ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N 3, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Стохастические дифференциальные уравнения

Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Ито

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт
национальный исследовательский университет
e-mail: rkoffice@mail.ru

Аннотация. На основе свойств полиномов Эрмита, ортогональных относительно плотности вероятности нормального распределения, и полиномов Шарлье, ортогональных относительно пуассоновского распределения, получено представление кратных стохастических интегралов Ито по винеровским и пуассоновским процессам в виде ортогональных рядов.
Ключевые слова: кратный стохастический интеграл Ито, повторный стохастический интеграл Ито, винеровский процесс, пуассоновский процесс, ортогональное разложение.

1. Введение

В статье получено представление кратных стохастических интегралов Ито по винеровским и пуассоновским процессам в виде ортогональных рядов, где в качестве базиса выбираются специальные полиномы, зависящие от случайных величин, а ортогональность понимается в смысле скалярного произведения в пространстве гильбертовых случайных величин. Для интегралов по винеровским процессам это полиномы Эрмита и случайные величины, имеющие нормальное распределение, а для интегралов по пуассоновским процессам это полиномы Шарлье и случайные величины, имеющие центрированное пуассоновское распределение.

В публикациях, как правило, кратные стохастические интегралы Ито определяются относительно одного винеровского процесса. Здесь важно упомянуть работы К. Ито [1], Т. Хиды и Н. Икеды [2], а также ряд работ, в которых устанавливается связь между разными типами кратных стохастических интегралов [3–6] — формулы типа Ху – Мейера. Однако, если в качестве приложения брать численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений и систем, то возникает необходимость в повторных стохастических интегралах Ито, которые можно рассматривать как частный случай кратных. С содержательной точки зрения такие интегралы должны определяться относительно всевозможных комбинаций из набора независимых винеровских процессов, где два предельных варианта: интеграл относительно одного винеровского процесса и интеграл относительно независимых винеровских процессов, число которых совпадает с кратностью интеграла [7–12].

Моделирование повторных стохастических интегралов Ито требуется для практической реализации численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений и систем с высокими порядками сильной сходимости, основанных на разложении решения в ряд Тейлора – Ито. Наряду с ними также используются повторные интегралы Стратоновича. Их моделирование необходимо для практической реализации численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений, но основанных на разложении решения в ряд Тейлора – Стратоновича.

В этой связи следует отметить метод, предложенный Г.Н. Мильштейном [7]. Он имеет порядок сильной сходимости 1.0 и требует моделирования повторных стохастических интегралов кратности $1-2$. Идеи Г.Н. Мильштейна были реализованы в работах П. Клоедена и Э. Платена для численных методов с порядком сильной сходимости 1.5 [8]. Для методов с таким порядком сходимости нужно моделировать повторные стохастические интегралы кратности $1-3$. В обоих случаях использовались тригонометрические функции в качестве базисной системы для представления винеровского процесса. Универсальный подход был предложен Д.Ф. Кузнецовым для численных методов с произвольным порядком сильной сходимости, предполагающих моделирование повторных стохастических интегралов произвольной кратности $k = 1, 2, 3, \ldots$, базисная система может быть также произвольной [12].

Стоит отметить представление повторных стохастических интегралов на основе спектральной формы математического описания. Такое представление предполагает применение спектрального метода решения стохастических дифференциальных уравнений, т.е. выражение коэффициентов разложения случайных процессов, соответствующих этим повторным стохастическим интегралам, по некоторой базисной системе. В статье [13] рассмотрены повторные стохастические интегралы кратности 1 − 2, в работе [14] — повторные стохастические интегралы Стратоновича произвольной кратности с выбором произвольной базисной системы, а в [15] эти результаты конкретизированы для функций Уолша. Переход к представлению повторных стохастических интегралов Ито возможен на основе известных соотношений, связывающих стохастические дифференциальные уравнения Ито и Стратоновича.

Для повторных стохастических интегралов Ито по винеровским процессам предложенное в статье ортогональное разложение эквивалентно представлению из работ [10–12], но отличается от него формой записи и методикой доказательства. Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Ито по пуассоновским процессам можно трактовать как конкретный пример представления стохастических интегралов по центрированным пуассоновским мерам [12].

Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Ито, а в частном случае повторных стохастических интегралов Ито обеспечивает простой метод точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации при переходе от ортогонального ряда к его частичной сумме, что неизбежно при приближенном моделировании таких интегралов.

2. Основные определения и обозначения

Пусть $\mathbb{H} = [0, h] \subset \mathbb{R}$, где $h > 0$, $L_2(\mathbb{H}^k)$ — пространство квадратично интегрируемых функций $K(t_1, \ldots, t_k) \colon \mathbb{H}^k \to \mathbb{R}$, т.е.

$$K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k) \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{\mathbb{H}^k} K^2(\tau_1, \ldots, \tau_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k < \infty,$$

в котором норма и скалярное произведение задаются следующим образом [16]:

$$\|K(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \left\{ \int_{\mathbb{H}^k} K^2(\tau_1, \ldots, \tau_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\big(K(t_1, \ldots, t_k), L(t_1, \ldots, t_k)\big)_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \int_{\mathbb{H}^k} K(\tau_1, \ldots, \tau_k) L(\tau_1, \ldots, \tau_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k.$$

Тогда любая функция $K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$ представляется в виде ортогонального ряда:

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} C_{i_1\ldots i_k} q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k),$$

где $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2(\mathbb{H})$, или базисная система, а $C_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения функции $K(t_1,\ldots,t_k)$:

$$\begin{aligned} C_{i_1\ldots i_k} &= \big(q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k), K(t_1,\ldots,t_k)\big)_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \\ &= \int_{\mathbb{H}^k} q(i_1,\tau_1)\ldots q(i_k,\tau_k) K(\tau_1,\ldots,\tau_k) d\tau_1\ldots d\tau_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Будем обозначать через $\mathcal{L}_2$ пространство гильбертовых случайных величин [17]:

$$\xi\in\mathcal{L}_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{E}\xi^2<\infty,$$

где E означает математическое ожидание, с нормой и скалярным произведением

$$\|\xi\|_{\mathcal{L}_2}=\{\mathrm{E}\xi^2\}^{\frac{1}{2}},\quad (\xi,\eta)_{\mathcal{L}_2}=\mathrm{E}\xi\eta.$$

Определим множество $J=\{j_1,\ldots,j_k\}$, где $j_1,\ldots,j_k\in\{1,\ldots,s\}$, k,s — заданные натуральные числа. Упорядоченный набор $(j_1\ldots j_k)$ будем обозначать J^* и рассматривать его как мультимножество — множество, которое может содержать одинаковые элементы, $\#(j,J^*)$ — кратность элемента j в мультимножестве J^*. Также будем использовать обозначение $|\cdot|$ для мощности множеств или мультимножеств: $|J|\leqslant k$, $|J^*|=k$. Введем отношение эквивалентности $\sim$ для индексов из множества $\mathrm{I}=\{i_1,\ldots,i_k\}$:

$$i_l\sim i_m \quad\Longleftrightarrow\quad j_l=j_m,\quad l,m=1,\ldots,k,$$

и обозначим через $\mathrm{I}/\!\sim$ множество всех классов эквивалентности I_j:

$$\mathrm{I}=\bigcup_{j\in J}\mathrm{I}_j,\quad \mathrm{I}_{j_l}\cap\mathrm{I}_{j_m}=\varnothing\quad \forall j_l,j_m\in J\colon j_l\neq j_m.$$

При конкретных значениях индексов $i_1,\ldots,i_k$ из классов эквивалентности I_j будем получать множества I_j и мультимножества I_j^*. Зависимость множеств I_j и мультимножеств I_j^* от $i_1,\ldots,i_k$ не указывается для упрощения обозначений. Очевидно, что $|I_j|\leqslant\#(j,J^*)$, $|I_j^*|=\#(j,J^*)$.

Такое же отношение эквивалентности $\sim$ введем для переменных из множества $\mathrm{T}=\{t_1,\ldots,t_k\}$ и обозначим через $\mathrm{T}/\!\sim$ множество всех классов эквивалентности T_j, $j\in J$. Если определить множества $N_j=\{n\colon j_n=j\}$, то $\mathrm{I}_j=\{i_n\colon n\in N_j\}$ и $\mathrm{T}_j=\{t_n\colon n\in N_j\}$, $j\in J$.

Далее будем использовать обозначения

$$\sum_{(\mathrm{I}/\sim)} \quad \text{и} \quad \sum_{(\mathrm{T}/\sim)},$$

которые предполагают суммирование коэффициентов разложения и функций по всем перестановкам индексов и переменных в каждом классе эквивалентности I_j и T_j соответственно, $j \in J$.

Определим функцию $K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k)$ с помощью симметризации:

$$K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k) = \langle K(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*} = \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{T}/\sim)} K(t_1, \ldots, t_k), \tag{2}$$

где величина $M_{J^*}^2$ равна числу слагаемых в правой части выражения (2):

$$M_{J^*}^2 = \prod_{j \in J} (\#(j, J^*))!. \tag{3}$$

Для функции $K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$ справедлива следующая оценка нормы:

$$\begin{gathered} \|K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \left\| \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{T}/\sim)} K(t_1, \ldots, t_k) \right\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{T}/\sim)} \|K(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \|K(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}, \end{gathered} \tag{4}$$

она представляется в виде ортогонального ряда:

$$K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 \ldots i_k} q(i_1, t_1) \ldots q(i_k, t_k),$$

где коэффициенты разложения $\tilde{C}_{i_1 \ldots i_k}$ выражаются через коэффициенты разложения $C_{i_1 \ldots i_k}$ (зависимость $\tilde{C}_{i_1 \ldots i_k}$ от J^* для упрощения обозначений не указана):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{i_1 \ldots i_k} &= \big(q(i_1, t_1) \ldots q(i_k, t_k), K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k) \big)_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \\ &= \left(q(i_1, t_1) \ldots q(i_k, t_k), \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{T}/\sim)} K(t_1, \ldots, t_k) \right)_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \\ &= \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} \big(q(i_1, t_1) \ldots q(i_k, t_k), K(t_1, \ldots, t_k) \big)_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1 \ldots i_k}. \end{aligned} \tag{5}$$

Функции вида (2) образуют линейное подпространство в $L_2(\mathbb{H}^k)$, которое будем обозначать $L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$, оператор $\langle\,\cdot\,\rangle_{J^*}\colon L_2(\mathbb{H}^k)\to L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ является линейным ограниченным оператором, его норма равна единице. Если значения $j_1,\ldots,j_k$ попарно различны, т.е. $|J|=k$, то $\langle\,\cdot\,\rangle_{J^*}$ — это тождественный оператор.

