ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 4, 2021
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Численные методы

О модифицированном методе сплайн-коллокаций решения интегрального уравнения Фредгольма

Е. К. Куликов, А. А. Макаров

Санкт-Петербургский государственный университет,
egor.k.kulikov@gmail.com, a.a.makarov@spbu.ru

Аннотация. В работе рассматривается численный метод решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, основанный на методе коллокаций и уточнении решения при помощи итерации Слоана. Решение при этом представляется линейной комбинацией минимальных сплайнов, а для определения коэффициентов при них используются методы локальной аппроксимации (квазиинтерполяции). Приводятся результаты численных экспериментов, которые показывают, что использование минимальных тригонометрических сплайнов и связанных с ними функционалов позволяет повысить точность аппроксимации решения уравнения по сравнению с некоторыми ранее предложенными методами приближения.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма второго рода, метод коллокаций, минимальные сплайны, аппроксимационные функционалы, локальная аппроксимация, квазиинтерполяция.

1 Введение

В последние десятилетия активное развитие получили локальные методы аппроксимации, в которых коэффициенты при базисных функциях определяются как значения аппроксимационных функционалов, представляющих из себя, например, линейные комбинации значений функции и ее производных в нескольких точках (подробнее см. [1–6]). Локальные схемы, в которых достигается максимальный порядок точности, называют *квазиинтерполяцией*, а возникающие при их построении функционалы — *квазиинтерполяционными.*

Известно, что методы, основанные на квазиинтерполяции, хорошо зарекомендовали себя в задачах приближения решений интегральных уравнений. В работах [7,8] было показано, что замена решения интегрального уравнения Фредгольма линейной комбинацией B-сплайнов, коэффициенты при которых вычисляются при помощи квазиинтерполяции функций, входящих в уравнение, позволяет получать достаточно точные приближения при использовании как классических подходов к решению (метод Галёркина, метод Канторовича, метод итераций Слоана [9]), так и более поздних обобщений (метод Кулкарни [10] и др.).

Квазиинтерполяционные функционалы построены для различных сплайнов [11–14]. Недавно они были получены в общем виде и для минимальных сплайнов [21]. Такие сплайны получаются из аппроксимационных соотношений с использованием полной цепочки векторов и порождающей вектор-функции, а также обладают минимальным носителем (см., например, [15,16]). Определенный способ выбора упомянутой цепочки векторов позволяет рассмотреть минимальные сплайны максимальной гладкости и установить единственность пространства таких сплайнов [17]. Минимальные сплайны предоставляют прекрасный аппарат аппроксимации, поскольку они получаются из аппроксимационных соотношений. В частности, минимальные тригонометрические сплайны были подробно рассмотрены в работе [18].

В данной работе построен метод коллокаций с итерациями Слоана для интегрального уравнения Фредгольма второго рода, в котором приближенное решение строится как линейная комбинация минимальных тригонометрических сплайнов, а в качестве коэффициентов рассматриваются значения аппроксимационных функционалов.

В [21] было показано, что использование неполиномиальных базисов при построении минимальных сплайнов и соответствующих аппроксимационных функционалов может позволить улучшить точность аппроксимации. Мы продолжаем данное исследование и приводим результаты численных экспериментов, показывающих, что построение приближенного решения на основе минимальных тригонометрических сплайнов позволяет в ряде случаев получать более точные решения интегрального уравнения Фредгольма, чем при использовании аналогичного подхода из [7], основанного на B-сплайнах.

2 Пространство минимальных квадратичных сплайнов

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{R}^3$ — множество трехмерных векторов с компонентами из множества $\mathbb{R}^1$ всех вещественных чисел.

На отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X:

$$a = x_{-2} = x_{-1} = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = b. \tag{1}$$

Введем вспомагательные обозначения

$$J_{i,k} := \{i, i+1, \ldots, k\}, \quad i, k \in \mathbb{Z},\ i < k;$$
$$M := \cup_{j \in J_{0,n-1}} (x_j, x_{j+1});$$
$$S_j := [x_j, x_{j+3}], \quad j \in J_{-2,n-1}.$$

Пусть $\{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-2,n-1}}$ — *цепочка векторов*, т. е. упорядоченное множество трехмерных вектор-столбцов из $\mathbb{R}^3$. Предположим, что квадратные матрицы третьего порядка $(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)$, составленные из вектор-столбцов $\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j$, неособенные:

$$\det(\mathbf{a}_{j-2}, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0 \qquad \forall j \in J_{0,n-1}. \tag{2}$$

Рассмотрим трехкомпонентную вектор-функцию (столбец) $\boldsymbol{\varphi} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ с компонентами из пространства $C^2[a, b]$ и ненулевым вронскианом:

$$\det(\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\varphi}'(t), \boldsymbol{\varphi}''(t)) \neq 0 \quad \forall\, t \in [a, b]. \tag{3}$$

Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M.

Предположим, что функции $\omega_j \in \mathbb{X}(M), j \in J_{-2,n-1}$, удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} \sum_{j'=k-2}^{k} \mathbf{a}_{j'}\, \omega_{j'}(t) \equiv&\ \ \boldsymbol{\varphi}(t) \quad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}),\, \forall\, k \in J_{0,n-1}, \\ \omega_j(t) \equiv&\ \ 0 \qquad \forall\, t \in M \backslash S_j,\, \forall\, j \in J_{-2,n-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

При каждом фиксированном $t \in (x_k, x_{k+1}), \forall\, k \in J_{0,n-1}$, соотношения (4) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Ввиду предположения (2) система (4) имеет единственное решение, причем $\operatorname{supp} \omega_j \subset S_j$.

Линейная оболочка функций $\omega_j(t)$ называется *пространством квадратичных минимальных координатных* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов*. Обозначим его через

$$\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}) := \left\{ u(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} c_j\, \omega_j(t) \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1, t \in [a, b] \right\}.$$

Тождества (4) называются *аппроксимационными соотношениями*. Вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей* (или *генерирующей*) сплайн вектор-функцией.

Положим

$$\boldsymbol{\varphi}_j := \boldsymbol{\varphi}(x_j), \quad \boldsymbol{\varphi}'_j := \boldsymbol{\varphi}'(x_j), \quad \boldsymbol{\varphi}''_j := \boldsymbol{\varphi}''(x_j), \quad j \in J_{-2,n+2},$$

и рассмотрим цепочку векторов $\{\mathbf{a}_j^N\}_{j \in J_{-2,n-1}}$, определяемую формулой

$$\mathbf{a}_j^N := \boldsymbol{\varphi}_{j+1} - \frac{\mathbf{d}_{j+2}^T\, \boldsymbol{\varphi}_{j+1}}{\mathbf{d}_{j+2}^T\, \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}}\, \boldsymbol{\varphi}'_{j+1}, \tag{5}$$

где векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^3$ задаются тождеством

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \equiv \det(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}'_j, \boldsymbol{\varphi}''_j, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,$$

а через T обозначена операция транспонирования.

Известно [17], что при условии (3) для цепочки векторов $\{\mathbf{a}_j^N\}$, $j \in J_{0,n-1}$, выполнено неравенство (2), и функции $\omega_j \in C^1[a, b]$ для каждого $j \in J_{-2,n-1}$. Более того, если вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ такая, что ее нулевая компонента равна 1, то справедливо свойство разбиения единицы:

$$\sum_{j=-2}^{n-1} \omega_j(t) = 1 \quad \forall\, t \in [a, b].$$

В этом случае функции $\omega_j(t)$ называются *квадратичными нормализованными минимальными координатными* $B_{\boldsymbol{\varphi}}$*-сплайнами*, и для них справедливо представление

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\[2ex] \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} - \dfrac{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_{j+1}^N}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^N} \dfrac{\mathbf{d}_{j+1}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+1}^T \mathbf{a}_{j+1}^N}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\[2ex] \dfrac{\mathbf{d}_{j+3}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+3}^T \mathbf{a}_j^N}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases}$$

Для $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, t, t^2)^T$ функции $\omega_j(t)$ совпадают (см. [19]) с известными квадратичными полиномиальными B-сплайнами (третьего порядка):

$$\omega_j^B(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-x_j)^2}{(x_{j+1}-x_j)(x_{j+2}-x_j)}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{1}{x_{j+1}-x_j}\left(\dfrac{(t-x_j)^2}{x_{j+2}-x_j} - \dfrac{(t-x_{j+1})^2(x_{j+3}-x_j)}{(x_{j+2}-x_{j+1})(x_{j+3}-x_{j+1})}\right), & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \dfrac{(t-x_{j+3})^2}{(x_{j+3}-x_{j+1})\,(x_{j+3}-x_{j+2})}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases} \tag{6}$$

