ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
N. 2, 2022
Электронный журнал,
рег. Эл. N ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://diffjournal.spbu.ru/
e-mail: jodiff@mail.ru

Групповой анализ дифференциальных уравнений

О дифференциальной алгебре на решениях ОУЭФ и прямом алгоритмическом поиске

Флегонтов А. В.[1,*] Шагай М. А.[2,**]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет

[1] Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

[2] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

e-mail:

* flegontoff@yandex.ru

** shagay.masha@mail.ru

Аннотация. Рассматривается сужение дифференциальной алгебры базисных функций на решениях обобщенно–однородного дифференциального уравнения Эмдена–Фаулера. Базисные конечные элементы выбираются из классов тригонометрических и специальных эллиптических функций. По методу дифференциальных «пазлов» конструируются все решения посредством применения алгоритмического прямого метода.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, обобщенное однородное уравнение Эмдена-Фаулера, орбита Вейерштрасса, орбита тангенсов, эллиптическая функция, дифференциальные пазлы.

1 Введение

Метод дифференциальных «пазлов» получил широкое развитие в работах В. Ф. Зайцева и Л. В. Линчук [1, 2], а также в других работах [3, 4, 5].

В работе [4] был предложен алгоритмический прямой метод поиска решений, который позволяет найти подклассы изучаемого класса обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых могут быть выражены через конечный набор элементов, представимых в терминах заданных классов функций (полиномов, функции Вейерштрасса, и т. д.). В работе [4] также был предложен алгоритм для поиска новых уравнений и их решений, которые строятся из некоторого конечного набора полиномов, а также были получены новые решения некоторых обобщённых уравнений Эмдена– Фаулера.

Напомним, что метод дифференциальных «пазлов» позволяет находить некоторые подклассы выбранного класса ОДУ ([2]). Общие решения подклассов могут быть представлены в терминах заданных классов функций (в классе полиномов, тригонометрических, эллиптических или некоторых специальных функций). Дифференциальным «пазлом» исходного уравнения называется подмножество, замкнутое на многообразии решений ОДУ. При этом, условие замкнутости представляет собой некоторую систему алгебраических уравнений на параметры, и параметры уравнения, определяющие элемент исходного класса ОДУ, для которого решение может быть найдено этим методом. При данном методе поиска общего решения не нужно понижать порядок уравнения и интегрировать промежуточные уравнения, так как решение уравнения находится «напрямую».

Множество элементов «пазла» это сужение дифференциальной алгебры базисных функций на решениях дифференциального уравнения. В классической теории Ли уравнения разрешаются из инвариантов допускаемых групп или операторов. В рассматриваемом методе решения уравнений строятся из заданных базисных структурных элементов «пазла», которые инвариантны относительно дискретной группы эквивалентности на изучаемом классе уравнений.

Такие базисные элементы, порождаемые парой функционально–независимых функций, известных как решения каких-либо дифференциальных уравнений, образуют структуру в виде дифференциального кольца алгебраических функций, замкнутых относительно операции дифференцирования [6].

Условия инвариантности базисных функций были отражены в ряде исследований [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12].

Для ОДУ 2-го порядка будем искать решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x(\tau) = \varphi(\tau, C_1, C_2), \\ y(\tau) = \psi(\tau, C_1, C_2), \end{cases}$$

где функции φ и ψ являются элементами подмножества некоторого дифференциального кольца.

Рассмотрим частный класс нелинейных обыкновенных уравнений, а именно обобщённо-однородное уравнение Эмдена—Фаулера:

$$y'' = Ax^n y^m (y')^l, \tag{1}$$

общее решение которого, в силу однородности, представимо в виде

$$\begin{cases} x(\tau) = a \cdot C_1^{\alpha} \varphi(\tau, C_2), \\ y(\tau) = b \cdot C_1^{\beta} \psi(\tau, C_2). \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что общее решение уравнения (1) следует из пропорциональности

$$y'' \sim x^n y^m (y')^l, \tag{3}$$

иначе

$$\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\varphi} \sim \varphi^n \psi^m (\dot{\varphi})^{3-l} (\dot{\psi})^l. \tag{4}$$

Введём следующую функцию $\chi = \dot{\psi} \,/\, \dot{\varphi}$. Тогда (5) преобразуется в

$$\dot{\chi} \sim \varphi^n \psi^m (\dot{\varphi})^{1-l} (\dot{\psi})^l.$$

Тройка функций φ, ψ, χ определяет функции x, y, y'.

Рассмотрим орбиту Вейерштрасса — семейство уравнений, решения которых представимы через конечную систему полиномов от трёх переменных: τ, $\wp(\tau)$, $\wp'(\tau)$. Отметим, что, не смотря на зависимость $\wp$ от τ и $\wp'$ от $\wp$, в процессе изучения решений уравнений орбиты Вейерштрасса, а также при разработке идей алгоритмизации (на основе алгоритма поиска решений орбиты полиномов) будем рассматривать элементы пазла именно как полином от трёх переменных. Функция $\wp(\tau)$ определяется уравнением $\wp'' = \pm 6\wp^2$, а также $\wp(\tau)$ и $\wp'(\tau)$ связаны соотношением $\wp'^2 = \pm(4\wp^3 - 1)$, и при верхнем знаке в формулах $\wp(\tau)$ совпадает с эллиптической функцией Вейерштрасса с полюсами второго порядка $\wp = \wp(\tau, g_2, g_3)$. Инвариантами функции Вейерштрасса

g_2, g_3 могут быть любые комплексные числа, для которых выполняется соотношение $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. В нашем случае $g_2 = 0$, $g_3 = 1$.

