, т. е. для всякого подмножества $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^r$ функция $t \mapsto F(t, \cdot) \in C(\mathcal{K}; \mathbb{R}^m)$ почти периодична.

Пусть $\mathcal{Q}$ состоит из всех пар $(\overline{F}, \overline{W})$, где $\overline{F} \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^m)$ и $\overline{W} \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ таких, что для некоторой последовательности $t_k \in \mathbb{R}$ мы имеем $F(t + t_k, x) \to \overline{F}(t, x)$ и $W(t + t_k) \to \overline{W}(t)$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$ и x из компактных множеств. Эквивалентным образом можно сказать, что $\mathcal{Q}$ есть замыкание множества сдвигов

$$\mathcal{Q} = \mathrm{Cl}((F(\cdot + s, \cdot), W(\cdot + s)) \mid s \in \mathbb{R}), \tag{4.4}$$

где рассмотренные выше пространства непрерывных функций снабжены компактно-открытой топологией [6]. На $\mathcal{Q}$ имеется поток, задаваемый операторами сдвига $\vartheta^t \colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$, где $(\overline{F}(\cdot, \cdot), \overline{W}(\cdot)) \mapsto (\overline{F}(\cdot + t, \cdot), \overline{W}(\cdot + t))$. Поток $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ называется динамической системой Бебутова, а множество $\mathcal{Q}$ называется *оболочкой* функции (F, W). Множество $\mathcal{Q}$ можно стандартным образом наделить метрикой, превращающей его в метрическое пространство с указанной сходимостью. Можно также показать, что $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ есть минимальный почти периодический поток.

Теперь для всех $q = (\overline{F}, \overline{W}) \in \mathcal{Q}$ мы рассмотрим решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &\dot{v}(t) = Av(t) + B\overline{F}(t, Cv(t)) + \overline{W}(t), \\ &v(0) = v_0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

которое обозначим через $v(t, q, v_0)$. В силу (4.3) решение $v(t, q, v_0)$ единственно и существует при всех $t \in \mathbb{R}$. Стандартные рассуждения показывают, что семейство отображений $\psi^t(q, \cdot) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданное как

$$\psi^t(q, v_0) := v(t, q, v_0), \text{ где } v_0 \in \mathbb{R}^n, q \in \mathcal{Q} \text{ и } t \geq 0 \tag{4.6}$$

является коциклом в $\mathbb{R}^n = \mathbb{E} = \mathbb{H}$ над $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ и удовлетворяет **(ULIP)** с $\tau_S = 0$ [7]. Из **(ULIP)** мы сразу получаем, что **(UCOM)** выполнено в силу конечномерности $\mathbb{R}^n$.

Осталось предоставить условия для проверки **(H1)**, **(H2)**, **(H3)**. Для этого рассмотрим передаточную матрицу $W(p) = C(A - pI)^{-1}B$, определенную для p из резольвентного множества A. Для $\nu \in \mathbb{R}$ обозначим через $\mathbb{E}^s(\nu)$ и $\mathbb{E}^u(\nu)$ устойчивое и неустойчивое подпространства матрицы $A + \nu I$ соответственно. Имеет место следующая теорема [4].

[6] Нетрудно видеть, что для последовательности сдвигов почти периодической функции поточечная и равномерная сходимость эквивалентны.

[7] Непрерывную зависимость от q можно показать с помощью формулы вариации постоянной. См. также более общую теорему 3.2 в [20].

Теорема 4.1. *Предположим, что для некоторого $\nu > 0$ матрица A имеет ровно $j \geq 0$ собственных значений λ с $\operatorname{Re}\lambda > -\nu$ и не имеет собственных значений, лежащих на прямой $-\nu + i\mathbb{R}$. Пусть выполнено частотное условие*

$$|W(-\nu + i\omega)|_{\Xi^{\mathbb{C}} \to \mathbb{M}^{\mathbb{C}}} < \Lambda^{-1} \text{ для всех } \omega \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

*Тогда найдется оператор P такой, что коцикл (ψ, ϑ), порожденный уравнениями (4.5), удовлетворяет **(H1)** с $\mathbb{E}^- = \mathbb{E}^u(\nu)$ и $\mathbb{E}^+ = \mathbb{E}^s(\nu)$, **(H2)** с данным j и **(H3)** с данным ν, $\tau_V = 0$ и некоторым $\delta > 0$.*

При $j = 1$ имеют место указанные в начале раздела соображения о структуре минимальных и ω-предельных множеств ассоциированного с коциклом полупотока и существовании равномерно почти автоморфных решений.

4.2 Уравнения с запаздыванием в $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим следующий класс уравнений с запаздыванием в $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x}(t) = \widetilde{A}x_t + \widetilde{B}F(t, \widetilde{C}x_t) + W(t), \tag{4.8}$$

где $x_t(\theta) := x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, обозначает функцию прошлого; $\tau > 0$ есть некоторая константа; $\widetilde{A} \colon C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, $\widetilde{B} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и $\widetilde{C} \colon C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^r$ суть линейные ограниченные операторы и $F \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$ есть нелинейная непрерывная функция такая, что для некоторого $\Lambda > 0$ мы имеем

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)|_{\Xi} \leq \Lambda |y_1 - y_2|_{\mathbb{M}} \text{ при всех } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^r, t \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Здесь пространства $\Xi = \mathbb{R}^m$ и $\mathbb{M} = \mathbb{R}^r$ наделены (не обязательно евклидовыми) скалярными произведениями. Функция $W \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ предполагается почти периодической и $F(t, y)$ предполагается почти периодической по t равномерно по y из компактных подмножеств в $\mathbb{R}^r$.