Для $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, \sin t, \cos t)^T$ функции $\omega_j(t)$ имеют следующий вид (см. [16]):

$$\omega_j^{trig}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\frac{t-x_j}{2}\right)\cos\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}{\sin\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\sin\frac{x_{j+2}-x_j}{2}}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\cos\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}{\sin\frac{x_{j+1}-x_j}{2}}\left(\dfrac{\sin^2\left(\frac{t-x_j}{2}\right)}{\sin\frac{x_{j+2}-x_j}{2}} - \dfrac{\sin^2\left(\frac{t-x_{j+1}}{2}\right)\sin\frac{x_{j+3}-x_j}{2}}{\sin\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2}\sin\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}\right), & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \\ \dfrac{\sin^2\left(\frac{x_{j+3}-t}{2}\right)\cos\frac{x_{j+2}-x_{j+1}}{2}}{\sin\frac{x_{j+3}-x_{j+1}}{2}\sin\frac{x_{j+3}-x_{j+2}}{2}}, & t \in [x_{j+2}, x_{j+3}). \end{cases} \tag{7}$$

3 Усредняющие аппроксимационные функционалы

Здесь мы будем рассматривать различные сетки. Поэтому, для удобства, некоторые объекты, рассматриваемые на сетке X, будем снабжать верхним индексом X, например, писать ω_j^X.

Пусть далее $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1, \rho(t), \sigma(t))^T$, где $\rho, \sigma \in C^2[a, b]$. Введем обозначения (подробнее см. [19])

$$\Delta_j(\rho,\, \sigma) := \begin{vmatrix} \rho_j & \rho'_j \\ \sigma_j & \sigma'_j \end{vmatrix}, \quad S_j^X(\rho,\, \sigma,\, \tau) := -\frac{\begin{vmatrix} \Delta_j(\rho,\, \sigma) & \Delta_{j+1}(\rho,\, \sigma) \\ \tau_j & \tau_{j+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \rho_j & \rho_{j+1} \\ \sigma_j & \sigma_{j+1} \end{vmatrix}},$$

где $\rho_j := \rho(x_j), \sigma_j := \sigma(x_j)$, $\tau_j := \tau(x_j)$.

Рассмотрим вспомогательную сетку Y, состоящую из узлов

$$y_j := \begin{cases} x_0, \quad j=-2, \\ x_{j+1}+\theta(x_{j+2}-x_{j+1}), \quad \theta\in[0,1],\, j\in J_{-1,n-2}, \\ x_n, \quad j=n-1. \end{cases} \tag{8}$$

Будем строить аппроксимацию $\mathfrak{Q}f$ исходной функции f в виде

$$\mathfrak{Q}f = \sum_{j=-2}^{n-1} \mu_j^Y(f)\,\omega_j^X, \tag{9}$$

где аппроксимационный функционал $\mu_j^Y(f)$ определим следующим образом:

$$\mu_j^Y(f) := \begin{cases} f(y_{-2}), \quad j=-2, \\ \alpha_j f(y_{j-1})+\beta_j f(y_j)+\gamma_j f(y_{j+1}), \quad j\in J_{-1,n-2}, \\ f(y_{n-1}), \quad j=n-1. \end{cases} \tag{10}$$

В [21] показано, что аппроксимация $\mathfrak{Q}f$ обладает свойством точности на функциях $f\in\{[\boldsymbol{\varphi}]_i \,|\, i=0,1,2\}$ при следующих значениях коэффициентов $\alpha_j,\beta_j,\gamma_j$ в (10):

