ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N.2, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Общая теория управления

Синтез управления, обеспечивающего различные динамические свойства свободного и вынужденного движения многомерной системы

Зубов Н.Е[1,2,*], Рябченко В.Н.[1,**], Лапин А.В.[1,3,***], Галиаскаров И.М.[4,****]

[1] Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)
[2] Ракетно-космическая Корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»
(РКК «Энергия» им. С.П. Королёва)
[3] Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем
(ГосНИИАС)
[4] Центр инжиниринга и управления строительством Единой энергетической системы
(ЦИУС ЕЭС)

e-mail:

[*] Nik.Zubov@gmail.com
[**] RyabchenkoVN@yandex.ru
[***] AlexeyPoeme@yandex.ru
[****] Irek_Galiaskarov@mail.ru

Аннотация. Для многомерной динамической системы рассматривается закон управления с предкомпенсатором и обратной связью. Особенностью синтеза управления является то, что определитель передаточной матрицы предкомпенсатора, если она квадратная, равен нулю или она имеет прямоугольный вид. Следовательно, рассматривается задача синтеза нерегулярных каузальных законов управления. Описывается метод синтеза управления, обеспечивающего линейной динамической системе различный спектральный состав (динамические свойства) в свободном и вынужденном движении. Решение ищется с помощью технологии вложения систем. Показано развитие методов технологии вложения: посредством нерегулярных законов управления обеспечиваются различные спектры свободной и вынужденной составляющих в векторах состояния или выхода динамической системы. Сформулированы теоремы о синтезе нерегулярного управления динамической системой по выходу, а также о физической реализуемости закона управления с помощью предкомпенсатора. Приведены методические примеры синтеза.

Ключевые слова: многомерная динамическая система, предкомпенсатор, обратная связь, свободное и вынужденное движение, нерегулярные каузальные законы управления.

1. Введение

Современная теория управления развивается по многочисленным направлениям и использует различные формы записи уравнений, описывающих систему управления (формы представления). В частности, для пилотируемых летательных аппаратов самолетного типа, вертолетов, беспилотных летательных аппаратов наиболее подходящей является форма, позволяющая осуществлять синтез линейных законов управления с обратной связью в частотной области

$$\mathbf{G}(\lambda)\mathbf{v}(\lambda) = \mathbf{K}(\lambda)\mathbf{x}(\lambda) + \mathbf{u}(\lambda), \quad \mathbf{G}(\lambda)\mathbf{v}(\lambda) = \mathbf{K}(\lambda)\mathbf{y}(\lambda) + \mathbf{u}(\lambda) \tag{1}$$

и обеспечивающая реализацию заданных (желаемых) передаточных матриц $\mathbf{W}(\lambda)$. В записи (1): $\mathbf{x}$ – n-мерный вектор состояния объекта управления (системы); $\mathbf{u}$ – r-мерный вектор входа объекта управления; $\mathbf{y}$ – m-мерный вектор выхода объекта; $\mathbf{v}$ – l-мерный вектор независимых входных воздействий системы; $\mathbf{G}$ и $\mathbf{K}$ – в общем случае передаточные матрицы предкомпенсатора, осуществляющего предварительную обработку входного воздействия, и регулятора, реализующего обратную связь; λ – комплексная переменная, т.е. $\lambda \in \mathbb{C}$.

Методы синтеза законов управления, пережили несколько периодов своего развития [1]. К первому периоду можно отнести работы по теории управления (регулирования) до 1960-х годов. В то время анализ и синтез управления линейными системами осуществлялись на основе аппарата передаточных функций. В начале 1960-х годов Калман возродил интерес к пространству состояний системы. Соответствующий подход стал популярным и получил характеристику «современный подход». В начале 1970-х годов произошел новый скачок в развитии методов анализа и синтеза на основе передаточных матриц, а также зародился так называемый геометрический подход. В начале 1980-х годов стало очевидно, что, если речь идет о линейных системах, то все подходы в некотором смысле эквивалентны: каждый новый результат одного подхода почти систематически может быть получен при другом подходе. Впоследствии была выработана общая точка зрения на предмет исследования в многомерных линейных динамических системах как на «тонкую структуру» этих систем [2]. При этом под «тонкой структурой» системы управления стали подразумеваться особенности её неминимальной реализации законов (1). Возникла тенденция к более интенсивному использованию «тонкой структуры» линейной системы. В рамках тонкоструктурных исследований с использованием различных инвариантов (индексы управляемости и наблюдаемости [3], конечные и бесконечные нули [1], [4], списки инвариантов Морса [5], индексы ядер [2] и т.д.) получены решения таких задач управления, как согласование и развязка моделей (см. [6] – [9] и др.). В последние десятилетия, начиная с работы [10], среди зарубежных специалистов в области теории управления путь изучения линейных систем в рамках «тонкоструктурного» подхода считается одним из наиболее эффективных путей.

Обобщённая схема закона управления с предкомпенсатором и обратной связью (ОС) приведена на рис. 1.

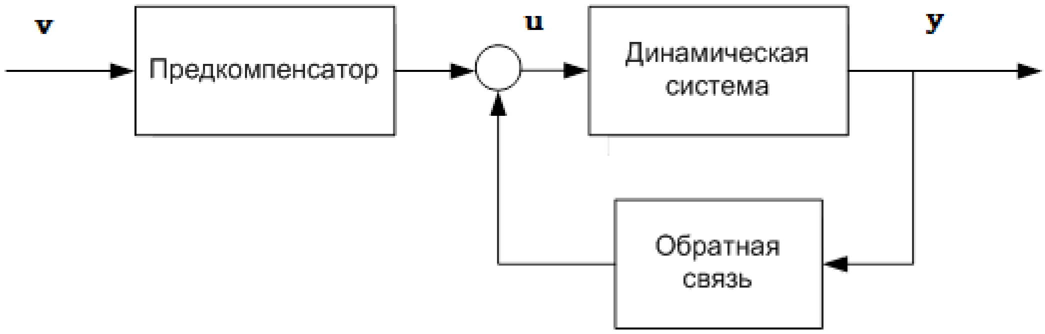

Рис. 1. Управление с предкомпенсатором и обратной связью

На рис. 2 показана схема управления с представлением передаточных матриц в пространстве состояний.

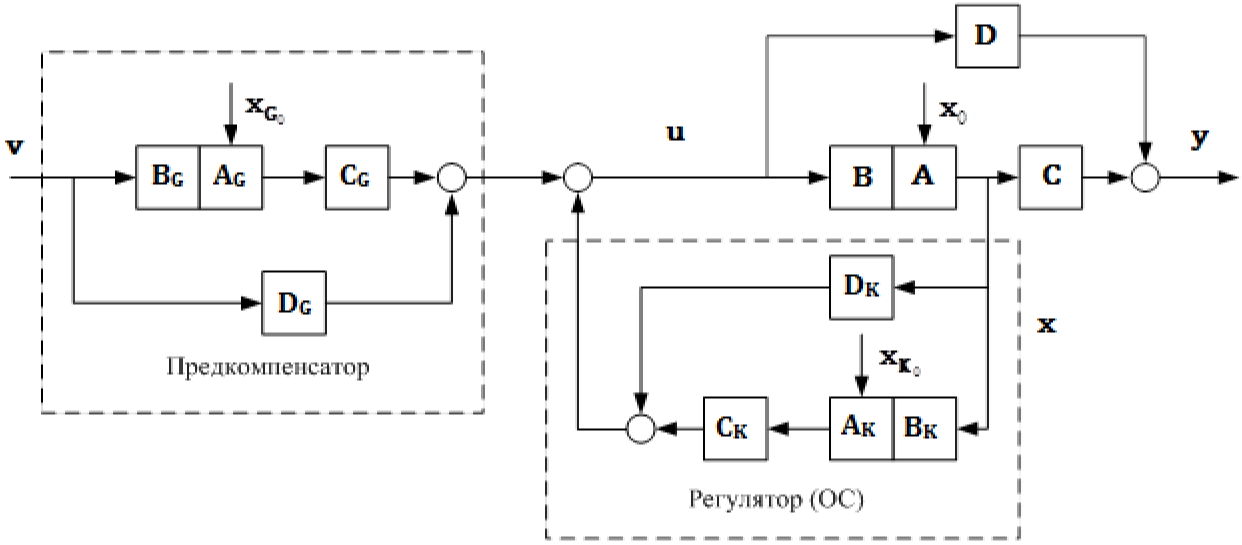

Рис. 2. Управление с предкомпенсатором и обратной связью (представление в пространстве состояний)

В данном случае

$$\mathbf{K}(\lambda) = \mathbf{C_K}(\lambda\mathbf{I}_k - \mathbf{A})_{\mathbf{K}}^{-1}\mathbf{B_K} + \mathbf{D_K},$$

$$\mathbf{G}(\lambda) = \mathbf{C_G}(\lambda\mathbf{I}_g - \mathbf{A})_{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{B_G} + \mathbf{D_G} -$$

передаточные матрицы предкомпенсатора и регулятора, соответственно (здесь $\mathbf{I}_k$ и $\mathbf{I}_g$ – единичные матрицы порядка k и g).

