ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений

Об одном локальном свойстве одномерного линейного дифференциального уравнения второго порядка

Б. П. Харламов, С. С. Расова

Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: b.p.harlamov@gmail.com, s.rasova@gmail.com

Аннотация. Рассматривается одномерное линейное дифференциальное уравнение второго порядка и решение внутренней задачи Дирихле этого уравнений на некотором интервале значений неизвестной функции. С каждой внутренней точкой интервала связаны два частных решения этой задачи на малой симметричной окрестности этой точки. Первая задача — со значениями неизвестной функции: 1 на левом конце и 0 на правом. Вторая задача — с соответствующими значениями: 0 на левом конце и 1 на правом. Доказано, что при стремлении длины окрестности к нулю решение каждой из этих двух задач (локальное свойство) характеризуют исходное уравнение в целом. А именно, первые два коэффициента разложения значений неизвестной функции по степеням длины окрестности пропорциональны соответствующим коэффициентам исходного дифференциального уравнения. Для доказательства используется обобщённая формула Грина и обобщённое полугрупповое свойство семейства решений задачи Дирихле.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, задача Дирихле, интегральное уравнение, ядро, итерация, обобщённая формула Грина, диффузионный процесс.

Введение и основной результат

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$f'' + A(x)f' - B(x)f = 0, \tag{1}$$

на интервале (a, b), где $a < b$, $A(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и $B(x)$ — непрерывная положительная функция. Пусть $f(a) = f_1$, $f(b) = f_2$, где $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$ и $F_{(a,b)}(x)$ — решение задачи Дирихле этого уравнения на интервале (a, b) с заданными краевыми значениями.

Для такого уравнения интерес представляют два фундаментальных решения краевой задачи: первое — со значениями $f_1 = 1$, $f_2 = 0$, обозначаемое как $g_r(x)$, и второе со значениями $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, обозначаемое как $h_r(x)$, где $r = (b - a)/2$. Будем искать решения этих задач в виде рядов по степеням r в точке $x = (a + b)/2$. Основным содержанием данной статьи является доказательство теоремы:

Теорема 1 *Функция F является решением внутренней задачи Дирихле для дифференциального уравнения*

$$f'' + A(x)f' - B(x)f = 0$$

на некотором интервале Δ, тогда и только тогда, когда для любой точки x и $r > 0$ таких, что $(x - r, x + r) \subset \Delta$, справедливы разложения

$$g_r(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}A(x)r - \frac{1}{4}B(x)r^2 + o(r^2),$$

$$h_r(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}A(x)r - \frac{1}{4}B(x)r^2 + o(r^2)$$

при $r \to 0$.

Таким образом при стремлении к нулю длины окрестности каждой внутренней точки x интервала Δ функции $g_r(x)$ и $h_r(x)$ характеризуют исходное уравнение в целом. А именно — первые два коэффициента разложения функций $g_r(x)$ и $h_r(x)$ по степеням r (локальное свойство) пропорциональны соответствующим коэффициентам исходного дифференциального уравнения (глобальное свойство).

Актуальность полученных результатов вытекает из применений в различных областях. В физике и химии известно большое число примеров представления реальных микро и макро процессов с помощью их математических моделей — марковских диффузионных процессов (см., например, [1], [2], [3], [4], [5]). В последнее время эта математическая модель используется в биологии: [6], геологии: [7], [8], социологии: [9] и других прикладных науках, где о процессе в целом требуется судить по его локальным свойствам. В свою очередь математическим аппаратом этой модели служит теория дифференциальных уравнений. Этот же аппарат используется в теории одномерных полумарковских диффузионных процессов с остановкой (см., например, [10], стр. 157), которые в ряде случаев учитывают большее число свойств реального процесса, чем традиционная марковская модель.

В частности, полумарковская модель с остановкой обосновывает статистическую оценку коэффициентов дифференциального уравнения по результатам первого выхода реального процесса из малой симметричной окрестности его начальной точки.

