ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N.4, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Задача управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции прогиба в заданные промежуточные моменты времени

В.Р. Барсегян[1,2]

[1]Институт механики НАН Армении
[2]Ереванский государственный университет

barseghyan@sci.am

Аннотация. Рассмотрена задача управления для уравнения колебания струны с заданными начальным, конечным условиями и неразделенными значениями прогиба в промежуточных моментах времени. Задача решена с использованием метода разделения переменных и теории управления конечномерными системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного подхода построено управляющее воздействие для задачи управления колебаниями струны с заданными неразделенными условиями на значения функций прогиба струны в двух промежуточных моментах времени.

Ключевые слова: управление колебаниями, колебание струны, промежуточные моменты, неразделенные многоточечные условия, разделение переменных.

1. Введение

Управляемые колебательные системы широко распространены в различных теоретических и прикладных областях науки. Необходимость управления и оптимального управления колебательными процессами как распределенными, так и граничными воздействиями является актуальной задачей [1-10]. На практике часто возникают задачи граничного управления и оптимального управления, в частности, когда нужно сгенерировать с заранее заданными (желаемыми) промежуточными параметрами (формой прогиба, скоростью точек струны и т.д.) колебания. Многие процессы управления из различных областей науки и техники приводят к необходимости исследования многоточечных краевых задач управления. Моделирование и управление динамических систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями с частными производными, с промежуточными условиями являются активно развиваемым направлением в современной теории управления. Внимание исследователей привлекли многоточечные краевые задачи управления, в которых наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями заданы также неразделенные (нелокальные) многоточечные промежуточные условия [5-18]. Неразделенные многоточечные краевые задачи с одной стороны возникают как математические модели реальных процессов, а с другой стороны – для многих уравнений невозможна корректная постановка локальных краевых задач. Неразделенность многоточечных условий также, в частности, обусловлена невозможностью на практике проводить замеры измеряемых параметров состояния объекта мгновенно или в его отдельно взятых точках. Подобные задачи имеют важные прикладное и теоретическое значения, естественным образом возникает необходимость их исследования в различных постановках.

Задачи управления колебательных процессов, как внешними, так и граничными управляющими воздействиями при различных типах граничных условий, рассмотрены в работах [3-10] и предложены различные методы решения задач управления. Работы [3, 4] (и другие работы этих авторов) посвящены проблеме граничного управления (оптимального управления) волновыми процессами в классе обобщенных решений. В работах [8-10] рассмотрены задачи об управлении колебаниями струны с заданными промежуточными (локальными) состояниями с помощью внешних сил, действующих на системы. В работах [14, 15] рассматривается граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени колебания струны и строится решение задачи. В работе [16] рассматривается многоточечная краевая задача в полислое и для нее доказывается теорема о существовании корректной краевой задачи. В работе [17] построены алгоритмы нахождения приближенного решения и установлены условия их сходимости. В [18] на основе метода параметризации исследуется линейная многоточечная краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений и предложен алгоритм нахождения решения.

В настоящей работе рассматривается задача управления колебаниями струны с заданными начальными, конечными условиями и неразделенными значениями прогиба в промежуточные моменты времени. Методом разделения переменных задача сводится к задаче управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Для каждой гармоники построено управляющее воздействие, используя методы теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного конструктивного подхода построено управляющее воздействие для управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями функций прогиба точек струны в двух промежуточных моментах времени.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную, упругую натянутую струну длиной l, края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью $u(x,t)$, которая является управляющим воздействием.

Пусть состояние распределенной колебательной системы (малые поперечные колебания струны), т.е. отклонения от состояния равновесия, описываются функцией $Q\,(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 < t < T$, которая подчиняется при $0 < x < l$ и $0 < t < T$ волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

и однородными граничными условиями

$$Q(0,t) = 0, Q(l,t) = 0, 0 \le t \le T, \tag{3}$$

В уравнении (1) $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, где T_0 - натяжение струны, ρ - плотность однородной струны, а функция $u(x,t)$ - управляющее воздействие. Предполагается, что функция $Q(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, где множество $\Omega_T = \{(x,t)\colon\ x \in [0,l],\ t \in [0,T]\}$.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 <\ldots< t_m < t_{m+1} = T$ на значения функции прогиба струны заданы неразделенные (нелокальные) условия в виде

$$\sum_{k=1}^{m} f_k Q(x,t_k) = \alpha(x), \tag{4}$$

где f_k- заданные величины $(k = 1,\ldots,m)$, $\alpha(x)$ - некоторая известная функция.