Пусть $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ есть динамическая система Бебутова на оболочке (F, W), определяемая также, как и в разделе 4.1. В частности, $(\mathcal{Q}, \vartheta)$ есть минимальный почти периодический поток.

Теперь рассмотрим для всякого $q = (\overline{F}, \overline{W})$ уравнение

$$\dot{x}(t) = \widetilde{A}x_t + \widetilde{B}\overline{F}(t, \widetilde{C}x_t) + \overline{W}(t). \tag{4.10}$$

Так как $\overline{F}$ также удовлетворяет (4.9) с F замененным на $\overline{F}$, то для всех $\phi_0 \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ существует (и единственно) классическое решение $x(\cdot, q, \phi_0)$

для (4.10), которое является непрерывной функцией $x(\cdot, q): [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ такой, что $x(t, q) = \phi_0(t)$ для $t \in [-\tau, 0]$, $x(\cdot) \in C^1([0, +\infty); \mathbb{R}^n)$ и $x(t, q)$ удовлетворяет (4.10) при всех $t \geq 0$. Положим $\mathbb{E} := C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$. Тогда для всех $T \geq 0$ найдется константа $C''_T > 0$ такая, что неравенство

$$\|x_t(\cdot, q, \phi_1) - x_t(\cdot, q, \phi_2)\|_{\mathbb{E}} \leq C''_T \|\phi_1 - \phi_2\|_{\mathbb{E}} \tag{4.11}$$

выполнено для всех $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{E}$, $q \in \mathcal{Q}$ и $t \in [0, T]$.

Теперь рассмотрим гильбертово пространство $\mathbb{H} := \mathbb{R}^n \times L_2(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ с обычной нормой, которую мы обозначим через $|\cdot|_{\mathbb{H}}$, и оператор $A: \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, заданный как

$$(x, \phi) \overset{A}{\mapsto} \left(\widetilde{A}\phi, \frac{d}{d\theta}\phi\right), \tag{4.12}$$

где $(x, \phi) \in \mathcal{D}(A) := \{(x, \phi) \in \mathbb{H} \mid \phi(0) = x, \phi \in W^{1,2}(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)\}$. Ясно, что A замкнут. Кроме того, он является генератором некоторой C_0-полугруппы в $\mathbb{H}$, которую мы обозначим за $G(t)$ (см. [11], а также [6]). Определим ограниченный линейный оператор $B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{H}$ как $B\xi := (\widetilde{B}\xi, 0)$ и рассмотрим неограниченный оператор $C: \mathbb{H} \to \mathbb{R}^r$, где $C(x, \phi) := \widetilde{C}\phi$ для $\phi \in \mathbb{E}$. Теперь уравнение (4.8) может быть записано как эволюционное уравнение в $\mathbb{H}$:

$$\dot{v}(t) = Av(t) + BF(t, Cv(t)) + (W(t), 0). \tag{4.13}$$

Вместе с (4.13) мы также рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} &\dot{v}(t) = Av(t) + B\overline{F}(t, Cv(t)) + (\overline{W}(t), 0), \\ &v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

для всякого $q = (\overline{F}, \overline{W}) \in \mathcal{Q}$.

Пусть $\mathbb{E} = C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ вложено в $\mathbb{H}$ как $\phi \mapsto (\phi(0), \phi)$. Как и ранее, мы не различаем элементы $\mathbb{E}$ и их образы при таком вложении в $\mathbb{H}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.2. *Для всех $v_0 \in \mathbb{H}$ и $q = (\overline{F}, \overline{W})$ имеется единственное обобщенное решение $v(t, q, v_0)$ для (4.14), которое определено при всех $t \geq 0$. Для $v_0 \in \mathbb{E}$ это решение соответствует классическому решению $x(\cdot) = x(\cdot, q, v_0)$ уравнения (4.10) в том смысле, что $v(t) = x_t$ при всех $t \geq 0$, а другие обобщенные решения определяются этим свойством единственным образом. Кроме того, для $v_0 \in \mathbb{E}$ и $t \geq 0$ имеет место формула вариации постоянной в виде*

$$v(t) = G(t)v_0 + \int_0^t G(t-s)(B\overline{F}(s, Cv(s)) + (\overline{W}(s), 0))ds. \tag{4.15}$$

Кроме того, для всякого $T > 0$ найдется константа $C'_T > 0$ такая, что

$$\|v(t,q,v_1) - v(t,q,v_2)\|_{\mathbb{E}} \leq C_T |v_1 - v_2|_{\mathbb{H}} \tag{4.16}$$

выполнено при всех $v_1, v_2 \in \mathbb{H}$, $q \in \mathcal{Q}$ и $t \in [\tau, \tau + T]$.

Теперь рассмотрим коцикл (ψ, ϑ) в $\mathbb{E}$ над базисной системой $(\mathcal{Q}, \vartheta)$, порожденный решениями $v(t, q, v_0)$, т. е.

$$\psi^t(q, v_0) := v(t, q, v_0), \text{ где } v_0 \in \mathbb{E}, q \in \mathcal{Q} \text{ и } t \geq 0. \tag{4.17}$$

Непрерывная зависимость от q следует, например, из (4.15). Из условий (4.11) и (4.16) мы получаем, что (ψ, ϑ) удовлетворяет **(ULIP)** при $\tau_S = \tau$. Кроме того, из (4.11) мы получаем, что для всякого ограниченного в $\mathbb{E}$ множества $\mathcal{B} \subset \mathbb{E}$ множество $\psi^\tau(\mathcal{Q}, \mathcal{B})$ также ограничено в $\mathbb{E}$ и, в силу (4.10), оно также ограничено в $C^1([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ и, по теореме Арцела-Асколи, компактно в $\mathbb{E}$. Таким образом, условие **(UCOM)** выполняется при $\tau_{ucom} = \tau$.