Доказательство теоремы

1. Необходимость

Известно (см., например, Соболев [11], с.296), что решение задачи Дирихле уравнения $u'' = q(x)$ на интервале (a,b) можно представить в виде

$$u(x) = u_1\frac{b-x}{b-a}+u_2\frac{x-a}{b-a}-\frac{b-x}{b-a}\int_a^x q(t)(t-a)\,dt-\frac{x-a}{b-a}\int_x^b q(t)(b-t)\,dt, \quad (2)$$

где q — непрерывная функция, $u_1 = u(a)$, $u_2 = u(b)$. В книге [11] это представление названо обобщённой формулой Грина.

Перепишем уравнение (1) в виде $u'' = -A(x)u' + B(x)u$ и подставим в формулу (2) функцию

$$q(x) \equiv -A(x)u'(x) + B(x)u(x).$$

В результате получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x) = u_1\frac{b-x}{b-a} + u_2\frac{x-a}{b-a} - \frac{b-x}{b-a}\int_a^x (-A(t)u'(t) + B(t)u(t))(t-a)\,dt-$$

$$-\frac{x-a}{b-a}\int_x^b (-A(t)u'(t) + B(t)u(t))(b-t)\,dt,$$

Применяя в интегралах $\int_a^x(-A(t)u'(t))(t-a)\,dt$ и $\int_x^b(-A(t)u'(t))(b-t)\,dt$ интегрирование по частям, получаем интегральное уравнение

$$u(x) = u_1\frac{b-x}{b-a} + u_2\frac{x-a}{b-a} + \int_a^b K(x,t)u(t)dt,$$

где

$$K(x,t) \equiv \begin{cases} K_1(x,t) \equiv \frac{b-x}{b-a}(-A(t)-(B(t)+A'(t))(t-a)), \ \ t<x \text{ (второй аргумент меньше первого)} \\ \\ K_2(x,t) \equiv \frac{x-a}{b-a}(A(t)-(B(t)+A'(t))(b-t)), \quad t>x \text{ (второй аргумент больше первого)} \end{cases}$$

Рассмотрим случай $u_1 = 1, \quad u_2 = 0$, обозначая в этом случае $u(x) \equiv g(x)$. Будем исследовать интегральное уравнение

$$g(x) = \frac{b-x}{b-a} + \int_a^b K(x,t)g(t)\,dt. \tag{3}$$

1.1. Первая итерация для функции g

Рассмотрим первую итерацию этого уравнения для функции g:

$$g(x) = \frac{b-x}{b-a} + \int_a^b K(x,t)\frac{b-t}{b-a}\,dt + \int_a^b K^{(2)}(x,t)g(t)\,dt,$$

где

$$K^{(2)}(x,t) \equiv \int_a^b K(x,z)K(z,t)\,dz.$$

Имеем

$$\int_a^b K(x,t)\frac{b-t}{b-a}\,dt = \int_a^x K_1(x,t)\frac{b-t}{b-a}\,dt + \int_x^b K_2(x,t)\frac{b-t}{b-a}\,dt =$$
$$= \int_a^x \frac{b-x}{b-a}(-A(t)-(B(t)+A'(t))(t-a))\frac{b-t}{b-a}\,dt +$$
$$+ \int_x^b \frac{x-a}{b-a}(A(t)-(B(t)+A'(t))(b-t))\frac{b-t}{b-a}\,dt.$$

Подставляя под знак интеграла значения $A(t) = A(x)+A'(x)(t-x)+o(t-x)$, $A'(t) = A'(x)+O(t-x)$, $B(t) = B(x)+O(t-x)$, получаем при $(t-x)\to 0$ для последнего выражения значение

$$\int_a^x \frac{b-x}{b-a}(-A(x)-A'(x)(t-x)+o(t-x)-(B(x)+A'(x)+O(t-x))(t-a))\frac{b-t}{b-a}\,dt+$$

$$+\int_x^b \frac{x-a}{b-a}(A(x)+A'(x)(t-x)+o(t-x)-(B(x)+A'(x)+O(t-x))(b-t))\frac{b-t}{b-a}\,dt.$$

Коэффициент при $A(x)$ равен

$$-\frac{b-x}{b-a}\int_a^x \frac{b-t}{b-a}\,dt+\frac{x-a}{b-a}\int_x^b \frac{b-t}{b-a}\,dt=$$

$$=\frac{b-x}{2(b-a)^2}((b-x)^2-(b-a)^2)+\frac{(x-a)(b-x)^2}{2(b-a)^2}.$$

Отсюда следует, что при $x-a=b-x=r$ этот коэффициент равен $(-r/4)$.