Задача управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями функции прогиба в промежуточные моменты времени $t_k (k = 1,\ldots,m)$ можно сформулировать следующим образом: среди возможных управлений $u(x,t)$, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$ требуется найти управление, переводящее колебания струны (1) с граничными условиями (3) из заданного начального состояния (2), обеспечивая удовлетворение неразделенных многоточечных промежуточных условий (4) в заданное конечное состояние

$$Q(x,T) = \varphi_T(x) = \varphi_{m+1}(x), \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x) = \psi_{m+1}(x), 0 \le x \le l. \tag{5}$$

Предполагается, что функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_T(x)$ и $\alpha(x)$ принадлежат пространству $C^2[0,l]$, а функции $\psi_0(x)$ и $\psi_T(x)$ принадлежат пространству $C^1[0,l]$. Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования, которые приведены ниже.

Будем предполагать, что система (1) при ограничениях (2)-(5) на промежутке времени $[0,T]$ является вполне управляемой [5, 16]. Это означает, что на промежутке времени $[0,T]$ можно выбрать управляющее воздействие $u(x,t)$, под воздействием которого функция прогиба струны $Q\ (x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и заданным условиям (2)-(5).

3. Решение задачи

Для построения решения поставленной задачи решение уравнения (1) с граничными условиями (3) ищем в виде

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{6}$$

Представим функции $u(x,t)$ и $\alpha(x)$ в виде рядов Фурье

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(t) \sin\frac{\pi n}{l} x,\ \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{7}$$

Подставляя разложения (6), (7) в соотношениях (1)-(5) и в силу ортогональности системы собственных функции следует, что коэффициенты Фурье $Q_n(t)$ удовлетворяют счетному числу систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{Q}_n(t) - \lambda_n^2 Q_n(t) = u_n(t), \lambda_n^2 = \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2, n = 1,\ 2, \ldots \tag{8}$$

и следующим начальным, неразделенным многоточечным промежуточным и конечным условиям:

$$Q_n(0) = \varphi_n^{(0)}, \dot{Q}_n(0) = \psi_n^{(0)}, \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{m} f_k Q_n(t_k) = \alpha_n, \tag{10}$$

$$Q_n(T) = \varphi_n^{(T)} = \varphi_n^{(m+1)}, \dot{Q}_n(T) = \psi_n^{(T)} = \psi_n^{(m+1)}, \tag{11}$$

где через $\varphi_n^{(0)}$, $\psi_n^{(0)}$, $\varphi_n^{(m+1)}$, $\psi_n^{(m+1)}$ обозначены коэффициенты Фурье, соответственно функциям$\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_{m+1}(x)$, $\psi_{m+1}(x)$.

Общее решение уравнения (8) с начальными условиями (9) имеет вид [7]

$$Q_n(t) = \varphi_n^{(0)}\cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_n^{(0)}\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t u_n(\tau)\sin\lambda_n(t-\tau)d\tau. \tag{12}$$

Теперь, учитывая промежуточные неразделенные (10) и конечные (11) условия, используя подходы, приведенные в работах [5, 6], из уравнения (12), получим, что функции $u_n(\tau)$ для каждого n должны удовлетворять следующей системе равенств:

$$\begin{gathered}
\int_0^T u_n(\tau)\sin\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{1n}(T), \\
\int_0^T u_n(\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau = C_{2n}(T), \\
\sum_{k=1}^{m} f_k \int_0^{t_k} u_n(\tau)\sin\lambda_n(t_k-\tau)d\tau = C_{1n}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m),
\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered}
C_{1n}(T) = \lambda_n\varphi_n^{(m+1)} - \lambda_n\varphi_n^{(0)}\cos\lambda_n T - \psi_n^{(0)}\sin\lambda_n T, \\
C_{2n}(T) = \psi_n^{(m+1)} + \lambda_n\varphi_n^{(0)}\sin\lambda_n T - \psi_n^{(0)}\cos\lambda_n T, \\
C_{1n}^{(m)}(t_1,\ldots,t_m) = \lambda_n\left[\alpha_n - \sum_{k=1}^{m} f_k\left(\varphi_n^{(0)}\cos\lambda_n t_k + \frac{1}{\lambda_n}\psi_n^{(0)}\sin\lambda_n t_k\right)\right].
\end{gathered} \tag{14}$$

