

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ  
УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
N. 2, 2021

Электронный журнал,  
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010  
ISSN 1817-2172

<http://diffjournal.spbu.ru/>  
[e-mail: jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Теория нелинейных колебаний  
Компьютерное моделирование  
динамических систем

## Качественный анализ уравнения движения системы «подвижная платформа с маятником»

Братищев А. В.

Донской государственный технический университет

avbratishchev@spark-mail.ru

**Аннотация.** В настоящей статье изучается свободное движение на горизонтальной плоскости платформы с закрепленным в центре масс сферическим маятником. Эта система рассматривается как система двух стационарно связанных материальных точек, одна из которых перемещается в плоскости. Подсистема дифференциальных уравнений, описывающая движение платформы, интегрируется в явном виде и решение является функцией переменных, описывающих движение этого маятника относительно платформы. В свою очередь в системе уравнений четвертого порядка движения маятника относительно платформы выделяется независимая автономная подсистема уравнений третьего порядка. Построен фазовый портрет последней системы. Это позволило дать полное описание движения системы «подвижная платформа с маятником» при любом её начальном состоянии.

Установлена зависимость в квадратурах между угловыми фазовыми координатами точек траекторий системы.

**Ключевые слова:** платформа, тележка, сферический маятник, уравнение движения, фазовый портрет.

### 1. Введение

Математическая модель «сферический маятник» появилась в первой половине 18 века, и в последующем изучалась и обобщалась в разных направлениях [1], [2]. Этому способствовало развитие техники и формирование теории управления. Так, одно из направлений - «сферический маятник на подвижной подвеске» - связано с проблемой управления вертолётом с внешней

подвеской [3] и задачей перемещения груза мостовым краном [4]. В статье [5] мы вывели уравнение свободного движения платформы с маятником. Там же проведены численные эксперименты с действующей S-моделью этой системы [6] и представлены характерные траектории движения платформы и колебаний маятника относительно платформы. В настоящей работе мы систематически изучаем уравнение свободного движения этой системы.

## 2. Уравнение свободного движения. Общие интегралы

Пусть в центре масс плоской платформы массой  $M$  на горизонтальной плоскости шарнирно закреплён свободно колеблющийся маятник на невесомой упругой нити длины  $l$  с точечной массой  $m$  (Рис.1). Обозначим координаты центра масс платформы  $\{x(t), y(t), 0\}$ , а координаты конца маятника (в сферической системе координат)

$$\{x(t) + l \sin \theta(t) \cos \varphi(t), y(t) + l \sin \theta(t) \sin \varphi(t), l \cos \theta(t)\}.$$

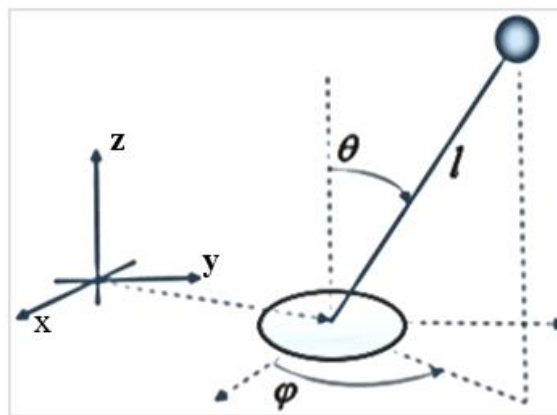


Рис.1. Подвижная платформа с маятником

В [5] получено такие уравнения Лагранжа движения этой системы

$$\begin{cases} (M + m)x'_2 + ml \cos x_5 \cos x_7 x'_6 - ml \sin x_5 \sin x_7 x'_8 - ml \sin x_5 \cos x_7 x_6^2 - \\ \quad - 2 ml \cos x_5 \sin x_7 x_6 x_8 - ml \sin x_5 \cos x_7 x_8^2 = 0 \\ (M + m)x'_4 + ml \cos x_5 \sin x_7 x'_6 + ml \sin x_5 \cos x_7 x'_8 - ml \sin x_5 \sin x_7 x_6^2 + \\ \quad + 2 ml \cos x_5 \cos x_7 x_6 x_8 - ml \sin x_5 \sin x_7 x_8^2 = 0 \\ \cos x_5 \cos x_7 x'_2 + \cos x_5 \sin x_7 x'_4 + l x'_6 - l \sin x_5 \cos x_5 x_8^2 - g \sin x_5 = 0 \\ \sin x_5 (\sin x_7 x'_2 - \cos x_7 x'_4 - l \sin x_5 x'_8 - 2 l \cos x_5 x_6 x_8) = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где  $x_1 := x$ ,  $x_2 := x'$ ,  $x_3 := y$ ,  $x_4 := y'$ ,  $x_5 := \theta$ ,  $x_6 := \theta'$ ,  $x_7 := \varphi$ ,  $x_8 := \varphi'$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1) В частном случае  $y(t) \equiv 0$ ,  $\varphi(t) \equiv 0$  второе и четвёртое уравнения системы становятся тождественными равенствами, а первое и третье преобразуются в уравнения свободного движения тележки с маятником.

2) В случае  $x(t) \equiv 0$ ,  $y(t) \equiv 0$ ,  $\varphi(t) \equiv 0$  получаем уравнение плоского математического маятника.

Ввиду последнего уравнения система (1) распадается на две. Пусть сначала  $\sin x_5(t) \equiv 0$ , то есть  $x_5(t) \equiv \pi k$ ,  $x_6(t) = x'_5(t) \equiv 0$ . Подставляя эти значения в остальные уравнения системы, получаем  $x'_2(t) \equiv 0$ ,  $x'_4(t) \equiv 0$ . То есть платформа движется прямолинейно и равномерно, а маятник при этом находится либо в верхнем, либо в нижнем положении равновесия.

Пусть теперь второй множитель последнего уравнения равен нулю. Разрешая систему (1) относительно производных, получим такую нормальную систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = \frac{ml \sin x_5 \cos x_7}{M + m \sin^2 x_5} \left( x_6^2 + \sin^2 x_5 x_8^2 - \frac{g}{l} \cos x_5 \right) \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = \frac{ml \sin x_5 \sin x_7}{M + m \sin^2 x_5} \left( x_6^2 + \sin^2 x_5 x_8^2 - \frac{g}{l} \cos x_5 \right) \\ x'_5 = x_6 \\ x'_6 = \frac{\sin x_5}{M + m \sin^2 x_5} \left( \cos x_5 (-mx_6^2 + Mx_8^2) + \frac{g(M+m)}{l} \right) \\ x'_7 = x_8 \\ x'_8 = -2 \frac{\cos x_5}{\sin x_5} x_6 x_8 \end{array} \right. \quad (2)$$

Найдем первые интегралы системы.