В современной теории систем законы управления (1) в зависимости от структурных свойств матрицы предкомпенсатора $\mathbf{G}$ подразделяются на регулярные и нерегулярные законы [1], [11]. Нерегулярность закона возникает, если матрица $\mathbf{G}$ необратима, т.е. имеет прямоугольный вид или (в случае квадратного вида) определитель, тождественно равный нулю: $\det \mathbf{G} \equiv 0$.

Нерегулярность законов (1) также появляется, если размерность вектора независимых входных воздействий v не совпадает с размерностью управляющего входа объекта u.

Известно [1], [11], что многие успехи современной теории управления в изучении структурных свойств линейных систем обусловлены тождественным переходом от исходного закона управления к исследованию так называемого бикаузального (или бисобственного) предкомпенсатора [12].

Бикаузальность рациональной матрицы, элементы которой зависят от параметра λ, означает, что данная матрица и матрица, обратная к ней, имеют рациональные элементы, причём степени полиномов в числителях не превосходят степени полиномов в знаменателях. Например, приведённая ниже матрица является бикаузальной:

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda+1}{\lambda+2} & \frac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1} \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda+2}{\lambda+1} & -\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\lambda+2}{\lambda^2+\lambda+1} \\ 0 & {}^{1}/_{\alpha} \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Формальному исследованию динамических систем с помощью бикаузальных матриц благоприятствует тот факт, что бикаузальный предкомпенсатор осуществляет групповое действие [1] над исходной системой, т.е. представимое единственной обратимой операцией. В результате, для случаев систем с минимальной и неминимальной реализацией в пространстве состояний могут быть получены различные совокупности инвариантов по управлению, т.е. такие свойства систем, которые не зависят от наличия управления. Так, можно утверждать следующее: если у исходной системы и у желаемой замкнутой системы нули на бесконечности [5] не совпадают, то, независимо от минимальности или неминимальности реализации системы, не существует такого регулярного закона управления, который бы обеспечил решение поставленной задачи.

Нерегулярные законы осуществляют полугрупповое действие [1] над исходной системой, имеют возможность «разрушать» упомянутые ранее инварианты и предоставляют некоторые дополнительные возможности в обеспечении требуемых свойств управляемым системам, в особенности, многосвязным.

Многосвязными системами в дальнейшем будем называть динамические системы, у передаточных матриц которых имеются делители нуля [13]. В терминах передаточных матриц будем полагать, что модель таких объектов имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\lambda) = (\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(\lambda) + (\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}(\lambda) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\lambda), \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_0$ – начальное значение вектора состояния (начальные условия), $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – матрицы над вещественным полем $\mathbb{R}$ заданных размеров.

Будем считать, что $r < n$ и $m < n$, при этом прямоугольные матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ имеют полные ранги. Матрицы $\mathbf{C}_R^{\perp} \neq 0$ и $\mathbf{B}_L^{\perp} \neq 0$ являются соответственно правым (нижний индекс R) и левым (нижний индекс L) делителями нуля, т.е. $\mathbf{C}\mathbf{C}_R^{\perp} = 0$ и $\mathbf{B}_L^{\perp}\mathbf{B} = 0$. При этом выполняются ранговые условия $\operatorname{rank}\mathbf{B}_L^{\perp} = n - r$ и $\operatorname{rank}\mathbf{C}_R^{\perp} = n - m$ [13].

Одним из известных методов анализа и синтеза динамических систем является технология вложения систем [1], [11], [13] – [16].

При решении системных задач с помощью технологии вложения систем предполагается последовательное выполнение трех основных этапов.

Первый этап состоит в том, чтобы из исходных матричных уравнений, составляющих модель исследуемой системы, сконструировать так называемую проматрицу (проблемную матрицу) решаемой задачи. Основная цель этапа заключается в получении операторного матричного уравнения функционирования системы в виде обобщенного уравнения:

$$\mathbf{\Omega}(\lambda)\mathbf{y}'(\lambda) = \mathbf{u}'(\lambda),$$

где $\mathbf{u}'(\lambda)$ и $\mathbf{y}'(\lambda)$ – соответственно обобщённые векторы воздействий на систему (независимое входное воздействие, возмущения, начальные условия) и реакций системы (внутренние и выходные сигналы, включая компоненты вектора текущего состояния), $\mathbf{\Omega}(\lambda)$ – проматрица (обязательно квадратная и обратимая) [17]. Проматрица обладает рядом полезных свойств [1],

[13]. Характерным является то, что искомые параметры (например, коэффициенты синтезируемого закона управления) занимают в проматрице различные позиции. Проматрица, таким образом, с одной стороны, формализует все особенности структуры рассматриваемой системы, а с другой – обладает свойствами, позволяющими применять аппарат матричных частных.

На втором этапе формируется тождество вложения, которое формализует цели решаемой задачи. Если решается задача синтеза управления, то цель управления задается в виде желаемой передаточной матрицы $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ от входного воздействия $\mathbf{v}(\lambda)$ системы к её выходу $\mathbf{y}(\lambda)$ или состоянию $\mathbf{x}(\lambda)$, в зависимости от содержательной формулировки задачи. Также могут задаваться передаточные матрицы и/или от начальных условий и других воздействий. В более сложных матричных конструкциях можно ограничивать цели синтеза только желаемым расположением на комплексной плоскости полюсов синтезируемой системы и т.д. Принципиальным является то, что при разрешимости задачи любая такая конструкция, которая может быть задана в качестве желаемой, содержится в явном виде в матрице, обратной к проматрице. В общем случае можно записать:

$$\boldsymbol{\beta}(\lambda)\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\lambda)\boldsymbol{\alpha}(\lambda) = \boldsymbol{\omega}(\lambda), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\alpha}(\lambda)$ и $\boldsymbol{\beta}(\lambda)$ – выбираемые числовые или полиномиальные матричные сомножители (матрицы вложения), позволяющие сформировать из обратной матрицы $\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\lambda)$ именно те матричные конструкции, которые задаются в виде желаемых конструкций. Здесь $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$ – так называемый образ системы, т.е. согласованная со структурой $\boldsymbol{\alpha}(\lambda)$ и $\boldsymbol{\beta}(\lambda)$ матрица с желаемыми, например, передаточными матрицами типа $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ от входа $\mathbf{v}(\lambda)$ к выходу $\mathbf{y}(\lambda)$.

Фактически второй этап выполняется с целью формирования трёх взаимосвязанных матриц $\boldsymbol{\alpha}(\lambda)$, $\boldsymbol{\beta}(\lambda)$ и $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$, которые при фиксированной проматрице $\boldsymbol{\Omega}(\lambda)$ формализуют цели решаемой задачи. Тождество вложения в исчерпывающем виде содержит в терминах матричных частных формулировку решаемой задачи. При этом искомые параметры (коэффициенты закона управления) содержатся в проматрице.

Третий этап включает разрешение тождества вложения относительно совокупности искомых матриц. Если явное решение недостижимо, то тождество вложения преобразуется к детерминантным тождествам, либо простым линейным или билинейным матричным уравнениям относительно этих искомых матриц.

Один из способов разрешения тождества вложения связан с преобразованием (переходом) к линейным или билинейным матричным уравнениям, осуществляемым путём выполнения матричной факторизации [16]:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Omega}(\lambda) & \boldsymbol{\alpha}(\lambda)\\ \boldsymbol{\beta}(\lambda) & \boldsymbol{\omega}(\lambda)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)\\ \boldsymbol{\pi}(\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Xi(\lambda) & \boldsymbol{\delta}(\lambda)\end{bmatrix} \tag{4}$$

или в другом виде

$$\boldsymbol{\Omega}(\lambda) = \boldsymbol{\Sigma}(\lambda)\Xi(\lambda), \quad \boldsymbol{\omega}(\lambda) = \boldsymbol{\pi}(\lambda)\boldsymbol{\delta}(\lambda),$$
$$\boldsymbol{\alpha}(\lambda) = \boldsymbol{\Sigma}(\lambda)\boldsymbol{\delta}(\lambda), \quad \boldsymbol{\beta}(\lambda) = \boldsymbol{\pi}(\lambda)\Xi(\lambda).$$

Здесь $\boldsymbol{\delta}(\lambda)$ и $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$ – некоторые вспомогательные матрицы. При этом утверждается, что результат не зависит от способа факторизации, т.е. конкретного выбора разложения проматрицы на сомножители $\boldsymbol{\Sigma}(\lambda)$ и $\Xi(\lambda)$. Обратим также внимание на то, что в данной ситуации все структурные свойства образа $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$ и проматрицы исследуемой системы $\boldsymbol{\Omega}(\lambda)$ формализуются только в преобразованиях $\boldsymbol{\delta}(\lambda)$ и $\boldsymbol{\pi}(\lambda)$.