Введем следующие функции

$$\begin{gathered}
h_{1n}(\tau) = \sin\lambda_n(T-\tau), h_{2n}(\tau) = \cos\lambda_n(T-\tau), 0 \le \tau \le T, \\
h_{1n}^{(k)}(\tau) = \begin{cases} \sin\lambda_n(t_k-\tau) & \text{при} \quad 0 \le \tau \le t_k, \\ 0 & \text{при} \quad t_k < \tau \le t_{m+1} = T, \end{cases}
\end{gathered} \tag{15}$$

$$h_{1n}^{(m)}(\tau) = \sum_{k=1}^{m} f_k h_{1n}^{(k)}(\tau),\ 0 \le \tau \le T.$$

Тогда интегральные соотношения (13) при помощи функции (15) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} &\int_0^T u_n(\tau) h_{1n}(\tau) d\tau = C_{1n}(T), \\ &\int_0^T u_n(\tau) h_{2n}(\tau) d\tau = C_{2n}(T), \\ &\int_0^T u_n(\tau) h_{1n}^{(m)}(\tau) d\tau = C_{1n}^{(m)}(t_1, \ldots, t_m), n = 1,\ 2, \ldots \end{aligned} \tag{16}$$

Таким образом, искомые функции $u_n(\tau)$, $\tau \in [0, T]$ для каждого n должны удовлетворять интегральным соотношениям (16).

Введя обозначения

$$H_n(\tau) = \begin{pmatrix} h_{1n}(\tau) \\ h_{2n}(\tau) \\ h_{1n}^{(m)}(\tau) \end{pmatrix}, \eta_n = \begin{pmatrix} C_{1n}(T) \\ C_{2n}(T) \\ C_{1n}^{(m)}(t_1, \ldots, t_m) \end{pmatrix} \tag{17}$$

интегральные соотношения (16)можно записать следующим образом

$$\int_0^T H_n(t)\, u_n(t) dt = \eta_n. \tag{18}$$

Из соотношения (18) (или (16)) следует, что для каждой гармоники движение, описываемое уравнением (8) с условиями (9)-(11) вполне управляемо тогда и только тогда, когда для любого заданного вектора η_n(17) можно найти управление $u_n(t),\ t \in [0, T]$, удовлетворяющее условию (18) (или (16)).

Следуя [5, 17], для каждого $n = 1,\ 2, \ldots$ функцию $u_n(t),\ t \in [0, T]$, удовлетворяющую интегральному соотношению (18), ищем в виде

$$u_n(t) = (H_n(t))^T C_n + \nu_n(t), \tag{19}$$

где C_n- постоянный вектор, подлежащий определению, $\nu_n(t)$ есть некоторая вектор-функция такая, что

$$\int_0^T H_n(t)\, \nu_n(t) dt = 0. \tag{20}$$

Здесь и далее буква «T» в верхнем индексе означает операцию транспонирования. Подставляя (19) в (18) и учитывая условия (20) получим

$$S_n C_n = \eta_n, \tag{21}$$

где

$$S_n=\int_0^T H_n(t)(H_n(t))^T dt=\begin{pmatrix} s_{11}^{(n)} & s_{12}^{(n)} & s_{13}^{(n)} \\ s_{21}^{(n)} & s_{22}^{(n)} & s_{23}^{(n)} \\ s_{31}^{(n)} & s_{32}^{(n)} & s_{33}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Здесь $H_n(t)\left(H_n(t)\right)^T$ есть внешнее произведение векторов. Система (21) является системой трех алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_n^{(j)}, j=1,2,3$. Уравнение (21) имеет решение, если $\det S_n\neq 0$, либо ранг матрицы S_nсовпадает с рангом расширенной матрицы $\{S_n,\ \eta_n\}$.