Теперь обсудим проверку условий **(H1)**, **(H2)** и **(H3)**. По теореме Риса-Маркова-Какутани, существуют функции $a(\cdot)\colon [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ и $c(\cdot)\colon [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^{r \times n}$ ограниченной вариации такие, что для всех $\phi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ выполняется

$$A\phi = \int_{-\tau}^{0} da(\theta)\phi(\theta) \text{ and } C\phi = \int_{-\tau}^{0} dc(\theta)\phi(\theta). \tag{4.18}$$

Хорошо известно (см., например, [19]), что спектр линейной части в (4.8) (или, что то же самое[8], спектр оператора A) дискретный и определяется корнями $p \in \mathbb{C}$, имеющими конечную кратность, уравнения

$$\det\left(\int_{-\tau}^{0} da(\theta)e^{p\theta} - pI\right) = 0. \tag{4.19}$$

Кроме того, для всякого $\nu \in \mathbb{R}$ уравнение (4.19) имеет лишь конечное число корней с $\operatorname{Re} p > \nu$. Если для некоторого $\nu > 0$ уравнение (4.19) не имеет корней с $\operatorname{Re} p = -\nu$ и имеет ровно j корней с $\operatorname{Re} p > -\nu$, то существуют подпространства $\mathbb{E}^s(\nu)$ и $\mathbb{E}^u(\nu)$, где $\mathbb{E}^u(\nu)$ есть j-мерное корневое подпространство, соответствующее корням (4.19) с $\operatorname{Re} p > -\nu$, и $\mathbb{E}^s(\nu)$ есть дополнительное подпространство, соответствующее остальным корням, причем $\mathbb{E} = \mathbb{E}^s(\nu) \oplus \mathbb{E}^u(\nu)$ (см. [19]).

[8]Сужение полугруппы $G(t)$ на $\mathbb{E}$ является C_0-полугруппой в $\mathbb{E}$. В [19] изучен спектр генератора этой полугруппы, но, как нетрудно показать посредством явных вычислений (см. также [11]), он совпадает со спектром A. Для нас далее существенна именно дихотомия полугруппы в пространстве $\mathbb{E}$.

Теперь рассмотрим функции

$$\alpha(p) := \int_{-\tau}^{0} e^{p\theta} da(\theta) \text{ и } \gamma(p) = \int_{-\tau}^{0} e^{p\theta} dc(\theta). \tag{4.20}$$

Матричная функция $W(p) = \gamma(p)(\alpha(p) - pI)^{-1}\widetilde{B}$, которая может иметь полюса в корнях $p \in \mathbb{C}$ уравнения (4.19), называется *передаточной матрицей* тройки $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$. Это более удобная (для уравнений с запаздыванием) форма привычной операторной передаточной функции $W(p) = C(A - pI)^{-1}B$ тройки (A, B, C), где A, B и C из уравнения (4.13).

Следующая теорема доказана в работе [2].

Теорема 4.3. *Пусть для некоторого* $\nu > 0$ *уравнение* (4.19) *имеет ровно* j *корней с* $\operatorname{Re} p > -\nu$ *и не имеет корней с* $\operatorname{Re} p = -\nu$. *Кроме того, пусть выполнено частотное неравенство*

$$|W(-\nu + i\omega)|_{\Xi^{\mathbb{C}} \to \mathbb{M}^{\mathbb{C}}} < \Lambda^{-1} \text{ для всех } \omega \in \mathbb{R}. \tag{4.21}$$

Тогда найдется оператор $P \in \mathcal{L}(\mathbb{E}; \mathbb{E}^*)$ *такой, что коцикл* (ψ, ϑ), *порожденный уравнениями* (4.14), *удовлетворяет условиям* ***(H1)*** *с* $\mathbb{E}^+ = \mathbb{E}^s(\nu)$ *и* $\mathbb{E}^- = \mathbb{E}^u(\nu)$; ***(H2)*** *с данным* j *и* ***(H3)*** *с данным* ν, $\tau_V = 0$ *и некоторым* $\delta > 0$.

В частности, в условиях теоремы при $j = 1$ имеет место описание структуры минимальных множеств и ω-предельных множеств из соображений указанных в начале раздела и построение отсюда равномерно почти автоморфных решений.

Рассмотрим теперь некоторую конкретную реализацию частотного условия (4.21) для уравнений с малым запаздыванием. Эти результаты впервые изложены в нашей работе [2].

Рассмотрим уравнение (4.8) с $\widetilde{A} \equiv 0$ и тождественной $n \times n$-матрицей $\widetilde{B}$, т. е. уравнение вида

$$\dot{x}(t) = F(t, \widetilde{C}x_t), \tag{4.22}$$

где $F(t, y)$ почти периодична по t равномерно по y из компактных множеств и для некоторого $\Lambda > 0$ выполнено (4.9). Снабдим пространства $\Xi = \mathbb{R}^m$ и $\mathbb{M} = \mathbb{R}^r$ евклидовым скалярным произведением. Предположим также, что оператор $\widetilde{C}\colon C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^r$ имеет вид

$$\widetilde{C}\phi = \left(\int_{-\tau}^{0} \phi_{j_1}(\theta) d\mu_1(\theta), \ldots, \int_{-\tau}^{0} \phi_{j_r}(\theta) d\mu_r(\theta) \right), \tag{4.23}$$

где μ_k есть борелевская мера на $[-\tau, 0]$ с полной вариацией ≤ 1 и $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_r \leq n$ суть целые числа. В частности, положив $\mu_k = \delta_{-\tau_k}$ для некоторого $\tau_k \in [0, \tau]$, мы получаем дискретное запаздывание, так как $\int_{-\tau}^{0} \phi_{j_k}(\theta) d\mu_k(\theta) = \phi_{j_k}(-\tau_k)$.

