



**Устойчивость и сходимость монотонных разностных схем,
аппроксимирующих краевые задачи для
интегро-дифференциального уравнения с дробной по времени
производной и оператором Бесселя**

З.В. Бештокова, М.Х. Бештоков

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

Аннотация. Изучены краевые задачи для интегро-дифференциального уравнения с дробной по времени производной и оператором Бесселя. Для решения рассматриваемых задач получены априорные оценки в дифференциальной трактовке, из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части. Для численного решения краевых задач построены монотонные разностные схемы с направленными разностями и для них доказываются аналоги априорных оценок, приводятся оценки погрешности в предположении достаточной гладкости решений уравнений. Из полученных априорных оценок в разностной форме следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также в силу линейности разностных задач сходимость со вторым порядком по параметрам сетки. Предложен алгоритм приближенного решения краевой задачи с условием третьего рода, проведены численные расчеты тестового примера, иллюстрирующего полученные в работе теоретические результаты, касающиеся сходимости и порядка аппроксимации разностной схемы.

Ключевые слова: краевые задачи, дробная производная Герасимова-Капуто, априорная оценка, монотонные схемы, интегро-дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение дробного порядка.

1 Введение.

Важное теоретическое и практическое значение имеет построение математических моделей, учитывающих фрактальные свойства различных сред и явления природы, которые описываются с помощью дифференциальных уравнений дробного порядка. В [?]-[?] дан достаточно полный обзор работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка. Монография [?] посвящена качественно новым свойствам операторов дробного интегрирования и их применению к дифференциальным уравнениям дробного порядка.

В настоящей работе приводится численное исследование решения трехмерного интегро-дифференциального уравнения с дробной по времени производной в смысле Герасимова-Капуто порядка α

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (0.1)$$

где

$$Lu = \sum_{s=1}^3 L_s u, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

$$L_s u = \frac{\partial}{\partial x_s} \left(k_s(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_s} \right) + r_s(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_s} + \int_0^t p_s(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau.$$

Переходя к цилиндрической системе координат (r, φ, z) в случае, когда решение $u = u(r)$ не зависит ни от z , ни от φ (имеет место осевая симметрия) (0.1) принимает вид (обозначим $x = r$):

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{r} \left(rk(r, t) u_r \right)_r + h(r, t) u_r + \int_0^t p(r, t, \tau) u(r, \tau) d\tau + f(r, t),$$

а в случае сферической симметрии уравнение (0.1) принимает вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{r^2} \left(r^2 k(r, t) u_r \right)_r + h(r, t) u_r + \int_0^t p(r, t, \tau) u(r, \tau) d\tau + f(r, t).$$

где

$$k(r, t) = k_1(x, t) = k_2(x, t) = k_3(x, t),$$

$$h(r, t) = h_1(x, t) = h_2(x, t) = h_3(x, t), \quad q(r, t) = q_1(x, t) = q_2(x, t) = q_3(x, t)$$

есть условия симметрии на коэффициенты в силу симметрии r относительно переменных x_1, x_2, x_3 .

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [?] - [?], работы [?]-[?] - для уравнения Аллера дробного порядка, а [?], [?] нелокальным краевым задачам для уравнения псевдопараболического типа с оператором Бесселя.

1. Постановка задачи.

В замкнутом прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения с дробной по времени производной в смысле Герасимова-Капуто порядка α

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^t p(x, t, \tau) u(x, \tau) d\tau + f(x, t),$$

$$0 < x < l, 0 < t \leq T, \tag{1.1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m k(x, t) u_x(x, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \tag{1.2}$$

$$u(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \tag{1.3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq l, \tag{1.4}$$

где

$$0 < c_0 \leq k(x, t) \leq c_1, |r(x, t), r_x(x, t), k_x(x, t), p(x, t, \tau)| \leq c_2, \tag{1.5}$$

$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$, – дробная производная в смысле Герасимова-Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$ [?], $c_i, i = 0, 1, 2$ – положительные числа, $0 \leq m \leq 2$.

Заметим, что при $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0, t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (1.2), равносильному в свою очередь тождеству $k(0, t)u_x(0, t) = 0$ [?], если функции $r(0, t), \rho(0, t), f(0, t)$ конечны.

Предположим, что решение задачи (1.1) – (1.4) существует и обладает нужными по ходу изложения производными, коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать $M_i = const > 0, i = 1, 2, \dots$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2 Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1.1) - (1.4) в дифференциальной форме умножим уравнение (1.1) скалярно на $x^m u$:

$$\begin{aligned} \left(\partial_{0t}^\alpha u, x^m u \right) &= \left((x^m k u_x)_x, u \right) + \\ &+ \left(r u_x, x^m u \right) + \left(\int_0^t p u d\tau, x^m u \right) + \left(f, x^m u \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $(u, v) = \int_0^l u v dx$, $(u, u) = \|u\|_0^2$, где u, v – заданные на $[0, l]$ функции.

Преобразуя интегралы, входящие в тождество (2.1), с помощью неравенства Коши с ε , леммы 1 [?], после несложных преобразований с учетом (1.2) из (2.1) получим

$$\partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \leq M_1 \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + M_2 \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 d\tau + M_3 \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2. \quad (2.2)$$

Применяя к обеим частям (2.2) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получим

$$\begin{aligned} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 &\leq M_1 D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \\ &+ M_2 D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 d\tau + M_4 \left(D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_0(x)\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Второе слагаемое в правой части (2.3) оценим так

$$\begin{aligned} D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int_0^\tau \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 ds \int_s^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 (t-\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \leq \frac{T}{\alpha} D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2. \end{aligned}$$

Итак, получаем

$$D_{0t}^{-\alpha} \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 d\tau \leq \frac{T}{\alpha} D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2. \quad (2.4)$$

С учетом (2.4) из (2.3) находим

$$\begin{aligned} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 &\leq \\ &\leq M_5 D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + M_4 \left(D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_0(x)\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

С помощью леммы 2 [?] из (2.5) получаем следующую априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \leq M\left(D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2\right), \quad (2.6)$$

где $M = const > 0$, зависящая только от входных данных задачи (1.1)-(1.4), $D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1.5), тогда для решения $u(x, t)$ задачи (1.1)-(1.4) справедлива априорная оценка (2.6), из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