Техника дальнейших действий может опираться на любой известный метод решения матричных уравнений. Однако наш опыт показал целый ряд преимуществ метода канонизации [13]. Используемые в этом методе матричные делители нуля и канонизаторы составляют удобный инструмент исчерпывающего исследования и решения матричных уравнений.

Данная работа развивает методы технологии вложения в части обеспечения посредством нерегулярных законов управления различных спектров вынужденной и свободной составляющих выхода динамической системы

$$\mathbf{y}(\lambda) = \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)\mathbf{v}(\lambda) + \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{x}_0 \tag{5}$$

или её состояния

$$\mathbf{x}(\lambda) = \mathbf{W}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{v}}(\lambda)\mathbf{v}(\lambda) + \mathbf{W}_{\mathbf{x}}^{0}(\lambda)\mathbf{x}_0.$$

2. Нерегулярные законы управления системой по выходу

Пусть решается задача синтеза для объекта (2) нерегулярного закона управления по выходу

$$\mathbf{G}(\lambda)\mathbf{v}(\lambda) = \mathbf{K}(\lambda)\mathbf{y}(\lambda) + \mathbf{u}(\lambda), \tag{6}$$

когда по определению матрица $\mathbf{G}$ необратима.

Проматрица задачи нерегулярного управления по выходу имеет вид [11], [17]

$$\mathbf{\Omega}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} & 0 & -\mathbf{B} & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \mathbf{I}_r & -\mathbf{G} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Она получается на основе объединения уравнений динамики объекта управления (2), закона управления (6) и так называемого регуляризирующего тождества $\mathbf{v}(\lambda) = \mathbf{v}(\lambda)$, фиксирующего условия на внешние (независимые) входы системы. В этом случае может быть получено следующее блок-матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} & 0 & -\mathbf{B} & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \mathbf{I}_r & -\mathbf{G} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\lambda) \\ \mathbf{y}(\lambda) \\ \mathbf{u}(\lambda) \\ \mathbf{v}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{v}(\lambda) \end{bmatrix},$$

а уже из него – проматрица (7).

Представим далее матрицу регулятора $\mathbf{K}$ суммой двух матриц [19]

$$\mathbf{K} = \breve{\mathbf{K}} + \widehat{\mathbf{K}}, \tag{8}$$

условно называя слагаемые $\breve{\mathbf{K}}$ и $\widehat{\mathbf{K}}$ разомкнутым и замкнутым компонентами регулятора. При этом проматрица управления (7) может быть определена следующим разложением:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{A} & 0 & -\mathbf{B} & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \mathbf{I}_r & -\mathbf{G} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{A} & 0 & -\mathbf{B} & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{K}} & \mathbf{I}_r & -\mathbf{G} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Omega}'} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \breve{\mathbf{K}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\beta}. \tag{9}$$

Полагая, что цель управления заключается в обеспечении заданной передаточной матрицы $\mathbf{W}_\mathbf{y}^\mathbf{v}(\lambda)$ от входного воздействия $\mathbf{v}$ к выходу $\mathbf{y}$ системы, можно записать тождество для образа проматрицы $\boldsymbol{\Omega}'$: $\boldsymbol{\omega}(\lambda) = \mathbf{W}_\mathbf{y}^\mathbf{v}(\lambda)$. При этом матрицы вложения принимают вид

$$\boldsymbol{\alpha} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \mathbf{I}_l]^T, \quad \boldsymbol{\beta} = [0 \quad \mathbf{I}_m \quad 0 \quad 0]. \tag{10}$$

Не трудно показать, что тождество вложения (3) для проматрицы $\boldsymbol{\Omega}'$ в исходном виде (7) и в записи с разложением (9) будет иметь две эквивалентные формы

$$[0 \quad \mathbf{I}_m \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{A} & 0 & -\mathbf{B} & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \mathbf{I}_r & -\mathbf{G} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix} = \mathbf{W}_\mathbf{y}^\mathbf{v}(\lambda), \tag{11}$$

$$[0 \quad \mathbf{I}_m \quad 0 \quad 0] \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{A} & 0 & -\mathbf{B} & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\mathbf{K}} & \mathbf{I}_r & -\mathbf{G} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}^{-1}}_{\boldsymbol{\Omega}'} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\breve{\mathbf{K}}\mathbf{W}_\mathbf{y}^\mathbf{v}(\lambda) \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}'} = \mathbf{W}_\mathbf{y}^\mathbf{v}(\lambda). \tag{12}$$

Отметим, что в формуле (12) разомкнутый компонент $\breve{\mathbf{K}}$ регулятора вынесен в правый числитель (матрицу вложения) $\boldsymbol{\alpha}'$, в то время как замкнутый компонент $\widehat{\mathbf{K}}$ остался в знаменателе (проматрице) $\boldsymbol{\Omega}'$.

Начнём с преобразований тождества вложения (11). В соответствии с технологией вложения в произвольный образ (4) для перехода к расчётным формулам требуется последовательно факторизовать (разложить на множители) входящие в (11) матрицы $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\omega}$, что можно записать согласно (4) и с учётом (11) в форме:

$$\begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{A} & 0 & -\mathbf{B} & 0 & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \mathbf{I}_r & -\mathbf{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l & \mathbf{I}_l \\ 0 & \mathbf{I}_m & 0 & 0 & \mathbf{W}_\mathbf{y}^\mathbf{v}(\lambda) \end{bmatrix} = \left[\overset{\boldsymbol{\Sigma}}{\boldsymbol{\pi}_\mathbf{x} \quad \boldsymbol{\pi}_\mathbf{y} \quad \boldsymbol{\pi}_\mathbf{u}} \quad \boldsymbol{\pi}_\mathbf{v} \right] \begin{bmatrix} & \boldsymbol{\delta}_\mathbf{x} \\ \boldsymbol{\Xi} & \boldsymbol{\delta}_\mathbf{y} \\ & \boldsymbol{\delta}_\mathbf{u} \\ & \boldsymbol{\delta}_\mathbf{v} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Проматрица (7) согласно (13) допускает, например, следующую факторизацию:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_r & -\mathbf{G} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_n-\mathbf{A} & 0 & -\mathbf{B} & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Используя соотношения (10) и (14), раскроем тождество $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Sigma\delta}$ из выражения (13):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_r & -\mathbf{G} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{y}} \\ \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{v}} \end{bmatrix},$$

откуда получаем систему соотношений $0 = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}$, $0 = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{y}}$, $0 = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}} - \mathbf{G}\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{v}}$, $\mathbf{I}_l = \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{v}}$ и далее окончательное тождество для вспомогательной матрицы $\boldsymbol{\delta}$:

$$[\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}} \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{y}} \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{u}} \quad \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{v}}]^T = [0 \quad 0 \quad \mathbf{G} \quad \mathbf{I}_l]^T.$$

Используя соотношения (10) и (14), раскроем тождество $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\pi\Xi}$ из выражения (13):

$$[0 \quad \mathbf{I}_m \quad 0 \quad 0] = [\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}} \quad \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{y}} \quad \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{u}} \quad \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{v}}] \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} & 0 & -\mathbf{B} & 0 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I}_m & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K} & \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекают уравнения

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}\mathbf{BKC} = \mathbf{C} - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}), \\ &\boldsymbol{\pi} = [\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}} \quad I_m - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}\mathbf{BK} \quad \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}\mathbf{B} \quad 0]. \end{aligned} \tag{15}$$

Теперь тождество для образа $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\pi\delta}$ из выражения (13) принимает вид

$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda) = [\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{I}_m - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}\mathbf{BK} \quad \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}\mathbf{B} \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix} = \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}\mathbf{BG}. \tag{16}$$

Объединяя тождества (15) и (16), получим окончательные уравнения для синтеза нерегулярного закона (6):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}\mathbf{BKC} = \mathbf{C} - \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}), \\ \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}\mathbf{BG} = \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda). \end{cases} \tag{17}$$

С формальной точки зрения, все тройки матриц $(\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{K}, \quad \mathbf{G})$, удовлетворяющие (17), будут составлять множество решений задачи нерегулярного управления по выходу.