Теперь рассмотрим (4.22) как систему управления в форме Лурье, записанную следующим образом:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + (F(t, \widetilde{C}x_t) - ax(t)) = \hat{A}x_t + \hat{B}\hat{F}(t, \hat{C}x_t). \tag{4.24}$$

Здесь $a > 0$ достаточно мало, $\hat{A}\phi = a\phi(0)$, $\hat{B}$ есть тождественная $n \times n$-матрица, $\hat{C}\phi = (\widetilde{C}\phi, \phi(0)) \in \mathbb{R}^{r+n}$ и $\hat{F}(t, y) = F(t, y_1, \ldots, y_r) - a(y_{r+1}, \ldots, y_{r+n})$. Ясно, что функция $\hat{F}(t, y)$ липшицева по y с константой $\Lambda + a$ равномерной по $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.4. *Предположим, что для уравнения* (4.22) *выполнено* (4.23) *и липшицева константа* Λ *из* (4.9) *для* F *вычисляется относительно евклидовых скалярных произведений в* Ξ *и* $\mathbb{M}$. *Пусть выполнено неравенство*

$$e\sqrt{r}\sqrt{1 + e^{-2}r^{-1}} \cdot \tau < \Lambda^{-1}. \tag{4.25}$$

Тогда теорема 4.3 применима для (4.24) *при* $j = n$ *и* $\nu = \tau^{-1}$ *для всех достаточно малых* $a > 0$.

Доказательство. Мы должны проверить частотное неравенство (4.21). Пусть $\hat{\alpha}(p)$, $\hat{\gamma}(p)$ суть функции из (4.20), соответствующие $\hat{A}$ и $\hat{C}$. Ясно, что

$$(\hat{\alpha}(p) - pI)^{-1}\hat{B} = (a - p)^{-1}I. \tag{4.26}$$

Заметим, что имеется ровно один ненулевой элемент в каждой строке матрицы $\hat{\gamma}(p)$. Отсюда следует, что имеется ровно $(n + r)$ ненулевых элементов в матрице $W(p) = \hat{\gamma}(p)(\hat{\alpha}(p) - pI)^{-1}\hat{B}$, которые имеют вид

$$\frac{\int_{-\tau}^{0} e^{p\theta} d\mu_k(\theta)}{a - p} \tag{4.27}$$

для всех $k = 1, \ldots, r + n$. Здесь $\mu_k = \delta_0$ для $k > r$. Кроме того, пусть $w_{kj}(p)$ для $k = 1, \ldots, r + n$ и $j = 1, \ldots, n$ есть соответствующий элемент матрицы $W(p)$. Заметим, что часть матрицы $W(p)$, относящаяся к $w(p)_{kj}$ для $k = r + 1, \ldots, r + n$ и $j = 1, \ldots, n$, есть диагональная матрица размера $n \times n$ с диагональными элементами $(a - p)^{-1}$. В силу того, что мы выбрали евклидовы скалярные произведения в $\Xi = \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{M} = \mathbb{R}^{r+n}$, норма $W(p)$ в

(4.21) есть спектральная норма $|\cdot|_2$. Таким образом, из описанной структуры $W(p)$ мы получаем

$$\begin{aligned} |W(-\nu+i\omega)|_2 &\leq \left(r \max_{1\leq k\leq r} \left| \frac{\int_{-\tau}^{0} e^{p\theta} d\mu_k(\theta)}{a-p} \right|^2 + \frac{1}{|a-p|^2} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(r\frac{e^{2\tau\nu}}{(a+\nu)^2} + \frac{1}{(a+\nu)^2} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{re^{2\tau\nu}+1}}{a+\nu}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Полагая $\nu = \tau^{-1}$, мы получаем оценку

$$|W(-\nu+i\omega)|_2 \leq \sqrt{re^2+1}\cdot\tau. \tag{4.29}$$

Так как $\Lambda + a$ это липшицева константа $\hat{F}$, то частотное условие (4.21) для (4.24) выполнится, если выполнено неравенство

$$\sqrt{re^2+1}\cdot\tau < (\Lambda+a)^{-1}, \tag{4.30}$$

которое, в силу (4.25), справедливо для всех достаточно малых $a > 0$. Заметим, что теорема 4.3 при $j = n$ применима в силу того, что характеристическое уравнение (4.19) в нашем случае имеет ровно n корней, каждый из которых положителен и равен a. □

Заметим, что условие (4.25) выполнено при всех достаточно малых τ. Имеется несколько работ, касающихся уравнений с запаздыванием в $\mathbb{R}^n$, результаты которых гарантируют существование n-мерных инерциальных многообразий при малом запаздывании. Эти результаты можно понимать следующим образом. Предположим, что мы имеем некоторое ОДУ в $\mathbb{R}^n$ с глобально липшицевым векторным полем. Если мы рассмотрим действие некоторых переменных в уравнении с запаздыванием (что естественно для некоторых химических или биологических моделей, а также электрических цепей), то получаемая динамическая система становится бесконечномерной, но при достаточно малых величинах запаздывания предельная динамика остается n-мерной, как и для исходного уравнения.