3 Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)-(1.4) поставим в соответствие монотонную разностную схему с порядком аппроксимации $O\left(\frac{h^2+\tau^2}{x}\right)$:

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y &= \frac{\kappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right) + \\ &+ \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\right) + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{s,i}^j y_i^{s\bar{\tau}} + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\kappa_0 a_1 y_{(x,0)}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^{s\bar{\tau}}\right) - \mu, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (3.2)$$

$$y_N^{(\sigma)} = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = l, \quad (3.3)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad t = 0, \quad (3.4)$$

где $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ – дискретный аналог дробной производной в смысле Капуто порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ [?], обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$,

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad m\tau = T\},$$

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad Nh = l\},$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad t \in \bar{\omega}_\tau\},$$

$$a_0^{(\alpha, \sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha, \sigma)} = (l + \sigma)^{1-\alpha} - (l - 1 + \sigma)^{1-\alpha}, \quad l \geq 1, \quad \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$b_l^{(\alpha, \sigma)} = \frac{1}{2 - \alpha} \left[(l + \sigma)^{2-\alpha} - (l - 1 + \sigma)^{2-\alpha} \right] - \frac{1}{2} \left[(l + \sigma)^{1-\alpha} + (l - 1 + \sigma)^{1-\alpha} \right], \quad l \geq 1,$$

при $j = 0, \quad c_0^{(\alpha, \sigma)} = a_0^{(\alpha, \sigma)}$;

$$\text{при } j > 0, \quad c_s^{(\alpha, \sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha, \sigma)} + b_1^{(\alpha, \sigma)}, & s = 0, \\ a_s^{(\alpha, \sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha, \sigma)} - b_s^{(\alpha, \sigma)}, & 1 \leq s \leq j - 1, \\ a_j^{(\alpha, \sigma)} - b_j^{(\alpha, \sigma)}, & s = j, \end{cases}$$

$$c_s^{(\alpha, \sigma)} > \frac{1 - \alpha}{2} (s + \sigma)^{-\alpha} > 0, \quad a_i^j = k(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}), \quad b_i^{\pm j} = \frac{\bar{\varkappa}_i r_i^{\pm j + \sigma}}{k_i^{j + \sigma}},$$

$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1 - \sigma) y^j, \quad r_N = r(l, t) = r_N^{j+\sigma} \geq 0, \quad r_0 = r(0, t) = r_0^{j+\sigma} \leq 0,$$

$$r = r^+ + r^-, \quad r^+ = 0.5(r + |r|) \geq 0, \quad r^- = 0.5(r - |r|) \leq 0,$$

$$\bar{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\varkappa_i = \frac{1}{1 + R_i}, \quad \rho_{i,s}^j = p_{i,s}^{j+\sigma}, \quad \varphi_i^j = \begin{cases} \bar{\varkappa}_i f_i^{j+\sigma}, & i \neq 0, N, \\ f_i^{j+\sigma}, & i = 0, N. \end{cases} \quad \bar{h} = \begin{cases} 0.5h, & i = 0, \\ h, & i \neq 0, N, \end{cases}$$

$$R_i = \frac{0.5h|r_i|\bar{\varkappa}_i}{k_{i-0.5}}, \quad \varkappa_0 = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{(m+1)a_1}}, \quad r_0 \leq 0, \quad |r| = r^+ - r^-, \quad \bar{x}^m = x_{i-0.5}^m,$$

$$\mu = \frac{0.5h}{m+1} \varphi_0, \quad Y = \hat{y} + y, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad t^* = t^{j+\sigma}.$$

$$\varkappa = \frac{1}{1 + R}, \quad R = \frac{0.5h|r|}{k} - \text{разностное число Рейнольдса},$$

$$\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} v^s \bar{\tau} = \sum_{s=1}^{j-1} v^s \tau + 0.5\tau \left(v^0 + v^j + v^{j+\frac{1}{2}} \right), \quad \bar{\tau} = \begin{cases} 0.5\tau, & j = 0, m, m + \frac{1}{2}, \\ \tau, & j \neq 0, m, m + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Введем скалярные произведения и норму:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (1, u^2) = \|u\|_0^2, \quad (1, u_x^2) = \|u_x\|_0^2, \quad (1, u^2) = \sum_{i=1}^N u_i^2 \bar{h}.$$

Найдем теперь априорную оценку, для этого умножим (3.1) скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$:

$$\left(\bar{\varkappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, x^m y^{(\sigma)} \right) = \left(\varkappa (x_{i-0.5}^m a_i^j y_x^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)} \right) + \left(b^{-j} x_{i-0.5}^m a_i^j y_{x,i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) +$$

$$+ \left(b^{+j} x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{s,i}^j y_i^{s\bar{\tau}}, x^m y^{(\sigma)} \right) + \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)} \right). \quad (3.5)$$

Справедлива следующая [?]

Лемма 3. Для любой функции $y(t)$, определенной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство

$$y^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y \geq \frac{1}{2} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (y^2).$$

Оценим суммы, входящие в (3.5), с учетом леммы 3:

$$\left(\bar{x} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, x^m y^{(\sigma)} \right) \geq M_1 \left(\frac{1}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2 \right) \geq \frac{1}{4} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\kappa (x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x, y^{(\sigma)} \right) &= \kappa x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \Big|_0^N - \left(\bar{x}_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\kappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}} \right) = \\ &= \kappa x_{i-0.5}^m a_i^j y^{(\sigma)} y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \Big|_0^N - \left(\bar{x}^m a \kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \right) - \left(x_{i-0.5}^m a \kappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2 \right) \leq \\ &\leq x_{i-0.5}^m y^{(\sigma)} \kappa a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \Big|_0^N + \varepsilon \| \bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \|_0^2 + M_3 \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 - M_4 \| \bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \|_0^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \left(b^{-j} x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) + \left(b^{+j} x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}, y^{(\sigma)} \right) &\leq \\ &\leq \varepsilon \| \bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \|_0^2 + M_5^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^{s\bar{\tau}}, x^m y^{(\sigma)} \right) &\leq \left(\frac{1}{2}, (x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)})^2 \right) + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j x^{\frac{m}{2}} y_i^{s\bar{\tau}} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{2}, \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} (\rho^s)^2 \bar{\tau} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} (x^{\frac{m}{2}} y_i^s)^2 \bar{\tau} \right) \leq \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_6 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 \bar{\tau}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\left(\varphi, x^m y^{(\sigma)} \right) \leq \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2. \quad (3.10)$$