Повторяя аналогичные построения для тождества (12), получим систему уравнений, эквивалентных (17):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}\mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \mathbf{C} - \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}), \\ \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}\mathbf{B}(\mathbf{G} - \breve{\mathbf{K}}\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)) = \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda). \end{cases} \tag{18}$$

Перегруппируем слагаемые второго уравнения в системе (18). В результате получим

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}\mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \mathbf{C} - \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}), \\ \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}\mathbf{B}\mathbf{G} = \left(\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}\mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\right)\mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda). \end{cases} \tag{19}$$

Необходимо отметить следующее обстоятельство. Вообще говоря, рациональные матрицы $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}$ и $\boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}$, фигурирующие в уравнениях (17) и (19), могут иметь совпадающие или различающиеся значения. Из анализа систем уравнений (17) и (19) следует, что $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}$ в случае, если

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}, \quad \breve{\mathbf{K}} = \mathbf{0},$$

т.е. разомкнутый компонент регулятора имеет тривиальное (нулевое) значение, и по существу разложения (8) и (9) отсутствуют. В других случаях это не так.

Действительно, полагая матрицу

$$\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}\mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}$$

обратимой, преобразуем второе уравнение из (19) к виду

$$\left(\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}\mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda). \tag{20}$$

Теперь, исходя из сопоставления второго уравнения (17) и уравнения (20), можно утверждать, что справедливо тождество

$$\left(\mathbf{I}_m + \boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}\mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\right)^{-1}\boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}\mathbf{B}\mathbf{G} = \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}\mathbf{B}\mathbf{G}, \tag{21}$$

устанавливающее связь между вспомогательными матрицами $\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}$ и $\boldsymbol{\pi}'_{\mathbf{x}}$.

Аналогичные результаты справедливы и для задачи синтеза нерегулярного закона управления по состоянию (1) для системы (2).

3. Анализ влияния компонентов регулятора на динамические свойства системы

Как было отмечено выше, при синтезе законов управления (1) разработчику предоставляется возможность в общем случае произвольную часть (в виде слагаемого) матрицы регулятора $\mathbf{K}$ выносить за пределы контура обратной связи. Однако это отражается на динамических свойствах системы «объект – управление» в целом.

На основании анализа выражений (19) или (17) с учётом тождества (21) сделаем первый вывод: *при обеспечении передаточной матрицы вынужденной составляющей* $\mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda)$ *на динамические свойства системы влияют оба компонента регулятора* $\widehat{\mathbf{K}}$ *и* $\breve{\mathbf{K}}$.

Рассмотрим далее задачу синтеза закона управления по желаемой передаточной матрице $\mathbf{W}^{0}_{\mathbf{y}}(\lambda)$ от начальных условий $\mathbf{x}_0$ к выходу системы при разложении (8) (данная ситуация непосредственно относится к задаче обеспечения *устойчивости движения* замкнутой системы). Для этого образ и матрицы вложения следует задать в виде $\boldsymbol{\omega}(\lambda) = \mathbf{W}^{0}_{\mathbf{y}}(\lambda)$,

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ 0 \\ -\breve{\mathbf{K}}\mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = [0 \quad \mathbf{I}_m \quad 0 \quad 0].$$

Эти величины отличаются от соответствующих величин в тождестве (12) значением правого множителя (матрицы вложения $\boldsymbol{\alpha}$) и образа $\boldsymbol{\omega}$ в правой части тождества.

Повторяя аналогичные предыдущему построения, получим итоговое уравнение в виде

$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_{n} - \mathbf{A}). \tag{22}$$

Отсюда следует второй вывод:
при обеспечении передаточной матрицы свободной составляющей $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)$ *на динамические свойства системы влияет только замкнутый компонент регулятора* $\widehat{\mathbf{K}}$.

Объединяя уравнения (19), (22) и формируя тождество

$$\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{x}}' = \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda),$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases}\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \mathbf{C} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_{n} - \mathbf{A}),\\ \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{G} = \left(\mathbf{I}_{m} + \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\right)\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda),\end{cases} \tag{23}$$

решение которой позволит определить матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{K}$ закона управления (6), обеспечивающего одновременно обе желаемые передаточные матрицы свободной $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)$ и вынужденной $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ составляющих выхода $\mathbf{y}(\lambda)$ системы.

Третий вывод, вытекающий из анализа системы (23), состоит в следующем:
при обеспечении обеих передаточных матриц $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ *и* $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)$ *на матрицу свободной составляющей движения* $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)$ *влияет только замкнутый компонент регулятора* $\widehat{\mathbf{K}}$, *а на матрицу вынужденной составляющей* $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ *– только разомкнутый компонент* $\breve{\mathbf{K}}$.

Для перехода к регулярным законам управления в уравнениях (19), (22) и (23) следует полагать матрицу предкомпенсатора G обратимой.

По существу доказана справедливость теоремы [19].

Теорема 1. *Решение задачи синтеза как регулярного, так и нерегулярного управления динамической системой по выходу при заданных передаточных матрицах* $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ *и* $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)$ *определяют два изолированных линейных уравнения*

$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \mathbf{C} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_{n} - \mathbf{A}),$$
$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{G} = \left(\mathbf{I}_{m} + \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\right)\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda).$$

Решение первого из этих уравнений даёт матрицу $\widehat{\mathbf{K}}$ замкнутого компонента регулятора, а решение второго уравнения – совокупность матриц предкомпенсатора $\mathbf{G}$ и разомкнутого компонента $\breve{\mathbf{K}}$ регулятора.

Обеспечение порознь передаточных матриц $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ и $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)$ не обладает какой-либо новизной и поэтому здесь не анализируется. Иначе дело обстоит с одновременным обеспечением этих передаточных матриц. Два независимых линейных матричных уравнения в системе (23) позволяют по-новому взглянуть на синтез линейного закона управления (6).

Действительно, для обеспечения желаемой свободной составляющей процесса (5), формализованного заданной передаточной матрицей $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)$, требуется путём решения первого уравнения в системе (23)

$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \mathbf{C} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$$

найти матрицу $\widehat{\mathbf{K}}$ регулятора, стоящего в обратной связи системы. Однако это только одна аддитивная часть подлежащего реализации регулятора, называемая его замкнутым компонентом. Существование и единственность решения первого уравнения в системе (23) зависят от алгебраических особенностей данного уравнения [13], [18].

Если ввести обозначения

$$\underbrace{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}_{\boldsymbol{\Theta}}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \underbrace{\mathbf{C} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})}_{\boldsymbol{\Upsilon}}, \tag{24}$$

то согласно [13], необходимое и достаточное условие разрешимости (совместности) уравнения

$$\boldsymbol{\Theta}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \boldsymbol{\Upsilon}$$

относительно матрицы $\widehat{\mathrm{K}}$ будет заключаться в выполнении системы алгебраических тождеств

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Theta}_L^{\perp}\boldsymbol{\Upsilon} = 0, \\ \boldsymbol{\Upsilon}\mathbf{C}_R^{\perp} = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Здесь [18]

$$\boldsymbol{\Theta}_L^{\perp} = \overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_L^{\perp} -$$

левый делитель нуля максимального ранга произведения матриц $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}$, т.е. $\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_L^{\perp} \neq 0$ и

$$\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_L^{\perp}\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B} = 0.$$

В исходных обозначениях (24) система (25) имеет вид

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_L^{\perp}\left(\mathbf{C} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\right) = 0, \\ \left(\mathbf{C} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\right)\mathbf{C}_R^{\perp} = 0. \end{cases} \tag{26}$$

При этом, как видно из записи (2), второе условие в системе (26) можно упростить до вида

$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{C}_R^{\perp} = 0. \tag{27}$$

Если условия разрешимости (26) выполняются, то формула решения первого уравнения системы (23) в общем случае примет вид [13]

$$\widehat{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\Theta}^{+}\boldsymbol{\Upsilon}\mathbf{C}^{+} + \boldsymbol{\Theta}_R^{\perp}\widehat{\mathbf{N}} + \widehat{\mathbf{M}}\mathbf{C}_L^{\perp} \tag{28}$$