Отметим здесь работу К. Чиконе [13], которая является продолжением работ Ю. А. Рябова и Р. Д. Драйвера по инерциальным многообразиям для уравнений с малым запаздыванием. Сравним их результаты (которые не используют ни частотных методов, ни функционалов Ляпунова) с теоремой 4.4. Сперва отметим, что класс рассматриваемых в [13] уравнений немного шире, чем (4.22), но все возникающие в приложениях уравнения такого типа покрываются (4.22). Во-вторых, в [13] используется константа липшица K

нелинейности как отображения $C([-\tau,0];\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}^n$. Таким образом, в нашем случае $K=\sqrt{r}\Lambda$ так как

$$|F(t,C\phi_1)-F(t,\phi_2)|_\Xi \le \Lambda\cdot\|C\|\cdot\|\phi_1-\phi_2\|_\infty \le \Lambda\cdot\sqrt{r}\cdot\|\phi_1-\phi_2\|_\infty. \quad (4.31)$$

Теорема Рябова и Драйвера (см. пункт 1 теоремы 2.1 из [13]) гарантирует существование инерциальных многообразий при $K\tau e<1$ или, что эквивалентно, если $\sqrt{r}e\cdot\tau<\Lambda^{-1}$. Таким образом, наше условие (4.25) чуть грубее ($\sqrt{1+e^{-2}}\approx 1.066$). Некоторое усиление неравенства $\sqrt{r}e\cdot\tau<\Lambda^{-1}$, умножением левой части на величину, которая при $\tau\to 0$ стремится к 1, гарантирует экспоненциальное притяжение (см. пункт 2 теоремы 2.1 из [13]), но не дает оценок для показателя притяжения. Наша теорема 4.4 выражает этот показать ν явно как τ^{-1}. Отметим также, что для автономного случая теорема 2.2 из [13] гарантирует C^1-гладкость инерциального многообразия, если выполнено условие $F\in C^1(\mathbb{R}^r;\mathbb{R}^n)$ и неравенство $2\sqrt{r}\sqrt{e}\tau<\Lambda^{-1}$. Заметим, что

$$\frac{\sqrt{r}e\sqrt{(1+e^{-2})}}{2\sqrt{r}\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}\cdot\sqrt{1+e^{-2}}}{2}<0.88<1. \quad (4.32)$$

Поэтому наше условие лучше, так как требует лишь $F\in C^1$ и не требует изменений неравенства (4.25) (см. [6] или [4]). Отметим также, что в [13] отсутствуют результаты нормальной гиперболичности, в то время как они относительно просто получаются в рамках [4]. Таким образом, наша теория по существу включает упомянутые результаты[9], а также улучшает их. Помимо этого, использование квадратичных функционалов раскрывает геометрию построений и связывает эти работы с другими работами по теории инерциальных многообразий.

Отметим также, что А. И. Алонсо и др. [1] использовали упомянутые результаты Р. Д. Драйвера для получения условий почти автоморфности скалярных уравнений с запаздыванием. Таким образом, результаты их работы по существу также включены в нашу теорию.

4.3 Полулинейные параболические уравнения

Пусть $A\colon\mathcal{D}(A)\subset\mathbb{H}_0\to\mathbb{H}_0$ есть самосопряженный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}_0$, причем такой, что $A^{-1}\colon\mathbb{H}_0\to\mathbb{H}_0$ компактен. Тогда можно определить степени оператора A

[9] Отметим, что работа К. Чиконе [13] содержит интересный результат, который не покрывается нашей общей теорией, о разложении векторного поля на инерциальном многообразии по степеням малого запаздывания.

и соответствующую шкалу гильбертовых пространств $\mathbb{H}_\alpha := \mathcal{D}(A^\alpha)$ со скалярным произведением $(v_1, v_2)_\alpha := (A^\alpha v_1, A^\alpha v_2)$ для всех $v_1, v_2 \in \mathcal{D}(A^\alpha)$ (см, например, [14] или [21]). Пусть $\alpha \in [0, 1)$ фиксировано и пусть $\mathbb{M}, \Xi$ суть гильбертовы пространства. Предположим, что заданы линейные ограниченные операторы $C\colon \mathbb{H}_\alpha \to \mathbb{M}$ и $B\colon \Xi \to \mathbb{H}$. Пусть $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{M} \to \Xi$ есть непрерывное отображение такое, что для некоторого $\Lambda > 0$ и всех $y_1, y_2 \in \mathbb{M}$ и $t \in \mathbb{R}$ мы имеем

$$|F(t, y_1) - F(t, y_2)|_\Xi \le \Lambda |y_1 - y_2|_\mathbb{M}. \tag{4.33}$$

Наконец, пусть $K \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_\alpha)$ есть линейный ограниченный оператор. Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\dot{v}(t) = (-A + K)v(t) + BF(t, Cv(t)) + W(t). \tag{4.34}$$

Предполагаем, что функция $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ почти периодична и нелинейность $F(t, y)$ почти периодична по t равномерно по y из компактных множеств. Рассмотрим оболочку $\mathcal{Q}$ функции (F, W), определяемую как множество всех пар $(\overline{F}, \overline{W})$ таких, что существует последовательность $t_k \in \mathbb{R}$, для которой сходимость $F(t + t_k, y) \to \overline{F}(t, y)$ и $W(t + t_k) \to \overline{W}(t)$ выполнена равномерно по $t \in \mathbb{R}$ и y из ограниченных множеств в $\mathbb{M}$. Ясно, что $\mathcal{Q}$ есть полное метрическое пространство (со стандартной метрикой, задающей указанную сходимость) и операторы сдвига $\vartheta^t\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ определяют минимальный почти периодический поток на $\mathcal{Q}$.