Пусть $\det S_n\neq 0$, тогда решение уравнения (21) имеет вид

$$C_n=S_n^{-1}\eta_n. \tag{23}$$

Следовательно, из (19) и (23) имеем

$$u_n(t)=(H_n(t))^T S_n^{-1}\eta_n+\nu_n(t). \tag{24}$$

Элементы матрицы S_n, согласно (22) и обозначениям (15), (17) имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
&s_{11}^{(n)}=\int_0^T (h_{1n}(\tau))^2 d\tau=\int_0^T(\sin\lambda_n(T-\tau))^2 d\tau,\\
&s_{12}^{(n)}=s_{21}^{(n)}=\int_0^T h_{1n}(\tau)h_{2n}(\tau)d\tau=\int_0^T\sin\lambda_n(T-\tau)\cos\lambda_n(T-\tau)d\tau,\\
&s_{13}^{(n)}=s_{31}^{(n)}=\int_0^T h_{1n}(\tau)h_{1n}^{(m)}(\tau)d\tau=\int_0^T h_{1n}(\tau)\left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau)\right)d\tau,\\
&s_{23}^{(n)}=s_{32}^{(n)}=\int_0^T h_{2n}(\tau)h_{1n}^{(m)}(\tau)d\tau=\int_0^T h_{2n}(\tau)\left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau)\right)d\tau,\\
&s_{22}^{(n)}=\int_0^T (h_{2n}(\tau))^2 d\tau=\int_0^T(\cos\lambda_n(T-\tau))^2 d\tau,\\
&s_{33}^{(n)}=\int_0^T\left(h_{1n}^{(m)}(\tau)\right)^2 d\tau=\int_0^T\left(\sum_{k=1}^m f_k h_{1n}^{(k)}(\tau)\right)^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{25}$$

Отметим, что согласно обозначениям (15) будем иметь

$$h_{1n}^{(m)}(t)=\begin{cases} \sum_{k=1}^m f_k\sin\lambda_n(t_k-t), & 0\le t\le t_1,\\ \sum_{k=2}^m f_k\sin\lambda_n(t_k-t), & t_1<t\le t_2,\\ \quad \cdots & \\ \sum_{k=m-1}^m f_k\sin\lambda_n(t_k-t), & t_{m-2}<t\le t_{m-1},\\ f_m\sin\lambda_n(t_m-t), & t_{m-1}<t\le t_m. \end{cases}$$

Следовательно, учитывая обозначения (15), (17), (22), управляющее воздействие $u_n(t),\ t \in [0,T]$, согласно (24), представляется в следующем виде:

$$u_n(t) =$$

$$= \begin{cases} \left(\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad \sum_{k=1}^{m} f_k \sin\lambda_n(t_k-t)\right) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t), \ 0 \le t \le t_1, \\ \left(\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad \sum_{k=2}^{m} f_k \sin\lambda_n(t_k-t)\right) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t), \ t_1 < t \le t_2, \\ \dots \\ (\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad f_m \sin\lambda_n(t_m-t)) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t), \ t_{m-1} < t \le t_m, \\ (\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad 0) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t), \ t_m < t \le t_{m+1} = T. \end{cases}$$

Подставляя (26) в (12) $Q_n(t)$ на промежутке времени $t \in [0,T]$ из формулы (6) и (7) получим функцию $Q\ (x,t)$ прогиба и $u(x,t)$ управления. Таким образом, будем иметь

$$u(x,t) = \tag{26}$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad \sum_{k=1}^{m} f_k \sin\lambda_n(t_k-t)\right) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t) \right] \sin\frac{\pi n}{l} x, \\ \qquad 0 \le t \le t_1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad \sum_{k=2}^{m} f_k \sin\lambda_n(t_k-t)\right) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t) \right] \sin\frac{\pi n}{l} x, \\ \qquad t_1 < t \le t_2, \\ \dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} [(\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad f_m \sin\lambda_n(t_m-t)) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t)] \sin\frac{\pi n}{l} x, \\ \qquad t_{m-1} < t \le t_m, \\ \sum_{n=1}^{\infty} [(\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad 0) S_n^{-1}\eta_n + \nu_n(t)] \sin\frac{\pi n}{l} x, \\ \qquad t_m < t \le t_{m+1} = T. \end{cases}$$

Надо отметить, что значения управляющего воздействия $u(x,t)$ на конце каждого предыдущего промежутка $\left[t_{j-1},\ t_j\right]$ совпадает со значениями в начале последующего промежутка $\left(t_j,\ t_{j+1}\right]$, $j = 1,\dots,m$. Таким образом, построенное управляющее воздействие $u(x,t)$, решающее поставленную задачу, является непрерывной функцией.