или с учётом введённых выше обозначений

$$\widehat{\mathbf{K}} = \left(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\right)^{+}\left(\mathbf{C} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_{n} - \mathbf{A})\right)\mathbf{C}^{+} + \overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_{R}^{\perp}\widehat{\mathbf{N}} + \widehat{\mathbf{M}}\mathbf{C}_{L}^{\perp}. \tag{29}$$

Здесь матрицы $\mathbf{\Theta}^{+} = \left(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\right)^{+}$, $\mathbf{\Theta}_{R}^{\perp} = \overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_{R}^{\perp}$, $\mathbf{C}^{+}$, $\mathbf{C}_{L}^{\perp}$ удовлетворяют условиям [13]

$$\mathbf{\Theta}\mathbf{\Theta}^{+}\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta},\quad \mathbf{\Theta}^{+}\mathbf{\Theta}\mathbf{\Theta}^{+} = \mathbf{\Theta}^{+},\quad \mathbf{\Theta}\mathbf{\Theta}_{R}^{\perp} = 0,\quad \mathbf{\Theta}_{R}^{\perp} \neq 0,$$
$$\mathbf{C}\mathbf{C}^{+}\mathbf{C} = \mathbf{C},\quad \mathbf{C}^{+}\mathbf{C}\mathbf{C}^{+} = \mathbf{C}^{+},\quad \mathbf{C}_{L}^{\perp}\mathbf{C} = 0,\quad \mathbf{C}_{L}^{\perp} \neq 0,$$

а матрицы $\widehat{\mathbf{M}}$ и $\widehat{\mathbf{N}}$ – произвольны.

Второе уравнение системы (23) содержит две неизвестные (искомые) матрицы $\breve{\mathrm{K}}$ и G, т.е. матрицы разомкнутого компонента регулятора и предкомпенсатора. Ясно, что любая пара этих матриц, удовлетворяющая решаемому уравнению, обеспечивает заданную передаточную матрицу $\mathrm{W}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{v}}(\lambda)$ вынужденной составляющей процесса (5) на фоне заданной передаточной матрицы $\mathrm{W}_{\mathrm{y}}^{0}(\lambda)$ свободной составляющей. Другими словами, разомкнутый компонент регулятора $\breve{\mathrm{K}}$ и предкомпенсатор G могут взаимно пересчитываться друг в друга. Можно, например, задавшись из каких-либо соображений одной из этих передаточных матриц, вычислять другую.

Рассмотрим соответствующие случаи подробнее.

1. Разомкнутый компонент регулятора $\breve{\mathrm{K}}$ выбирается, например, из условия реализуемости регулятора (8) в целом или других пожеланий заказчика системы или поставщика элементной базы для её производства. Тогда второе уравнение в системе (23) решается относительно матрицы предкомпенсатора G.

2. Матрица предкомпенсатора G выбирается на основании пожеланий заказчика или условий реализации. Тогда второе уравнение в системе (23), приведённое к виду

$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda) = \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{G} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda),$$

решается относительно разомкнутого компонента регулятора $\breve{\mathbf{K}}$. Условие разрешимости этого уравнения может быть получено по аналогии с предыдущим случаем:

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_{L}^{\perp}\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda) = 0, \\ \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{G}\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)}\Big|_{R}^{\perp} = 0. \end{cases}$$

Таким же образом можно получить формулу решения для разомкнутой компоненты регулятора

$$\breve{\mathbf{K}} = \left(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\right)^{+}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{G} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)\right)\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)}\Big|^{+} + \overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_{R}^{\perp}\breve{\mathbf{N}} + \breve{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)}\Big|_{L}^{\perp}. \tag{30}$$

Напомним, что реализации подлежит регулятор с передаточной матрицей (8), равной сумме обоих компонентов (29) и (30), т.е. регулятор вида

$$\widehat{\mathbf{K}} + \breve{\mathbf{K}} = \left(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\right)^{+}\left(\mathbf{C} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_{n} - \mathbf{A})\right)\mathbf{C}^{+} + \overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_{R}^{\perp}\widehat{\mathbf{N}} + \widehat{\mathbf{M}}\mathbf{C}_{L}^{\perp} +$$
$$+\left(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\right)^{+}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{G} - \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)\right)\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)}\Big|^{+} + \overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_{R}^{\perp}\breve{\mathbf{N}} + \breve{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)}\Big|_{L}^{\perp},$$

который после упрощений может быть записан как

$$\widehat{\mathbf{K}}+\breve{\mathbf{K}}=\left(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}\right)^{+}\left[\left(\mathbf{C}-\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)(\lambda\mathbf{I}_{n}-\mathbf{A})\right)\mathbf{C}^{+}+\left(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{BG}-\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)\right)\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)}\Big|^{+}\right]+ \\ +\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)\mathbf{B}}\Big|_{R}^{\perp}\left(\widehat{\mathbf{N}}+\breve{\mathbf{N}}\right)+\widehat{\mathbf{M}}\mathbf{C}_{L}^{\perp}+\breve{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)}\Big|_{L}^{\perp}. \tag{31}$$

Перейдём к изучению спектрального состава движения системы (2) с регулятором (31).

4. Спектральный состав выхода системы

Предположим, что желаемое поведение управляемой системы, как и поведение исходной системы (2), задано передаточными матрицами в пространстве состояний

$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)=\mathbf{C}\left(\lambda\mathbf{I}_{n}-\mathbf{A}_{ref}^{0}\right)^{-1}, \\ \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)=\mathbf{C}\left(\lambda\mathbf{I}_{n}-\mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}\right)^{-1}\mathbf{B}_{ref}. \tag{32}$$

Здесь $\mathrm{A}_{\mathrm{ref}}^{0}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$, $\mathrm{A}_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{v}}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ и $\mathrm{B}_{\mathrm{ref}}\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{r}}$ – заданные матрицы. Как видно, размерности пространств состояний реализаций передаточных матриц $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda)$ и $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ совпадают и составляют n. В общем случае имеет место неравенство

$$\mathbf{A}_{ref}^{0}\neq\mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}},$$

означающее, что спектральный состав свободного и вынужденного движений может характеризоваться следующими условиями:

1. Может совпадать полностью, т.е. в терминах характеристических полиномов

$$\chi_{ref}^{0}(\lambda)=\det\left(\lambda\mathbf{I}_{n}-\mathbf{A}_{ref}^{0}\right),\quad \chi_{ref}^{\mathbf{v}}(\lambda)=\det\left(\lambda\mathbf{I}_{n}-\mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}\right),\quad \chi_{ref}^{0}(\lambda)=\chi_{ref}^{\mathbf{v}}(\lambda),$$

что соответствует подобию матриц $\mathrm{A}_{\mathrm{ref}}^{0}$ и $\mathrm{A}_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{v}}$, связанному с существованием преобразования

$$\mathrm{A}_{\mathrm{ref}}^{0}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}\mathbf{T};$$

2. Может отличаться частично, т.е. в терминах спектров (собственных значений – eigenvalues) матриц

$$\operatorname{eig}\mathrm{A}_{\mathrm{ref}}^{0}=\left\{\widehat{\lambda}_{i}:\quad \chi_{ref}^{0}\left(\widehat{\lambda}_{i}\right)=0,\quad i=\overline{1,n}\right\}, \\ \operatorname{eig}\mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}=\left\{\widetilde{\lambda}_{i}:\quad \chi_{ref}^{\mathbf{v}}\left(\widetilde{\lambda}_{i}\right)=0,\quad i=\overline{1,n}\right\}, \\ \operatorname{eig}\mathrm{A}_{\mathrm{ref}}^{0}\cap\operatorname{eig}\mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}\neq\emptyset;$$

3. Может различаться полностью:

$$\operatorname{eig}\mathrm{A}_{\mathrm{ref}}^{0}\cap\operatorname{eig}\mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}=\emptyset.$$

С учётом равенств (32) вместо системы (23) можно записать эквивалентные формулы

$$\begin{cases} \mathbf{C}\left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0\right)^{-1}\mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \mathbf{C}\left(\mathbf{I}_n - \left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0\right)^{-1}(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})\right), \\ \mathbf{C}\left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G} = \left(\mathbf{I}_m + \mathbf{C}\left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0\right)^{-1}\mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\right)\mathbf{C}\left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}\right)^{-1}\mathbf{B}_{ref} \end{cases} \tag{33}$$