Рассмотрим для всякого $q = (\overline{F}, \overline{W}) \in \mathcal{Q}$ задачу Коши

$$\begin{aligned} &\dot{v}(t) = (-A + K)v(t) + B\overline{F}(t, Cv(t)) + \overline{W}(t), \\ &v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Используя рассуждения с методом неподвижной точки как в теореме 4.2.3 из [14], можно показать, что для всех $v_0 \in \mathbb{H}_\alpha$ существует единственное слабое решение[10] $v(t) = v(t, q, v_0)$, определенное при всех $t \ge 0$ и такое, что $v(0) = v_0$. Пусть $G(t)$, где $t \ge 0$, есть C_0-полугруппа, порожденная оператором $-A$. Тогда для этого решения выполнена формула вариации постоянных:

$$v(t) = G(t)v_0 + \int_0^t G(t - s)[Kv(s) + B\overline{F}(s, Cv(s)) + \overline{W}(s)]ds. \tag{4.36}$$

Кроме того, для всех $T > 0$ найдется константа $C'' = C''(T) > 0$ такая, что оценка

$$|v(t; q, v_1) - v(t; q, v_2)|_\alpha \le C''(T) \cdot |v_1 - v_2|_\alpha \tag{4.37}$$

[10] От англ. mild solution.

выполняется для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{H}_\alpha$, $q \in \mathcal{Q}$ и $t \in [0,T]$. Из интегрального представления (4.36) также видна непрерывная зависимость от $q \in \mathcal{Q}$ (см. также [21]). Отсюда следует, что семейство отображений

$$\psi^t(q, v_0) := v(t, q, v_0), \text{ где } v_0 \in \mathbb{H}_\alpha, q \in \mathbb{R} \text{ и } t \geq 0 \tag{4.38}$$

является коциклом в $\mathbb{H}_\alpha = \mathbb{E} = \mathbb{H}$ над $(\mathcal{Q}, \vartheta)$. Из (4.37) следует выполнение **(ULIP)** и, в силу сглаживающих свойств уравнения (4.35) (см. [14]), условие **(UCOM)** выполнено при любом $\tau_{ucom} > 0$.

Из наших предположений на K следует, что оператор $-A + K$ с областью определения $\mathbb{H}_1 = \mathcal{D}(A)$ секториальный (см. [21, 15]) и, в частности, порождает C_0-полугруппу $G_K(t)$ в $\mathbb{H}_0$ (см. [7]). Сужение этой полугруппы на $\mathbb{H}_\alpha$ является C_0-полугруппой в $\mathbb{H}_\alpha$, генератор которой есть оператор $-A + K$ с областью определения $\mathbb{H}_{1+\alpha}$. Легко видеть, что спектр оператора $-A + K$ не зависит от выбора области определения. Отметим, что для решений $v(\cdot) = v(\cdot, q, v_0)$ задачи Коши (4.35) с $v_0 \in \mathbb{H}_\alpha$ также выполнена формула вариации постоянной относительно полугруппы $G_K(t)$:

$$v(t) = G_K(t)v_0 + \int_0^t G_K(t-s)(B\overline{F}(s, Cv(s)) + \overline{W}(s))ds. \tag{4.39}$$

Наличие этой формулы существенно для применения частотной теоремы из работы [7].

Рассмотрим передаточный оператор $W(p) := C(-A + K - pI)^{-1}B$. Далее мы будем рассматривать такие $\nu > 0$, что оператор $-A + K + \nu I$ допускает экспоненциальную дихотомию в $\mathbb{H}_\alpha$ с устойчивым пространством $\mathbb{H}^s_\alpha(\nu)$ и неустойчивым пространством $\mathbb{H}^u_\alpha(\nu)$ размерности $j \geq 0$. Заметим, что в силу того, что оператор $-A+K$ имеет компактную резольвенту (и, как следствие, дискретный спектр [15]), экспоненциальная дихотомия эквивалентна тому, что ровно j собственных значений оператора $-A+K$ лежат справа от прямой $-\nu + i\mathbb{R}$ и ни одно собственное значение на этой прямой не лежит.

Теорема 4.5. *Пусть для некоторого $\nu > 0$ имеется ровно $j \geq 0$ собственных значений $p \in \mathbb{C}$ оператора $-A + K$ с $\operatorname{Re} p > -\nu$ и не существует собственных значений с $\operatorname{Re} p = -\nu$. Пусть выполнено частотное условие*

$$\|W(-\nu + i\omega)\|_{\Xi^{\mathbb{C}} \to \mathbb{M}^{\mathbb{C}}} < \Lambda^{-1} \text{ для всех } \omega \in \mathbb{R}. \tag{4.40}$$

*Тогда существует оператор $P \in \mathcal{L}(\mathbb{E}; \mathbb{E}^*)$ такой, что коцикл (ψ, ϑ), порожденный уравнениями (4.35), удовлетворяет **(H1)** с $\mathbb{E}^+ = \mathbb{H}^s_\alpha(\nu)$ и $\mathbb{E}^- = \mathbb{H}^u_\alpha(\nu)$; **(H2)** с заданным j и **(H3)** с заданным ν, $\tau_V = 0$ и некоторым $\delta > 0$.*

Как и в предыдущих случаях, при $j = 1$ работают рассуждения об описании минимальных и ω-предельных множеств из начала раздела и вытекающее отсюда существование равномерно почти автоморфных решений.