Коэффициент при $B(x)$ равен

$$\int_a^x \frac{b-x}{b-a}(-1)\frac{(t-a)(b-t)}{b-a}\,dt+\int_x^b \frac{x-a}{b-a}(-1)\frac{(b-t)^2}{b-a}\,dt=$$

$$=\frac{b-x}{(b-a)^2}(-1)\int_a^x (t-a)(b-t)\,dt+\frac{x-a}{(b-a)^2}(-1)\int_x^b (b-t)^2\,dt=$$

$$=\frac{b-x}{(b-a)^2}(-1)\left(\frac{(b-a)(x-a)^2}{2}-\frac{(x-a)^3}{3}\right)+\frac{x-a}{(b-a)^2}(-1)\frac{(x-a)^3}{3}.$$

При $x-a=b-x=r$ этот коэффициент равен $(-r^2/4)$.

Коэффициент при $A'(x)$ равен

$$\frac{b-x}{(b-a)^2}\int_a^x (x-t-(t-a))(b-t)\,dt+\frac{x-a}{(b-a)^2}\int_x^b (t-x-(b-t))(b-t)\,dt=$$

$$=\frac{b-x}{(b-a)^2}\left(-\frac{1}{2}(x-a)^3+\frac{2}{3}(x-a)^3\right)+\frac{x-a}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{2}(b-x)^3-\frac{2}{3}(b-x)^3\right).$$

При $x-a=b-x=r$ этот коэффициент равен нулю.

Очевидно, что первый интеграл от остаточного члена в подынтегральном выражении представляет собой величину порядка $o(r^2)$ при $r\to 0$.

1.2. Вторая итерация для функции g

Наша цель — проверить, что вторая итерация не содержит квадратичного члена вдобавок к найденному в первой итерации. Существует априорная возможность такого добавочного члена благодаря тому, что в первой итерации появляется член порядка $-\frac{1}{4}A(x)r$. Покажем, что фактически такого члена не существует.

Рассмотрим вторую итерацию интегрального уравнения (3).

$$g(x)=\frac{b-x}{b-a}+\int_a^b K(x,t)\frac{b-t}{b-a}\,dt+\int_a^b K^{(2)}(x,t)\frac{b-t}{b-a}\,dt+\int_a^b K^{(3)}(x,t)g(t)\,dt,$$

где согласно определению

$$\int_a^b K^{(2)}(x,t)\frac{b-t}{b-a}\,dt=$$

$$=\int_a^x \frac{b-t}{b-a}\left[\int_a^t K_1(x,z)K_2(z,t)\,dz+\int_t^x K_1(x,z)K_1(z,t)\,dz+\right.$$

$$\left.+\int_x^b K_2(x,z)K_1(z,t)\,dz\right]dt+\int_x^b \frac{b-t}{b-a}\left[\int_a^x K_1(x,z)K_2(z,t)\,dz+\right.$$

$$\left.+\int_x^t K_2(x,z)K_2(z,t)\,dz+\int_t^b K_2(x,z)K_1(z,t)\,dz\right]dt=$$

$$=\int_a^x \frac{b-t}{b-a}\int_a^t \frac{b-x}{b-a}(-A(z)-D(z)(z-a))\frac{z-a}{b-a}(A(t)-D(t)(b-t))\,dz\,dt+$$

$$+\int_a^x \frac{b-t}{b-a}\int_t^x \frac{b-x}{b-a}(-A(z)-D(z)(z-a))\frac{b-z}{b-a}(-A(t)-D(t)(t-a))\,dz\,dt+$$

$$+\int_a^x \frac{b-t}{b-a}\int_x^b \frac{x-a}{b-a}(A(z)-D(z)(b-z))\frac{b-z}{b-a}(-A(t)-D(t)(t-a))\,dz\,dt+$$

$$+\int_x^b \frac{b-t}{b-a}\int_a^x \frac{b-x}{b-a}(-A(z)-D(z)(z-a))\frac{z-a}{b-a}(A(t)-D(t)(b-t))\,dz\,dt+$$

$$+\int_x^b \frac{b-t}{b-a}\int_x^t \frac{x-a}{b-a}(A(z)-D(z)(b-z))\frac{z-a}{b-a}(A(t)-D(t)(b-t))\,dz\,dt+$$

$$+\int_x^b \frac{b-t}{b-a}\int_t^b \frac{x-a}{b-a}(A(z)-D(z)(b-z))\frac{b-z}{b-a}(-A(t)-D(t)(t-a))\,dz\,dt,$$