3. Кратные стохастические интегралы Ито по винеровским процессам

Определим линейный оператор $\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}\colon L_2(\mathbb{H}^k)\to\mathcal{L}_2$, ставящий в соответствие функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$ кратный стохастический интеграл Ито по винеровским процессам (кратности k):

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\int_{\mathbb{H}^k}K(\tau_1,\ldots,\tau_k)dW_{j_1}(\tau_1)\ldots dW_{j_k}(\tau_k),\tag{6}$$

где $j_1,\ldots,j_k=1,\ldots,s$; $W_1(t)$, $\ldots$, $W_s(t)$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Пусть $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ — это разбиение отрезка $\mathbb{H}$:

$$\mathbb{H}=\bigcup_{i=1}^n\Delta_i,\quad \Delta_{i'}\cap\Delta_{i''}=\varnothing\quad\forall i',i''\in\{1,\ldots,n\}\colon i'\neq i'',$$

где Δ_i — борелевские множества. Кроме того, $\chi_\Omega(t_1,\ldots,t_k)$ — характеристическая функция множества $\Omega\subset\mathbb{H}^k$:

$$\chi_\Omega(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}1, & (t_1,\ldots,t_k)\in\Omega,\\ 0, & (t_1,\ldots,t_k)\notin\Omega.\end{cases}$$

Обозначим через $S(\mathbb{H}^k)$ множество специальных элементарных функций вида

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n a_{i_1\ldots i_k}\chi_{\Delta_{i_1}\times\ldots\times\Delta_{i_k}}(t_1,\ldots,t_k),$$

где $a_{i_1\ldots i_k}=0$, если среди значений $i_1,\ldots,i_k$ найдется два совпадающих: $i_l=i_m$ для $l,m\in\{1,\ldots,k\}$, $l\neq m$. Множество $S(\mathbb{H}^k)$ плотно в $L_2(\mathbb{H}^k)$ [1]. Тогда для функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in S(\mathbb{H}^k)$ кратный стохастический интеграл Ито определяется следующим образом [1,4,6,12]:

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^n a_{i_1\ldots i_k}W_{j_1}(\Delta_{i_1})\ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}),\tag{7}$$

где

$$W_j(\Delta_i) = \int_0^h \chi_{\Delta_i}(\tau) dW_j(\tau), \quad \chi_{\Delta_i}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_i, \\ 0, & t \notin \Delta_i. \end{cases}$$

Кратным стохастическим интегралом Ито от функции $K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$ называется случайная величина

$$\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K(t_1, \ldots, t_k) = \underset{m \to \infty}{\text{l.i.m.}} \mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K_m(t_1, \ldots, t_k),$$

где последовательность специальных элементарных функций $K_m(t_1, \ldots, t_k)$ сходится к функции $K(t_1, \ldots, t_k)$:

$$\lim_{m \to \infty} \|K(t_1, \ldots, t_k) - K_m(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} = 0, \quad K_m(t_1, \ldots, t_k) \in S(\mathbb{H}^k).$$

Утверждение 1. *Пусть* $K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$, *а* $K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k) = \langle K(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*} \in L_2^{(j_1 \ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ *— соответствующая симметризованная функция* (2). *Тогда кратные стохастические интегралы Ито по винеровским процессам от функций* $K(t_1, \ldots, t_k)$ *и* $K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k)$ *совпадают*:

$$\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K(t_1, \ldots, t_k) = \mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K_{J^*}(t_1, \ldots, t_k). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть значения $i_1, \ldots, i_k$ попарно различны. Согласно определению (7) кратного стохастического интеграла Ито

$$\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} \chi_{\Delta_{i_1} \times \ldots \times \Delta_{i_k}}(t_1, \ldots, t_k) = W_{j_1}(\Delta_{i_1}) \ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}).$$

Нетрудно видеть, что любая перестановка переменных в классах эквивалентности T_j, $j \in J$, для характеристической функции $\chi_{\Delta_{i_1} \times \ldots \times \Delta_{i_k}}(t_1, \ldots, t_k)$ в левой части приведенного выражения не меняет его правую часть. Действительно, пусть $t_l, t_m \in T_j$ для $l \neq m$ и некоторого $j \in J$. Тогда

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_l \ldots j_m \ldots j_k)} \chi_{\Delta_{i_1} \times \ldots \times \Delta_{i_l} \times \ldots \times \Delta_{i_m} \times \ldots \times \Delta_{i_k}}(t_1, \ldots, t_l, \ldots, t_m, \ldots, t_k) = \\ &\quad = W_{j_1}(\Delta_{i_1}) \ldots W_{j_l}(\Delta_{i_l}) \ldots W_{j_m}(\Delta_{i_m}) \ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}) = \\ &\quad = W_{j_1}(\Delta_{i_1}) \ldots W_{j_l}(\Delta_{i_m}) \ldots W_{j_m}(\Delta_{i_l}) \ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}) = \\ &\quad = \mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_l \ldots j_m \ldots j_k)} \chi_{\Delta_{i_1} \times \ldots \times \Delta_{i_l} \times \ldots \times \Delta_{i_m} \times \ldots \times \Delta_{i_k}}(t_1, \ldots, t_m, \ldots, t_l, \ldots, t_k) \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} \langle \chi_{\Delta_{i_1} \times \ldots \times \Delta_{i_k}}(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*} = W_{j_1}(\Delta_{i_1}) \ldots W_{j_k}(\Delta_{i_k}).$$

Следовательно, учитывая свойство линейности кратного стохастического интеграла Ито и то, что в интегральной сумме (7) учитываются только те слагаемые, для которых значения $i_1,\ldots,i_k$ попарно различны, получаем

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}=\frac{1}{M_{J^*}^2}\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}\sum_{(\mathrm{T}/\sim)}K(t_1,\ldots,t_k)=$$
$$=\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)\quad\forall K(t_1,\ldots,t_k)\in S(\mathbb{H}^k),$$

так как суммирование ведется только по перестановкам переменных в классах эквивалентности T_j, $j\in J$, а величина $M_{J^*}^2$ равна числу слагаемых.

Если последовательность функций $K_m(t_1,\ldots,t_k)\in S(\mathbb{H}^k)$ сходится к функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$, то последовательность $\langle K_m(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}\in S(\mathbb{H}^k)$ сходится к функции $K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)\in L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ и

$$\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}K_m(t_1,\ldots,t_k)=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}\langle K_m(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*},$$

т.е. получаем равенство (8). ◀

Пусть $\{H_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ — полиномы Эрмита [18]:

$$H_i(x)=(-1)^i\mathrm{e}^{x^2/2}\,\frac{d^i}{dx^i}\,\mathrm{e}^{-x^2/2},\quad x\in\mathbb{R},$$

и первые полиномы Эрмита имеют вид

$$\begin{array}{lll} H_0(x)=1, & H_1(x)=x, & H_2(x)=x^2-1,\\ H_3(x)=x^3-3x, & H_4(x)=x^4-6x^2+3, & \ldots \end{array}$$

Они ортогональны в пространстве $L_2(\mathbb{R};\rho(x))$ с весом $\rho(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$:

$$\int_{\mathbb{R}}\rho(x)H_i(x)H_j(x)dx=i!\delta_{ij},\quad i,j=0,1,2,\ldots,\tag{9}$$

т.е. относительно плотности вероятности $\rho(x)$ стандартного нормального распределения, δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Полином Эрмита $H_i(x)$ представляется в виде

$$H_i(x)=i!\sum_{\nu=0}^{\lfloor i/2\rfloor}\frac{(-1)^\nu x^{i-2\nu}}{\nu!(i-2\nu)!2^\nu}=$$
$$=x^i-a_{i-2}^{(i)}x^{i-2}+a_{i-4}^{(i)}x^{i-4}-\ldots+(-1)^{\lfloor i/2\rfloor}a_{i-2\lfloor i/2\rfloor}^{(i)}x^{i-2\lfloor i/2\rfloor},\tag{10}$$

где $a_{i-2}^{(i)},a_{i-4}^{(i)},\ldots,a_{i-2\lfloor i/2\rfloor}^{(i)}>0$, $\lfloor\cdot\rfloor$ — целая часть числа.

Важные для дальнейшего изложения свойства полиномов Эрмита состоят в следующем. Пусть ζ — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение (с нулевым средним и единичной дисперсией). Тогда из (9) получаем

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}H_i(\zeta)=\delta_{i0},\quad \mathrm{E}H_i^2(\zeta)=\|H_i(\zeta)\|^2_{\mathcal{L}_2}=i!,\quad i=0,1,2,\ldots,\\ &\mathrm{E}H_i(\zeta)H_j(\zeta)=\big(H_i(\zeta),H_j(\zeta)\big)_{\mathcal{L}_2}=i!\delta_{ij},\quad i,j=0,1,2,\ldots\end{aligned} \tag{11}$$

Введем коммутативную бинарную операцию $*$ для двух случайных величин $\xi_1,\xi_2\in\mathcal{L}_2$ вида

$$\xi_1=\prod_{m=1}^{M}H_{i_m}(\zeta_m),\quad \xi_2=\prod_{m=1}^{M}H_{j_m}(\zeta_m)$$

следующим образом (произведение Вика [19]):

$$\xi_1*\xi_2=\prod_{m=1}^{M}H_{i_m+j_m}(\zeta_m),$$

где $M\geqslant 1$, $\zeta_1,\ldots,\zeta_M$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_m,j_m\in\{0,1,2,\ldots\}$. В частности,

$$\begin{aligned}&\zeta=H_1(\zeta), && \zeta*\zeta=H_2(\zeta)=\zeta^2-1,\\ &\zeta*\zeta*\zeta=H_3(\zeta)=\zeta^3-3\zeta, && \zeta*\zeta*\zeta*\zeta=H_4(\zeta)=\zeta^4-6\zeta^2+3,\quad\ldots\end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$. Тогда*

1) *кратный стохастический интеграл Ито по винеровским процессам от функции $K(t_1,\ldots,t_k)$ представляется в виде*

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty}C_{i_1\ldots i_k}\zeta_{i_1}^{(j_1)}*\ldots*\zeta_{i_k}^{(j_k)}, \tag{13}$$

где $C_{i_1\ldots i_k}$ — коэффициенты разложения (1) *функции $K(t_1,\ldots,t_k)$ относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{H})$, $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l=0,1,2,\ldots$ и $l=1,2,\ldots,k$;*

2) *норма кратного стохастического интеграла Ито удовлетворяет соотношению*

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)\|_{\mathcal{L}_2}&=M_{J^*}\|\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}\leqslant\\ &\leqslant M_{J^*}\|K(t_1,\ldots,t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)},\end{aligned} \tag{14}$$

где величина M_{J^*} определяется формулой (3).