Учитывая преобразования (3.6)-(3.10), из (3.5) находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 + M_4 \| \bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \|_0^2 &\leq \bar{x}^m y^{(\sigma)} \kappa a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \Big|_0^N + \\ &+ 2\varepsilon \| \bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \|_0^2 + M_8^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_7 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Преобразуем первое выражение в правой части (3.11), тогда получим

$$\begin{aligned} & \bar{x}^m y^{(\sigma)} \kappa a y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \Big|_0^N = -x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \kappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} = \\ & = -x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \left[\frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau} \right) - \mu \right] = \\ & = x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \mu - \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + \frac{hx_{0.5}^m}{2(m+1)} y_0^{(\sigma)} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau} \leq \mu^2 + \\ & + M_9 \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)} \right)^2 - \frac{0.5h}{2(m+1)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0 \right)^2 + M_{10} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^s \right)^2 \bar{\tau}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Учитывая (3.12), из (3.11) получаем

$$\begin{aligned} & \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq \varepsilon M_{11} \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_{12} \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + \\ & + M_{13} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_1^2 \bar{\tau} + M_{14} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu^2 \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0 \right)^2$.

Выбирая $\varepsilon = \frac{1}{2M_{11}}$ из (3.11) получаем

$$\begin{aligned} & \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 \leq \\ & \leq M_{15} \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_{16} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_1^2 \bar{\tau} + M_{17} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu^2 \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^s \right)^2 \right) \bar{\tau} = \\ & = \sum_{s=0}^j \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^s \right)^2 \right) \bar{\tau} + 0.5\tau \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^j\|_0^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^j \right)^2 \right) \end{aligned}$$

перепишем (3.14) в другой форме

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 \leq M_{18}^\sigma \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_1^2 + M_{19}^\sigma \|x^{\frac{m}{2}} y^j\|_1^2 + M_{20} F^j. \quad (3.15)$$

где $F^j = \sum_{s=0}^j \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_1^2 \bar{\tau} + \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu^2$.

На основании леммы 7 [?] из (3.15) получаем

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_1^2 \leq M_{21} \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} F^{j'} \right). \quad (3.16)$$

где M_{21} - положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Из (3.16) получим

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_1^2 \leq M_{22} \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\sum_{s=0}^j \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_1^2 \bar{\tau} + \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu^2 \right) \right). \quad (3.17)$$

Введя обозначение $g^j = \max_{0 \leq j' \leq j} \|x^{\frac{m}{2}} y^{j'}\|_1^2$, из (3.17) получим

$$g^{j+1} \leq M_{23} \sum_{s=0}^j g^s \bar{\tau} + M_{24} F_1^j \leq M_{25} \sum_{s=0}^j g^s \tau + M_{24} F_1^j, \quad (3.18)$$

где $F_1^j = \|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu^2 \right)$.

На основании леммы 4 (см.[17, стр.171]) из (3.18) получаем

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_1^2 \leq M \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi^{j'}\|_0^2 + \mu^2 \right) \right). \quad (3.19)$$

где M - положительное постоянное, не зависящее от h и τ .

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1.5), тогда существуют такие h_0, τ_0 , что если $h \leq h_0, \tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (3.1)-(3.4) справедлива априорная оценка (3.19).

Из оценки (3.19) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (3.1)-(3.4) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1.1) – (1.4), $y(x_i, t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (3.1) – (3.4). Для оценки точности разностной схемы (3.1) – (3.4) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (3.1) – (3.4), получаем задачу для функции z

$$\bar{\varkappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z = \frac{\varkappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x}, i}^{(\sigma)} \right) +$$

$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} \right) + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{s,i}^j z_i^s \bar{\tau} + \Psi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (3.20)$$

$$\kappa_0 a_1 z_{(x,0)}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_0 - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j z_0^s \bar{\tau} \right) - \nu, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (3.21)$$

$$z_N^{(\sigma)} = 0, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = l, \quad (3.22)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad t = 0, \quad (3.23)$$

где $\Psi = O\left(\frac{h^2 + \tau^2}{x}\right)$, $\nu = O\left(h^2 + \tau^2\right)$ - погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1) – (1.4) разностной схемой (3.1) – (3.4) в классе решения $u = u(x, t)$ задачи (1.1) – (1.4).

Применяя априорную оценку (3.19) к решению задачи (3.20) – (3.23), получаем неравенство

$$\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\|_1^2 \leq M \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \Psi^{j'}\|_0^2 + \nu^2 \right), \quad (3.24)$$

где M - положительная постоянная, не зависящая от h и τ .

Из априорной оценки (3.24) следует сходимость решения разностной задачи (3.1) – (3.4) к решению дифференциальной задачи (1.1) – (1.4) в смысле нормы $\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\|_1^2$ на каждом слое так, что если существуют такие τ_0, h_0 , то при $\tau \leq \tau_0, h \leq h_0$ справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}} (y^{j+1} - u^{j+1})\|_1 \leq M \|x^{\frac{m}{2}-1}\|_1 (h^2 + \tau^2) \leq \bar{M} (h^2 + \tau^2),$$

где $\bar{M} = const > 0$, не зависящая от h и τ .

4 Постановка третьей краевой задачи и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1.1) с условием третьего рода. Для этого заменим условие (1.3) условием вида

$$-k(l, t)u_x(l, t) = \beta(t)u(l, t) - \mu(t), \quad |\beta| \leq c_2. \quad (4.1)$$

Для получения априорной оценки решения умножим (1.1) скалярно на $x^m u$. Тогда, учитывая преобразования (2.2)-(2.6), получим

$$\frac{1}{2} \partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + c_0 \|x^{\frac{m}{2}} u_x\| \leq x^m u k u_x \Big|_0^l + \varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 +$$

$$+M_1^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + M_2 \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2. \quad (4.2)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (4.2)

$$x^m u k u_x|_0^l = l^m u(l, t) \left(\mu(t) - \beta(t) u(l, t) \right) = l^m \mu(t) u(l, t) - \\ - l^m \beta(t) u^2(l, t) \leq \varepsilon \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + M_3^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \mu^2(t). \quad (4.3)$$

Учитывая (4.3), из (4.2) при $\varepsilon = \frac{c_0}{4}$ получим

$$\partial_{0t}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \leq M_4 \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \\ + M_5 \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau + M_6 \left(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t) \right), \quad (4.4)$$

Применяя к обеим частям неравенства (4.4) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, на основании леммы 2 [?] из (4.4) находим априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + D_{0t}^{-\alpha} \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \leq \\ \leq M \left(D_{0t}^{-\alpha} (\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)) + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|_0^2 \right), \quad (4.5)$$

где $M = const > 0$, зависящее только от входных данных задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4).