где $D(x)\equiv B(x)+A'(x)$.

Слагаемое суммы с произведением $A(z)A(t)$ под знаком интеграла равно

$$\int_a^x \frac{b-t}{b-a}\int_a^t \frac{b-x}{b-a}(-A(z))\frac{z-a}{b-a}(A(t))\,dz\,dt+$$

$$+\int_a^x \frac{b-t}{b-a}\int_t^x \frac{b-x}{b-a}(-A(z))\frac{b-z}{b-a}(-A(t))\,dz\,dt+$$

$$+\int_a^x \frac{b-t}{b-a}\int_x^b \frac{x-a}{b-a}(A(z))\frac{b-z}{b-a}(-A(t))\,dz\,dt+$$
$$+\int_x^b \frac{b-t}{b-a}\int_a^x \frac{b-x}{b-a}(-A(z))\frac{z-a}{b-a}(A(t))\,dz\,dt+$$
$$+\int_x^b \frac{b-t}{b-a}\int_x^t \frac{x-a}{b-a}(A(z))\frac{z-a}{b-a}(A(t))\,dz\,dt+$$
$$+\int_x^b \frac{b-t}{b-a}\int_t^b \frac{x-a}{b-a}(A(z))\frac{b-z}{b-a}(-A(t))\,dz\,dt,$$

Разложим функции $A(z)$ и $A(t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x и вынесем за знак интеграла первые члены этого разложения. Очевидно, что другие члены разложения дают в совокупности порядок малости $o(r^2)$ при $r \to 0$. Коэффициент степени $A^2(x)$ равен

$$\frac{b-x}{(b-a)^3}\left[-\int_a^x (b-t)\int_a^t (z-a)\,dz\,dt\right]+$$
$$+\frac{b-x}{(b-a)^3}\left[\int_a^x (b-t)\int_t^x (b-z)\,dz\,dt\right]+$$
$$+\frac{x-a}{(b-a)^3}\left[-\int_a^x (b-t)\int_x^b (b-z)\,dz\,dt\right]+$$
$$+\frac{b-x}{(b-a)^3}\left[-\int_x^b (b-t)\int_a^x (z-a)\,dz\,dt\right]+$$
$$+\frac{x-a}{(b-a)^3}\left[\int_x^b (b-t)\int_x^t (z-a)\,dz\,dt\right]+$$
$$+\frac{x-a}{(b-a)^3}\left[-\int_x^b (b-t)\int_t^b (b-z)\,dz\,dt\right]=$$
$$=\frac{b-x}{2(b-a)^3}\left[-\frac{(b-a)(x-a)^3}{3}+\frac{(x-a)^4}{4}-(b-x)^2(b-a)(x-a)+\right.$$
$$\left.+\frac{(b-x)^2(x-a)^2}{2}-\frac{(b-x)^4}{4}+\frac{(b-a)^4}{4}-\frac{(x-a)^2(b-x)^2}{2}\right]+$$
$$+\frac{x-a}{2(b-a)^3}\left[\frac{(b-x)^4}{2}-\frac{2(b-a)(b-x)^3}{3}-\frac{(x-a)^2(b-x)^2}{2}\right].$$

Очевидно, что при условии $x - a = b - x = r$, $b - a = 2r$ эта сумма равна нулю. Обозначим $g_r(x)$ значение функции $g(x)$ при этом условии. Итак, вторая итерация не добавляет квадратичных членов, и остаётся по прежнему (результат первой итерации) на интервале $(x - r, x + r)$

$$g_r(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}A(x)r - \frac{1}{4}B(x)r^2 + o(r^2) \qquad (r \to 0).$$