Доказательство. Пользуясь независимостью винеровских процессов $W_j(t)$, $j \in J$, и результатом из [1], можем записать

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k) = \int_{\mathbb{H}^k} q(i_1,\tau_1)\ldots q(i_k,\tau_k) dW_{j_1}(\tau_1)\ldots dW_{j_k}(\tau_k) =$$
$$= \prod_{j\in J} \int_{\mathbb{H}^{\#(j,J^*)}} \prod_{n\in N_j} q(i_n,\tau_n) dW_j(\tau_n) =$$
$$= \prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j} H_{\#(i,I_j^*)}(\zeta_i^{(j)}) = \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \qquad (15)$$

где $\#(i,I_j^*)$ — кратность элемента i в мультимножестве I_j^*.

Случайная величина $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} \in \mathcal{L}_2$ образована произведениями независимых и центрированных случайных величин вида (12), поэтому $\mathrm{E}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} = 0$. Следовательно, множество

$$\mathfrak{Z}^{J^*} = \mathfrak{Z}^{(j_1\ldots j_k)} = \{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\}_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} \qquad (16)$$

состоит из попарно ортогональных случайных величин.

Согласно (11) получаем

$$\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \left\| \prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j} H_{\#(i,I_j^*)}(\zeta_i^{(j)}) \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 =$$
$$= \prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j} \|H_{\#(i,I_j^*)}(\zeta_i^{(j)})\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j} \#(i,I_j^*)! \qquad (17)$$

и множество

$$\hat{\mathfrak{Z}}^{J^*} = \hat{\mathfrak{Z}}^{(j_1\ldots j_k)} = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \right\}_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} \qquad (18)$$

состоит из ортонормированных случайных величин, где норма определяется соотношением (17), причем в множествах (16) и (18) все совпадающие элементы, которые отвечают разным значениям индексов $i_1,\ldots,i_k$, считаются неразличимыми.

Пусть

$$K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} C_{i_1\ldots i_k} q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k),$$

тогда, используя выражение (15), для любого натурального L имеем

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k) = \mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} C_{i_1\ldots i_k} q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} C_{i_1\ldots i_k} \mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} C_{i_1\ldots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}. \quad (19)$$

Если значения $j_1,\ldots,j_k$ попарно различны, т.е. $|J| = k$, то оператор $\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}$ ставит в соответствие каждому элементу $q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k)$ элемент $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} = \zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ с сохранением нормы и скалярного произведения. В частности при $i_1,\ldots,i_k < L$ получаем

$$\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2} = \|q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} = 1,$$

$$\|\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\|_{\mathcal{L}_2} = \|K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} C_{i_1\ldots i_k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

и

$$\begin{aligned} &\big(\zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\big)_{\mathcal{L}_2} = \\ &\quad = \mathrm{E}(\zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \zeta_{i_k}^{(j_k)}) \mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k) = C_{i_1\ldots i_k}. \end{aligned}$$

Если среди значений $j_1,\ldots,j_k$ есть совпадающие, т.е. $|J| < k$, то оператор $\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)}$ ставит в соответствие множеству элементов, полученных из $q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k)$ с помощью всех перестановок индексов в каждом классе эквивалентности I_j, $j \in J$, один элемент $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}$, поскольку такая перестановка индексов не меняет этот элемент (см. также утверждение 1). Норма и скалярное произведение в общем случае не сохраняется.

Величина $\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2$ равна числу одинаковых коэффициентов разложения $C_{i_1\ldots i_k}$ при всех перестановках индексов в каждом классе эквивалентности I_j, поскольку число одинаковых коэффициентов разложения при всех перестановках индексов только в классе эквивалентности I_j равно

$$\prod_{i\in I_j} \#(i, I_j^*)!,$$

а при всех перестановках индексов в каждом классе эквивалентности I_j, $j \in J$, получаем правую часть формулы (17). Таким образом, при $i_1,\ldots,i_k < L$ можно записать

$$\begin{aligned} &\big(\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}, \mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\big)_{\mathcal{L}_2} = \\ &\quad = \mathrm{E}(\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}) \mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k) = \\ &\quad = \frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k} \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k}, \end{aligned}$$

или

$$\left(\frac{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}}, \mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\right)_{\mathcal{L}_2} =$$
$$= \frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам индексов в каждом классе эквивалентности I_j, $j \in J$.

Отсюда получаем разложение интеграла $\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)$ по ортонормированным случайным величинам (18):

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} C_{i_1\ldots i_k} \zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} =$$
$$= \sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}}^{(L)} \cdots \sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}}^{(L)} \left(\frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k}\right) \frac{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}},$$

причем для каждой суммы по индексам из класса эквивалентности $\mathrm{I}_j = \{i_{(1)}, i_{(2)}, \ldots, i_{(|\mathrm{I}_j|)}\}$ суммирование осуществляется следующим образом:

$$\sum_{\mathrm{I}_j}^{(L)} = \sum_{i_{(1)} \leqslant i_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant i_{(|\mathrm{I}_j|)}}^{(L)} = \sum_{i_{(1)}=0}^{L-1} \sum_{i_{(2)}=i_{(1)}}^{L-1} \cdots \sum_{i_{(|\mathrm{I}_j|)}=i_{(|\mathrm{I}_j|-1)}}^{L-1}, \tag{21}$$

либо иначе, но чтобы из каждого набора значений индексов I_j^*, $j \in J = \{j_{(1)}, \ldots, j_{(|J|)}\}$, выбиралась только одна из перестановок.

Следовательно,

$$\|\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\|_{\mathcal{L}_2} =$$
$$= \left\{\sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}}^{(L)} \cdots \sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}}^{(L)} \frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \left(\sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

а формула (20) — это частный случай формулы (22) при попарно различных значениях $j_1, \ldots, j_k$:

$$J = \{j_1, \ldots, j_k\}, \quad J^* = (j_1 \ldots j_k), \quad \mathrm{I}_{j_{(1)}} = \{i_1\}, \quad \ldots, \quad \mathrm{I}_{j_{(k)}} = \{i_k\},$$
$$\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2} = 1, \quad \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k} = C_{i_1\ldots i_k}.$$

Переходя к сумме по $i_1, \ldots, i_k = 0, 1, 2, \ldots$, нужно учесть, что в формуле (22) все величины вида

$$\sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1 \ldots i_k} = M_{J^*}^2 \tilde{C}_{i_1 \ldots i_k},$$

где $\tilde{C}_{i_1 \ldots i_k}$ — это коэффициенты разложения (5) симметризованной функции $\langle K(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*}$, учитываются $M_{J^*}^2$ раз, тогда

$$\|\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K^{(L)}(t_1, \ldots, t_k)\|_{\mathcal{L}_2} = \left\{ \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{L-1} \left(\sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1 \ldots i_k} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left\{ \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{L-1} \left(M_{J^*}^2 \tilde{C}_{i_1 \ldots i_k} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = M_{J^*} \left\{ \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{L-1} (\tilde{C}_{i_1 \ldots i_k})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= M_{J^*} \|K_{J^*}^{(L)}(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}. \qquad (23)$$

С учетом оценки (4) находим

$$\|\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K^{(L)}(t_1, \ldots, t_k)\|_{\mathcal{L}_2} \leqslant M_{J^*} \|K^{(L)}(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}$$

и, переходя к пределу при $L \to \infty$ в соотношении (23), получаем, что линейный оператор $\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)}$ является ограниченным с нормой $\|\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)}\| = M_{J^*}$, а из (19) следует справедливость разложения (13) и соотношения (14). ◄

З а м е ч а н и я 1.

1. Всевозможные произведения полиномов Эрмита $\{H_{l_1}(x_1)\}_{l_1=0}^{\infty}, \ldots, \{H_{l_k}(x_k)\}_{l_k=0}^{\infty}$ образуют ортогональную систему функций векторного аргумента $x = [\, x_1 \; \ldots \; x_k \,]^{\mathrm{T}}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^k; \varrho(x))$ с весом $\varrho(x) = \rho(x_1) \ldots \rho(x_k)$ [20], а именно полиномы Эрмита $\{H_{l_1 \ldots l_k}(x)\}_{l_1, \ldots, l_k = 0}^{\infty}$. Правая часть формулы (15) — это значение такого полинома $H_{l_1 \ldots l_k}(x)$ с аргументом $x = [\, \zeta_{i_1}^{(j_1)} \; \ldots \; \zeta_{i_k}^{(j_k)} \,]^{\mathrm{T}}$ при условии $l_1 + \ldots + l_k = \dim x = k$, где индексы $l_1, \ldots, l_k$ — степени полинома по координатам $x_1, \ldots, x_k$ соответственно — определяются элементами мультимножеств I_j^*, $j \in J$, а часть индексов может быть нулевой, при этом

$$\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \|H_{l_1 \ldots l_k}(x)\|_{L_2(\mathbb{R}^k; \varrho(x))}^2.$$

Если определить отношение эквивалентности $\sim$ для индексов из множества $\mathrm{L} = \{l_1, \ldots, l_k\}$ и обозначить через $\mathrm{L}/\sim$ множество всех классов эквивалентности L_j, $j \in J$, т.е. $\mathrm{L}_j = \{l_n \colon n \in N_j\}$, то значения индексов в них определяются следующим образом. Если $\#(i, I_j^*) = 1$, то соответствующий индекс из класса эквивалентности L_j полагаем равным единице, если

$\#(i, I_j) > 1$, т.е. среди элементов I_j^* есть совпадающие, то в соответствующем подмножестве индексов в L_j любой из индексов полагается равным $\#(i, I_j)$, а остальные — равными нулю. Отметим, что множества I, T и L, а также их разбиения на классы эквивалентности отличаются только обозначениями и соответствие между ними понимается именно с этой точки зрения.