или

$$\begin{cases} \mathbf{C}\left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0\right)^{-1}\mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \mathbf{C}\left(\mathbf{I}_n - \left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0\right)^{-1}(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A})\right), \\ \mathbf{C}\left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{C}\left(\mathbf{I}_n + \left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0\right)^{-1}\mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\mathbf{C}\right)\left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}\right)^{-1}\mathbf{B}_{ref}. \end{cases} \tag{34}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть матрица $\mathbf{C}$ не имеет правых делителей нуля, т.е. число её строк не меньше числа столбцов и ранг максимальный. В этом случае уравнения (33) и (34) допускают сокращение слева на матрицу $\mathbf{C}$, а простые преобразования приводят эти системы уравнений к виду

$$\begin{cases} \mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{ref}^0, \\ \mathbf{B}\mathbf{G} = \left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0 + \mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\mathbf{C}\right)\left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}\right)^{-1}\mathbf{B}_{ref}. \end{cases} \tag{35}$$

Решение системы уравнений (35) позволяет получить все возможные матрицы $\mathbf{G}$, $\widehat{\mathbf{K}}$ и $\breve{\mathbf{K}}$ в законах управления (1). Например, из вида первого уравнения следует, что оно будет разрешимым, если и только если выполняется условие Эрзбергера

$$\mathbf{B}_L^{\perp}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_{ref}^0\right) = 0.$$

При этом формула для матрицы замкнутой компоненты регулятора $\widehat{\mathbf{K}}$ при квадратной обратимой матрице $\mathbf{C}$ будет иметь вид

$$\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{B}^{+}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}_{ref}^0\right)\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{B}_R^{\perp}\widehat{\mathbf{N}}. \tag{36}$$

Второй частный случай свяжем дополнительно с тождеством

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{ref}.$$

С учётом этого тождества второе уравнение системы (35) приводится к виду

$$\mathbf{B}\mathbf{G} = \left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0 + \mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\mathbf{C}\right)\left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}\right)^{-1}\mathbf{B}. \tag{37}$$

Если матрица $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ не имеет правых делителей нуля, т.е. $\left.\overline{\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)}\right|_R^{\perp} = 0$, то из уравнения (37) вытекает импликация

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B}\mathbf{G} = \left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^0 + \mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\mathbf{C}\right)\left(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}\right)^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{B}_R^{\perp} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A}_{ref}^0 - \mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\mathbf{C} = \mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}.$$

В следующем анализируемом частном случае будем полагать

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_n.$$

Тогда уравнения (35) принимают вид

$$\begin{cases} \mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^0_{ref}, \\ \mathbf{B}\mathbf{G} = \left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^0_{ref} + \mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\right)\left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^{\mathbf{v}}_{ref}\right)^{-1}\mathbf{B}_{ref}. \end{cases} \tag{38}$$

Решение этих уравнений соответствует закону управления (1) с использованием как регулярного ($\det \mathbf{G} \neq 0$), так и нерегулярного варианта закона.

Итак, полученные решения задач линейного управления, в отличие от известных результатов, определяют возможность реализации процессов с различной динамикой в свободном и вынужденном движении замкнутой системы. Теперь можно ввести формальные определения.

Определение 1. *Движение замкнутой линейной динамической системы с отличающимися спектрами свободной и вынужденной составляющих будем называть биспектральным движением.*

Определение 2. *Закон управления движением замкнутой линейной динамической системы, обеспечивающий заданные отличающиеся спектры свободной и вынужденной составляющих, будем называть биспектральным законом управления.*

5. Анализ биспектральной и бисингулярной динамики системы

Дадим краткое инженерное толкование полученных результатов. Рассмотрим с учётом формулы (8) известное выражение для передаточной матрицы, описывающей поведение замкнутой системы в форме «вход – состояние – выход»

$$\mathbf{C}\left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\left(\widehat{\mathbf{K}} + \breve{\mathbf{K}}\right)\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda). \tag{39}$$

Известны формулы преобразования матричных произведений [19]

$$\forall \boldsymbol{\Omega}^{-1}: \quad \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\beta})^{-1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}. \tag{40}$$

Если теперь в формуле (39) ввести обозначения $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B}\mathbf{G}$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}$, $\boldsymbol{\Omega} = \lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C}$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda)$, то согласно равенствам (40) получим тождество передаточных матриц

$$\mathbf{C}\left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{G} - \breve{\mathbf{K}}\mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda)\right) = \mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda). \tag{41}$$

С другой стороны, вместо матрицы $\mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda)$ в левой части равенства (41) можно подставить левую часть тождества (39). В результате получим

$$\mathbf{C}\left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{I}_r - \breve{\mathbf{K}}\mathbf{C}\left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\left(\widehat{\mathbf{K}} + \breve{\mathbf{K}}\right)\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{B}\right)\mathbf{G} = \mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda). \tag{42}$$

Определение 3. *Передаточную матрицу вида*

$$\mathbf{R}_{bs}(\lambda) = \mathbf{I}_r - \breve{\mathbf{K}}\mathbf{C}\left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\left(\widehat{\mathbf{K}} + \breve{\mathbf{K}}\right)\mathbf{C}\right)^{-1}\mathbf{B} \tag{43}$$

будем называть матрицей биспектрального предкомпенсатора.

Структура системы с биспектральным нерегулярным законом управления приведена на рис. 3.

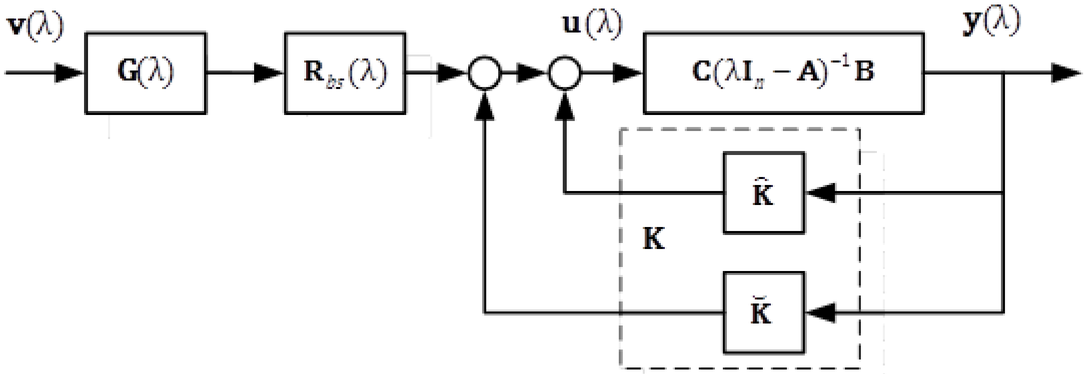

Рис. 3. Структура системы с биспектральным законом управления

Теперь можно добавить к сказанному ещё одно пояснение. В соответствии с рис. 3 регулятор $\mathbf{K}$ содержит две параллельные цепи прохождения сигнала обратной связи. При этом влияние контура с матрицей $\breve{\mathbf{K}}$ на прохождение через систему управляющего воздействия $\mathbf{v}$ компенсируется фильтром (биспектральным компенсатором), стоящим во входной цепи и следующим непосредственно за предкомпенсатором $\mathbf{G}(\lambda)$.

Из анализа формул (42) и (43) можно сделать сходные с предыдущим выводы.

1. Передаточная матрица, описывающая поведение свободного движения замкнутой системы ($\mathrm{v} = 0, \quad \mathrm{x}_0 \neq 0$), имеет вид

$$\mathbf{C}\left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C}\right)^{-1} = \mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{0}(\lambda),$$

и, следовательно, спектр свободной составляющей движения действительно определяется собственными числами матрицы

$$\mathbf{A}_{ref}^{0} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{C}; \tag{44}$$

2. Из эквивалентности передаточных матриц (39) и (42) следует, что спектр вынужденной составляющей движения замкнутого контура согласовывается со спектром матрицы

$$\mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\left(\widehat{\mathbf{K}} + \breve{\mathbf{K}}\right)\mathbf{C}. \tag{45}$$

Отметим ещё раз тот факт, что в общем случае спектр матрицы (44) может как частично, так и полностью отличаться от спектра матрицы (45). Следовательно, закон управления в виде тройки матриц ($\widehat{\mathbf{K}}, \quad \breve{\mathbf{K}}, \quad \mathbf{G}$) в общем случае будет обеспечивать замкнутому контуру биспектральную (другими словами, «разнотемповую») динамику в свободном и вынужденном движениях.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в отношении сингулярных чисел матриц (44) и (45). Действительно, множество сингулярных чисел матрицы $\mathbf{A}_{ref}^{0}$ также может частично или полностью отличаться от множества сингулярных чисел матрицы $\mathbf{A}_{ref}^{\mathbf{v}}$, определяя тем самым различную чувствительность замкнутой системы к изменению входных воздействий и начальных условий.