1.3. Первая итерация для функции h

Рассмотрим случай $u_1 = 0, \quad u_2 = 1$, обозначая в этом случае $u(x) \equiv h(x)$. Будем исследовать интегральное уравнение

$$h(x) = \frac{x - a}{b - a} + \int_a^b K(x,t)h(t)\,dt.$$

Первая итерация этого уравнения для функции h:

$$h(x) = \frac{x - a}{b - a} + \int_a^b K(x,t)\frac{t - a}{b - a}\,dt + \int_a^b K^{(2)}(x,t)h(t)\,dt,$$

определяет первый и (предположительно) второй члены её асимптотики на малом симметричном интервале, как и в случае g.

Имеем

$$\int_a^b K(x,t)\frac{t - a}{b - a}\,dt = \int_a^x K_1(x,t)\frac{t - a}{b - a}\,dt + \int_x^b K_2(x,t)\frac{t - a}{b - a}\,dt =$$

$$= \int_a^x \frac{b - x}{b - a}(-A(t) - (B(t) + A'(t))(t - a))\frac{t - a}{b - a}\,dt +$$

$$+ \int_x^b \frac{x - a}{b - a}(A(t) - (B(t) + A'(t))(b - t))\frac{t - a}{b - a}\,dt.$$

Подставляя под знак интеграла значения $A(t) = A(x) + A'(x)(t - x) + o(t - x)$, $A'(t) = A'(x) + O(t - x)$, $B(t) = B(x) + O(t - x)$, получаем при $(t - x) \to 0$ для последнего выражения значение

$$\int_a^x \frac{b - x}{b - a}(-A(x) - A'(x)(t - x) + o(t - x) - (B(x) + A'(x) + O(t - x))(t - a))\frac{t - a}{b - a}\,dt +$$

$$+ \int_x^b \frac{x - a}{b - a}(A(x) + A'(x)(t - x) + o(t - x) - (B(x) + A'(x) + O(t - x))(b - t))\frac{t - a}{b - a}\,dt.$$

Коэффициент при $A(x)$ равен

$$-\frac{b-x}{b-a}\int_a^x \frac{t-a}{b-a}\,dt + \frac{x-a}{b-a}\int_x^b \frac{t-a}{b-a}\,dt =$$

$$= -\frac{b-x}{2(b-a)^2}(x-a)^2 + \frac{x-a}{2(b-a)^2}[(b-a)^2-(x-a)^2].$$

При $x-a=b-x=r$ этот коэффициент равен $r/4$.

Коэффициент при $B(x)$ равен

$$-\frac{b-x}{(b-a)^2}\int_a^x (t-a)^2\,dt - \frac{x-a}{(b-a)^2}\int_x^b (b-t)(t-a)\,dt =$$

$$= -\frac{b-x}{(b-a)^2}\frac{(x-a)^3}{3} - \frac{x-a}{(b-a)^2}\left[(b-a)\frac{(b-x)^2}{2} - \frac{(b-x)^3}{3}\right].$$

При $x-a=b-x=r$ этот коэффициент равен $(-r^2/4)$.

Коэффициент при $A'(x)$ равен

$$\frac{b-x}{(b-a)^2}\int_a^x [-(t-x)(t-a)-(t-a)^2]\,dt+$$

$$+\frac{x-a}{(b-a)^2}\int_x^b [(t-x)(t-a)-(b-t)(t-a)]\,dt =$$

$$= \frac{b-x}{(b-a)^2}\left[-\frac{2(x-a)^3}{3}+\frac{(x-a)^3}{2}\right]+$$

$$+\frac{x-a}{(b-a)^2}\left[\frac{(b-a)^3}{3}-\frac{(x-a)^3}{3}-(x-a)\frac{(b-a)^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(x-a)^3}{2}-(b-a)\frac{(b-x)^2}{2}+\frac{(b-x)^3}{3}\right].$$

При $x-a=b-x=r$ этот коэффициент равен нулю.

Очевидно, что первый интеграл от остаточного члена в подынтегральном выражении представляет собой величину порядка $o(r^2)$ при $r\to 0$.