Записывая каждый такой полином Эрмита в развернутом виде как сумму мономов, из формулы (13) можно получить представление стохастических интегралов Ито из [12]. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} = \zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)} - \Delta_{12},\\
&\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} = \zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_3}^{(j_3)} - \Delta_{12}\zeta_{i_3}^{(j_3)} - \Delta_{13}\zeta_{i_2}^{(j_2)} - \Delta_{23}\zeta_{i_1}^{(j_1)},\\
&\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} = \zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_3}^{(j_3)}\zeta_{i_4}^{(j_4)} - \Delta_{12}\zeta_{i_3}^{(j_3)}\zeta_{i_4}^{(j_4)} - \Delta_{13}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_4}^{(j_4)} -\\
&\quad - \Delta_{14}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_3}^{(j_3)} - \Delta_{23}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_4}^{(j_4)} - \Delta_{24}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_3}^{(j_3)} - \Delta_{34}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)} +\\
&\quad + \Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{24} + \Delta_{14}\Delta_{23}, \quad \ldots,\\
&\Delta_{lm} = \delta_{j_l j_m}\delta_{i_l i_m}, \quad l, m = 1, \ldots, k,
\end{aligned}
$$

тогда [12]

$$
\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1i_2}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} = \sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1i_2}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)} - \delta_{j_1j_2}\sum_{i_1=0}^{\infty} C_{i_1i_1},
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_3}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_3}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_3}^{(j_3)} -\\
- \delta_{j_1j_2}\sum_{i_1,i_3=0}^{\infty} C_{i_1i_1i_3}\zeta_{i_3}^{(j_3)} - \delta_{j_1j_3}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_1}\zeta_{i_2}^{(j_2)} - \delta_{j_2j_3}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_2}\zeta_{i_1}^{(j_1)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_3i_4}\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \zeta_{i_2}^{(j_2)} * \zeta_{i_3}^{(j_3)} * \zeta_{i_4}^{(j_4)} = \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_3i_4}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_3}^{(j_3)}\zeta_{i_4}^{(j_4)} -\\
- \delta_{j_1j_2}\sum_{i_1,i_3,i_4=0}^{\infty} C_{i_1i_1i_3i_4}\zeta_{i_3}^{(j_3)}\zeta_{i_4}^{(j_4)} - \delta_{j_1j_3}\sum_{i_1,i_2,i_4=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_1i_4}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_4}^{(j_4)} -\\
- \delta_{j_1j_4}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_3i_1}\zeta_{i_2}^{(j_2)}\zeta_{i_3}^{(j_3)} - \delta_{j_2j_3}\sum_{i_1,i_2,i_4=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_2i_4}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_4}^{(j_4)} -\\
- \delta_{j_2j_4}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_3i_2}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_3}^{(j_3)} - \delta_{j_3j_4}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_3i_3}\zeta_{i_1}^{(j_1)}\zeta_{i_2}^{(j_2)} +\\
+ \delta_{j_1j_2}\delta_{j_3j_4}\sum_{i_1,i_3=0}^{\infty} C_{i_1i_1i_3i_3} + \delta_{j_1j_3}\delta_{j_2j_4}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_1i_2} + \delta_{j_1j_4}\delta_{j_2j_3}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_2i_1}, \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Для получения таких формул в общем случае нужно представить случайную величину $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ в виде линейной комбинации произведения $\zeta_{i_1}^{(j_1)} \ldots \zeta_{i_k}^{(j_k)}$ и всевозможных произведений элементов, выбранных из множества $\{\zeta_{i_1}^{(j_1)}, \ldots, \zeta_{i_k}^{(j_k)}\}$, причем выбираются $k-2, k-4, \ldots, k-2\lfloor k/2 \rfloor$ элементов, т.е. $k-2\nu$ элементов при $\nu = 1, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor$. Если k — четное, то в этой линейной комбинации появится единица, соответствующая значению $\nu = k/2$. Коэффициенты линейной комбинации состоят из произведений величин Δ_{lm}, где индексы l, m соответствуют всевозможным упорядоченным парам индексов $(i_l, j_l) = (i_m, j_m)$, для которых случайные величины $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ и $\zeta_{i_m}^{(j_m)}$ отсутствуют в соответствующем произведении, и коэффициента $(-1)^\nu$.

Введем отношение эквивалентности $\sim$ для значений индексов из множества $I^* = (i_1 \ldots i_k)$:

$$i_l \sim i_m \quad \Longleftrightarrow \quad i_l = i_m \quad \text{и} \quad j_l = j_m, \quad l, m = 1, \ldots, k,$$

и обозначим через $I^*/\sim$ множество всех классов эквивалентности I_s^*, где $s = 1, \ldots, S$, $S \leqslant k$ — число таких классов эквивалентности.

Число комбинаций выбора ν_s неупорядоченных пар (i_l, i_m) из множества I_s^* при условии $|I_s^*| \geqslant 2$, а они дают коэффициент $\Delta_{lm} = 1$ в представлении случайной величины $\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}$, совпадает с коэффициентом $a_{i-2\nu_s}^{(i)}$ полинома Эрмита (10) при $i = |I_s^*|$:

$$\frac{1}{\nu_s!} \frac{i!}{2!(i-2)!} \frac{(i-2)!}{2!(i-4)!} \ldots \frac{(i-2(\nu_s-1))!}{2!(i-2\nu_s)!}\bigg|_{i=|I_s^*|} =$$
$$= \frac{i!}{\nu_s!(i-2\nu_s)!2^{\nu_s}} = a_{i-2\nu_s}^{(i)}\Big|_{i=|I_s^*|}.$$

Число комбинаций выбора ν_s таких пар из всех множеств I_s^* определяется произведением коэффициентов полиномов Эрмита (10) степеней $|I_s^*|$:

$$\prod_{s=1}^{S} a_{i-2\nu_s}^{(i)}\Big|_{i=|I_s^*|},$$

которые возникают при построении полиномов Эрмита $\{H_{l_1 \ldots l_k}(x)\}_{l_1, \ldots, l_k = 0}^{\infty}$ векторного аргумента. Это произведение записано в выражении (15).

2. Множества случайных величин (16) и (18) образуют соответственно ортогональный и ортонормированный базисы линейного подпространства $\mathcal{L}_2^{(j_1 \ldots j_k)} = \{\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K(t_1, \ldots, t_k) \colon K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)\} \subset \mathcal{L}_2$, а линейный оператор $\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между линейными подпространствами $L_2^{(j_1 \ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ и $\mathcal{L}_2^{(j_1 \ldots j_k)}$. Важно отметить, что это

множества различных элементов, т.е. все совпадающие элементы, которые отвечают разным значениям индексов $i_1, \ldots, i_k$, неразличимы.

3. Максимум нормы элементов ортогонального базиса (16) достигается при $|I_j| = 1\ \forall j \in J$, т.е. на элементах вида

$$\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)} = \prod_{j\in J} H_{\#(j,J^*)}(\zeta^{(j)}),$$

где $\zeta^{(j)}$ — любая случайная величина из множества $\{\zeta_i^{(j)}\}_{i=0}^{\infty}$. Используя (11), находим

$$\max_{i_1,\ldots,i_k} \|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \left\|\prod_{j\in J} H_{\#(j,J^*)}(\zeta^{(j)})\right\|_{\mathcal{L}_2}^2 =$$
$$= \prod_{j\in J} \|H_{\#(j,J^*)}(\zeta^{(j)})\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \prod_{j\in J} (\#(j,J^*))! = M_{J^*}^2.$$

4. Разложение кратного стохастического интеграла Ито (6) по ортонормированному базису (18) имеет вид

$$\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K(t_1,\ldots,t_k) =$$
$$= \sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}} \cdots \sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}} \left(\frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k}\right) \frac{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} =$$
$$= \sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}} \cdots \sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}} \frac{M_{J^*}^2 \tilde{C}_{i_1\ldots i_k}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}}, \tag{24}$$

причем для каждой суммы по индексам из класса эквивалентности $\mathrm{I}_j = \{i_{(1)}, i_{(2)}, \ldots, i_{(|\mathrm{I}_j|)}\}$ суммирование осуществляется следующим образом (см. формулу (21)):

$$\sum_{\mathrm{I}_j} = \sum_{i_{(1)}\leqslant i_{(2)}\leqslant\ldots\leqslant i_{(|\mathrm{I}_j|)}} = \sum_{i_{(1)}=0}^{\infty} \sum_{i_{(2)}=i_{(1)}}^{\infty} \cdots \sum_{i_{(|\mathrm{I}_j|)}=i_{(|\mathrm{I}_j|-1)}}^{\infty}, \tag{25}$$

либо иначе, но чтобы из каждого набора значений индексов I_j^*, $j \in J = \{j_{(1)}, \ldots, j_{(|J|)}\}$, выбиралась только одна из перестановок.

Тогда норма интеграла $\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K(t_1,\ldots,t_k)$ выражается формулой

$$\|\mathcal{I}_h^{(j_1\ldots j_k)} K(t_1,\ldots,t_k)\|_{\mathcal{L}_2} =$$
$$= \left\{\sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}} \cdots \sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}} \frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \left(\sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}} \ldots \sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}} \frac{(M_{J^*}^2 \tilde{C}_{i_1 \ldots i_k})^2}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

5. Пространство $L_2^{(j_1 \ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ можно переопределить и рассматривать его как множество классов эквивалентности:

$$K(t_1, \ldots, t_k) \sim L(t_1, \ldots, t_k) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle K(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*} = \langle L(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*},$$

определяя норму

$$\|K(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2^{(j_1 \ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)} = \|\langle K(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*}\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}.$$

Его можно считать областью определения линейного оператора $\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)}$. Тогда для класса функций $K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)^{(j_1 \ldots j_k)}$ справедливо разложение (13), в правой части которого $C_{i_1 \ldots i_k}$ — коэффициенты разложения (1) любой функции $K(t_1, \ldots, t_k)$ из этого класса (элемента пространства $L_2(\mathbb{H}^k)$).

Пример 1. Представить стохастические интегралы Ито

$$\mathcal{I}_h^{(123)} K(t_1, t_2, t_3), \quad \mathcal{I}_h^{(212)} K(t_1, t_2, t_3) \quad \text{и} \quad \mathcal{I}_h^{(111)} K(t_1, t_2, t_3)$$

кратности $k = 3$ в виде ряда (13) и ортогонального разложения (24), где $K(t_1, t_2, t_3) \in L_2(\mathbb{H}^3)$.