Справедлива следующая

Теорема 3. Если выполнены условия (1.5) тогда для решения $u(x, t)$ задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) справедлива априорная оценка (4.5).

Из оценки (4.5) следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части.

5 Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) поставим в соответствие разностную схему

$$\bar{\varkappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \frac{\varkappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right) + \\ + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} \right) + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^{s\bar{\tau}} + \varphi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (5.1)$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau} \right) - \mu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (5.2)$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \tilde{\varkappa} \beta^{j+\sigma} y_N^{(\sigma)} + 0.5h \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} \right) - \mu_2, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = l, \quad (5.3)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad t = 0, \quad (5.4)$$

где

$$\mu_1 = 0.5h\varphi_0^j, \quad \mu_2 = \tilde{\varkappa}\mu^{j+\sigma} + 0.5h\varphi_N^j, \quad \tilde{\varkappa} = 1 + \frac{0.5hm}{l} = \frac{1}{1 - \frac{0.5hm}{l}},$$

$$\varkappa_0 = \frac{1}{1 + \frac{0.5h|r_0|}{(m+1)k_{0.5}^{j+\sigma}}}, \quad r_0^{j+\sigma} \leq 0, \quad \varkappa_N = \frac{1}{1 + 0.5h \frac{|r_N^{j+\sigma}|}{k_{N-0.5}}}, \quad \text{если } r_N^{j+\sigma} \geq 0, \quad t^* = t^{j+1/2},$$

Перепишем задачу (5.1)-(5.4) в операторной форме

$$\begin{cases} \bar{\varkappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y = \bar{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \bar{\Phi}, \\ y(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (5.5)$$

где

$$\bar{\varkappa} = \begin{cases} \bar{\varkappa}_i, & x \in \omega_h, \\ 1, & x = 0, l, \end{cases} \quad \bar{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad \bar{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, & (x, t) \in \omega_{h\tau} \\ \varphi^- = \frac{m+1}{0.5h}\mu_1, & x = 0 \\ \varphi^+ = \frac{1}{0.5h}\mu_2, & x = l. \end{cases}$$

$$\bar{\Lambda}y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)} = \frac{\varkappa_i}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right) + \\ \quad + \frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} \right) + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau}, \\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)} = \frac{m+1}{0.5h} \left(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \frac{h}{2} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau} \right), \quad i = 0 \\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} = -\frac{1}{0.5h} \left(\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \tilde{\varkappa} \beta y_N^{(\sigma)} - 0.5h \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} \right), \quad x = l, \end{cases}$$

Введем скалярное произведение и норму в следующем виде

$$(u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i \bar{h}, \quad \|u\|_0^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2 \bar{h}, \quad \bar{h} = \begin{cases} 0.5h, & i = N, \\ h, & i \neq N. \end{cases}$$

Умножим (5.5) теперь скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$\left(\overline{\kappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, x^m y^{(\sigma)} \right) = \left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)} \right) + \left(\overline{\Phi}, x^m y^{(\sigma)} \right). \quad (5.6)$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (5.6):

$$\left(\overline{\kappa} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y, x^m y^{(\sigma)} \right) \geq \left(\frac{\overline{\kappa}}{2}, \Delta_{0t}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y \right)^2 \right). \quad (5.7),$$

$$\begin{aligned} \left(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)} \right) &= \left(\tilde{\Lambda} y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)} \right) + 0.5h \Lambda^+ y_N^{(\sigma)} x_N^m y_N^{(\sigma)} = \\ &= \left(\kappa \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_x, y^{(\sigma)} \right) + \left(b^{-j} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right), y^{(\sigma)} \right) + \\ &+ \left(b^{+j} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)} \right), y^{(\sigma)} \right) + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau}, x^m y^{(\sigma)} \right) + \\ &+ x_N^m y_N^{(\sigma)} \left(-\kappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \tilde{\kappa} \beta y_N^{(\sigma)} + 0.5h \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} \right) = \\ &= - \left(\bar{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\kappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}} \right) + \kappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} \left(\bar{x}_N^m - x_N^m \right) y_N^{(\sigma)} - \\ &- \kappa_0 x_{0.5}^m a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} y_0^{(\sigma)} - \tilde{\kappa} x_N^m \beta (y_N^{(\sigma)})^2 + 0.5h x_N^m y_N^{(\sigma)} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} + \left(b^{-j} \bar{x}^m a_i, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \right) + \\ &+ \left(b^{+j} x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j, y_x^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \right) + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau}, x^m y^{(\sigma)} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Преобразуем первое, шестое и седьмое слагаемые в правой части (5.8)

$$\begin{aligned} - \left(\bar{x}^m a_i y_{\bar{x}}^{(\sigma)}, (\kappa y^{(\sigma)})_{\bar{x}} \right) &= - \left(\bar{x}^m a_i \kappa_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} y^{(\sigma)} \right) - \left(\bar{x}^m a_i \kappa^{(-1)}, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2 \right) \leq \\ &\leq -M_1 \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \varepsilon \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_2^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \left(b^{-j} \left(\bar{x}^m a_i, y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right), y^{(\sigma)} \right) + \left(b^{+j} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_x^{(\sigma)} \right), y^{(\sigma)} \right) &\leq \\ &\leq \varepsilon \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_3^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau}, x^m y^{(\sigma)} \right) + 0.5h x_N^m y_N^{(\sigma)} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} = \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau}, x^m y^{(\sigma)} \right) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\frac{1}{2}, (x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)})^2 + \left(x^{\frac{m}{2}} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau} \right)^2 \right) \leq \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + \left(\frac{1}{2}, x^m \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_s^2 \bar{\tau} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} (y_i^s)^2 \bar{\tau} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_4 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 \bar{\tau}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Учитывая (5.9)-(5.11), из(5.8) находим