Несложными выкладками проверяется, что второе и четвертое уравнения системы (1) сворачиваются к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} ((M+m)x_2 + ml(\sin x_5 \cos x_7)'_t)'_t = 0 \\ ((M+m)x_4 + ml(\sin x_5 \sin x_7)'_t)'_t = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Интегрируя их по одному разу получаем два таких первых интеграла

$$\left\{ \begin{array}{l} (M+m)x_2 + ml \cos x_5 \cos x_7 x_6 - ml \sin x_5 \sin x_7 x_8 = c_1 \\ (M+m)x_4 + ml \cos x_5 \sin x_7 x_6 + ml \sin x_5 \cos x_7 x_8 = c_2 \end{array} \right.$$

Умножим последнее уравнение системы (1) на  $\sin^2 x_5$ , и свернём к виду  $(x_8 \sin^2 x_5)'_t = 0$ . Отсюда получаем общий интеграл

$$x_8 \sin^2 x_5 = c_4. \quad (4)$$

Умножим шестое уравнение системы (1) на  $2x_6(M+m \sin^2 x_5)$ , и перенесём первое из слагаемых правой части влево:

$$(M+m \sin^2 x_5)2x_6 x'_6 + m2 \sin x_5 \cos x_5 x_6^3 = M2 \sin x_5 \cos x_5 x_6 x_8^2 + \frac{2g(M+m)}{l} \sin x_5 x_6.$$

Левую часть свернём, а правую сгруппируем и используем предыдущий общий интеграл:

$$\begin{aligned} ((M+m \sin^2 x_5)x_6^2)'_t &= (M(\sin^2 x_5)'_t x_6^2 + M \sin^2 x_5 x'_6 x_6) - M \sin^2 x_5 x_8 x'_8 + \\ &+ \frac{2g(M+m)}{l} \sin x_5 x_6 = M(\sin^2 x_5 x_6)'_t x_8 - M c_4 x'_8 - \frac{2g(M+m)}{l} (\cos x_5)' = \\ &= -M c_4 x'_8 - \frac{2g(M+m)}{l} (\cos x_5)'. \end{aligned}$$

Отсюда получаем ещё один первый интеграл

$$(M+m \sin^2 x_5)x_6^2 + M c_4 x_8 + \frac{2g(M+m)}{l} \cos x_5 = c_3. \quad (5)$$

В целом получаем 4 первых интеграла системы

$$\begin{cases} (M + m)x_2 + ml \cos x_5 \cos x_7 x_6 - ml \sin x_5 \sin x_7 x_8 = c_1 \\ (M + m)x_4 + ml \cos x_5 \sin x_7 x_6 + ml \sin x_5 \cos x_7 x_8 = c_2 \\ (M + m \sin^2 x_5)x_6^2 + M \sin^2 x_5 x_8^2 + \frac{2g(M + m)}{l} \cos x_5 = c_3 \\ x_8 \sin^2 x_5 = c_4 \end{cases} \quad (6)$$

### 3. Свободное движение тележки

Пусть траектория начинается в точке  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, x_7^0, x_8^0)$ . Тогда последний интеграл примет вид  $x_8 \sin^2 x_5 = x_8^0 \sin^2 x_5^0$ . Поэтому, если  $x_8^0 = 0$ ,  $x_5^0 \neq \pi k$ , то  $x_8(t) \equiv 0$ . В этом случае система (1) упрощается до такой

$$\begin{cases} (M + m)x'_2 + ml \cos x_5 \cos x_7^0 x'_6 - ml \sin x_5 \cos x_7^0 x_6^2 = 0 \\ (M + m)x'_4 + ml \cos x_5 \sin x_7^0 x'_6 - ml \sin x_5 \sin x_7^0 x_6^2 = 0 \\ \cos x_5 \cos x_7^0 x'_2 + \cos x_5 \sin x_7^0 x'_4 + lx'_6 - g \sin x_5 = 0 \end{cases}$$

Повернём  $x_1, x_3$  -плоскость на угол  $x_7^0$ . Это соответствует такой замене переменных в последней системе:

$$\begin{cases} x_1 = \cos x_7^0 \tilde{x}_1 - \sin x_7^0 \tilde{x}_3 \\ x_3 = \sin x_7^0 \tilde{x}_1 + \cos x_7^0 \tilde{x}_3 \end{cases}$$

Она преобразуется в следующую

$$\begin{cases} (M + m)\tilde{x}'_2 + ml \cos x_5 x'_6 - ml \sin x_5 x_6^2 = 0 \\ (M + m)\tilde{x}'_4 = 0 \\ \cos x_5 \tilde{x}'_2 + lx'_6 - g \sin x_5 = 0 \end{cases}$$

Первое и третье её уравнения совпадают с уравнением движения подвижной тележки с маятником вдоль оси  $\tilde{x}_1$  [6]. Второе уравнение показывает, что вся система движется с постоянной скоростью вдоль оси  $\tilde{x}_3$ .

**ВЫВОД** Если в начальный момент времени горизонтальная угловая скорость маятника  $x_8^0 = 0$ , то платформа с постоянной скоростью движется в направлении, перпендикулярном вектору  $\{\cos x_7^0, \sin x_7^0\}$ , а маятник колеблется в вертикальной плоскости, перпендикулярной этому направлению. Уравнение совпадает с уравнением тележки с теми же параметрами. Поэтому общий анализ системы в случае  $x_8(t) \equiv 0$  совпадает с анализом частного случая  $x_3(t) \equiv 0$ ,  $x_7(t) \equiv 0$  системы уравнений «подвижная платформа с маятником»

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = \frac{ml \sin x_5}{M + m \sin^2 x_5} \left( x_6^2 - \frac{g}{l} \cos x_5 \right) \\ x'_5 = x_6 \\ x'_6 = \frac{\sin x_5}{M + m \sin^2 x_5} \left( -m \cos x_5 x_6^2 + \frac{g(M + m)}{l} \right) \end{cases}$$

Последние три уравнения системы не содержат переменную  $x_1$ , и последняя является

интегралом от  $x_2$ . Поэтому при исследовании фазового пространства системы можно ограничиться системой третьего порядка

$$\begin{cases} x'_2 = \frac{ml \sin x_5}{M + m \sin^2 x_5} \left( x_6^2 - \frac{g}{l} \cos x_5 \right) \\ x'_5 = x_6 \\ x'_6 = \frac{\sin x_5}{M + m \sin^2 x_5} \left( -m \cos x_5 x_6^2 + \frac{g(M + m)}{l} \right) \end{cases}, \quad (7)$$

что позволяет его визуализировать.

Система (7) имеет два первых интеграла (первый и третий интегралы (6))

$$\begin{cases} (M + m)x_2 + ml \cos x_5 x_6 = c_1 \\ (M + m \sin^2 x_5)x_6^2 + \frac{2g(M + m)}{l} \cos x_5 = c_3 \end{cases}.$$

Первый из них совпадает с законом сохранения импульса [7] по переменной  $x_1$  системы «подвижная тележка с маятником». Второй выводится из закона сохранения обобщенной энергии этой системы, если воспользоваться первым интегралом.