Доказательство того, что построенные функции являются решением поставленной задачи сводится к проверке того, что ряд (6) и все ряды, которые получаются из него почленным дифференцированием дважды по всем аргументам, сходятся в Ω_T равномерно. Для равномерной сходимости этих рядов достаточно получить оценку их коэффициентов. В ходе вычисления оценки общих членов указанных рядов (и полученного ряда для $u(x,t)$) получаются числовые ряды с положительными членами, которые мажорируют рассматриваемые ряды. Для абсолютной сходимости этих рядов достаточно потребовать, чтобы функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяли некоторым требованиям гладкости, которые уже предположены.

4. Пример

Предположим, что $m = 2$ (т.е. $0 < t_1 < t_2 < t_3 = T$), тогда при $\nu_n(t) = 0$ из формулы (26) будем иметь

$$u_n(t) = \\ = \begin{cases} (\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad f_1\sin\lambda_n(t_1-t) + f_2\sin\lambda_n(t_2-t))S_n^{-1}\eta_n, & 0 \le t \le t_1, \\ (\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad f_2\sin\lambda_n(t_2-t))S_n^{-1}\eta_n, & t_1 < t \le t_2, \\ (\sin\lambda_n(T-t) \quad \cos\lambda_n(T-t) \quad 0)S_n^{-1}\eta_n, t_2 < t \le t_3 = T. \end{cases}$$

Из формулы (25) получим

$$s_{11}^{(n)} = \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n T, \qquad s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = \frac{\sin^2\lambda_n T}{2\lambda_n}, \qquad s_{22}^{(n)} = \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n T,$$

$$s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = f_1\int_0^{t_1}\sin\lambda_n(T-\tau)\sin\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + f_2\int_0^{t_2}\sin\lambda_n(T-\tau)\sin\lambda_n(t_2-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}[f_1t_1\cos\lambda_n(T-t_1) + f_2t_2\cos\lambda_n(T-t_2)] - \frac{\cos\lambda_n T}{2\lambda_n}[f_1\sin\lambda_n t_1 + f_2\sin\lambda_n t_2],$$

$$s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = f_1\int_0^{t_1}\cos\lambda_n(T-\tau)\sin\lambda_n(t_1-\tau)d\tau + f_2\int_0^{t_2}\cos\lambda_n(T-\tau)\sin\lambda_n(t_2-\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\lambda_n}\{2f_1\sin\lambda_n T\sin\lambda_n t_1 - 2\lambda_n[f_1t_1\sin\lambda_n(T-t_1) + f_2t_2\sin\lambda_n(T-t_2)] + 2f_2\sin\lambda_n T\sin\lambda_n t_2\},$$

$$s_{33}^{(n)} = f_1^2\int_0^{t_1}\left(\sin\lambda_n(t_1-\tau)\right)^2d\tau + 2f_1f_2\int_0^{t_1}\sin\lambda_n(t_1-\tau)\sin\lambda_n(t_2-\tau)d\tau +$$

$$+ f_2^2\int_0^{t_2}\left(\sin\lambda_n(t_2-\tau)\right)^2d\tau = \frac{1}{4\lambda_n}[2\lambda_n(f_1^2t_1 + f_2^2t_2) + 4f_1f_2t_1\lambda_n\cos\lambda_n(t_1-t_2) -$$

$$-f_1^2\sin 2\lambda_n t_1 - 2f_2\cos\lambda_n t_2(2f_1\sin\lambda_n t_1 + f_2\sin\lambda_n t_2)].$$

Теперь предполагая, что $t_1 = \frac{l}{a}, t_2 = 2\frac{l}{a}, T = 4\frac{l}{a}$, получим, что $t_1\lambda_n = \pi n$, $t_2\lambda_n = 2\pi n$, $T\lambda_n = 4\pi n$, следовательно, из вышеприведенных выражений получим

$$s_{11}^{(n)} = \frac{2l}{a}, \qquad s_{12}^{(n)} = s_{21}^{(n)} = 0, \qquad s_{22}^{(n)} = \frac{2l}{a}, s_{13}^{(n)} = s_{31}^{(n)} = \frac{l}{2a}[(-1)^n f_1 + 2f_2],$$

$$s_{23}^{(n)} = s_{32}^{(n)} = 0, \quad s_{33}^{(n)} = \frac{l}{2a}[f_1^2 + 2f_2^2 + 2(-1)^n f_1 f_2]$$