Обсудим некоторый частный случай частотного условия (4.40). Рассмотрим ситуацию, когда $K = 0$; $\Xi := \mathbb{H}_\beta$ для некоторого $\beta \in [0, \alpha]$; $\mathbb{M} := \mathbb{H}_\alpha$ и C, B суть тождественные операторы. Рассмотрим собственные числа $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ оператора A. Зафиксируем j такой, что $\lambda_{j+1} - \lambda_j > 0$ и будем искать $\nu \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$, для которого выполнено условие

$$\|(A + (-\nu + i\omega)I)^{-1}\|_{\mathbb{H}_\beta \to \mathbb{H}_\alpha} < \Lambda^{-1} \text{ для всех } \omega \in \mathbb{R}. \tag{4.41}$$

Используя ортогональный базис из собственных векторов, легко показать, что

$$\|(A - (\nu + i\omega)I)^{-1}\|_{\mathbb{H}_\beta \to \mathbb{H}_\alpha} = \sup_k \frac{\lambda_k^{\alpha-\beta}}{|\lambda_k - \nu - i\omega|} \leq \sup_k \frac{\lambda_k^{\alpha-\beta}}{|\lambda_k - \nu|}. \tag{4.42}$$

Кроме того, из соображений монотонности мы имеем

$$\sup_k \frac{\lambda_k^{\alpha-\beta}}{|\lambda_k - \nu|} = \max\left\{\frac{\lambda_j^{\alpha-\beta}}{\nu - \lambda_j}, \frac{\lambda_{j+1}^{\alpha-\beta}}{\lambda_{j+1} - \nu}\right\} \tag{4.43}$$

и оценка нормы будет наименьшей, если обе величины под знаком максимумам в (4.43) совпадают. Для этого нужно положить

$$\nu = \frac{\lambda_{j+1}^{\alpha-\beta}}{\lambda_j^{\alpha-\beta} + \lambda_{j+1}^{\alpha-\beta}} \cdot \lambda_j + \frac{\lambda_j^{\alpha-\beta}}{\lambda_j^{\alpha-\beta} + \lambda_{j+1}^{\alpha-\beta}} \cdot \lambda_{j+1} \in (\lambda_j, \lambda_{j+1}). \tag{4.44}$$

Для такого выбора ν частотное условие (4.41) принимает вид

$$\frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{\lambda_j^{\alpha-\beta} + \lambda_{j+1}^{\alpha-\beta}} > \Lambda, \tag{4.45}$$

известный как условие спектрального скачка, которое гарантирует существование j-мерных инерциальных многообразий для полулинейных параболических уравнений. Впервые связь этого условия с частотным условием была указана в нашей работе [7].

На самом деле, условие (4.45) достаточно грубое для получения нелокальных результатов для конкретных уравнений. Присутствие в (4.40) измеряющего оператора C и оператора управления B наряду с возможностью рассмотрения несамосопряженной линейной части $-A + K$ дают некоторую гибкость в приложениях. Именно эта интуиция, пришедшая из теории управления, позволила Р. А. Смиту получить нелокальные результаты для конкретных уравнений. Например, в его работах [35, 34] даны приложения, касающиеся развития теории Пуанкаре-Бендиксона, к уравнениям ФитцХью-Нагумо и системам с диффузией Гудвина. Однако он, по всей видимости, не был знаком с частотной теоремой и его методы опирались на априорные оценки. В частности поэтому он был вынужден рассматривать конкретные классы уравнений. Так, в [35, 34] рассмотрен только случай $\alpha = 0$ для задач в областях размерности 2 и 3. Наш подход, опирающийся на квадратичные функционалы Ляпунова, не имеет таких недостатков. Более детальное рассмотрение развития теории Пуанкаре-Бендиксона с помощью нашего подхода изложено в [5].

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №20-31-90008; при поддержке за счет гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН №075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г.; при поддержке стипендией имени В. А. Рохлина для молодых математиков Санкт-Петербурга.

Список литературы

[1] Alonso A. I., Obaya R., Sanz A. M. A note on non-autonomous scalar functional differential equations with small delay, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math*, **340**, 155–160 (2005).

[2] Anikushin M. M. Frequency theorem for the regulator problem with unbounded cost functional and its applications to nonlinear delay equations, *arXiv preprint*, arXiv:2003.12499v3 (2021)

[3] Anikushin M. M. A non-local reduction principle for cocycles in Hilbert spaces. *J. Differ. Equations*, **269**(9), 6699–6731 (2020).

[4] Anikushin M. M. Geometric theory of inertial manifolds for compact cocycles in Banach spaces. *arXiv preprint*, arXiv:2012.03821 (2020).

[5] Anikushin M. M. The Poincaré-Bendixson theory for certain compact semi-flows in Banach spaces. *arXiv preprint* arXiv:2001.08627v3 (2020).

[6] Anikushin M. M. Nonlinear semigroups for delay equations in Hilbert spaces, inertial manifolds and dimension estimates, *arXiv preprint*, arXiv:2004.13141v4 (2021)

[7] Anikushin M. M. Frequency theorem for parabolic equations and its relation to inertial manifolds theory, *arXiv preprint*, arXiv:2011.12031v2 (2020)

[8] Anikushin M. M. On the Liouville phenomenon in estimates of fractal dimensions of forced quasi-periodic oscillations, *Vestn. St. Petersbg. Univ., Math.*, **52**(3), 234–243 (2019).

[9] Anikushin M. M., Reitmann V., Romanov A. O. Analytical and numerical estimates of the fractal dimension of forced quasiperiodic oscillations in control systems, *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia*, no. 2, 2019, 162-183, https://diffjournal.spbu.ru/pdf/anikushin2.pdf [in Russian]

[10] Anikushin M. M. On the Smith reduction theorem for almost periodic ODEs satisfying the squeezing property, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, **15**(1), 97–108 (2019).