Проинтегрируем первый из интегралов с начальными данными  $(x_1^0, x_2^0, x_5^0, x_6^0)$ :

$$\begin{cases} (M + m)x_1 + ml \sin x_5 = \left( (M + m) x_2^0 + ml \cos x_5^0 x_6^0 \right) t + (M + m)x_1^0 + ml \sin x_5^0 \\ (M + m \sin^2 x_5)x_6^2 + \frac{2g(M + m)}{l} \cos x_5 = (M + m \sin^2 x_5^0)x_6^{02} + \frac{2g(M + m)}{l} \cos x_5^0 \end{cases}.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1** Из первого интеграла следует, что при свободных движениях системы «подвижная тележка с маятником» движение тележки будет ограничено тогда и только тогда, когда параметры тележки и начальные данные системы связаны соотношением  $(M + m) x_2^0 + ml \cos x_5^0 x_6^0 = 0$ .

При этом  $\forall t \geq 0 \quad ml(\sin x_5^0 - 1)/(M + m) \leq x_1(t) - x_1^0 \leq ml(\sin x_5^0 + 1)/(M + m)$ .

Эти утверждения подтверждаются численным экспериментом на S-модели данной системы.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2** Фиксируем начальные данные  $(x_5^0, x_6^0)$ . Если при этих начальных данных маятник совершает хотя бы один полный оборот вокруг тележки, то из второго интеграла получаем  $0 \leq (M + m \sin^2 x_5)x_6^2 = (M + m \sin^2 x_5^0)x_6^{02} + 2g(M + m)(\cos x_5^0 - \cos x_5)/l$ , откуда  $(M + m \sin^2 x_5^0)x_6^{02} + 2g(M + m)(\cos x_5^0 - 1)/l \geq 0$ .

Обратно, при выполнении этого условия правая часть предыдущего равенства неотрицательна при любом значении  $x_5$ , а левая часть определяет соответствующее значение  $x_6$ .

Сказанное позволяет предположить, что при свободных колебаниях системы «подвижная тележка с маятником» маятник будет вращаться вокруг тележки тогда и только тогда, когда параметры тележки и начальные данные системы связаны неравенством  $(M + m \sin^2 x_5^0)x_6^{02} + 2g(M + m)(\cos x_5^0 - 1)/l > 0$ . В случае равенства получаем такое явное уравнение сепаратрис в  $x_5, x_6$ -фазовом пространстве

$$x_6 = \pm 2 \sqrt{\frac{g(M + m)}{l(M + m \sin^2 x_5)}} \sin \frac{x_5}{2}, \quad x_5 \in (-\infty, +\infty).$$

При этом неограниченные траектории пространства задаются семейством неявных функций

$(M + m \sin^2 x_5)x_6^2 - 4g(M + m)\sin^2(x_5/2)/l = \tau$ ,  $\tau > 0$ , а циклы – семейством функций  $(M + m \sin^2 x_5)x_6^2 - 4g(M + m)\sin^2(x_5/2)/l = \tau$ ,  $-4g(M + m)/l < \tau < 0$

Последние три утверждения проверены численными экспериментами на S-модели данной системы при различных наборах параметров и начальных данных.

Пусть, например,  $M = 10$ ,  $m = 2$ ,  $l = 3$ . Функции  $x_6 = \pm 2\sqrt{2g/(5 + \sin^2 x_5)} \sin \frac{x_5}{2}$  действительно задают сепаратрисы. Фазовый портрет имеет такой вид

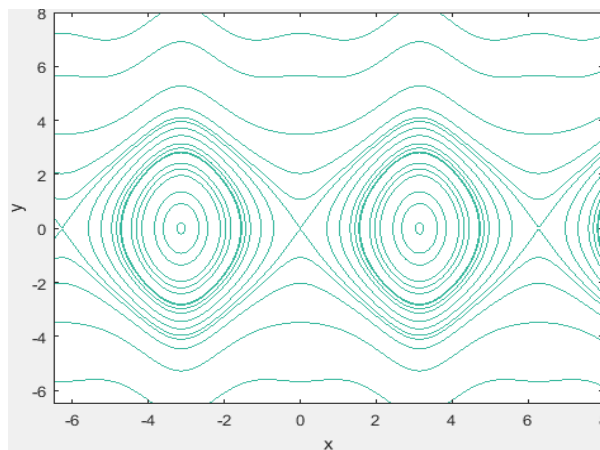


Рис.2. Фазовый портрет движений маятника относительно тележки

#### 4. Фазовый портрет системы «подвижная тележка с маятником». Пример

Будем считать фиксированными параметры  $M, m, l$  тележки с маятником, и рассмотрим 3-мерное фазовое пространство системы (8) с переменными  $x_2, x_5, x_6$  и  $x_5, x_6$ - горизонтальной плоскостью. Поверхность  $(M + m)x_2 + ml \cos x_5 x_6 = 0$  разделяет это пространство на две инвариантные области, для точек которых (начальных состояний) тележка неограниченно удаляется. Для начальных состояний на самой поверхности тележка движется на ограниченном участке  $x_1$ -оси.

Вертикальная цилиндрическая поверхность  $(M + m \sin^2 x_5)x_6^2 = 2g(M + m)(1 - \cos x_5)/l$  также разделяет фазовое пространство на два инвариантных множества, для точек (начальных состояний) одного из которых маятник не совершает полных колебаний вокруг тележки, а для точек другого маятник вращается вокруг тележки. Поверхность является как бы пространственной сепаратрисой.

Пусть  $M = 10$ ,  $m = 2$ ,  $l = 3$ . Поверхность  $x_6^2 = 4g(1 - \cos x_5)/(5 + \sin^2 x_5)$  представляет собой  $2\pi$ -периодическую последовательность вертикальных цилиндров с образующей, параллельной оси  $x_2$ . Они расположены вдоль оси  $x_5$  и примыкают друг к другу.

Поверхность  $x_2 = -0,5 \cos x_5 x_6$  также  $2\pi$ -периодическая по переменной  $x_5$ . Её сечение вертикальными плоскостями  $x_6 = c$  представляет собой косинусоиду с растущей по  $|c|$  амплитудой  $= 0,5|c|$ .

При указанных параметрах фрагмент фазового портрета системы «подвижная тележка с маятником» имеет следующий вид.