или

$$S_n = \begin{pmatrix} \frac{2l}{a} & 0 & \frac{l}{2a}[(-1)^n f_1 + 2f_2] \\ 0 & \frac{2l}{a} & 0 \\ \frac{l}{2a}[(-1)^n f_1 + 2f_2] & 0 & \frac{l}{2a}[f_1^2 + 2f_2^2 + 2(-1)^n f_1 f_2] \end{pmatrix}.$$

Отсюда будем иметь, что $\det S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{a}\right)^3 [2f_1^2 + ((-1)^n f_1 + 2f_2)^2]$. Ясно, что при $f_1 \neq 0$ и $f_2 \neq 0$ следует, что $\det S_n \neq 0$. Следовательно, для обратной матрицы получим

$$S_n^{-1} = \begin{pmatrix} s_{11}^{-(n)} & 0 & s_{13}^{-(n)} \\ 0 & s_{22}^{-(n)} & 0 \\ s_{13}^{-(n)} & 0 & s_{33}^{-(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{f_1^2 + 2(-1)^n f_1 f_2 + 2f_2^2}{2f_1^2 + [(-1)^n f_1 + 2f_2]^2}\frac{2a}{l} & 0 & \frac{-[(-1)^n f_1 + 2f_2]}{2f_1^2 + [(-1)^n f_1 + 2f_2]^2}\frac{2a}{l} \\ 0 & \frac{a}{2l} & 0 \\ \frac{-[(-1)^n f_1 + 2f_2]}{2f_1^2 + [(-1)^n f_1 + 2f_2]^2}\frac{2a}{l} & 0 & \frac{1}{2f_1^2 + [(-1)^n f_1 + 2f_2]^2}\frac{8a}{l} \end{pmatrix}.$$

Из (17) с учетом (14) получим

$$\eta_n = \begin{pmatrix} \eta_1^{(n)} \\ \eta_2^{(n)} \\ \eta_3^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_n\left(\varphi_n^{(3)} - \varphi_n^{(0)}\right) \\ \psi_n^{(3)} - \psi_n^{(0)} \\ \lambda_n\left[\alpha_n - \varphi_n^{(0)}((-1)^n f_1 + f_2)\right] \end{pmatrix},$$

$$S_n^{-1}\eta_n = \begin{pmatrix} s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{13}^{-(n)}\eta_3^{(n)} \\ s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)} \\ s_{13}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Подставляя значение вектора $S_n^{-1}\eta_n$ в (27), а полученное выражение - в (7), получим явные выражения для функции управления $u(x,t)$ в виде

при $0 \leq t \leq \frac{l}{a}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\left(s_{11}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{13}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)\sin\lambda_n(T-t) + s_{22}^{-(n)}\eta_2^{(n)}\cos\lambda_n(T-t) +$$

$$+\left(s_{13}^{-(n)}\eta_1^{(n)} + s_{33}^{-(n)}\eta_3^{(n)}\right)[f_1\sin\lambda_n(t_1-t) + f_2\sin\lambda_n(t_2-t)]\Big\}\sin\frac{\pi n}{l}x;$$

при $\frac{l}{a} < t \leq 2\frac{l}{a}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(s_{11}^{-(n)} \eta_1^{(n)} + s_{13}^{-(n)} \eta_3^{(n)} \right) \sin\lambda_n (T - t) + s_{22}^{-(n)} \eta_2^{(n)} \cos\lambda_n (T - t) + \right.$$

$$\left. + \left(s_{13}^{-(n)} \eta_1^{(n)} + s_{33}^{-(n)} \eta_3^{(n)} \right) f_2 \sin\lambda_n (t_2 - t) \right] \sin\frac{\pi n}{l} x;$$

при $2\frac{l}{a} < t \leq 4\frac{l}{a}$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(s_{11}^{-(n)} \eta_1^{(n)} + s_{13}^{-(n)} \eta_3^{(n)} \right) \sin\lambda_n (T - t) + s_{22}^{-(n)} \eta_2^{(n)} \cos\lambda_n (T - t) \right] \sin\frac{\pi n}{l} x.$$

Таким образом, имея явные выражения функций управления с помощью вышеприведенных формул можно найти функцию прогиба струны.