1.4. Вторая итерация для функции h

Имеем

$$\int_a^b K^{(2)}(x,t)\frac{t-a}{b-a}\,dt =$$

$$= \int_a^x \frac{t-a}{b-a} \left[\int_a^t K_1(x,z)K_2(z,t)\,dz + \int_t^x K_1(x,z)K_1(z,t)\,dz + \right.$$

$$\left. + \int_x^b K_2(x,z)K_1(z,t)\,dz \right] dt + \int_x^b \frac{t-a}{b-a} \left[\int_a^x K_1(x,z)K_2(z,t)\,dz + \right.$$

$$\left. + \int_x^t K_2(x,z)K_2(z,t)\,dz + \int_t^b K_2(x,z)K_1(z,t)\,dz \right] dt =$$

$$= \int_a^x \frac{t-a}{b-a} \int_a^t \frac{b-x}{b-a}(-A(z) - D(z)(z-a)) \frac{z-a}{b-a}(A(t) - D(t)(b-t))\,dz\,dt +$$

$$+ \int_a^x \frac{t-a}{b-a} \int_t^x \frac{b-x}{b-a}(-A(z) - D(z)(z-a)) \frac{b-z}{b-a}(-A(t) - D(t)(t-a))\,dz\,dt +$$

$$+ \int_a^x \frac{t-a}{b-a} \int_x^b \frac{x-a}{b-a}(A(z) - D(z)(b-z)) \frac{b-z}{b-a}(-A(t) - D(t)(t-a))\,dz\,dt +$$

$$+ \int_x^b \frac{t-a}{b-a} \int_a^x \frac{b-x}{b-a}(-A(z) - D(z)(z-a)) \frac{z-a}{b-a}(A(t) - D(t)(b-t))\,dz\,dt +$$

$$+ \int_x^b \frac{t-a}{b-a} \int_x^t \frac{x-a}{b-a}(A(z) - D(z)(b-z)) \frac{z-a}{b-a}(A(t) - D(t)(b-t))\,dz\,dt +$$

$$+ \int_x^b \frac{t-a}{b-a} \int_t^b \frac{x-a}{b-a}(A(z) - D(z)(b-z)) \frac{b-z}{b-a}(-A(t) - D(t)(t-a))\,dz\,dt.$$

Слагаемое суммы с произведением $A(z)A(t)$ под знаком интеграла:

$$\int_a^x \frac{t-a}{b-a} \int_a^t \frac{b-x}{b-a}(-A(z)) \frac{z-a}{b-a}(A(t))\,dz\,dt +$$

$$+ \int_a^x \frac{t-a}{b-a} \int_t^x \frac{b-x}{b-a}(-A(z)) \frac{b-z}{b-a}(-A(t))\,dz\,dt +$$

$$+ \int_a^x \frac{t-a}{b-a} \int_x^b \frac{x-a}{b-a}(A(z)) \frac{b-z}{b-a}(-A(t))\,dz\,dt +$$

$$+ \int_x^b \frac{t-a}{b-a} \int_a^x \frac{b-x}{b-a}(-A(z)) \frac{z-a}{b-a}(A(t))\,dz\,dt +$$

$$+ \int_x^b \frac{t-a}{b-a} \int_x^t \frac{x-a}{b-a}(A(z)) \frac{z-a}{b-a}(A(t))\,dz\,dt +$$

$$+ \int_x^b \frac{t-a}{b-a} \int_t^b \frac{x-a}{b-a}(A(z)) \frac{b-z}{b-a}(-A(t))\,dz\,dt,$$

Разложим функции $A(z)$ и $A(t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x и вынесем за знак интеграла первые члены этого разложения. Очевидно, что другие члены разложения дают в совокупности порядок малости $o(r^2)$ при $r \to 0$. Коэффициент члена $A^2(x)$ равен