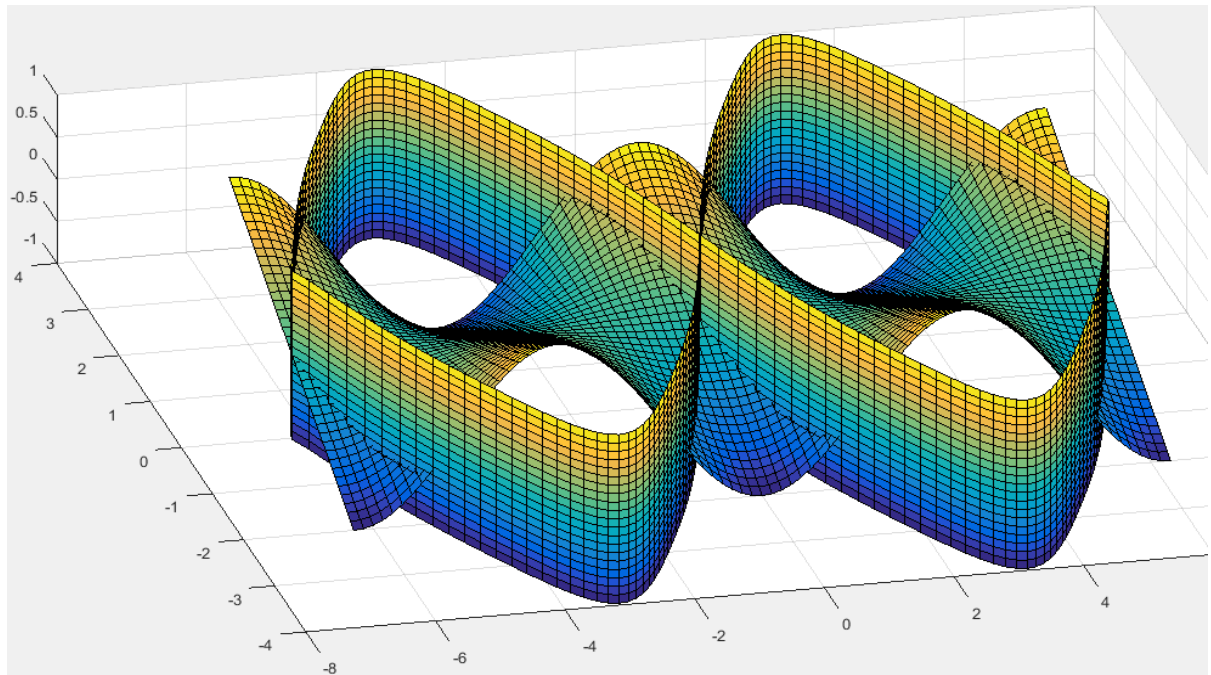


Рис. 3. Фазовый портрет системы «подвижная тележка с маятником»

Этот график позволяет сформулировать в терминах начальных условий 4 логически возможных поведения тележки с маятником.

1) Внутренность каждого цилиндра определяется неравенством  $x_6^2 < 2g(M + m)(1 - \cos x_5)/(l(M + m \sin^2 x_5))$ . При этом для тех начальных данных, которые лежат внутри цилиндров и одновременно на поверхности  $x_2 = -ml \cos x_5 x_6 / (M + m)$  тележка колеблется на ограниченном участке  $x_1$ -оси, а маятник не совершает полных колебаний вокруг тележки. А для остальных начальных данных, которые лежат внутри цилиндров и одновременно вне этой поверхности, тележка будет неограниченно удаляться, но маятник не совершает полных колебаний.

2) Внешность цилиндров определяется неравенством  $x_6^2 > 2g(M + m)(1 - \cos x_5)/(l(M + m \sin^2 x_5))$ . При этом для тех начальных данных, которые лежат вне цилиндров и одновременно на поверхности  $x_2 = -ml \cos x_5 x_6 / (M + m)$ , тележка колеблется на ограниченном участке  $x_1$ -оси, а маятник вращается вокруг тележки. А для остальных начальных данных, которые лежат вне цилиндров и одновременно вне этой поверхности, тележка будет неограниченно удаляться, а маятник вращается вокруг тележки.

## 5. Анализ движений системы «подвижная платформа с маятником».

### Движения платформы

Интегрируя систему (3) два раза с начальными данными  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0, x_7^0, x_8^0)$ , получим

$$\begin{cases} (M + m)x_1 + ml \sin x_5 \cos x_7 = \\ = \left( (M + m)x_2^0 + ml \cos x_5^0 \cos x_7^0 x_6^0 - ml \sin x_5^0 \sin x_7^0 x_8^0 \right) t + (M + m)x_1^0 + ml \sin x_5^0 \cos x_7^0 \\ (M + m)x_3 + ml \sin x_5 \sin x_7 = \\ = \left( (M + m)x_4^0 + ml \cos x_5^0 \sin x_7^0 x_6^0 + ml \sin x_5^0 \cos x_7^0 x_8^0 \right) t + (M + m)x_3^0 + ml \sin x_5^0 \sin x_7^0 \end{cases}.$$

Из этих равенств следует, что платформа совершает сложное движение, составленное из прямолинейного равномерного движения

$$\begin{cases} x_1(t) = \left( x_2^0 + \frac{ml}{M+m} (\cos x_5^0 \cos x_7^0 x_6^0 - \sin x_5^0 \sin x_7^0 x_8^0) \right) t + x_1^0 + \frac{ml}{M+m} \sin x_5^0 \cos x_7^0 \\ x_3(t) = \left( x_4^0 + \frac{ml}{M+m} (\cos x_5^0 \sin x_7^0 x_6^0 + \sin x_5^0 \cos x_7^0 x_8^0) \right) t + x_3^0 + \frac{ml}{M+m} \sin x_5^0 \sin x_7^0 \end{cases}$$

и ограниченного вообще говоря неперiodического движения (Рисунок 4)

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{-ml}{M+m} \sin x_5(t) \cos x_7(t) \\ x_3(t) = \frac{-ml}{M+m} \sin x_5(t) \sin x_7(t) \end{cases}.$$

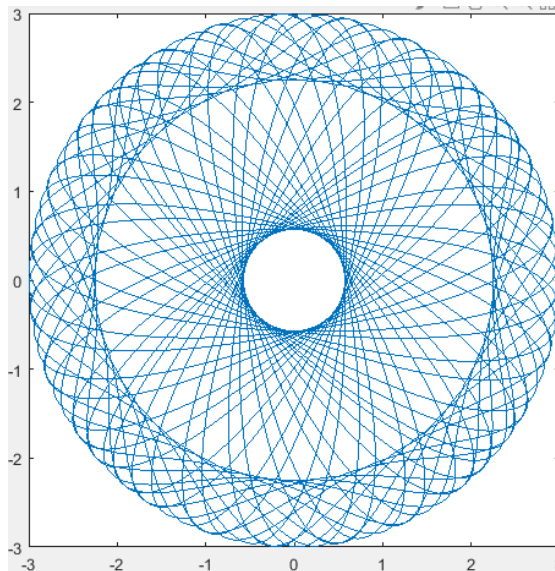


Рис.4 Траектория ограниченной составляющей движения платформы

ЗАМЕЧАНИЕ Для заданного начального состояния движение платформы:

1) происходит в ограниченной полосе  $|x_1| \leq C$  тогда и только тогда, когда начальные данные и параметры связаны соотношением

$$(M+m)x_2^0 + ml \cos x_5^0 \cos x_7^0 x_6^0 - ml \sin x_5^0 \sin x_7^0 x_8^0 = 0; \quad (8)$$

2) происходит в ограниченной полосе  $|x_3| \leq C$  тогда и только тогда, когда начальные данные и параметры связаны соотношением

$$(M+m)x_4^0 + ml \cos x_5^0 \sin x_7^0 x_6^0 + ml \sin x_5^0 \cos x_7^0 x_8^0 = 0; \quad (9)$$

3) происходит в ограниченной области  $x_1, x_3$ -плоскости тогда и только тогда, когда выполняются оба эти соотношения (8), (9);

4) в общем случае движение платформы происходит в  $x_1, x_3$  - плоскости в направлении вектора



$$\{(M + m)x_2^0 + ml \cos x_5^0 \cos x_7^0 x_6^0 - ml \sin x_5^0 \sin x_7^0 x_8^0, \\ (M + m)x_4^0 + ml \cos x_5^0 \sin x_7^0 x_6^0 + ml \sin x_5^0 \cos x_7^0 x_8^0\}.$$

Эти утверждения подтверждаются вычислительным экспериментом на S-модели следующей системы (смотри рисунки 5-8)

$$\left\{ \begin{array}{l} (M + m)x_1 + ml \sin x_5 \cos x_7 = \\ = \left( (M + m)x_2^0 + ml \cos x_5^0 \cos x_7^0 x_6^0 - ml \sin x_5^0 \sin x_7^0 x_8^0 \right) t + (M + m)x_1^0 + ml \sin x_5^0 \cos x_7^0 \\ (M + m)x_3 + ml \sin x_5 \sin x_7 = \\ = \left( (M + m)x_4^0 + ml \cos x_5^0 \sin x_7^0 x_6^0 + ml \sin x_5^0 \cos x_7^0 x_8^0 \right) t + (M + m)x_3^0 + ml \sin x_5^0 \sin x_7^0 \\ x'_5 = x_6 \\ (M + m \sin^2 x_5)x'_6 = \sin x_5 \left( \cos x_5 (-mx_6^2 + Mx_8^2) + \frac{g(M + m)}{l} \right) \\ x'_7 = x_8 \\ x_8 \sin^2 x_5 = x_8^0 \sin^2 x_5^0 \end{array} \right.$$

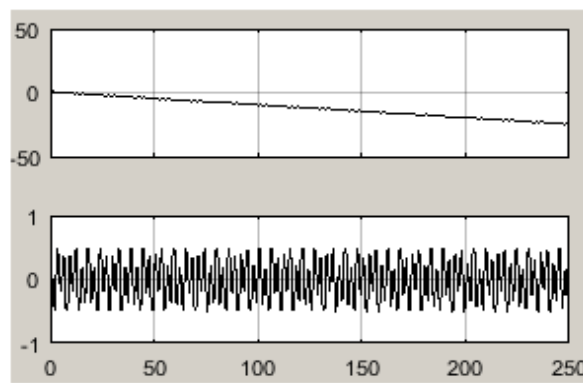
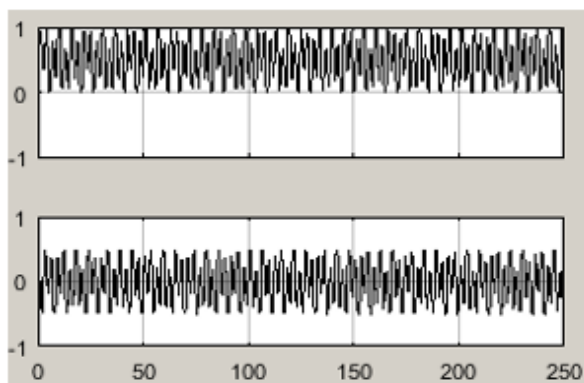


Рис.5. График  $x_1(t)$ ,  $x_3(t)$  при условия (8), (9) Рис.6. График  $x_1(t)$ ,  $x_3(t)$  при условии (9)

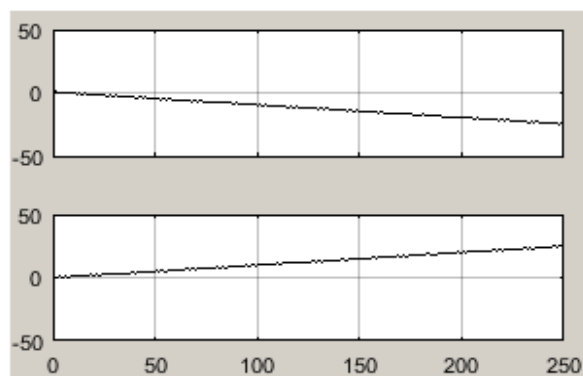
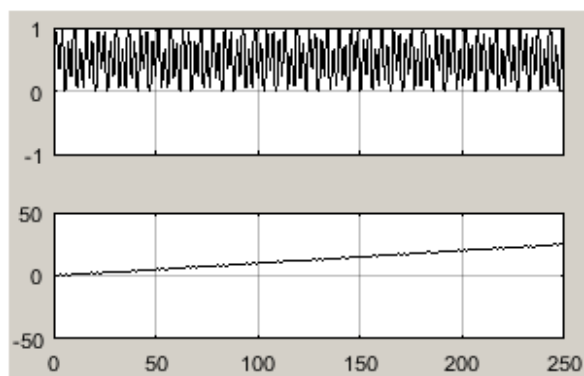


Рис.7. График  $x_1(t)$ ,  $x_3(t)$  при условия (8) Рис.8. График  $x_1(t)$ ,  $x_3(t)$  в общем случае

**6. Анализ движений системы «подвижная платформа с маятником».**

**Движения маятника относительно точки подвеса**

Автономная система (2) обладает тем свойством, что последние четыре уравнения образуют независимую от переменных  $x_1, x_2, x_3, x_4$  систему

$$\begin{cases} x'_5 = x_6 \\ x'_6 = \frac{\sin x_5}{M + m \sin^2 x_5} \left( \cos x_5 (-mx_6^2 + Mx_8^2) + \frac{g(M + m)}{l} \right) \\ x'_7 = x_8 \\ x'_8 = -2 \frac{\cos x_5}{\sin x_5} x_6 x_8 \end{cases}.$$

и фактически описывают движения маятника относительно точки подвеса.