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)} \right) &\leq -M_1 \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \varepsilon \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + \\ &+ M_5^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + M_3 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 \bar{\tau} + \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$+ (\bar{x}_N^m - x_N^m) y_N^{(\sigma)} \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \varkappa_0 x_{0.5}^m a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} y_0^{(\sigma)} - \tilde{\varkappa} \beta x_N^m (y_N^{(\sigma)})^2. \quad (5.12)$$

$$\left(\bar{\Phi}, x^m y^{(\sigma)} \right) = \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)} \right) + 0.5h \varphi^+ x_N^m y_N^{(\sigma)} = \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)} \right) + x_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)}. \quad (5.13)$$

Учитывая преобразования (5.7)-(5.13), из(5.6) получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{\varkappa}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha (x^{\frac{m}{2}} y)^2 \right) &+ M_1 \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\|_0^2 \leq 2\varepsilon \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2 + M_5^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + \\ &+ M_6 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 \bar{\tau} + y_N^{(\sigma)} (\bar{x}_N^m - x_N^m) \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \\ &- x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} - \tilde{\varkappa} \beta x_N^m (y_N^{(\sigma)})^2 + \left(\varphi, x^m y^{(\sigma)} \right) + x_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Преобразуем четвертое, пятое, шестое и восьмое слагаемые в правой части (5.14) с учетом (5.2),(5.3)

$$\begin{aligned} &(\bar{x}_N^m - x_N^m) y_N^{(\sigma)} \varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + x_N^m y_N^{(\sigma)} (\mu_2 - \tilde{\varkappa} \beta y_N^{(\sigma)}) = \\ &= (\bar{x}_N^m - x_N^m) y_N^{(\sigma)} \left[\mu_2 - \tilde{\varkappa} \beta y_N^{(\sigma)} - 0.5h \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} \right) \right] + \\ &+ x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \left[\mu_1 - \frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau} \right) \right] - \tilde{\varkappa} \beta x_N^m (y_N^{(\sigma)})^2 + x_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} = \\ &= \bar{x}_N^m y_N^{(\sigma)} \mu_2 - \bar{x}_N^m \tilde{\varkappa} \beta (y_N^{(\sigma)})^2 - 0.5h (\bar{x}_N^m - x_N^m) y_N^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +0.5h\left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right)y_N^{(\sigma)} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} + x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \mu_1 - \\
 & -\frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau} \leq \mu_1^2 + \mu_2^2 + \\
 & +M_7\left(\left(\bar{x}_N^{\frac{m}{2}} y_N^{(\sigma)}\right)^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)}\right)^2\right) + \varepsilon\|\bar{x}_N^{\frac{m}{2}} y_N^{(\sigma)}\|_0^2 + \\
 & +M_8\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 - 0.5h(\bar{x}_N^m - x_N^m)y_N^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \\
 & -\frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + \left(\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau}\right)^2 + \left(x_{0.5}^m \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau}\right)^2 \leq \\
 & \leq -0.5h(\bar{x}_N^m - x_N^m)y_N^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N - \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 + \\
 & +\mu_1^2 + \mu_2^2 + \varepsilon\|\bar{x}_N^{\frac{m}{2}} y_N^{(\sigma)}\|_0^2 + M_9\left(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)}\right)^2\right) + \\
 & +M_{10} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 + \|\bar{x}_N^{\frac{m}{2}} y_N^s\|_0^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)}\right)^2\right) \bar{\tau}. \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

$$(\varphi, x^m y^{(\sigma)}) \leq \frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \frac{1}{2}\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2. \tag{5.16}$$

Учитывая (5.15), (5.16), из (5.14) получаем

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\bar{x}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right] + M_2\|\bar{x}_N^{\frac{m}{2}} y_N^{(\sigma)}\|_0^2 + 0.5h(\bar{x}_N^m - x_N^m)y_N^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N + \\
 & +\frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 \leq 2\varepsilon\|\bar{x}_N^{\frac{m}{2}} y_N^{(\sigma)}\|_0^2 + M_{11}\left(\|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_0^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)}\right)^2\right) + \\
 & +M_{12} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \left(\|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_0^2 + \|\bar{x}_N^{\frac{m}{2}} y_N^s\|_0^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)}\right)^2\right) \bar{\tau} + M_{13}\left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right). \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $x_{N-0.5}^m \geq \frac{1}{6}x_N^m$, преобразуем первое и четвертое слагаемые в (5.17)

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\bar{x}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right] + \frac{h}{4}\left(\bar{x}_N^m - x_N^m\right) \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 \geq \\
 & \geq \left(\frac{\bar{x}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right) + \frac{h}{4}x_{N-0.5}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N^2 \geq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{M_{14}}{2} \left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right) + \frac{0.5h}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y_N\right)^2 \geq \frac{1}{12} \left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right) + \\ &+ \frac{0.5h}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y_N\right)^2 \geq \frac{1}{12} \left(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x^{\frac{m}{2}} y\right)^2\right) \geq \frac{1}{12} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где

$$\begin{aligned} M_{14} &= \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, m \geq 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } m \in (0, 1), h \leq h_0 = \sqrt{\frac{12x^2}{m(1-m)}}, \end{cases} \\ \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0 &\geq \frac{0.5h}{2(m+1)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0\right)^2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Учитывая (5.18), (5.19), из (5.17) находим

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^\sigma\|_0^2 &\leq \varepsilon M_{15} \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^\sigma\|_0^2 + M_{16}^\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + M_{17} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_1^2 \bar{\tau} + \\ &+ M_{18} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^s\|_0^2 \bar{\tau} + M_{19} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 + \left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}} y_0\right)^2$.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_1^2 \bar{\tau} &= \sum_{s=0}^j \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_1^2 \bar{\tau} + 0.5\tau \|x^{\frac{m}{2}} y^j\|_1^2, \\ \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^s\|_0^2 \bar{\tau} &= \sum_{s=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^s\|_0^2 \bar{\tau} + 0.5\tau \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^j\|_0^2 \end{aligned}$$