$$\frac{b-x}{(b-a)^3}\left[-\int_a^x (t-a)\int_a^t (z-a)\,dz\,dt\right]+$$

$$+\frac{b-x}{(b-a)^3}\left[\int_a^x (t-a)\int_t^x (b-z)\,dz\,dt\right]+$$

$$+\frac{x-a}{(b-a)^3}\left[-\int_a^x (t-a)\int_x^b (b-z)\,dz\,dt\right]+$$

$$+\frac{b-x}{(b-a)^3}\left[-\int_x^b (t-a)\int_a^x (z-a)\,dz\,dt\right]+$$

$$+\frac{x-a}{(b-a)^3}\left[\int_x^b (t-a)\int_x^t (z-a)\,dz\,dt\right]+$$

$$+\frac{x-a}{(b-a)^3}\left[-\int_x^b (t-a)\int_t^b (b-z)\,dz\,dt\right]=$$

$$=\frac{b-x}{2(b-a)^3}\left[-\frac{(x-a)^4}{4}-(x-a)(b-x)^2(b-a)-\frac{(b-x)^4}{2}+\right.$$

$$+\frac{(b-x)^2(b-a)^2}{2}-\frac{(b-a)(b-x)^3}{3}+\frac{(b-a)^4}{3}+\frac{(b-x)^4}{4}-\frac{(b-a)^4}{4}-$$

$$\left.-\frac{(x-a)^2(b-a)^2}{2}+\frac{(x-a)^4}{2}\right]+$$

$$+\frac{x-a}{2(b-a)^3}\left[-\frac{(x-a)^2(b-x)^2}{2}+\frac{(b-a)^4}{2}-\frac{(x-a)^4}{2}-\frac{(x-a)^2(b-a)^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(x-a)^4}{2}-\frac{(x-a)^3(b-a)}{3}+\frac{(b-x)^4}{4}\right].$$

Подставляя в это выражение значения $x-a=b-x=r$ и $b-a=2r$, мы получаем нуль. Отсюда следует, что квадратичный член разложения $h_r(x)$ не содержит слагаемого с множителем $A^2(x)$:

$$h_r(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}A(x)r-\frac{1}{4}B(x)r^2+o(r^2) \qquad (r\to 0).$$

2. Достаточность

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f'' + \alpha(x)f' - \beta(x)f = 0, \tag{4}$$

где α — непрерывно дифференцируемая и β — непрерывная положительная функции. Пусть Δ_1 и Δ_2 — два интервала, причём $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Обозначим $F_{\Delta_i}(\phi\,|\,x)$ решение задачи Дирихле для уравнения (4) на интервале $\Delta_i \equiv (a_i, b_i)$ $(i = 1, 2)$, где ϕ — непрерывная функция и $\phi(a_i)$, $\phi(b_i)$ — значения функции f на краях интервала Δ_i. Известно (см., например, [1], стр. 198), что для решений задачи Дирихле справедливо уравнение

$$F_{\Delta_2}(\phi\,|\,x) = F_{\Delta_1}(F_{\Delta_2}(\phi\,|\cdot)\,|\,x), \qquad (x \in \Delta_1).$$

В одномерном случае это уравнение равносильно уравнению

$$F_{\Delta_2}(\phi\,|\,x) = g^{(1)}(x)F_{\Delta_2}(\phi\,|\,a_1) + h^{(1)}(x)F_{\Delta_2}(\phi\,|\,b_1),$$

где $g^{(1)}$ и $h^{(1)}$ — соответствуют уравнению (4) на интервале Δ_1. Пусть $x = (a_1 + b_1)/2$ и $x - a_1 = b_1 - x = r$ при некотором положительном $r > 0$, и

$$g_r^{(1)}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}A(x)r - \frac{1}{4}B(x)r^2 + o(r^2),$$

$$h_r^{(1)}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}A(x)r - \frac{1}{4}B(x)r^2 + o(r^2)$$

при $r \to 0$ равномерно по $x \in \Delta_2$. Тогда $F \equiv F_{\Delta_2}(\phi\,|\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}A(x)r - \frac{1}{4}B(x)r^2 + o\left(r^2\right)\right)F(x-r) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}A(x)r - \frac{1}{4}B(x)r^2 + o\left(r^2\right)\right)F(x+r).$$