$$\alpha_j = 1-\beta_j-\gamma_j,$$

$$\beta_j = \frac{(\rho(y_{j+1})-\rho(y_{j-1}))(S_{j+1}^X(\rho,\,\sigma,\,\sigma')-\sigma(y_{j-1}))}{(\rho(y_{j+1})-\rho(y_{j-1}))(\sigma(y_j)-\sigma(y_{j-1}))-(\rho(y_j)-\rho(y_{j-1}))(\sigma(y_{j+1})-\sigma(y_{j-1}))}-$$
$$\frac{(S_{j+1}^X(\rho,\,\sigma,\,\rho')-\rho(y_{j-1}))(\sigma(y_{j+1})-\sigma(y_{j-1}))}{(\rho(y_{j+1})-\rho(y_{j-1}))(\sigma(y_j)-\sigma(y_{j-1}))-(\rho(y_j)-\rho(y_{j-1}))(\sigma(y_{j+1})-\sigma(y_{j-1}))},$$

$$\gamma_j = \frac{(S_{j+1}^X(\rho,\,\sigma,\,\rho')-\rho(y_{j-1}))(\sigma(y_j)-\sigma(y_{j-1}))}{(\rho(y_{j+1})-\rho(y_{j-1}))(\sigma(y_j)-\sigma(y_{j-1}))-(\rho(y_j)-\rho(y_{j-1}))(\sigma(y_{j+1})-\sigma(y_{j-1}))}-$$
$$\frac{(\rho(y_j)-\rho(y_{j-1}))(S_{j+1}^X(\rho,\,\sigma,\,\sigma')-\sigma(y_{j-1}))}{(\rho(y_{j+1})-\rho(y_{j-1}))(\sigma(y_j)-\sigma(y_{j-1}))-(\rho(y_j)-\rho(y_{j-1}))(\sigma(y_{j+1})-\sigma(y_{j-1}))}.$$

Для $\boldsymbol{\varphi}(t) := (1,t,t^2)^T$ на равномерной сетке при $\theta=\frac{1}{2}$ функционал (10) имеет вид

$$\mu_j^Y(f) = -\frac{1}{8}\left(f(y_{j-1})-10f(y_j)+f(y_{j+1})\right). \tag{11}$$

Заметим, что он совпадает с известным квазиинтерполяционным функционалом для квадратичных B-сплайнов (см. [12]).

4 О методе решения уравнения Фредгольма

Пусть $t \in [a, b]$. Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода

$$u(t) - \mathcal{K}u(t) = f(t), \tag{12}$$

где $f \in C[a, b]$. Предположим, что оператор $(\mathcal{I} - \mathcal{K})$ обратим; здесь $\mathcal{I}$ — тождественный оператор. Тогда уравнение (12) имеет единственное решение $u \in C[a, b]$ для любой заданной функции $f \in C[a, b]$.

Используя функцию $K \in C([a, b] \times [a, b])$, называемую *ядром оператора Фредгольма*, определим линейный компактный оператор $\mathcal{K}$ следующим образом:

$$\mathcal{K}u(t) := \int_a^b K(t, x)\, u(x)\, dx, \quad t \in [a, b].$$

Будем строить аппроксимацию решения уравнения (12) на сетке (1) в виде

$$u^h(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} c_j\, \omega_j(t), \tag{13}$$

а вместо $\mathcal{K}$ и f будем использовать их приближения $\mathfrak{Q}\mathcal{K}$ и $\mathfrak{Q}f$ соответственно, построенные путем аппроксимации указанных функций в соответствии с равенствами (9) и (10). Тогда уравнение (12) можно переписать в виде

$$u^h = \mathfrak{Q}f + \mathfrak{Q}\mathcal{K}u^h \tag{14}$$

или, вводя обозначение $\widetilde{\omega}_j := \mathcal{K}\,\omega_j$,

$$\sum_{j=-2}^{n-1} c_j\, \omega_j(t) = \sum_{j=-2}^{n-1} \mu_j^Y(f)\, \omega_j(t) + \mathfrak{Q} \sum_{i=-2}^{n-1} c_i\, \widetilde{\omega}_i(t).$$

Откуда имеем

$$c_j = \mu_j^Y(f) + \sum_{i=-2}^{n-1} c_i\, \mu_j^Y(\widetilde{\omega}_i), \quad j \in J_{-2,n-1}. \tag{15}$$

Составим из коэффициентов c_j вектор $\mathbf{c} := (c_{-2}, c_{-1}, \ldots, c_{n-1})^T$, из функционалов $\mu_j^Y(f)$ вектор

$$\boldsymbol{\mu} := (\mu_{-2}^Y(f), \mu_{-1}^Y(f), \ldots, \mu_{n-1}^Y(f))^T,$$