**ЗАМЕЧАНИЕ** Если числитель и знаменатель правой части второго уравнения разделить на  $M$ , и формально перейти к пределу при  $M \rightarrow \infty$ , то получим систему

$$\begin{cases} x'_5 = x_6 \\ x'_6 = \sin x_5 \cos x_5 x_8^2 + \frac{g}{l} \sin x_5 \\ x'_7 = x_8 \\ x'_8 = -2 \frac{\cos x_5}{\sin x_5} x_6 x_8 \end{cases}.$$

которая совпадает с уравнением сферического маятника [7].

В предыдущей системе первое, второе и четвертое уравнения не содержат фазовую переменную  $x_7$ , и последняя является интегралом от  $x_8$ . Потому для описания движения маятника относительно точки подвеса достаточно изучить фазовое пространство следующей системы трех уравнений  $x_8$

$$\begin{cases} x'_5 = x_6 \\ x'_6 = \frac{\sin x_5}{M + m \sin^2 x_5} \left( \cos x_5 (-mx_6^2 + Mx_8^2) + \frac{g(M + m)}{l} \right) \\ x'_8 = -2 \frac{\cos x_5}{\sin x_5} x_6 x_8 \end{cases}. \tag{10}$$

Эта система имеет два общих интеграла (4) и (5).

Функция  $x_8 = C / \sin^2 x_5$  не зависит от  $x_6$  и является  $\pi$ -периодической по переменной  $x_5$ . Она обращается в  $\infty$  на прямых  $x_5 = \pi k, k = 0, \pm 1, \dots$ , из горизонтальной  $x_5, x_6$  - плоскости.

Рассмотрим часть  $x_5, x_6, x_8$  - фазового пространства пространстве  $\tilde{R}^3$  в вертикальных полуслоях вида  $\pi k < x_5 < \pi(k + 1), x_8 > 0$  и вида  $\pi k < x_5 < \pi(k + 1), x_8 < 0$ . В силу сказанного она расслаивается на инвариантные множества (поверхности), которые представляют собой горизонтальные цилиндры (каналы) с образующими  $x_8 = C / \sin^2 x_5$ .

На следующем графике изображены 4 таких цилиндрических поверхности в слое  $0 < x_5 < \pi$ .

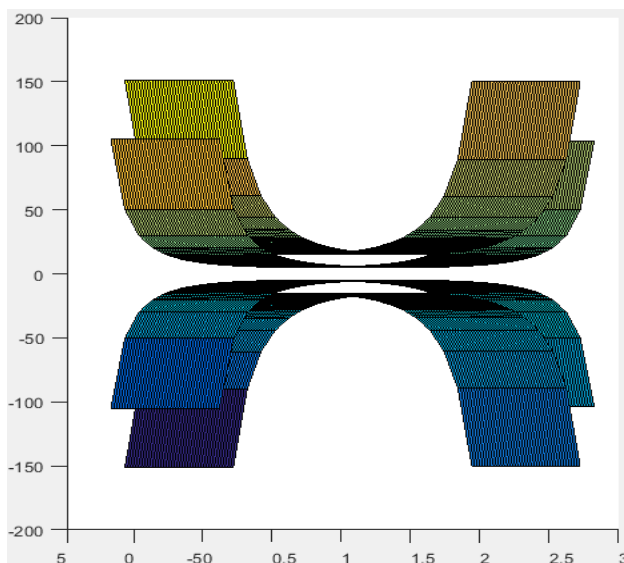


Рис.9. Расслоение полуслёв  $0 < x_5 < \pi$ ,  $x_8 > 0$ , и  $0 < x_5 < \pi$ ,  $x_8 < 0$  на инвариантные поверхности

Теперь проанализируем интеграл (5).

Из третьего уравнения системы (6) следует такое ограничение на параметр  $c_3$ :  $c_3 > -2g(M + m)/l$ .

Разрешим (5) относительно  $x_8$ :  $x_8 = (c_3 - 2g(M + m)\cos x_5/l - (M + m \sin^2 x_5)x_6^2)/(Mc_4)$ .

На следующем графике изображены инвариантные поверхности в слое  $0 < x_5 < \pi$ , соответствующие частным интегралам (4), (5) при  $c_3 = 200$ ,  $c_4 = 10$ . Пересечение поверхностей представляет собой замкнутую кривую. То есть траектория является циклом.

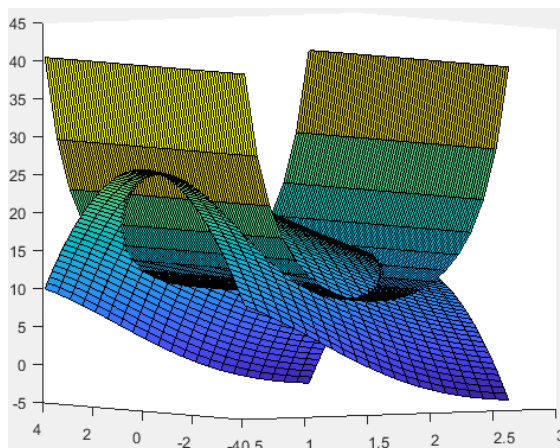


Рис.10. Пересечение инвариантных поверхностей

Для траектории с началом в точке  $(x_5^0, x_6^0, x_8^0)$  интеграл (5) принимает вид

$$x_8 = \frac{1}{Mx_8^0 \sin^2 x_5^0} \left( -(M + m \sin^2 x_5) x_6^2 - \frac{2g(M + m)}{l} \cos x_5 + (M + m \sin^2 x_5^0) x_6^{02} + Mx_8^2 \sin^2 x_5^0 + \frac{2g(M + m)}{l} \cos x_5^0 \right).$$

Данная функция является чётной и  $2\pi$ -периодической по переменной  $x_5$ , а также чётной по переменной  $x_6$ . Поэтому её график  $2\pi$ -периодичен по переменной  $x_5$  и симметричен как относительно  $x_6, x_8$ -координатной плоскости, так и относительно  $x_5, x_8$ -плоскости.

Если в  $x_8^0$  поменять знак, то инвариантная поверхность, на которой лежит соответствующая траектория будет симметрична данной относительно  $x_5, x_6$ -плоскости. Поэтому для её построения достаточно построить графики частных интегралов (5) в вертикальном полуслое  $-\pi < x_5 < \pi, x_8 > 0$ , затем зеркально отразить их в  $x_5, x_6$ -плоскости, и всё это транслировать с периодом  $2\pi$  вдоль оси  $x_5$ .

Найдем состояния равновесия системы на инвариантном множестве  $x_8 = C/\sin^2 x_5$ . Приравняем нулю правую часть второго уравнения (10) и подставим  $x_6 = 0$ . Имеем  $M \cos x_5 x_8^2 + g(M + m)/l = 0$ . Подставляя в него  $C/\sin^2 x_5$  вместо  $x_8$ , получим такое алгебраического уравнение четвёртого порядка по  $\cos x_5$

$$\frac{g(M + m)}{l} (1 - \cos^2 x_5)^2 + MC^2 \cos x_5 = 0. \quad (11)$$

Оно четное по  $x_5$ , и вещественные решения должны удовлетворять условию  $\cos x_5 < 0$ .