перепишем (5.20) в другой форме

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^\sigma\|_0^2 &\leq \left(0.5\tau M_{18} + \varepsilon M_{15}\right) \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{20} \|x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\|_1^2 + \\ &+ M_{16} \sum_{s=0}^j \|x^{\frac{m}{2}} y^s\|_1^2 \bar{\tau} + M_{18} \sum_{s=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^s\|_0^2 \bar{\tau} + M_{17} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Выбирая $\tau \leq \tau_0 = \frac{1}{2M_{18}}$, $\varepsilon = \frac{1}{4M_{15}}$, из (5.21) находим

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha \|x^{\frac{m}{2}} y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^\sigma\|_0^2 \leq M_{21} \sum_{s=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^s\|_0^2 \bar{\tau} +$$

$$+M_{22}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|_1^2 + M_{23} \sum_{s=0}^j \|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar{\tau} + M_{24} \left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right). \quad (5.22)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (5.22), тогда перепишем (5.22) в другой форме

$$\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{\sigma}\|_0^2 \leq M_{21} \sum_{s=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^s\|_0^2\tau + F, \quad (5.23)$$

где $F = M_{22}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|_1^2 + M_{23} \sum_{s=0}^j \|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar{\tau} + M_{24} \left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right)$.

Применяя лемму 4 (см.[17, стр.171]), из (5.23) получаем

$$\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{\sigma}\|_0^2 \leq M_{25}F, \quad (5.24)$$

С учетом (5.24) из (5.22) находим

$$\begin{aligned} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \|x^{\frac{m}{2}}y\|_1^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{\sigma}\|_0^2 &\leq M_{26}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\|_1^2 + \\ +M_{27} \sum_{s=0}^j \|x^{\frac{m}{2}}y^s\|_1^2\bar{\tau} + M_{28} \sum_{s=0}^j \left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right)\bar{\tau}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

На основании леммы 7 [?] из (5.25) получаем априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\|_1^2 \leq M \left(\|x^{\frac{m}{2}}y^0\|_1^2 + \max_{0 \leq j' \leq j} \sum_{s=0}^{j'} \left(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right)\bar{\tau} \right), \quad (5.26)$$

где $M = const > 0$, не зависящее от h и τ .

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1.5), тогда существуют такие h_0, τ_0 , что если $h \leq h_0, \tau \leq \tau_0$, то для решения разностной задачи (5.1)-(5.4) справедлива априорная оценка (5.26).

Из оценки (5.26) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (5.1)-(5.4) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) $y(x_i, t_j) = y_i^j$ – решение разностной задачи (5.1) – (5.4). Для оценки точности разностной схемы (5.1) – (5.4) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (5.1) – (5.4), получаем задачу для функции z

$$\bar{x}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} z = \frac{\varkappa}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x}}^{(\sigma)} \right)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m} \left(x_{i-0.5}^m a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)} \right) +$$

$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m} \left(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} \right) + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j z_i^s \bar{\tau} + \Psi_i^j, \quad (x, t) \in \omega_{h,\tau}, \quad (5.27)$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} = \frac{0.5h}{m+1} \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_0 - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j z_0^s \bar{\tau} \right) - \nu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = 0, \quad (5.28)$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \tilde{\varkappa} \beta^{j+\sigma} z_N^{(\sigma)} + 0.5h \left(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_N - \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j z_N^s \bar{\tau} \right) - \nu_2, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad x = l, \quad (5.29)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad t = 0, \quad (5.30)$$

где $\Psi = O\left(\frac{h^2 + \tau^2}{x}\right)$, $\nu_1 = O(h^2 + \tau^2)$, $\nu_2 = O(h^2 + \tau^2)$ – погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) разностной схемой (5.1) – (5.4) в классе решения $u = u(x, t)$ задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4).

Применяя оценку (5.26) к решению задачи (5.27) – (5.30), получаем

$$\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\|_1^2 \leq M \max_{0 \leq j' \leq j} \left(\|x^{\frac{m}{2}} \Psi^{j'}\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right). \quad (5.31)$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ .

Из априорной оценки (5.31) следует сходимость решения разностной задачи (5.1) – (5.4) к решению дифференциальной задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) в смысле нормы $\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\|_1^2$ на каждом слое так, что если существуют такие τ_0, h_0 , то при $\tau \leq \tau_0, h \leq h_0$, справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}} (y^{j+1} - u^{j+1})\|_1 \leq M \|x^{\frac{m}{2}-1}\|_1 (h^2 + \tau^2) \leq \bar{M} (h^2 + \tau^2),$$

где $\bar{M} = const > 0$, не зависящая от h и τ .

6 Алгоритм численного решения

Для численного решения дифференциальной задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) приведем разностную схему (5.1) - (5.4) к расчетному виду. Тогда уравнение (5.1) приводится к следующему виду

$$A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (6.1)$$

где

$$A_i = \tau \sigma \varkappa_i^j x_{i-0.5}^m a_i^j - \tau h \sigma x_{i-0.5}^m b_i^{-j} a_i^j, \quad B_i = \tau \sigma \varkappa_i^j x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j + \tau h \sigma x_{i+0.5}^m b_i^{+j} a_{i+1}^j,$$

$$\begin{aligned}
 C_i &= A_i + B_i + h^2 \bar{\varkappa}_i x_i^m \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad F_i^j = AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j + \\
 &+ h^2 \tau x_i^m \varphi_i^j - h^2 x_i^m \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} (y_i^{s+1} - y_i^s) + \tau h^2 x_i^m \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau} - \\
 AA_i &= \tau(1-\sigma) \varkappa_i^j x_{i-0.5}^m a_i^j - \tau h(1-\sigma) x_{i-0.5}^m b_i^{-j} a_i^j, \\
 BB_i &= \tau(1-\sigma) \varkappa_i^j x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j + \tau h(1-\sigma) x_{i+0.5}^m b_i^{+j} a_{i+1}^j, \\
 CC_i &= AA_i + BB_i - h^2 \bar{\varkappa}_i x_i^m \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Краевое условие (5.2) принимает вид