Начнем с интеграла $\mathcal{I}_h^{(123)} K(t_1, t_2, t_3)$. В данном случае $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ и $j_3 = 3$, т.е. $J = \{1, 2, 3\}$ и $J^* = (123)$. Множество индексов $\mathrm{I} = \{i_1, i_2, i_3\}$ и множество переменных $\mathrm{T} = \{t_1, t_2, t_3\}$ разобьем на классы эквивалентности:

$$\mathrm{I}/\!\sim\; = \{\underbrace{\{i_1\}}_{\mathrm{I}_1}, \underbrace{\{i_2\}}_{\mathrm{I}_2}, \underbrace{\{i_3\}}_{\mathrm{I}_3}\}, \quad \mathrm{T}/\!\sim\; = \{\underbrace{\{t_1\}}_{\mathrm{T}_1}, \underbrace{\{t_2\}}_{\mathrm{T}_2}, \underbrace{\{t_3\}}_{\mathrm{T}_3}\},$$
$$\#(1, J^*) = \#(2, J^*) = \#(3, J^*) = 1, \quad M_{J^*}^2 = 1!1!1! = 1.$$

При заданных значениях i_1, i_2, i_3 получаем $I_1 = I_1^* = \{i_1\}$, $I_2 = I_2^* = \{i_2\}$, $I_3 = I_3^* = \{i_3\}$.

На основе соотношений (15) и (17) (см. также п. 1 замечаний 1) получаем

$$\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(2)} * \zeta_{i_3}^{(3)} = \zeta_{i_1}^{(1)} \zeta_{i_2}^{(2)} \zeta_{i_3}^{(3)} = H_{1,1,1}(\zeta_{i_1}^{(1)}, \zeta_{i_2}^{(2)}, \zeta_{i_3}^{(3)}),$$
$$\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(2)} * \zeta_{i_3}^{(3)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = 1,$$

следовательно, формулы (16) и (18) определяют ортонормированный базис:

$$\mathfrak{Z}^{(123)} = \hat{\mathfrak{Z}}^{(123)} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(2)} * \zeta_{i_3}^{(3)}\}_{i_1, i_2, i_3 = 0}^{\infty} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} \zeta_{i_2}^{(2)} \zeta_{i_3}^{(3)}\}_{i_1, i_2, i_3 = 0}^{\infty}.$$

Функция $K_{J^*}(t_1,t_2,t_3)$ совпадает с функцией $K(t_1,t_2,t_3)$ и далее для представления интеграла $\mathcal{I}_h^{(123)}K(t_1,t_2,t_3)$ не рассматривается.

Пусть $C_{i_1i_2i_3}$ — коэффициенты разложения функции $K(t_1,t_2,t_3)$, а $\zeta_{i_1}^{(1)}$, $\zeta_{i_2}^{(2)}$ и $\zeta_{i_3}^{(3)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_1,i_2,i_3=0,1,2,\ldots$ Тогда находим представление кратного стохастического интеграла Ито $\mathcal{I}_h^{(123)}K(t_1,t_2,t_3)$ в виде ряда (13), который и является ортогональным разложением (24):

$$\mathcal{I}_h^{(123)}K(t_1,t_2,t_3)=\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}C_{i_1i_2i_3}\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(2)}*\zeta_{i_3}^{(3)}=\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}C_{i_1i_2i_3}\zeta_{i_1}^{(1)}\zeta_{i_2}^{(2)}\zeta_{i_3}^{(3)}.$$

Далее применим формулы (14) и (26) для нормы интеграла $\mathcal{I}_h^{(123)}K(t_1,t_2,t_3)$:

$$\|\mathcal{I}_h^{(123)}K(t_1,t_2,t_3)\|_{\mathcal{L}_2}=\left\{\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}C_{i_1i_2i_3}^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\|K(t_1,t_2,t_3)\|_{L_2(\mathbb{H}^3)}.$$

Перейдем к интегралу $\mathcal{I}_h^{(212)}K(t_1,t_2,t_3)$. В данном случае $j_1=j_3=2$ и $j_2=1$, т.е. $J=\{1,2\}$ и $J^*=(212)$. Множество индексов $\mathrm{I}=\{i_1,i_2,i_3\}$ и множество переменных $\mathrm{T}=\{t_1,t_2,t_3\}$ разобьем на классы эквивалентности:

$$\mathrm{I}/\!\sim\,=\{\underbrace{\{i_2\}}_{\mathrm{I}_1},\underbrace{\{i_1,i_3\}}_{\mathrm{I}_2}\},\quad \mathrm{T}/\!\sim\,=\{\underbrace{\{t_2\}}_{\mathrm{T}_1},\underbrace{\{t_1,t_3\}}_{\mathrm{T}_2}\},$$
$$\#(1,J^*)=1,\quad \#(2,J^*)=2,\quad M_{J^*}^2=1!2!=2.$$

При заданных значениях i_1,i_2,i_3 получаем $I_1=I_1^*=\{i_2\}$, а также $I_2=\{i_1,i_3\}$ при $i_1\neq i_3$ и $I_2=\{i_1\}$ при $i_1=i_3$, $I_2^*=(i_1i_3)$.

На основе соотношений (15) и (17) (см. также п. 1 замечаний 1) получаем

$$\zeta_{i_1}^{(2)}*\zeta_{i_2}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(2)}=\begin{cases}\zeta_{i_1}^{(2)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(2)}=H_{1,1,1}(\zeta_{i_1}^{(2)},\zeta_{i_2}^{(1)},\zeta_{i_3}^{(2)}), & i_1\neq i_3,\\ H_2(\zeta_{i_1}^{(2)})\zeta_{i_2}^{(1)}=H_{2,1,0}(\zeta_{i_1}^{(2)},\zeta_{i_2}^{(1)},\zeta_{i_3}^{(2)}), & i_1=i_3,\end{cases}$$
$$\|\zeta_{i_1}^{(2)}*\zeta_{i_2}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2=\begin{cases}1, & i_1\neq i_3,\\ 2, & i_1=i_3,\end{cases}\quad \text{или}\quad \|\zeta_{i_1}^{(2)}*\zeta_{i_2}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}^2=1+\delta_{i_1i_3},$$

следовательно, ортогональный и ортонормированный базисы (16) и (18) имеют вид

$$\mathfrak{Z}^{(212)}=\{\zeta_{i_1}^{(2)}*\zeta_{i_2}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(2)}\}_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty},$$

$$\hat{\mathfrak{Z}}^{(212)} = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} \right\}_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}}{\sqrt{1+\delta_{i_1 i_3}}} \right\}_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}.$$

Симметризованная функция $K_{J^*}(t_1,t_2,t_3)$ согласно (2) определяется следующим образом:

$$K_{J^*}(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{T}/\sim)} K(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{2}\big(K(t_1,t_2,t_3) + K(t_3,t_2,t_1)\big).$$

Пусть $C_{i_1 i_2 i_3}$ и $\tilde{C}_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения функций $K(t_1,t_2,t_3)$ и $K_{J^*}(t_1,t_2,t_3)$ соответственно:

$$\tilde{C}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{C_{i_1 i_2 i_3} + C_{i_3 i_2 i_1}}{2}, \quad i_1,i_2,i_3 = 0,1,2,\ldots,$$

и $\zeta_{i_1}^{(2)}$ и $\zeta_{i_2}^{(1)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_1, i_2 = 0,1,2,\ldots$ Тогда получаем представление кратного стохастического интеграла Ито $\mathcal{I}_h^{(212)} K(t_1,t_2,t_3)$ в виде ряда (13) и ортогонального разложения (24):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_h^{(212)} K(t_1,t_2,t_3) &= \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} = \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{C_{i_1 i_2 i_3} + C_{i_3 i_2 i_1}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} = \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{C_{i_1 i_2 i_3} + C_{i_3 i_2 i_1}}{1+\delta_{i_1 i_3}} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}. \end{aligned}$$

Аналогичные представления для интеграла Ито $\mathcal{I}_h^{(212)} K(t_1,t_2,t_3)$ могут быть записаны с помощью коэффициентов разложения $\tilde{C}_{i_1 i_2 i_3}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_h^{(212)} K(t_1,t_2,t_3) &= \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)} = \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{2\tilde{C}_{i_1 i_2 i_3}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}}{\|\zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}\|_{\mathcal{L}_2}} = \\ &= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \sum_{i_3=i_1}^{\infty} \frac{2\tilde{C}_{i_1 i_2 i_3}}{1+\delta_{i_1 i_3}} \zeta_{i_1}^{(2)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(2)}. \end{aligned}$$

Переходя к форме записи из [12], получаем

$$\mathcal{I}_h^{(212)}K(t_1,t_2,t_3)=\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}C_{i_1i_2i_3}\zeta_{i_1}^{(2)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(2)}-\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty}C_{i_1i_2i_1}\zeta_{i_2}^{(1)}.$$

Далее применим формулы (14) и (26) для нормы интеграла $\mathcal{I}_h^{(212)}K(t_1,t_2,t_3)$:

$$\|\mathcal{I}_h^{(212)}K(t_1,t_2,t_3)\|_{\mathcal{L}_2}=\left\{\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_3=i_1}^{\infty}\frac{(C_{i_1i_2i_3}+C_{i_3i_2i_1})^2}{1+\delta_{i_1i_3}}\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{2\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}\tilde{C}^2_{i_1i_2i_3}\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\,\|K_{J^*}(t_1,t_2,t_3)\|_{L_2(\mathbb{H}^3)}.$$

Все приведенные разложения справедливы и для кратного стохастического интеграла Ито $\mathcal{I}_h^{(212)}K_{J^*}(t_1,t_2,t_3)$, так как $\mathcal{I}_h^{(212)}K(t_1,t_2,t_3)=\mathcal{I}_h^{(212)}K_{J^*}(t_1,t_2,t_3)$ (см. утверждение 1).