Докажем, что такие решения есть, для чего рассмотрим вспомогательную функцию  $f(u) := (u^2 - 1)^2 + lMC^2 u / (g(M + m))$  на отрезке  $[-1, 0]$ . Простой анализ показывает, что функция монотонно возрастает на нём и на концах принимает значения разных знаков. Поэтому она имеет единственный нуль  $u(C) \in (-1, 0)$ . Но тогда уравнение (11) имеет на отрезке  $(\pi/2, \pi)$  единственное решение  $x_5(C)$  уравнения  $u(C) = \cos x_5$ . Все решения последнего уравнения, а значит и уравнения (11), имеют вид  $\pm x_5(C) + 2\pi k$ .

Имеем такие состояния равновесия сужения системы (10) на инвариантных множествах  $x_8 = C/\sin^2 x_5$ :  $(\pm x_5(C) + 2\pi k, 0, C/\sin^2 x_5(C))$ .

Пусть  $M = 10, m = 2, l = 3, C = 1$ . На соответствующих инвариантных множествах  $x_8 = 1/\sin^2 x_5, -\pi < x_5 < 0, 0 < x_5 < \pi$ , лежат состояния равновесия  $(\pm 2.419, 0, 2.288)$ , определяемые из уравнения  $(\cos^2 x_5 - 1)^2 + 2.5 \cos x_5 / 9.81 = 0$ .

На Рис.11 показано расслоение поверхности  $x_8 = 1/\sin^2 x_5$  на циклы. Слева они заполняют эту поверхность в полуслое  $-\pi < x_5 < 0, x_8 > 0$ , а справа - в полуслое  $0 < x_5 < \pi, x_8 > 0$ . Циклы симметричны относительно  $x_5, x_8$ - координатной плоскости, и «расползаются» по поверхности вдоль оси  $x_6$ .

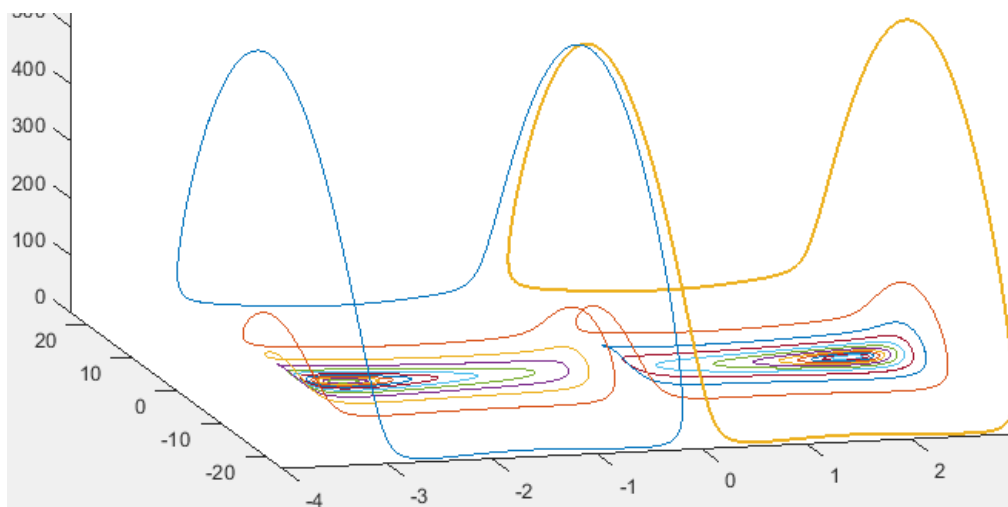


Рис.11.Расслоение инвариантных поверхностей на циклы

Остается транслировать эти графики с периодом  $2\pi$  вдоль оси  $x_5$ , а полученное отразить в плоскости  $x_5, x_6$ . И мы получаем фазовый портрет уравнения движений маятника относительно точки подвеса.

По аналогии с двумерными динамическими системами [8] плоскость  $x_8 = 0$  и семейство вертикальных плоскостей  $x_5 = \pi k$  можно было бы назвать скелетом этого 3-мерного фазового пространства, а полуслои – элементарными ячейками.

Каждая элементарная ячейка состоит из циклов и «кривой центров». Обозначим  $x_8(C) := C/\sin^2 x_5(C)$ , и изучим ещё расположение кривой центров  $l(C): (x_5(C), 0, x_8(C))$ ,  $C \in (0, \infty)$ , например, в полуслое  $0 < x_5 < \pi$ ,  $x_8 > 0$ .

Из уравнения (11) следует, что  $\lim_{C \rightarrow +\infty} x_5(C) = \pi$ ,  $\lim_{C \rightarrow 0} x_5(C) = \pi/2$ . Отсюда и из равенства

$$x_8(C) = \sqrt{-g(M+m)/(lM \cos x_5(C))}$$

получаем  $\lim_{C \rightarrow 0} l(C) = (\pi, 0, \sqrt{g(M+m)/(lM)})$ ,  
 $\lim_{C \rightarrow +\infty} l(C) = (\frac{\pi}{2}, 0, +\infty)$ .

В результате численного эксперимента получена качественная картина траекторий в элементарных ячейках, которая показана на графиках 12 и 13.

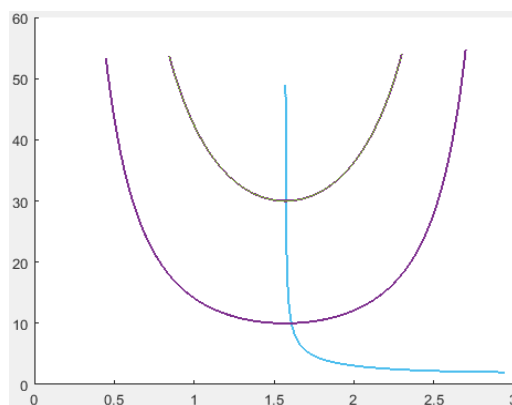


Рис.12. Вид инвариантных поверхностей и кривой центров «с торца»