а из функционалов $\mu_j^Y(\widetilde{\omega}_i)$ матрицу

$$\boldsymbol{M} := (M_{j,i}) = \left(\mu_j^Y(\widetilde{\omega}_i)\right), \quad j, i \in J_{-2,n-1}.$$

В соответствии с представлением (15) построим систему линейных алгебраических уравнений

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M})\,\mathbf{c} = \boldsymbol{\mu},$$

где $\boldsymbol{I}$ — единичная матрица, решение которой определяет коэффициенты c_j в аппроксимации (13).

В [9] Слоан показал, что полученное решение может быть уточнено итерацией

$$\widetilde{u}^h := \mathcal{K}u^h + f,$$

удовлетворяющей, благодаря равенству (14), уравнению $(\mathcal{I} - \mathcal{K}\mathfrak{Q})\,\widetilde{u}^h = f$.

Таким образом, используя полученное приближение (13), итоговая аппроксимация решения уравнения Фредгольма может быть построена в виде

$$\widetilde{u}^h(t) = f(t) + \sum_{j=-2}^{n-1} c_j\,\widetilde{\omega}_j(t). \tag{16}$$

Отметим, что

$$\widetilde{\omega}_j(t) = \mathcal{K}\,\omega_j(t) = \int_a^b K(t,x)\,\omega_j(x)\,dx,$$

а вычисление данного интеграла может быть сведено к вычислению значения

$$W_{ij} := \int_a^b \omega_i(t)\,\omega_j(t)\,dt$$

путем замены функции $K(t,x)$ под знаком интеграла ее аппроксимацией.

В соответствии с представлениями функций $\omega_j(t)$ для полиномиальной порождающей $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t, t^2)^T$ или для тригонометрической порождающей $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \sin t, \cos t)^T$, значение W_{ij} может быть вычислено в явном виде. В других случаях значение интеграла от произведения минимальных сплайнов может быть получено применением стандартных методик численного интегрирования.

5 Численные эксперименты

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(t) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, \cos x \, u(x) \, dx = \sin t, \tag{17}$$

решение которого может быть получено явно: $u(t) = 2\sin t$, где $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

В численных экспериментах на сетке (1) рассмотрим аппроксимацию (9), записанную в виде

$$\mathfrak{Q} f = \sum_{j=-2}^{n-1} c_j \, \omega_j^X,$$

где коэффициенты c_j определяются на сетке (8) в зависимости от вариантов выбора порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и используемоего аппроксимационного функционала:

1. $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t, t^2)^T$, а $c_j := f(y_j)$ определяются значением функции в точках Гревилля.
2. $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t, t^2)^T$, c_j определяются соотношением (11).
3. $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \sin t, \cos t)^T$, c_j определяются соотношением (10).

Построим аппроксимацию решения уравнения (17) в виде (16), используя предложенный в работе метод приближения. Точность этого приближения будет меняться в зависимости от выбора порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и используемого аппроксимационного функционала. Результаты эксперимента приведены в таблице 1. В качестве критерия точности построенной аппроксимации используется оценка максимума абсолютного значения отклонения полученного приближения $\widetilde{u}^h(t)$ от значений исходной функции u, вычисленная в узлах сетки, в десять раз более мелкой, чем исходная, т. е.

$$E = \max_{t \in [0, \pi/2]} |\widetilde{u}^h(t) - u(t)|.$$

Таблица 1: Ошибка аппроксимации решения уравнения (17) в зависимости от количества узлов сетки n

вариант	$n = 15$	$n = 30$	$n = 45$
1	5.3×10^{-3}	1.3×10^{-3}	5.6×10^{-4}
2	3.5×10^{-3}	8.5×10^{-4}	3.7×10^{-5}
3	$\mathbf{1.4 \times 10^{-4}}$	$\mathbf{6.8 \times 10^{-5}}$	$\mathbf{3.3 \times 10^{-5}}$

Таким образом, использование минимальных тригонометрических сплайнов и соответствующих аппроксимационных функционалов (вариант 3) позволяет повысить точность численного решения уравнения (17), причем наибольшее улучшение достигается на более разреженных сетках.