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \tilde{\mu}_1, \tag{6.2}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varkappa_1 &= \frac{\tau \sigma \varkappa_0 a_1}{\tau \sigma \varkappa_0 a_1^j + \frac{0.5 h^2 \tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{m+1} \Gamma(2-\alpha)}, \\
 \tilde{\mu}_1 &= \left[\mu_1 h \tau + \tau(1-\sigma) \varkappa_0 a_1 (y_1^j - y_0^j) + \frac{0.5 h^2 \tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{m+1} \Gamma(2-\alpha) y_0 + \frac{0.5 h^2 \tau}{m+1} \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s \bar{\tau} - \right. \\
 &\left. - \frac{0.5 h^2 \tau^{1-\alpha}}{m+1} \Gamma(2-\alpha) \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} (y_0^{s+1} - y_0^s) \right] / \left[\tau \sigma \varkappa_0 a_1^j + \frac{0.5 h^2 \tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{m+1} \Gamma(2-\alpha) \right].
 \end{aligned}$$

Краевое условие (5.3) принимает вид

$$y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \tilde{\mu}_2, \tag{6.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varkappa_2 &= \frac{\tau \sigma \varkappa_N a_N}{\tau \sigma \varkappa_N a_N^j + \sigma h \tau \tilde{\varkappa} \beta_2^j + 0.5 h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}}, \\
 \tilde{\mu}_2 &= \left[\mu_2 h \tau - (1-\sigma) h \tau \tilde{\varkappa} \beta_2 y_N^j - \tau(1-\sigma) \varkappa_N a_N (y_N^j - y_{N-1}^j) + 0.5 h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_N - \right. \\
 &\left. - 0.5 h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha, \sigma)} (y_N^{s+1} - y_N^s) + 0.5 \tau h^2 \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s \bar{\tau} \right] / \\
 &\left/ \left[\tau \sigma \varkappa_N a_N^j + \sigma h \tau \tilde{\varkappa} \beta_2^j + \frac{h^2 \tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha, \sigma)}}{2} \Gamma(2-\alpha) \right]. \right.
 \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (6.1)-(6.3), разностная схема (5.1)-(5.4) приводится к трехдиагональной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой легко находится известным методом прогонки.

7 Результаты численного эксперимента

Коэффициенты уравнения и граничных условий задачи (5.1)-(5.4) подбираются таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x, t) = t^3 x^4$.

Ниже в таблице при различных значениях параметров $\alpha = 0.01; 0.5; 0.99$, $m = 0; 0.5; 1; 1.5; 2$ и уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max_{(x_i, t_j) \in \bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $h = \tau$. Порядок сходимости определяется по следующей формуле: $ПС = \log_{\frac{h_1}{h_2}} \frac{\|z_1\|_0}{\|z_2\|_0}$, где z_i — это погрешность, соответствующая h_i .

Таблица

Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$ при уменьшении размера сетки при различных значениях $\alpha = 0.01; 0.5; 0.99$ и $m = 0; 0.5; 1; 1.5; 2$ на $t = 1$, когда $h = \tau$.

α	m	h	$\max_{0 < j < m} \ z^j\ _0$	ПС в $\ \cdot\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\ \cdot\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$
0.01	0	$\frac{1}{10}$	0.076879717		0.036794982	
		$\frac{1}{20}$	0.019174526	2.0034	0.008924896	2.0452
		$\frac{1}{40}$	0.004784865	2.0026	0.002196927	2.0232
		$\frac{1}{80}$	0.001194923	2.0016	0.000544949	2.0118
		$\frac{1}{160}$	0.000298556	2.0008	0.000135702	2.0059
		0.5	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0.068689773	
$\frac{1}{20}$	0.017138060			2.0029	0.007453397	2.0436
$\frac{1}{40}$	0.004276783			2.0026	0.001833239	2.0223
$\frac{1}{80}$	0.001068014			2.0016	0.000454558	2.0113
$\frac{1}{160}$	0.000266842			2.0009	0.000113171	2.0057
1	$\frac{1}{10}$			$\frac{1}{10}$	0.059822153	
		$\frac{1}{20}$	0.014884147	2.0069	0.005956540	2.0461
		$\frac{1}{40}$	0.003708226	2.0050	0.001459095	2.0235
		$\frac{1}{80}$	0.000925207	2.0029	0.000361044	2.0119
		$\frac{1}{160}$	0.000231055	2.0015	0.000089796	2.0060

α	m	h	$\max_{0 < j < m} \ z^j\ _0$	ПС в $\ \cdot\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\ \cdot\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$
1.5		$\frac{1}{10}$	0.050994481		0.019049512	
		$\frac{1}{20}$	0.012585331	2.0186	0.004485209	2.0577
		$\frac{1}{40}$	0.003121312	2.0115	0.001087038	2.0294
		$\frac{1}{80}$	0.000776905	2.0063	0.000267499	2.0148
		$\frac{1}{160}$	0.000193780	2.0033	0.000066344	2.0074
2		$\frac{1}{10}$	0.042407707		0.053990105	
		$\frac{1}{20}$	0.010296342	2.0422	0.013145040	2.0865
		$\frac{1}{40}$	0.002530004	2.0249	0.003240011	2.0448
		$\frac{1}{80}$	0.000626611	2.0135	0.000804130	2.0228
		$\frac{1}{160}$	0.000155892	2.0070	0.000200299	2.0115
0.5	0	$\frac{1}{10}$	0.098777477		0.048583953	
		$\frac{1}{20}$	0.024719264	1.9985	0.011839771	2.0382
		$\frac{1}{40}$	0.006174080	2.0013	0.002919937	2.0204
		$\frac{1}{80}$	0.001542119	2.0013	0.000724931	2.0105
		$\frac{1}{160}$	0.000385289	2.0009	0.000180606	2.0053
0.5		$\frac{1}{10}$	0.090332895		0.004221371	
		$\frac{1}{20}$	0.022617618	1.9978	0.001074403	2.0368
		$\frac{1}{40}$	0.005650220	2.0011	0.000270921	2.0196
		$\frac{1}{80}$	0.001411390	2.0012	0.000068068	2.0100
		$\frac{1}{160}$	0.000352642	2.0008	0.000017072	2.0050
1		$\frac{1}{10}$	0.079856635		0.041714318	
		$\frac{1}{20}$	0.019946185	2.0013	0.010150116	2.0390
		$\frac{1}{40}$	0.004976000	2.0031	0.002501595	2.0206
		$\frac{1}{80}$	0.001242057	2.0023	0.000620892	2.0104
		$\frac{1}{160}$	0.000310214	2.0014	0.000154667	2.0052
1.5		$\frac{1}{10}$	0.068899501		0.034491366	
		$\frac{1}{20}$	0.017082667	2.0120	0.008333251	2.0493
		$\frac{1}{40}$	0.004244370	2.0089	0.002046658	2.0256
		$\frac{1}{80}$	0.001057175	2.0053	0.000507111	2.0129
		$\frac{1}{160}$	0.000263748	2.0030	0.000126219	2.0064