Наконец, рассмотрим интеграл $\mathcal{I}_h^{(111)}K(t_1,t_2,t_3)$. Здесь $j_1=j_2=j_3=1$, т.е. $J=\{1\}$ и $J^*=(111)$. Множество индексов $\mathrm{I}=\{i_1,i_2,i_3\}$ и множество переменных $\mathrm{T}=\{t_1,t_2,t_3\}$ совпадают с классами эквивалентности, т.е. фактор-множества состоят из одного элемента:

$$\mathrm{I}/\!\sim\,=\underbrace{\{i_1,i_2,i_3\}}_{\mathrm{I}_1},\quad \mathrm{T}/\!\sim\,=\underbrace{\{t_1,t_2,t_3\}}_{\mathrm{T}_1},$$

$$\#(1,J^*)=3,\quad M^2_{J^*}=3!=6.$$

При заданных значениях i_1,i_2,i_3 получаем $I_1=\{i_1,i_2,i_3\}$ при попарно различных i_1,i_2,i_3, $I_1=\{i_1,i_3\}$ при $i_1=i_2\neq i_3$, $I_1=\{i_1,i_2\}$ при $i_1=i_3\neq i_2$, $I_1=\{i_1,i_2\}$ при $i_1\neq i_2=i_3$, $I_1=\{i_1\}$ при $i_1=i_2=i_3$, $I_1^*=(i_1i_2i_3)$.

Соотношения (15) и (17) (см. также п. 1 замечаний 1) позволяют записать

$$\zeta_{i_1}^{(1)}*\zeta_{i_2}^{(1)}*\zeta_{i_3}^{(1)}=$$

$$=\begin{cases}\zeta_{i_1}^{(1)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(1)}=H_{1,1,1}(\zeta_{i_1}^{(1)},\zeta_{i_2}^{(1)},\zeta_{i_3}^{(1)}), & i_1,i_2,i_3 \text{ попарно различны},\\ H_2(\zeta_{i_1}^{(1)})\zeta_{i_3}^{(1)}=H_{2,0,1}(\zeta_{i_1}^{(1)},\zeta_{i_2}^{(1)},\zeta_{i_3}^{(1)}), & i_1=i_2\neq i_3,\\ H_2(\zeta_{i_1}^{(1)})\zeta_{i_2}^{(1)}=H_{2,1,0}(\zeta_{i_1}^{(1)},\zeta_{i_2}^{(1)},\zeta_{i_3}^{(1)}), & i_1=i_3\neq i_2,\\ \zeta_{i_1}^{(1)}H_2(\zeta_{i_2}^{(1)})=H_{1,2,0}(\zeta_{i_1}^{(1)},\zeta_{i_2}^{(1)},\zeta_{i_3}^{(1)}), & i_1\neq i_2=i_3,\\ H_3(\zeta_{i_1}^{(1)})=H_{3,0,0}(\zeta_{i_1}^{(1)},\zeta_{i_2}^{(1)},\zeta_{i_3}^{(1)}), & i_1=i_2=i_3,\end{cases}$$

$$\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 =$$

$$= \begin{cases} 1, & i_1, i_2, i_3 \text{ попарно различны}, \\ 2, & i_1 = i_2 \neq i_3 \quad \text{или} \quad i_1 = i_3 \neq i_2 \quad \text{или} \quad i_1 \neq i_2 = i_3, \\ 6, & i_1 = i_2 = i_3, \end{cases}$$

или

$$\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = 1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_1 i_3} + \delta_{i_2 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2}\delta_{i_2 i_3},$$

следовательно, ортогональный и ортонормированный базисы (16) и (18) имеют вид

$$\mathfrak{Z}^{(111)} = \{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\}_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty},$$

$$\hat{\mathfrak{Z}}^{(111)} = \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} \right\}_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} =$$

$$= \left\{ \frac{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}}{\sqrt{1 + \delta_{i_1 i_2} + \delta_{i_1 i_3} + \delta_{i_2 i_3} + 2\delta_{i_1 i_2}\delta_{i_2 i_3}}} \right\}_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty}.$$

Симметризованная функция $K_{J^*}(t_1, t_2, t_3)$ согласно (2) имеет вид

$$K_{J^*}(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{T}/\sim)} K(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{6}\big(K(t_1, t_2, t_3) + K(t_2, t_1, t_3) +$$

$$+ K(t_3, t_2, t_1) + K(t_1, t_3, t_2) + K(t_2, t_3, t_1) + K(t_3, t_1, t_2)\big).$$

Пусть $C_{i_1 i_2 i_3}$ и $\tilde{C}_{i_1 i_2 i_3}$ — коэффициенты разложения функций $K(t_1, t_2, t_3)$ и $K_{J^*}(t_1, t_2, t_3)$ соответственно:

$$\tilde{C}_{i_1 i_2 i_3} = \frac{C_{i_1 i_2 i_3} + C_{i_2 i_1 i_3} + C_{i_3 i_2 i_1} + C_{i_1 i_3 i_2} + C_{i_2 i_3 i_1} + C_{i_3 i_1 i_2}}{6},$$

$$i_1, i_2, i_3 = 0, 1, 2, \ldots,$$

а $\zeta_{i_1}^{(1)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_1 = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда имеем представление кратного стохастического интеграла Ито $\mathcal{I}_h^{(111)} K(t_1, t_2, t_3)$ в виде ряда (13) и ортогонального разложения (24):

$$\mathcal{I}_h^{(111)} K(t_1, t_2, t_3) = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1 i_2 i_3} \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \sum_{i_3=i_2}^{\infty} \frac{C_{i_1 i_2 i_3} + C_{i_2 i_1 i_3} + C_{i_3 i_2 i_1} + C_{i_1 i_3 i_2} + C_{i_2 i_3 i_1} + C_{i_3 i_1 i_2}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} \times$$

$$\times \frac{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=i_1}^{\infty}\sum_{i_3=i_2}^{\infty} \frac{C_{i_1i_2i_3} + C_{i_2i_1i_3} + C_{i_3i_2i_1} + C_{i_1i_3i_2} + C_{i_2i_3i_1} + C_{i_3i_1i_2}}{1 + \delta_{i_1i_2} + \delta_{i_1i_3} + \delta_{i_2i_3} + 2\delta_{i_1i_2}\delta_{i_2i_3}} \times$$

$$\times \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}.$$

Аналогичные представления для интеграла Ито $\mathcal{I}_h^{(111)} K(t_1, t_2, t_3)$ могут быть записаны с помощью коэффициентов разложения $\tilde{C}_{i_1i_2i_3}$:

$$\mathcal{I}_h^{(111)} K(t_1, t_2, t_3) = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1i_2i_3}\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=i_1}^{\infty}\sum_{i_3=i_2}^{\infty} \frac{6\tilde{C}_{i_1i_2i_3}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}}{\|\zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}\|_{\mathcal{L}_2}} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=i_1}^{\infty}\sum_{i_3=i_2}^{\infty} \frac{6\tilde{C}_{i_1i_2i_3}}{1 + \delta_{i_1i_2} + \delta_{i_1i_3} + \delta_{i_2i_3} + 2\delta_{i_1i_2}\delta_{i_2i_3}}\, \zeta_{i_1}^{(1)} * \zeta_{i_2}^{(1)} * \zeta_{i_3}^{(1)}.$$

Если использовать форму записи из [12], то

$$\mathcal{I}_h^{(111)} K(t_1, t_2, t_3) = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_3}\zeta_{i_1}^{(1)}\zeta_{i_2}^{(1)}\zeta_{i_3}^{(1)} -$$

$$- \sum_{i_1,i_3=0}^{\infty} C_{i_1i_1i_3}\zeta_{i_3}^{(1)} - \sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_1}\zeta_{i_2}^{(1)} - \sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{i_1i_2i_2}\zeta_{i_1}^{(1)}.$$

В заключительной части воспользуемся формулами (14) и (26) для нормы интеграла Ито $\mathcal{I}_h^{(111)} K(t_1, t_2, t_3)$:

$$\|\mathcal{I}_h^{(111)} K(t_1, t_2, t_3)\|_{\mathcal{L}_2} =$$

$$= \left\{\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=i_1}^{\infty}\sum_{i_3=i_2}^{\infty} \frac{(C_{i_1i_2i_3} + C_{i_2i_1i_3} + C_{i_3i_2i_1} + C_{i_1i_3i_2} + C_{i_2i_3i_1} + C_{i_3i_1i_2})^2}{1 + \delta_{i_1i_2} + \delta_{i_1i_3} + \delta_{i_2i_3} + 2\delta_{i_1i_2}\delta_{i_2i_3}}\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{6\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} \tilde{C}_{i_1i_2i_3}^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}\, \|K_{J^*}(t_1, t_2, t_3)\|_{L_2(\mathbb{H}^3)}.$$

Как и для интеграла $\mathcal{I}_h^{(212)} K(t_1, t_2, t_3)$, все приведенные разложения справедливы для кратного стохастического интеграла Ито $\mathcal{I}_h^{(111)} K_{J^*}(t_1, t_2, t_3)$, так как $\mathcal{I}_h^{(111)} K(t_1, t_2, t_3) = \mathcal{I}_h^{(111)} K_{J^*}(t_1, t_2, t_3)$ (см. утверждение 1).

4. Кратные стохастические интегралы Ито по пуассоновским процессам

Определим линейный оператор $\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}\colon L_2(\mathbb{H}^k)\to\mathcal{L}_2$, ставящий в соответствие функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$ кратный стохастический интеграл Ито по центрированным пуассоновским процессам (кратности k):

$$\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\int_{\mathbb{H}^k}K(\tau_1,\ldots,\tau_k)dP_{j_1}^0(\tau_1)\ldots dP_{j_k}^0(\tau_k), \tag{27}$$

где $j_1,\ldots,j_k=1,\ldots,s$; $P_1^0(t),\ldots,P_s^0(t)$ — независимые центрированные пуассоновские процессы интенсивности $\lambda>0$.

Этот интеграл, как и кратный стохастический интеграл Ито по винеровским процессам, сначала определяется для специальных элементарных функций, а именно для функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in S(\mathbb{H}^k)$ имеем [6, 12]

$$\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}a_{i_1\ldots i_k}P_{j_1}^0(\Delta_{i_1})\ldots P_{j_k}^0(\Delta_{i_k}), \tag{28}$$

где

$$P_j^0(\Delta_i)=\int_0^h\chi_{\Delta_i}(\tau)dP_j^0(\tau),$$

а все остальные обозначения введены в предыдущем разделе.