Определение 4. *Закон управления движением замкнутой линейной динамической системы, обеспечивающий различную чувствительность свободной и вынужденной составляющих, будем называть бисингулярным законом управления.*

Следующий вывод имеет отношение к каузальности (физической реализуемости [12]) синтезируемых законов управления. Эта проблема относится к обеим составляющим закона управления – в общем случае рациональным матрицам $\mathbf{K}(\lambda)$ и $\mathbf{G}(\lambda)$, зависящим от комплексной переменной λ.

В отношении рациональной матрицы предкомпенсатора $\mathbf{G}(\lambda)$ вопрос о физической реализуемости может решаться непосредственным сравнением максимальных степеней полиномов числителей и знаменателей, составляющих соответствующие скалярные передаточные функции. В случае если не найдется ни одного полинома-числителя, степень которого превосходит степень полинома-знаменателя, исследуемая матрица будет иметь собственный (все степени полиномов-числителей строго меньше степени полиномов-знаменателей), либо строго собственный (степени полиномов-числителей не превосходят степени полиномов-знаменателей) вид. Известно, что собственные и строго собственные рациональные матрицы являются каузальными[1].

С матрицей регулятора $\mathbf{K}(\lambda)$ дело обстоит сложнее. Конкретизируем закон обратной связи в том смысле, что разложим некаузальную (несобственную) рациональную матрицу $\mathbf{K}(\lambda)$ на две составляющие

$$\mathbf{K}(\lambda) = \widehat{\mathbf{K}}(\lambda) + \breve{\mathbf{K}}(\lambda), \tag{46}$$

где $\widehat{\mathbf{K}}(\lambda)$ – каузальная (собственная или строго собственная) и $\breve{\mathbf{K}}(\lambda)$ – некаузальная (несобственная) матрицы. Поскольку желаемая передаточная матрица $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ у физически реализуемой системы по определению должна быть каузальной, то из равенств (43) и (46) непосредственно вытекает справедливость утверждения.

Теорема 2. *Закон обратной связи*

$$\mathbf{K}(\lambda) = \widehat{\mathbf{K}}(\lambda) + \breve{\mathbf{K}}(\lambda),$$

где $\widehat{\mathbf{K}}(\lambda)$ *– каузальная и* $\breve{\mathbf{K}}(\lambda)$ *– некаузальная передаточные матрицы, при каузальной желаемой передаточной матрице* $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda)$ *физически реализуем с помощью предкомпенсатора тогда и только тогда, когда передаточная матрица*

$$\mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{I}_n - \breve{\mathbf{K}}(\lambda)\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda) \tag{47}$$

является каузальной.

6. Примеры синтеза

Пример 1. Возьмём в качестве объекта управления доступную для непосредственных проверок модель системы «вход – состояние»:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

[1] Проблема устойчивости предкомпенсатора заслуживает отдельного обсуждения.

Такая модель описывает поведение двух последовательно соединённых интегрирующих звеньев при непосредственном наблюдении выходов каждого из интеграторов (рис. 4.).

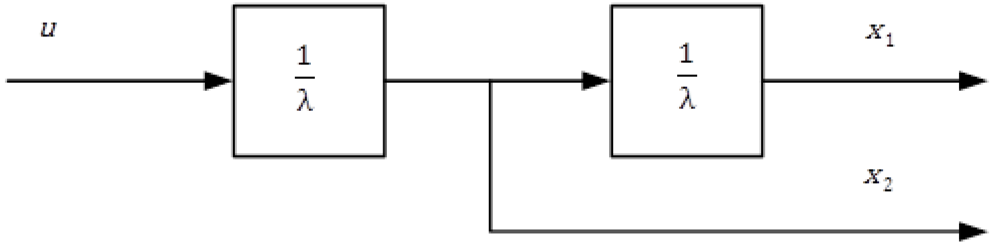

Рис. 4. Структурная схема с двумя интеграторами

Пусть требуется определить закон управления, обеспечивающий объекту (48) биспектральную динамику в свободном и вынужденном движении, т.е. различные темпы отработки входного сигнала и «списывания» начальных условий или возмущений, «приведённых» к начальным условиям. Именно, пусть

$$\mathbf{A}^0_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\widehat{\omega}^2 & -2\hat{\xi}\widehat{\omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{\mathbf{v}}_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\breve{\omega}^2 & -2\breve{\xi}\breve{\omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ref} = \mathbf{B}, \tag{49}$$

где в общем случае $\breve{\omega} \neq \widehat{\omega}$, $\breve{\xi} \neq \hat{\xi}$.

Не представляет особого труда по формуле (36) найти закон обратной связи, реализующий матрицу $\mathbf{A}^0_{ref}$. В данном случае он имеет вид

$$\widehat{\mathbf{K}} = [\widehat{\omega}^2 \quad 2\hat{\xi}\widehat{\omega}].$$

Из второго уравнения системы (38) при равенстве $\mathbf{B}_{ref} = \mathbf{B}$ имеем

$$\mathbf{B} = \left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^0_{ref} + \mathbf{B}\breve{\mathbf{K}}\right)\left(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^{\mathbf{v}}_{ref}\right)^{-1}\mathbf{B}, \tag{50}$$

что позволяет с учётом значений (48) и (49) получить

$$\breve{\mathbf{K}} = \left[\breve{\omega}^2 - \widehat{\omega}^2 \quad 2\left(\breve{\xi}\breve{\omega} - \hat{\xi}\widehat{\omega}\right)\right].$$

Далее по формуле (43) найдём передаточную функцию биспектрального предкомпенсатора

$$\mathbf{R}_{bs}(\lambda) = \mathbf{I}_r - \breve{\mathbf{K}}\mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda^2 + 2\breve{\xi}\breve{\omega}\lambda + \breve{\omega}^2}\left[\breve{\omega}^2 - \widehat{\omega}^2 \quad 2\left(\breve{\xi}\breve{\omega} - \hat{\xi}\widehat{\omega}\right)\right]\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= 1 - \frac{2\left(\breve{\xi}\breve{\omega} - \hat{\xi}\widehat{\omega}\right)\lambda + \breve{\omega}^2 - \widehat{\omega}^2}{\lambda^2 + 2\breve{\xi}\breve{\omega}\lambda + \breve{\omega}^2},$$

реализующего биспектральную динамику замкнутой системы (см. рис. 5).

Анализ знаменателя передаточной функции предкомпенсатора

$$\mathbf{R}_{bs}(\lambda) = 1 - \frac{2\left(\breve{\xi}\breve{\omega} - \hat{\xi}\widehat{\omega}\right)\lambda + \breve{\omega}^2 - \widehat{\omega}^2}{\lambda^2 + 2\breve{\xi}\breve{\omega}\lambda + \breve{\omega}^2} \tag{51}$$

показывает, что при устойчивой матрице

$$\mathbf{A}^{\mathbf{v}}_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\breve{\omega}^2 & -2\breve{\xi}\breve{\omega} \end{bmatrix}$$

предкомпенсатор (51) также будет устойчивым.

При совпадении матриц $\mathbf{A}^{0}_{ref}$ и $\mathbf{A}^{\mathbf{v}}_{ref}$ передаточная функция (51) соответствует усилительному звену с коэффициентом усиления 1.