α	m	h	$\max_{0 < j < m} \ z^j\ _0$	ПС в $\ \cdot\ _0$	$\ z\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\ \cdot\ _{C(\bar{w}_{h\tau})}$
	2	$\frac{1}{10}$	0.057977170		0.027315531	
		$\frac{1}{20}$	0.014161201	2.0335	0.006487950	2.0739
		$\frac{1}{40}$	0.003489152	2.0210	0.001579365	2.0384
		$\frac{1}{80}$	0.000865205	2.0118	0.000389568	2.0194
		$\frac{1}{160}$	0.000215357	2.0063	0.000096745	2.0096
		0.99	0	$\frac{1}{10}$	0.128539769	
$\frac{1}{20}$	0.032208933			1.9967	0.017237292	2.0371
$\frac{1}{40}$	0.008051126			2.0002	0.004249847	2.0201
$\frac{1}{80}$	0.002011962			2.0006	0.001054853	2.0104
$\frac{1}{160}$	0.000502837			2.0004	0.000262754	2.0053
0.5				$\frac{1}{10}$	0.120541979	
		$\frac{1}{20}$	0.030216567	1.9961	0.016067838	2.0368
		$\frac{1}{40}$	0.007554829	1.9999	0.003962394	2.0197
		$\frac{1}{80}$	0.001888178	2.0004	0.000983648	2.0102
		$\frac{1}{160}$	0.000471933	2.0003	0.000245039	2.0051
		1		$\frac{1}{10}$	0.107653172	
$\frac{1}{20}$	0.026922002			1.9995	0.014051048	2.0397
$\frac{1}{40}$	0.006722651			2.0017	0.003461966	2.0210
$\frac{1}{80}$	0.001679095			2.0013	0.000859057	2.0108
$\frac{1}{160}$	0.000419534			2.0008	0.000213958	2.0054
1.5				$\frac{1}{10}$	0.093164225	
		$\frac{1}{20}$	0.023129167	2.0101	0.011706658	2.0502
		$\frac{1}{40}$	0.005752973	2.0073	0.002873947	2.0262
		$\frac{1}{80}$	0.001433984	2.0043	0.000711867	2.0134
		$\frac{1}{160}$	0.000357920	2.0023	0.000177141	2.0067
		2		$\frac{1}{10}$	0.078270796	
$\frac{1}{20}$	0.019141843			2.0317	0.009238178	2.0744
$\frac{1}{40}$	0.004721898			2.0193	0.002248148	2.0389
$\frac{1}{80}$	0.001171855			2.0106	0.000554370	2.0198
$\frac{1}{160}$	0.000291838			2.0056	0.000137638	2.0100

8 Замечание

Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда рассматривается уравнение с нелокальным линейным источником вида

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^m k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + r(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} - \int_0^x p(s, t) u(s, t) ds + f(x, t).$$

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Государственного фонда естественных наук Китая (ГФЕН) в рамках научного проекта №20-51-53007.

Список литературы

- [1] Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение. М: Физматлит, 2003.
- [2] Учайкин, В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008.
- [3] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987
- [4] Podlubny, I. Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.
- [5] Kilbas A.A., Trujillo J.J. Differential equations of fractional order: methods, results and problems, I. Appl. Anal. 78 (2001), 153-192.
- [6] Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткий И. А. Численные методы решения уравнения дробной диффузии с дробной производной по времени в одномерном случае. М.: Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. (2003) 35 с.
- [7] Таукенова, Ф.И., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 46:10 (2006), 1871-1881.
- [8] Diethelm, K. Walz, G. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation, Numer. Algorithms, 16 (1997), 231-253.

- [9] Алиханов, А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения, 46:5 (2010), 658-664.
- [10] Alikhanov, A.A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation. // Journal of Computational Physics, 280 (2015), 424-438.
- [11] Бештоков, М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана-Лиувилля // Дифференц. уравнения, 54:6 (2018), 763-778.
- [12] Бештоков, М.Х. К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова-Капуто // Известия вузов. Математика, 10 (2018), 3-16.
- [13] Бештоков, М.Х. Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто // Дифференц. уравнения, 55:7 (2019), 919-928.
- [14] Бештоков, М.Х. О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения // Дифференц. уравнения, 52:10 (2016), 1393-1406.
- [15] Бештоков, М.Х. Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 56:10 (2016), 1780-1794.
- [16] Самарский, А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
- [17] Самарский, А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

Stability and convergence of monotone difference schemes approximating boundary value problems for an integro-differential equation with a fractional time derivative and the Bessel operator

Z.V. Beshtokova, M.KH. Beshtokov

Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkaria Scientific Center of the Russian Academy of Sciences

Abstract. Boundary value problems for an integro-differential equation with a fractional time derivative and the Bessel operator are studied. For the solution of the problems under consideration, a priori estimates in the differential interpretation are obtained, from which the uniqueness and stability of the solution with respect to the initial data and the right-hand side follow. For the numerical solution of boundary value problems, monotone difference schemes with directed differences are constructed and analogs of a priori estimates are proved for them, and error estimates are given for the assumptions of sufficient smoothness of the solutions of the equations. From the obtained a priori estimates in the difference form, the uniqueness and stability of the solution according to the initial data and the right-hand side, as well as the linearity of the difference problems, the convergence with the second order in the grid parameters follow. An algorithm for the approximate solution of a boundary value problem with a third-order condition is proposed, and numerical calculations are performed for a test case illustrating the theoretical results obtained in this paper concerning the convergence and the order of approximation of the difference scheme.

Keywords: boundary value problems, Gerasimov-Caputo fractional derivative, a priori estimation, monotone schemes, integro-differential equation, fractional order differential equation.

Acknowledgements

The paper was supported by RFBR and Natural Science Foundation of China (NSFC) grant №20-51-53007.