Для функций $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$ кратный стохастический интеграл Ито по центрированным пуассоновским процессам определяется с помощью предельного перехода:

$$\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K_m(t_1,\ldots,t_k),$$

где последовательность специальных элементарных функций $K_m(t_1,\ldots,t_k)$ сходится к функции $K(t_1,\ldots,t_k)$:

$$\lim_{m\to\infty}\|K(t_1,\ldots,t_k)-K_m(t_1,\ldots,t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}=0,\quad K_m(t_1,\ldots,t_k)\in S(\mathbb{H}^k).$$

Утверждение 2. *Пусть $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)$, а $K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)=\langle K(t_1,\ldots,t_k)\rangle_{J^*}\in L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ — соответствующая симметризованная функция* (2). *Тогда кратные стохастические интегралы Ито по центрированным пуассоновским процессам от функций $K(t_1,\ldots,t_k)$ и $K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k)$ совпадают*:

$$\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)=\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K_{J^*}(t_1,\ldots,t_k). \tag{29}$$

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1.

Пусть $\{S_i(n)\}_{i=0}^{\infty}$ — полиномы Шарлье [18]:

$$S_i(n) = L_i^{n+\lambda-i}(\lambda), \quad n = -\lambda, -\lambda+1, -\lambda+2, \ldots,$$

которые определяются через полиномы Лагерра $L_i^{\alpha}(x)$. Первые полиномы Шарлье имеют вид

$$\begin{aligned}
&S_0(n) = 1,\\
&S_1(n) = n,\\
&S_2(n) = n^2 - n - \lambda,\\
&S_3(n) = n^3 - 3n^2 + (2-3\lambda)n + 2\lambda,\\
&S_4(n) = n^4 - 6n^3 + (11-6\lambda)n^2 + (14\lambda-6)n + 3\lambda^2 - 6\lambda, \quad \ldots
\end{aligned}$$

Они ортогональны в пространстве квадратично суммируемых последовательностей с весом $\rho(n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{n+\lambda}/\Gamma(n+\lambda+1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho(n-\lambda) S_i(n-\lambda) S_j(n-\lambda) = \lambda^i i! \delta_{ij}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots, \tag{30}$$

т.е. относительно центрированного пуассоновского распределения с параметром λ, δ_{ij} — символ Кронекера, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Важные для дальнейшего изложения свойства полиномов Шарлье состоят в следующем. Пусть η — случайная величина, имеющая центрированное пуассоновское распределение параметром λ (с нулевым средним и дисперсией λ). Тогда из (30) получаем

$$\begin{gathered}
\mathrm{E}S_i(\eta) = \delta_{i0}, \quad \mathrm{E}S_i^2(\eta) = \|S_i(\eta)\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \lambda^i i!, \quad i = 0,1,2,\ldots,\\
\mathrm{E}S_i(\eta)S_j(\eta) = \big(S_i(\eta), S_j(\eta)\big)_{\mathcal{L}_2} = \lambda^i i! \delta_{ij}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots
\end{gathered} \tag{31}$$

Введем коммутативную бинарную операцию $*$ для двух случайных величин $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{L}_2$ вида

$$\xi_1 = \prod_{m=1}^{M} S_{i_m}(\eta_m), \quad \xi_2 = \prod_{m=1}^{M} S_{j_m}(\eta_m)$$

следующим образом (это также произведение Вика [19]):

$$\xi_1 * \xi_2 = \prod_{m=1}^{M} S_{i_m+j_m}(\eta_m),$$

где $M \geqslant 1$, $\eta_1, \ldots, \eta_M$ — независимые случайные величины, имеющие центрированное пуассоновское распределение с параметром λ; $i_m, j_m \in \{0,1,2,\ldots\}$.

Например,

$$
\begin{aligned}
&\eta = S_1(\eta),\\
&\eta * \eta = S_2(\eta) = \eta^2 - \eta - \lambda,\\
&\eta * \eta * \eta = S_3(\eta) = \eta^3 - 3\eta^2 + (2 - 3\lambda)\eta + 2\lambda,\\
&\eta * \eta * \eta * \eta = S_4(\eta) = \eta^4 - 6\eta^3 + (11 - 6\lambda)\eta^2 +\\
&\quad + (14\lambda - 6)\eta + 3\lambda^2 - 6\lambda, \quad \ldots
\end{aligned} \tag{32}
$$

Теорема 2. *Пусть* $K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$. *Тогда*

1) *кратный стохастический интеграл по центрированным пуассоновским процессам от функции* $K(t_1, \ldots, t_k)$ *представляется в виде*

$$
\mathcal{J}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K(t_1, \ldots, t_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} C_{i_1 \ldots i_k} \eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}, \tag{33}
$$

где $C_{i_1 \ldots i_k}$ *— коэффициенты разложения* (1) *функции* $K(t_1, \ldots, t_k)$ *относительно базисной системы* $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ *пространства* $L_2(\mathbb{H})$, $\eta_{i_l}^{(j_l)}$ *— независимые случайные величины, имеющие центрированное пуассоновское распределение с параметром* λ, $i_l = 0, 1, 2, \ldots$ *и* $l = 1, 2, \ldots, k$;

2) *норма кратного стохастического интеграла Ито удовлетворяет соотношению*

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{J}_h^{(j_1 \ldots j_k)} K(t_1, \ldots, t_k)\|_{\mathcal{L}_2} &= \sqrt{\lambda^k} M_{J^*} \| \langle K(t_1, \ldots, t_k) \rangle_{J^*} \|_{L_2(\mathbb{H}^k)} \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{\lambda^k} M_{J^*} \|K(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)},
\end{aligned} \tag{34}
$$

где величина M_{J^*} *определяется формулой* (3).

Доказательство. Пользуясь независимостью центрированных пуассоновских процессов $P_j^0(t)$, $j \in J$, и результатом из [2], можем записать

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_h^{(j_1 \ldots j_k)} q(i_1, t_1) \ldots q(i_k, t_k) &= \int_{\mathbb{H}^k} q(i_1, \tau_1) \ldots q(i_k, \tau_k) dP_{j_1}^0(\tau_1) \ldots dP_{j_k}^0(\tau_k) = \\
&= \prod_{j \in J} \int_{\mathbb{H}^{\#(j, J^*)}} \prod_{n \in N_j} q(i_n, \tau_n) dP_j^0(\tau_n) = \\
&= \prod_{j \in J} \prod_{i \in I_j} S_{\#(i, I_j^*)}(\eta_i^{(j)}) = \eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)},
\end{aligned} \tag{35}
$$

где $\#(i, I_j^*)$ — кратность элемента i в мультимножестве I_j^*.

Случайная величина $\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)} \in \mathcal{L}_2$ образована произведениями независимых и центрированных случайных величин вида (32), поэтому $\mathrm{E}\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)} = 0$. Таким образом, множество

$$\mathfrak{Y}^{J^*} = \mathfrak{Y}^{(j_1\ldots j_k)} = \{\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\}_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} \tag{36}$$

состоит из попарно ортогональных случайных величин.

Согласно (31) получаем

$$\begin{aligned}\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= \Big\|\prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j} S_{\#(i,I_j^*)}(\eta_i^{(j)})\Big\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \\ &= \prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j}\|S_{\#(i,I_j^*)}(\eta_i^{(j)})\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \lambda^k \prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j}\#(i,I_j^*)!\end{aligned} \tag{37}$$

и множество

$$\hat{\mathfrak{Y}}^{J^*} = \hat{\mathfrak{Y}}^{(j_1\ldots j_k)} = \left\{\frac{\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}}\right\}_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} \tag{38}$$

состоит из ортонормированных случайных величин, где норма определяется соотношением (37).

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 1, но с учетом множителя λ^k. В частности, при $i_1,\ldots,i_k < L$ имеем

$$\begin{aligned}&\big(\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}, \mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\big)_{\mathcal{L}_2} = \\ &\quad = \mathrm{E}(\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)})\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k) = \\ &\quad = \frac{1}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2}\sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k}\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \\ &\quad = \frac{\lambda^k}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2}\sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k}\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \lambda^k \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}}, \mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)} K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\right)_{\mathcal{L}_2} = \\ &\qquad = \frac{\lambda^k}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}}\sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k},\end{aligned}$$

где

$$K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1} C_{i_1\ldots i_k} q(i_1,t_1)\ldots q(i_k,t_k)$$

и

$$\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{L-1}C_{i_1\ldots i_k}\eta_{i_1}^{(j_1)}*\ldots*\eta_{i_k}^{(j_k)}, \tag{39}$$

а $\zeta_{i_l}^{(j_l)}$ — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $i_l=0,1,2,\ldots$ и $l=1,2,\ldots,k$.

Тогда разложение стохастического интеграла $\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)$ по ортонормированным случайным величинам (38) имеет вид

$$\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)=$$
$$=\sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}}^{(L)}\ldots\sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}}^{(L)}\left(\frac{\lambda^k}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)}*\ldots*\eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}}\sum_{(\mathrm{I}/\sim)}C_{i_1\ldots i_k}\right)\frac{\eta_{i_1}^{(j_1)}*\ldots*\eta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)}*\ldots*\eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}},$$

поэтому

$$\|\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\|_{\mathcal{L}_2}=$$
$$=\left\{\sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}}^{(L)}\ldots\sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}}^{(L)}\frac{\lambda^{2k}}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)}*\ldots*\eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2}\left(\sum_{(\mathrm{I}/\sim)}C_{i_1\ldots i_k}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\left\{\sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}}^{(L)}\ldots\sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}}^{(L)}\frac{\lambda^{k}}{\|\zeta_{i_1}^{(j_1)}*\ldots*\zeta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2}\left(\sum_{(\mathrm{I}/\sim)}C_{i_1\ldots i_k}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\sqrt{\lambda^k}M_{J^*}\|K_{J^*}^{(L)}(t_1,\ldots,t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}. \tag{40}$$

Далее, при переходе к пределу при $L\to\infty$ в соотношении (40) получаем, что линейный оператор $\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}$ является ограниченным с нормой $\|\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}\|=\sqrt{\lambda^k}M_{J^*}$, а из (39) следует справедливость разложения (33) и соотношения (34). ◀

З а м е ч а н и я 2.

1. Множества случайных величин (36) и (38) образуют соответственно ортогональный и ортонормированный базисы линейного подпространства $\mathcal{L}_2^{(j_1\ldots j_k)}=\{\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}K(t_1,\ldots,t_k)\colon K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2(\mathbb{H}^k)\}\subset\mathcal{L}_2$, а линейный оператор $\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)}$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между линейными подпространствами $L_2^{(j_1\ldots j_k)}(\mathbb{H}^k)$ и $\mathcal{L}_2^{(j_1\ldots j_k)}$.