5. Заключение

Задача управления колебаниями струны с заданными неразделенными значениями функций прогиба в промежуточные моменты времени методом разделения переменных сводится к задаче управления со счетным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с заданными начальными, конечными и неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Задача решается, используя методы теории управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. В качестве приложения предложенного подхода построено управляющее воздействие для колебания струны с заданными неразделенными значениями прогиба точек струны в двух промежуточных моментах времени.

Список литературы

[1] Бутковский, А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.

[2] Знаменская, Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[3] Ильин, В.А., Моисеев, Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. Успехи математических наук, т. 60, вып. 6 (366), с. 89-114, 2005. DOI:10.4213/rm1678.

[4] Моисеев, Е.И., Холомеева, А.А. Об одной задаче оптимального граничного управления с динамическим граничным условием. Дифференциальные уравнения, т. 49, № 5, с. 667-671, 2013.

[5] Barseghyan, V.R. About One Problem of Optimal Control of String Oscillations with Non-separated Multipoint Conditions at Intermediate Moments of Time. In: Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Cham, p. 13-25, 2020. DOI:10.1007/978-3-030-42831-0_2.

[6] Барсегян, В.Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени. Автоматика и телемеханика, № 2, с. 36–47, 2020. DOI:10.1134/S0005231019020038.

[7] Barsegyan, V.R. The Problem of Optimal Control of String Vibrations. International Applied Mechanics, vol. 56, № 4, p. 471-480, 2020. DOI: 10.1007/s10778-020-01030-w.

[8] Барсегян, В.Р. Задача управления колебаниями струны с неразделенными условиями на скорости точек прогиба в промежуточные моменты времени. Труды Института математики и механики УрО РАН, т. 25, № 3, с. 24-33, 2019. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-24-33.

[9] Барсегян, В.Р., Саакян, М.А. Оптимальное управление колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. Известия НАН РА. Механика, т. 61. № 2. с. 52 – 60,2008.

[10] Барсегян, В.Р. О задаче граничного управления колебаниями струны с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Казань, 20-24 августа 2015, с. 354-356, 2015.

[11] Ащепков, Л.Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями. ПММ, т. 45, вып. 2, с. 215-222, 1981.

[12] Барсегян, В.Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.

[13] Барсегян, В.Р., Барсегян, Т.В. Об одном подходе к решению задач управления динамических систем с неразделенными многоточечными промежуточными условиями. Автоматика и телемеханика, № 4, с. 3-15, 2015.

[14] Корзюк, В.И., Козловская, И.С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени I. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси, т. 18, № 2, с. 22–35, 2010.

[15] Корзюк, В.И., Козловская, И.С. Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени II. Труды Ин-та мат. НАН Беларуси, т. 19, № 1, с. 62–70, 2011.

[16] Макаров, А.А., Левкин, Д.А. Многоточечная краевая задача для псевдодифференциальных уравнений в полислое. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка, вып. 69, № 1120, с. 64-74, 2014.

[17] Асанова, А.Т., Иманчиев, А.Е. О разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженных гиперболических уравнений с многоточечными условиями. Вестник Карагандинского университета. Серия Математика, № 1(81), с. 15-20, 2016.

[18] Бакирова, Э.А., Кадирбаева, Ж.М. О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений. Изв. НАН РК. Сер.физ.-мат., № 5, с. 168–175, 2016.

[19] Красовский, Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[20] Зубов, В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

A problem of control of oscillations of a string with non-separated conditions on the deflection function in a given intermediate moments of time

Barseghyan V.R.[1, 2]

[1] Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of RA
[2] Yerevan State University

barseghyan@sci.am

Abstract. The paper considers the problem of the control for the equations of oscillations of a string with given initial, final conditions and nonseparated values of deflection in the intermediate moments of time. The problem is solved by using the methods of separation of variables and the theory of control of finite-dimensional systems with nonseparated multipoint intermediate conditions. As an application of the proposed approach, an control action is constructed for the string oscillation with a given nonlocal value of the deflection of the string points at some two intermediate points of time.

Keywords: oscillation control, string oscillations, intermediate moments, undivided multipoint conditions, variables separation.