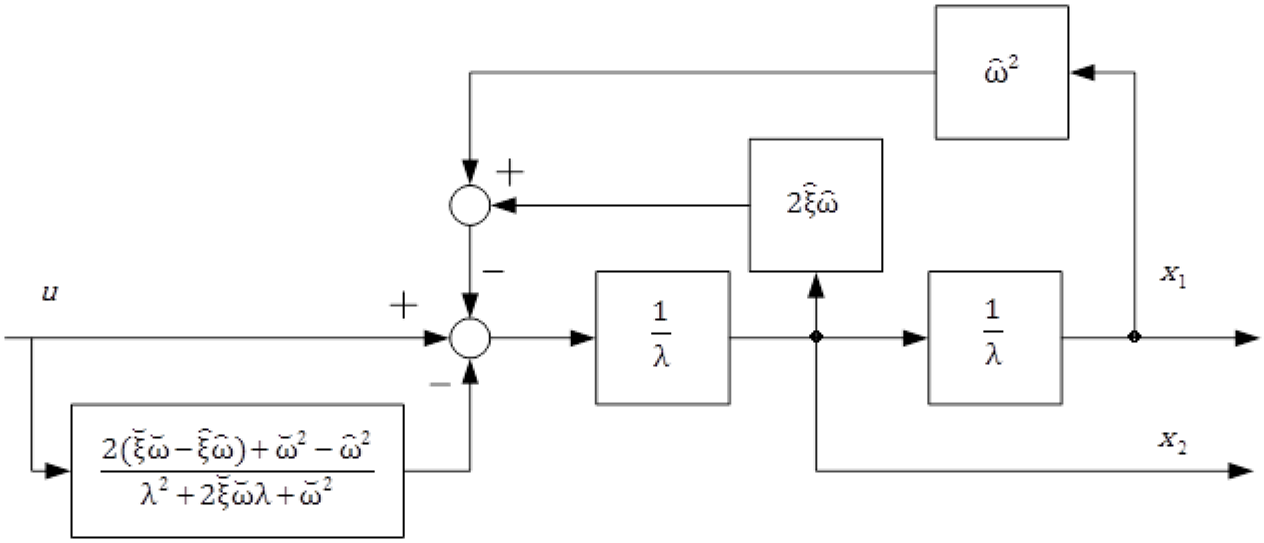

Рис. 5. Структурная схема замкнутой биспектральной системы

Пример 2. На следующем примере продемонстрируем эффекты, определяемые теоремой 2. Пусть в модели (48) матрица выхода $\mathbf{C}$ имеет вид

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0].$$

Таким образом, в отличие от ранее рассмотренного случая (рис. 4) здесь выход объекта содержит только сигнал конечного интегратора. Для того чтобы обеспечить замкнутой системе передаточную функцию

$$\mathbf{W}^{\mathbf{v}}_{\mathbf{y}}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2}$$

необходимо реализовать некаузальную обратную связь

$$\mathbf{K}(\lambda) = 2\xi\omega\lambda + \omega^2,$$

содержащую звено чистого дифференцирования

$$2\xi\omega\frac{d}{dt}.$$

Будем считать, что в разложении (8) выбраны компоненты $\widehat{\mathbf{K}} = \omega^2$ и $\breve{\mathbf{K}} = 2\xi\omega\lambda$. Но тогда согласно выражению (47) формула биспектрального компенсатора будет иметь строго собственный (каузальный) вид

$$\mathbf{R}_{bs}(\lambda) = \mathbf{I}_r - \breve{\mathbf{K}}(\lambda)\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^{\mathbf{v}}(\lambda) = 1 - \frac{2\xi\omega\lambda}{\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2} = \frac{\lambda^2 + \omega^2}{\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2}.$$

При этом передаточная функция $\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^0(\lambda)$ будет соответствовать передаточной функции консервативного звена

$$\mathbf{W}_{\mathbf{y}}^0(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2}.$$

Отметим, что чувствительность свободного движения объекта в последнем случае отличается, от чувствительности вынужденного движения. Последнее обстоятельство может оказывать благоприятное влияние при парировании внешних возмущающих воздействий.

7. Заключение

В работе с использованием технологии вложения систем развивается метод синтеза нерегулярных каузальных законов управления, обеспечивающий линейной динамической системе различный спектральный состав (динамические свойства) в свободном и вынужденном движении. Наряду с другими методами синтеза управления [13], [18] – [22], этот метод позволяет расширить возможности поиска управления пилотируемыми и беспилотными летательными аппаратами различного назначения.

Литература

[1] Буков, В.Н., Горюнов, С.В., Рябченко, В.Н. Анализ и синтез матричных линейных систем. Сравнение подходов. Автоматика и телемеханика, № 11, с. 3-43, 2000.

[2] Осетинский, Н.И. Обзор некоторых результатов и методов в современной теории линейных систем. Математические методы в теории систем, с. 328-379, 1989.

[3] Tannenbaum, A. Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects. Lecture Notes in Mathematics. New-York: Springer-Verlag, 1981.

[4] Aling, A., and Schumacher, J.M. A Nine Fold Canonical Decomposition for Linear System. Int. J. Control, iss. 39, p. 779-805, 1984.

[5] Morse, A.S. Structural Invariants of Linear Multivariable Systems. SIAM J. Control, iss. 11, p. 446-465, 1973.

[6] Hautus, M.L.J., and Heymann, H. Linear Feedback Decoupling: Transfer Function Analysis. IEEE Trans. Automat. Control, p. 823-832, 1983.

[7] Lin, Ch.-An, and Hsien, T.-Fu. Decoupling Controller Design for Linear Multivariable Plants. IEEE Trans. Automat. Control, vol. 36, iss. 4, p. 485-489, 1991.

[8] Kucera, V., and Toledo, E.C. A Review of Stable Exact Model Matching by State Feedback. 22nd Mediterranean Conf. on Control and Automat., p. 85-90, 2014.

[9] Toledo, E.C., and Leon, R.J.J. Feedback Decoupling of Linear Multivariable Systems. IEEE Latin America Trans., vol. 13, iss. 8, p. 2529-2537, 2015.

[10] Commault, C., Lafay, J.F., and Malabre, M. Structure of Linear Systems. Geometric and Transfer Matrix Approaches. Kybernetika, vol. 27, iss. 3, p. 170-185, 1991.

[11] Ryabchenko, V.N. Embedding of Systems. Irregular Control Laws. Autom. Remote Control, vol. 62, iss. 7, p. 1192-1203, 2001.

[12] Мисриханов, М.Ш., Рябченко, В.Н. Каузальные и антикаузальные дискретные динамические системы. Вестник ИГЭУ, № 6, с. 120-127, 2004.
[13] Зубов, Н.Е., Микрин, Е.А., Рябченко, В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 666 с.
[14] Cohn, P.M. Free Rings and their Relations. London: Academic Press, 1985. 588 p.
[15] Malcolmson P. A Prime Matrix Ideal Yields a Skew Field. J. London Math. Soc., vol. 18, iss. 2, p. 221-233, 1978.
[16] Malcolmson, P. Weakly Finite Matrix Localization. J. London Math. Soc., vol. 48, iss. 1, p. 31-38, 1993.
[17] Буков, В.Н., Рябченко, В.Н. Вложение систем. Проматрицы. Автоматика и телемеханика, № 4, с. 20-33, 2000.
[18] Bronnikov, A.M., Bukov, V.N., Ryabchenko, V.N., and Zubov, N.E. Algebraic Singularities of Dynamic Systems Associated with Zero Divisors of their Transfer Matrices. J. Comput. Syst. Sci. Int., vol. 43, iss. 3, p. 351-359, 2004.
[19] Зубов, Н.Е., Мисриханов, М.Ш., Рябченко, В.Н. Посткомпенсация в задачах управления движением летательных аппаратов. Королёв: Изд-во РКК «Энергия», 2015. 132 с.
[20] Микрин, Е.А., Зубов, Н.Е., Лапин, А.В., Рябченко, В.Н. Аналитическая формула вычисления регуляторов для линейных SIMO-систем. Дифференциальные уравнения и процессы управления, № 1, с. 1-11, 2020.
[21] Микрин, Е.А., Рябченко, В.Н., Зубов, Н.Е., Лапин, А.В. Анализ и синтез динамической MIMO-системы на основе ленточных матриц специального вида. Дифференциальные уравнения и процессы управления, № 2, с. 1-14, 2020.
[22] Зубов, Н.Е., Лапин, А.В., Рябченко, В.Н. О связи модальной управляемости по выходу динамической MIMO-системы и вида матриц с желаемыми спектрами. Дифференциальные уравнения и процессы управления, № 2, с. 1-12, 2021.

Synthesis of control providing various dynamic properties of free and forced motion of a multidimensional system

N.E. Zubov (Bauman MSTU, S.P. Korolev RSC “Energia”)
V.N. Ryabchenko (Bauman MSTU)
A.V. Lapin (Bauman MSTU, GosNIIAS)
I.M. Galiaskarov (CEMC UES)

Abstract. A feedback control law with a precompensator is considered for a multidimensional dynamic system. A special feature of the control synthesis is that the transfer matrix of precompensator is rectangular or its determinant is equal to zero. Thus, the problem of irregular causal control laws synthesis is considered. The paper describes a control synthesis method that provides various spectral contents (dynamic properties) of a linear dynamic system at free and forced motion. To find a solution we apply the system embedding technology. The improvement of embedding technology methods is shown: by means of irregular control laws we provide various spectra of free and forced components in the state or output vectors of a dynamic system. Theorems on the synthesis of irregular control of a dynamic system by output and on physical realizability of the control law by means of a precompensator are formulated. Methodic examples of the synthesis are given.

Keywords: multidimensional dynamic system, precompensator, feedback, free and forced motion, irregular causal control laws.