[11] Bátkai A., Piazzera S. *Semigroups for Delay Equations.* A K Peters, Wellesley (2005)

[12] Cheban D. N. *Nonautonomous Dynamics: Nonlinear oscillations and Global attractors*, Springer Nature (2019).

[13] Chicone C. Inertial and slow manifolds for delay equations with small delays. *J. Differ. Equations*, **190**(2), 364–406 (2003).

[14] Chueshov I. D. *Dynamics of Quasi-stable Dissipative Systems.* Berlin: Springer (2015).

[15] Engel K.-J., Nagel R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations.* Springer-Verlag (2000).

[16] Fabbri R., Johnson R., Núñez C. On the Yakubovich Frequency Theorem for linear non-autonomous control processes. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, **9**(3), 677–704 (2003).

[17] Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A., *Strange Nonchaotic Attractors: Dynamics between Order and Chaos in Quasiperiodically Forced Systems*,

World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 56, Hackensack, N.J.: World Sci. (2006).

[18] Glendinning P., Jäger T. H., Keller G., How chaotic are strange non-chaotic attractors?, *Nonlinearity*, **19**(9), 2005–2022 (2006).

[19] Hale J. K. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag (1977).

[20] Hartman P. *Ordinary Differential Equations*, Birk-hauser, Boston (1982).

[21] Henry D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer-Verlag, 1981.

[22] Jorba Á., Tatjer J. C., Núñez C., Obaya, R. Old and new results on strange nonchaotic attractors. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, **17**(11), 3895–3928 (2007).

[23] Kalinin Yu. N., Reitmann V. Almost periodic solutions in control systems with monotone nonlinearities, *Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia*, **61**(4) (2012).

[24] Kuznetsov N. V., Reitmann V. *Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation*. Switzerland: Springer International Publishing AG (2021).

[25] Levitan B. M., Zhikov V. V. *Almost Periodic Functions and Differential Equations*. CUP Archive (1982).

[26] Likhtarnikov A. L., Yakubovich V. A. The frequency theorem for continuous one-parameter semigroups. *Math. USSR-Izv.* **41**(4), 895–911 (1977) [in Russian].

[27] Likhtarnikov A. L., Yakubovich V. A. The frequency theorem for equations of evolutionary type. *Sib. Math. J.*, **17**(5), 790–803 (1976).

[28] Lindner J. F., Kohar V., Kia B., Hippke M., Learned J. G., Ditto W. L. Strange nonchaotic stars. *Physical review letters*, **114**(5), (2015).

[29] Massera J. L. The existence of periodic solutions of systems of differential equations, *Duke Math. J.*, **17**(4), 457–475 (1950).

[30] Núñez C., Obaya R., Sanz A. M. Minimal sets in monotone and concave skew-product semiflows I: A general theory, *J. Differ. Equations*, **252**(10), 5492–5517 (2012)

[31] Pankov A. A. *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, London (1990).

[32] Shen W., and Yi Y. *Almost Automorphic and Almost Periodic Dynamics in Skew-Product Semiflows.* American Mathematical Soc. (1998).

[33] Suresh K., Prasad A., Thamilmaran K. Birth of Strange Nonchaotic Attractors through Formation and Merging of Bubbles in a Quasiperiodically Forced Chua's Oscillator, *Phys. Lett. A*, **377**(8), 612–621 (2013).

[34] Smith R. A. Orbital stability and inertial manifolds for certain reaction diffusion systems. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **3**(1), 91–120 (1994).

[35] Smith R. A. Poincaré–Bendixson theory for certain reaction–diffusion boundary-value problems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **124**(1), 33–69 (1994).

[36] Smith R. A. Convergence theorems for periodic retarded functional differential equations, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **3**(3), 581–608 (1990).

[37] Smith R. A. Massera's convergence theorem for periodic nonlinear differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **120**(2), 679–708 (1986).

[38] Yakubovich V. A. Method of matrix unequalities in theory of nonlinear control systems stability. I. Forced oscillations absolute stability. *Avtomat. i Telemekh*, **25**(7), 1017–1029 (1964).

[39] Yi Y. On almost automorphic oscillations. *Fields Inst. Commun.*, **42**, 75–99 (2004).

Almost automorphic dynamics in almost periodic cocycles with one-dimensional inertial manifold

Mikhail Anikushin[1]

Department of Applied Cybernetics, Faculty of Mathematics and Mechanics,
Saint Petersburg State University, 28 Universitetskiy prospekt, Peterhof,
St. Petersburg 198504, Russia

Abstract. We study ω-limit and minimal sets of skew-product semiflows associated with cocycles in Banach spaces, which admit one-dimensional inertial manifolds. Our main aim is to extend for such cocycles classical results of W. Shen and Y. Yi on almost automorphy of minimal sets arising in the case of scalar almost periodic ODEs and scalar almost periodic parabolic equations in one-dimensional domains. We give applications for ODEs, delay equations and semilinear parabolic equations. Conditions for the existence of inertial manifolds are given in our adjacent works. In applications, these conditions are verified with the aid of recently obtained versions of the Frequency Theorem.

Keywords: almost automorphic solution, almost periodic cocycle, inertial manifold, frequency theorem.

Acknowledgments. The reported study was funded by RFBR, project number 20-31-90008; by a grant in the subsidies form from the federal budget for the creation and development of international world-class math centers, agreement between MES RF and PDMI RAS No. 075-15-2019-1620; by V. A. Rokhlin grant for young mathematicians of St. Petersburg.