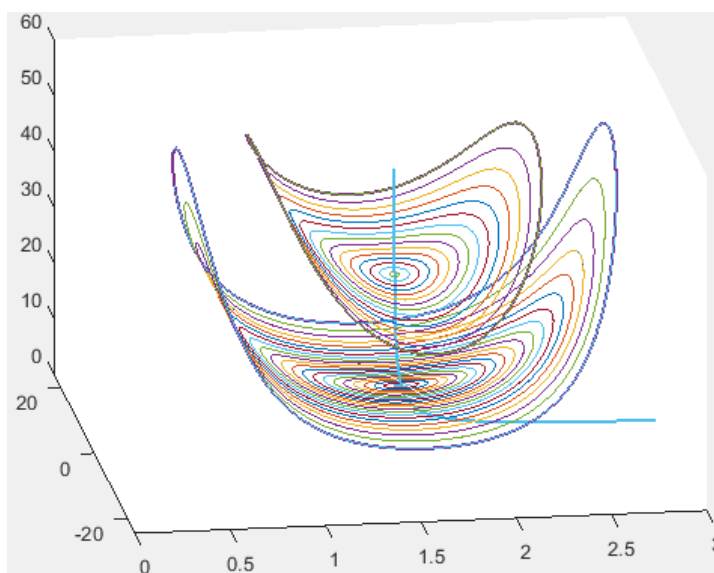


Рис.13. Вид инвариантных поверхностей и кривой центров сбоку-сверху

**ЗАМЕЧАНИЕ** Перепишем уравнение (5) в виде  $(M + m \sin^2 x_5)x_6^2 + M c_4^2/\sin^2 x_5 + 2g(M + m) \cos x_5/l = c_3$ . Из него получаем такой закон движения изображающей точки по траектории

$$t = \int \sqrt{\frac{M + m \sin^2 x_5}{c_3 - M c_4^2 / \sin^2 x_5 - 2g(M + m) \cos x_5 / l}} dx_5.$$

Зависимость между угловыми координатами  $x_5, x_7$  траекторий можно получить в квадратурах так же, как это сделано для уравнения сферического маятника [7]. Сделаем в последнем уравнении замену  $x_6 = \frac{dx_5}{dx_7} x_8 = \frac{dx_5}{dx_7} \frac{c_4}{\sin^2 x_5}$ .

$$(M + m \sin^2 x_5) \left( \frac{dx_5}{dx_7} \right)^2 \frac{c_4^2}{\sin^4 x_5} + M \frac{c_4^2}{\sin^2 x_5} + \frac{2g(M + m)}{l} \cos x_5 = c_3.$$

Отсюда находим

$$x_7 = \int \sqrt{\frac{c_4^2 (M + m \sin^2 x_5)}{(2g(M + m)/l \cos^3 x_5 - c_3 \cos^2 x_5 - 2g(M + m)/l \cos x_5 + c_3 - M c_4^2) \sin^2 x_5}} dx_5.$$

Последний интеграл является эллиптическим [9].

## 7. Выводы

Проведен качественный анализ 8-мерной системы (1), (2) «подвижная платформа с маятником».

1. Оказалось, что последние 4 уравнения (2), описывающие движение маятника относительно платформы, не зависят от фазовых переменных, описывающих движение самой платформы в неподвижной системе координат. В свою очередь из этих уравнений можно выделить 3 уравнения (10), которые по существу описывают движения маятника. Это позволило визуализировать движения и описать фазовое пространство системы в переменных  $x_5, x_6, x_8$ .

1. Если начальное состояние лежит в горизонтальной фазовой плоскости  $x_8 = 0$ , то платформа с маятником будет двигаться в фиксированной вертикальной плоскости. И её движение описывается известным уравнением движения тележки с маятником. Получен фазовый портрет последней (Рис.3).

2. Если начальное состояние лежит в вертикальных фазовых плоскостях  $x_5 = \pi k, k \in Z$ , то платформа движется прямолинейно и равномерно, а маятник при этом находится либо в верхнем, либо в нижнем положении равновесия.

3. Плоскости предыдущих пунктов образуют скелет фазового пространства. Каждый пространственный полуслой вида  $\pi k < x_5 < \pi(k + 1), x_8 > 0$  и вида  $\pi k < x_5 < \pi(k + 1), x_8 < 0$ , расслаивается на инвариантные поверхности  $x_8 = C / \sin^2 x_5, C \neq 0$  (Рис.9). В свою очередь эти инвариантные поверхности состоят из центра и охватывающих его циклов (Рис.11, 13). Составлен программный код на языке MATLAB построения кривой центров (Рис.12).

2. Первые 4 уравнения системы (2), описывающие движение тележки, интегрируются в явном виде, и получается закон движения тележки в терминах фазовых переменных (углов)  $x_5(t), x_7(t)$ . Оказалось, что сложное движение тележки складывается из прямолинейного равномерного и ограниченного (вообще говоря непериодического, Рис.4) движений.

Найдены ограничения на параметры и начальные условия системы, при которых движение тележки будет происходить в ограниченной области.

3. Получены в квадратурах закон движения изображающей точки на траектории и зависимость между угловыми координатами  $x_5, x_7$  траектории.

## Список литературы

- [1] Аппель, П. Теоретическая механика. Т.1,2. М.: Физматгиз, 1960.  
Смирнов, А.С. Смольников, Б.А. Механика сферического маятника. СПб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019.
- [2] Ефимов, В.В. Исследование колебаний физического маятника с подвижной точкой подвеса как упрощенной модели груза на внешней подвеске вертолета. Научный вестник МГТУ ГА. Серия Аэромеханика и прочность. № 138, с.126-133, 2009.
- [3] Кoryтов, М. С., Щербаков, В. С., Титенко, В. В., Беляков, В. Е. Модель сферического маятника с подвижной точкой подвеса в задаче пространственного перемещения груза грузоподъемным краном при ограничении колебаний. Динамика систем, механизмов и машин. Том 7, № 1, с.104-110, 2019.
- [4] Братищев, А. В. Управление колебаниями маятника на подвижной платформе. Дифференциальные уравнения и процессы управления, № 4, 2020, с.75-86, <https://diffjournal.spbu.ru/pdf/20404-jdecp-bratishev.pdf>
- [5] Дэбни, Дж., Харман, Т. Simulink 4. Секреты мастерства. М.: БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2003.
- [6] Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Лань, 2009.
- [7] Баутин, Н.Н., Леонтович, Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.
- [8] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. М.: Лань, 2020.

## **Qualitative analysis of the equation of motion of the "Mobile platform with a pendulum" system**

Bratishchev A. V.

Don State Technical University

avbratishchev@spark-mail.ru

**Abstract.** In this paper, we study the free movement on the horizontal plane of a platform with a spherical pendulum fixed in the center of mass. This system is considered as a system of two stationarily connected material points, one of which moves in the plane. The subsystem of differential equations describing the motion of the platform is integrated explicitly and the solution is a function of the variables describing the motion of this pendulum relative to the platform. In turn, in the system of fourth-order equations of motion of the pendulum relative to the platform, an independent autonomous subsystem of third-order equations is distinguished. A phase portrait of the latter system is constructed. This allowed us to give a complete description of the movement of the "Mobile platform with a pendulum" system at any of its initial states.

The relationship in quadratures between the angular phase coordinates of the points of the trajectories of the system is established.

**Keywords:** platform, cart, spherical pendulum, equation of motion, phase portrait.