6 Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90095.

Список литературы

[1] *С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин*, Сплайны в вычислительной математике. М. 1976. 248 с.

[2] *Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко*, Методы сплайн-функций. М. 1980. 352 с.

[3] *L. L. Schumaker*, Spline functions: basic theory. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1981.

[4] *C. de Boor*, A Practical Guide to Splines // Springer-Verlag New York (revised edition), 2001.

[5] *Б. И. Квасов*, Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006.

[6] *Ю. К. Демьянович*, Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994. 356 с.

[7] *C. Allouch, P. Sablonniere, D. Sbibih*, A modified Kulkarni's method based on a discrete spline quasi-interpolant // Mathematics and Computers in Simulation vol. 81 2011, 1991–2000.

[8] *C. Dagnino, S. Remogna, P. Sablonniere*, On the solution of Fredholm integral equation based on spline quasi-interpolating projects // BIT Numerical Mathematics vol. 54(4) 2014 979–1008.

[9] *I. Sloan*, Improvement by iteration for compact operator equations // Math. Comp. vol. 30 1976, 758–764.

[10] *R. Kulkarni*, On improvement of the iterated Galerkin solution of the second kind integral equations // J. Numer. Math. vol. 13 2005, 205–218.

[11] *T. Lyche, L. L. Shumaker*, Quasi-interpolants Based on Trigonometric Splines // J. Approx. Theor. vol. 95 1998, 280–309.

[12] *P. Sablonniere*, Quadratic spline quasi-interpolants on bounded domains of $\mathbb{R}^d$, d = 1, 2, 3 // Rend. Sem. Mat., vol. 61(3) 2003, 229–246.

[13] *P. Constantini, C. Manni, F. Pelosi, M. Lucia Sampoli*, Quasi-interpolation in Isogeometric Analysis Based on Generalized B-splines // Computer Aided Geometric Design vol. 27(8) 2010 655–668.

[14] *W. Gao, Z. Wu*, A quasi-interpolation scheme for periodic data based on multiquadric trigonometric B-splines // J. of Comp. App. Math. vol. 271 2014, 20–30.

[15] *Ю. К. Демьянович*, Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения // Докл. РАН. 2005. Т. 401, №4. С. 1–4.

[16] *O. Kosogorov, A. Makarov*, On Some Piecewise Quadratic Spline Functions // Lecture Notes in Computer Science, vol. 10187 2017, 448–455.

[17] *A. A. Makarov*, Construction of Splines of Maximal Smoothness // J. Math. Sci. (United States), vol. 178(6) 2011, 589–604

[18] *Yu. K. Dem'yanovich, A. A. Makarov*, Necessary and Sufficient Nonnegativity Conditions for Second-order Coordinate Trigonometric Splines // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics, vol. 50(1) 2017, 5–10

[19] *E. K. Kulikov, A. A. Makarov*, On de Boor–Fix Type Functionals for Minimal Splines // Topics in Classical and Modern Analysis (Applied and Numerical Harmonic Analysis), 2019, 211–225.

[20] *E. K. Kulikov, A. A. Makarov*, On Approximation by Hyperbolic Splines // J. Math. Sci. (United States), vol. 240(6) 2019 822–832.

[21] *Е. К. Куликов, А. А. Макаров*, О построении аппроксимационных функционалов для минимальных сплайнов // Зап. научн. сем. ПОМИ, т. 504 2021, 136–156.

On modified spline collocations method for solving the Fredholm integral equation

E. K. Kulikov, A. A. Makarov

Saint-Petersburg State University,
egor.k.kulikov@gmail.com, a.a.makarov@spbu.ru

Abstract. A numerical method to solve a Fredholm integral equation of the second kind is studied. This approach is based on a collocation method and Sloan iterations. Our solution is represented by a linear combination of minimal splines, and the coefficients are calculated by a method of local approximation (quasi-interpolation). The results of numerical experiments demonstrating how the quality of approximation can be improved by using minimal trigonometric splines and corresponding functionals in comparison with several earlier suggested approaches are presented.

Keywords: Fredholm integral equation of the second kind, collocation method, minimal splines, approximation functionals, local approximation, quasi-interpolation.