Согласно уравнению (4), F — дважды непрерывно дифференцируемая функция, и справедливы представления

$$F(x+r) = F(x) + F'(x)r + \frac{1}{2}F''(x)r^2 + o(r^2),$$

$$F(x-r) = F(x) - F'(x)r + \frac{1}{2}F''(x)r^2 + o(r^2),$$

Подставляя эти выражения в предыдущее уравнение, получаем уравнение

$$\frac{1}{2}r^2F''(x) + \frac{1}{2}r^2A(x)F'(x) - \frac{1}{2}r^2B(x)F(x) + o(r^2) = 0.$$

Разделив на $\frac{1}{2}r^2$ и устремляя r к нулю, получаем уравнение

$$F''(x) + A(x)F'(x) - B(x)F(x) = 0,$$

которое совпадает с уравнением (4) при $\alpha = A$ и $\beta = B$. Мы получили, что уравнение, которому подчиняется решение задачи Дирихле на интервале Δ_2, определяется тремя первыми коэффициентами разложения решений g_r и h_r по степеням r.

Теорема доказана.

Полученный результат находит применение в теории одномерных полумарковских диффузионных процессов с остановкой (см., например, [1], стр. 157). Пусть начальная точка x диффузионного процесса с остановкой принадлежит некоторому открытому интервалу (a, b) и r таково, что $(x-r, x+r) \subset (a, b)$. Из марковского свойства процесса относительно момента первого выхода из интервала следует, что

$$F(x) = g_r(x)F(x-r) + h_r(x)F(x+r),$$

где

$$F(x) \equiv F_{(a,b)}(\phi \,|\, x) = g(x)\phi(a) + h(x)\phi(b),$$

$g(x)$ и $h(x)$ — вероятности первого выхода через левую и правую границы интервала соответственно, ϕ — произвольная функция. Известно, что F является решением задачи Дирихле для некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка на интервале (a, b). Первые члены разложения функций g_r и h_r по степеням r полностью определяют коэффициенты этого уравнения. Это означает, что коэффициенты уравнения могут быть статистически оценены по наблюдению за поведением реального процесса в малой симметричной окрестности его начальной точки

Список литературы

[1] Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. -М.:Мир, 1977.

[2] Герцрикен С.Д. Диффузия в металлах и сплавах в твёрдой фазе. -М.: Госфизматлитиздат, 1960.

[3] Бутягин П.Ю. Химическая физика твёрдого тела. -М.: МГУ, 2006.

[4] Ярославцев А.Б. Химия твёдого тела. -М.: Научный мир, 2009.

[5] Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. -М.: Наука, 1967.

[6] Мартин Р. Введение в биофизическую химию. -М.: Мир, 1966.

[7] Logvinova K.V., Kozyrev O.R., Stepanyants Y.A., Morozov V.R. Diffusion in random porous media. Intern. Conf. Topical Problems of Nonlinear Physics. -2003.

[8] Garde R.J., Renga Raju K.J. Bed load transport and saltation. Mechanics of Sediment Transportation and Alluvial Stream Problems. -Taylor & Francis, 2000, p.181-225.

[9] Evelend JD., Торнацкий Л. Процессы технологических инноваций. Лексингтон, Массачусетс. Lexington Books, 1990.

[10] Харламов Б.П. Непрерывные полумарковские процессы. - СПб: Наука, 2001.

[11] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Техиздат, 1954.

On a local property of one-dimensional linear differential equation of the second order

B. P. Harlamov, S. S. Rasova.
Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS, Saint-Petersburg, Russia

b.p.harlamov@gmail.com, s.rasova@gmail.com

Abstract. We consider one-dimensional linear second order differential equation and the solution of the Dirichlet problem of this equation on an interval of the unknown function values. Two partial solutions of this problem on a small symmetric neighborhood of an interior point of this interval are investigated. The first solution has values 1 on the left edge, and 0 on the right edge of the neighborhood. The second one has 0 and 1 correspondingly. It is shown that properties of these partial solutions when the length of the neighborhood tends to 0 characterize the initial equation completely. Namely, two initial coefficients of the decomposition of each partial solution with respect to the neighborhood length are proportional to corresponding coefficients of this equation. To prove this theorem we use the generalized Green formula and the generalized semigroup property of the family of the Dirichlet problem solutions.

Key words: differential equation, Dirichlet problem, integral equation, kernel, iteration, generalized Green formula, diffusion process.