2. Максимум нормы элементов ортогонального базиса (36) достигается при $|I_j|=1\ \forall j\in J$, т.е. на элементах вида

$$\eta_{i_1}^{(j_1)}*\ldots*\eta_{i_k}^{(j_k)}=\prod_{j\in J}S_{\#(j,J^*)}(\eta^{(j)}),$$

где $\eta^{(j)}$ — любая случайная величина из множества $\{\eta_i^{(j)}\}_{i=0}^{\infty}$. Используя (31), находим

$$\max_{i_1,\ldots,i_k} \|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \left\| \prod_{j\in J} S_{\#(j,J^*)}(\eta^{(j)}) \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 =$$
$$= \prod_{j\in J} \|S_{\#(j,J^*)}(\eta^{(j)})\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \lambda^k \prod_{j\in J} (\#(j,J^*))! = \lambda^k M_{J^*}^2.$$

3. Разложение кратного стохастического интеграла Ито (27) по ортонормированному базису (38) имеет вид

$$\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)} K(t_1,\ldots,t_k) =$$
$$= \sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}} \cdots \sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}} \left(\frac{\lambda^k}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k} \right) \frac{\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} =$$
$$= \sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}} \cdots \sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}} \frac{\lambda^k M_{J^*}^2 \tilde{C}_{i_1\ldots i_k}}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}} \frac{\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}}, \qquad (41)$$

причем для каждой суммы по индексам из класса эквивалентности I_j суммирование осуществляется по формуле (25), $j \in J$.

Тогда норма интеграла $\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)} K(t_1,\ldots,t_k)$ выражается формулой

$$\|\mathcal{J}_h^{(j_1\ldots j_k)} K(t_1,\ldots,t_k)\|_{\mathcal{L}_2} =$$
$$= \left\{ \sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}} \cdots \sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}} \frac{\lambda^{2k}}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \left(\sum_{(\mathrm{I}/\sim)} C_{i_1\ldots i_k} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left\{ \sum_{\mathrm{I}_{j_{(1)}}} \cdots \sum_{\mathrm{I}_{j_{(|J|)}}} \frac{(\lambda^k M_{J^*}^2 \tilde{C}_{i_1\ldots i_k})^2}{\|\eta_{i_1}^{(j_1)} * \ldots * \eta_{i_k}^{(j_k)}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (42)$$

Отдельного примера в этом разделе не приводится, однако допустимо сослаться на пример 1. Если интенсивность λ пуассоновских процессов равна единице, то полученные в упомянутом примере результаты можно перенести на стохастические интегралы Ито $\mathcal{J}_h^{(123)} K(t_1,t_2,t_3)$, $\mathcal{J}_h^{(212)} K(t_1,t_2,t_3)$ и $\mathcal{J}_h^{(111)} K(t_1,t_2,t_3)$ кратности $k=3$, заменив случайные величины $\zeta_{i_1}^{(1)}$, $\zeta_{i_2}^{(2)}$ и $\zeta_{i_3}^{(3)}$ (независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение) на случайные величины $\eta_{i_1}^{(1)}$, $\eta_{i_2}^{(2)}$ и $\eta_{i_3}^{(3)}$ (независимые случайные величины, имеющие центрированное пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 1$).

5. Повторные стохастические интегралы Ито

Все приведенные выше формулы справедливы для повторных стохастических интегралов Ито, так как для них выполнено соотношение

$$\int_0^h \ldots \int_0^{\tau_3} \int_0^{\tau_2} K(\tau_1, \ldots, \tau_k) dW_{j_1}(\tau_1) \ldots dW_{j_k}(\tau_k) =$$
$$= \int_{\mathbb{H}^k} \hat{K}(\tau_1, \ldots, \tau_k) dW_{j_1}(\tau_1) \ldots dW_{j_k}(\tau_k),$$

где

$$\hat{K}(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} K(t_1, \ldots, t_k), & t_1 < \ldots < t_k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Применяя симметризацию (2) к функции $\hat{K}(t_1, \ldots, t_k) \in L_2(\mathbb{H}^k)$, имеем ортогональное разложение функции $\hat{K}_{J^*}(t_1, \ldots, t_k)$:

$$\hat{K}_{J^*}(t_1, \ldots, t_k) = \frac{1}{M_{J^*}^2} \sum_{(\mathrm{T}/\sim)} \hat{K}(t_1, \ldots, t_k),$$

поскольку функции в правой части формулы имеют непересекающиеся носители и их попарные скалярные произведения в пространстве $L_2(\mathbb{H}^k)$ равны нулю. Следовательно,

$$\|\hat{K}_{J^*}(t_1, \ldots, t_k)\|^2_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \frac{1}{M_{J^*}^4} \sum_{(\mathrm{T}/\sim)} \|\hat{K}(t_1, \ldots, t_k)\|^2_{L_2(\mathbb{H}^k)},$$

а так как нормы всех слагаемых одинаковы и их количество $M_{J^*}^2$, получаем равенство $\|\hat{K}(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} = M_{J^*} \|\hat{K}_{J^*}(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)}$.

Это означает, что для повторных стохастических интегралов Ито выполняется свойство изометрии:

$$\|\mathcal{I}_h^{(j_1 \ldots j_k)} \hat{K}(t_1, \ldots, t_k)\|_{\mathcal{L}_2} = \|\hat{K}(t_1, \ldots, t_k)\|_{L_2(\mathbb{H}^k)} = \left\{ \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} \hat{C}^2_{i_1 \ldots i_k} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\hat{C}_{i_1 \ldots i_k} = \big(q(i_1, t_1) \ldots q(i_k, t_k), \hat{K}(t_1, \ldots, t_k) \big)_{L_2(\mathbb{H}^k)} =$$
$$= \int_{\mathbb{H}^k} q(i_1, \tau_1) \ldots q(i_k, \tau_k) \hat{K}(\tau_1, \ldots, \tau_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k =$$
$$= \int_0^h \ldots \int_0^{\tau_3} \int_0^{\tau_2} q(i_1, \tau_1) \ldots q(i_k, \tau_k) K(\tau_1, \ldots, \tau_k) d\tau_1 \ldots d\tau_k.$$

Повторные стохастические интегралы Ито могут рассматриваться как соответствующие кратные стохастические интегралы при переходе от функции $\hat{K}(t_1, \ldots, t_k)$ к симметризованной функции $\hat{K}_{J^*}(t_1, \ldots, t_k)$.

Автор благодарит д.ф.-м.н., профессора Д.Ф. Кузнецова за обсуждение представленных в статье результатов и высказанные рекомендации, позволившие улучшить изложение.

Список литературы

[1] *Itô, K.* Multiple Wiener integral // Journal of the Mathematical Society of Japan. — 1951. Vol. 3. No. 1. — P. 157–169.

[2] *Hida, T.*, *Ikeda, N.* Analysis on Hilbert space with reproducing kernel arising from multiple Wiener integral // Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. — 1967. Vol. II, part 1. — P. 117–143.

[3] *Hu, Y.-Z.*, *Meyer, P.-A.* Sur les intégrales multiples de Stratonovitch // Séminaire de probabilités. — 1988. T. 22. — P. 72–81.

[4] *Budhiraja, A.S.* Multiple stochastic integrals and Hilbert space valued traces with applications to asymptotic statistics and non-linear filtering / Ph.D. Diss., The University of North Carolina, Chapel Hill, 1994.

[5] *Delgado, R.* Multiple Ogawa, Stratonovich and Skorohod anticipating integrals // Stochastic Analysis and Applications. — 1998. Vol. 16. No. 5. — P. 859–872.

[6] *Farré, M.*, *Jolis, M.*, *Utzet, F.* Multiple Stratonovich integral and Hu − Meyer formula for Lévy processes // The Annals of Probability. — 2010. Vol. 38. No. 6. — P. 2136–2169.

[7] *Milstein, G.N.* Numerical Integration of Stochastic Differential Equations. — Kluwer Academic Publ., 1995.

[8] *Kloeden, P.E.*, *Platen, E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer-Verlag, 1995.

[9] *Аверина, Т.А.* Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.

[10] *Кузнецов, Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядками сильной сходимости 1.5 и 2.0 // Автоматика и телемеханика. — 2018. № 7. — С. 80–98.

[11] *Кузнецов, Д.Ф.* К численному моделированию многомерных динамических систем при случайных возмущениях с порядком сильной сходимости 2.5 // Автоматика и телемеханика. — 2019. № 5. — С. 99–117.

[12] *Kuznetsov, D.F.* Strong approximation of iterated Itô and Stratonovich stochastic integrals based on generalized multiple Fourier series. Application to numerical solution of Itô SDEs and semilinear SPDEs // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2020. № 4. — С. A.1–A.606.

[13] *Рыбаков, К.А.* Применение спектральной формы математического описания для представления повторных стохастических интегралов // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2019. № 4. — С. 1–31.

[14] *Rybakov, K.A.* Using spectral form of mathematical description to represent Stratonovich iterated stochastic integrals / Innovation, Systems and Technologies, vol. 217. — Springer, 2021. — P. 287–304.

[15] *Rybakov, K.A.* Application of Walsh series to represent Stratonovich iterated stochastic integrals // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2020. Vol. 927. Id 012080.

[16] *Балакришнан, А.В.* Прикладной функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

[17] *Гихман, И.И.*, *Скороход, А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.

[18] *Бейтмен, Г.*, *Эрдейи, А.* Высшие трансцендентные функции. Ч. II. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1966.

[19] *Добрушин, Р.Л.*, *Минлос, Р.А.* Полиномы от линейных случайных функций // Успехи математических наук. — 1977. Т. 32. № 2 (194). — С. 67–122.

[20] *Пугачев, В.С.*, *Синицын, И.Н.* Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2004.

Orthogonal expansion of multiple Itô stochastic integrals

K. A. Rybakov

Moscow Aviation Institute
(National Research University)

e-mail: rkoffice@mail.ru

Abstract. Based on the properties of Hermite polynomials, which are orthogonal with respect to the probability density of the normal distribution, and Charlier polynomials, which are orthogonal with respect to the Poisson distribution, a representation of multiple Itô stochastic integrals by Wiener and Poisson processes in the form of orthogonal series is proposed.

Key words: multiple Itô stochastic integral, iterated Itô stochastic integral, Wiener process, Poisson process, orthogonal expansion.