Как хорошо известно, в окрестности точки $\tau = 0$ существует разложение функции $\wp(\tau)$ в виде

$$\wp(\tau) = \frac{1}{\tau^2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \tau^{2k}.$$

Функция Вейерштрасса с двумя инвариантами в общем виде удовлетворяет и дифференциальным уравнениям старших порядков, а именно

$$\wp''(\tau) = \pm 6\wp(\tau)^2 - \frac{1}{2}g_2,$$
$$\wp'''(\tau) = \pm 12\wp(\tau)\wp'(\tau),$$
$$\wp^{(4)}(\tau) = \pm 120\wp^3(\tau) - 18g_2\wp(\tau) - 12g_3,$$

а при $n = 2, 3, \ldots$ и уравнениям

$$\wp^{(2n+1)}(\tau) = \pm\wp'(\tau)P_n[\wp(\tau)],$$

где P_n – полиномы степени n относительно $\wp(\tau)$ с коэффициентами, зависящими от g_2 и g_3.

В таблице представлены все известные на данный момент элементы пазла орбиты Вейерштрасса:

Элементы «пазла»	Производные элементов
$E_1 = \tau$	$E_1' = 1,$
$E_2 = \wp(\tau)$	$E_2' = E_3,$
$E_3 = \wp'(\tau)$	$E_3' = \pm 6E_2,$
$E_4 = \tau^2\wp(\tau) \mp 1$	$E_4' = E_1E_7,$
$E_5 = \wp'(\tau) \pm 2\tau\wp^2(\tau)$	$E_5' = \pm 4E_2E_7,$
$E_6 = \tau\wp'(\tau) - \wp(\tau)$	$E_6' = \pm 6E_1E_2^2,$
$E_7 = \tau\wp'(\tau) + 2\wp(\tau)$	$E_7' = 3E_5,$
$E_8 = \tau^3\wp'(\tau) + 3\tau^2\wp(\tau) \mp 1$	$E_8' = 6E_1(E_7 + E_2E_4),$
$E_9 = \tau^3\wp'(\tau) - 4\tau^2\wp(\tau) \pm 6$	$E_9' = E_1(6E_2E_4 - E_7),$

Замечание: Согласно теореме униформизации [13], любая эллиптическая алгебраическая кривая допускает универсальную параметризацию в поле алгебраических функций $C(\wp, \wp')$. Поэтому с $\wp$ – функцией Вейерштрасса связана обратная к ней функция – нормальный эллиптический интеграл Вейерштрасса 1-го рода. Решения всех уравнений орбиты Вейерштрасса могут быть также представлены и через неполный эллиптический интеграл 1-го рода в форме Вейерштрасса I_1:

Элементы «пазла»	Производные элементов
$I_1 = \tau = \int^{\theta} \frac{dz}{\sqrt{\pm(4z^3-1)}} + C_2$	$I_1' = R^{-1}$,
$I_2 = \wp(\tau) = \theta$	$I_2' = R$,
$I_3 = \wp'(\tau) = R = \sqrt{\pm(4z^3 - 1)}$	$I_3' = R' = \pm 6\theta^2 R^{-1}$,
$I_4 = \theta I_1^2 \mp 1$	$I_4' = I_1 I_7$,
$I_5 = \pm 2\theta^2 I_1 + \theta$	$I_5' = \pm 4 I_2 I_7$,
$I_6 = R I_1 - \theta$	$I_6' = \pm 6 I_1 I_2^2$,
$I_7 = R I_1 + 2\theta$	$I_7' = 3 I_5$,
$I_8 = (R I_1 + 3\theta) I_1^2 \mp 1$	$I_8' = 6 I_1 (I_7 + I_2 I_4)$,
$I_9 = (R I_1 - 4\theta) I_1^2 \pm 6$	$I_9' = I_1 (6 I_2 I_4 - I_7)$,

2 Выявление закономерностей рассматриваемой орбиты

Для уравнений типа Эмдена—Фаулера, решениями которых являются полиномы, в работе [4] было установлено, что между полиномами, входящими во все известные решения, существует хотя бы три соотношения, связывающие полиномы и их первые производные, а именно для элементов «пазла»

Элементы «пазла»	Производные элементов
ОРБИТА ПОЛИНОМОВ	
$P_1 = \tau$	$P_1' = 1$,
$P_2 = \tau^2 - 1$	$P_2' = 2P_1$,
$P_3 = \tau^3 - 3\tau + C_2$	$P_3' = 3P_3$,
$P_4 = \tau^4 - 6\tau^2 + 4C_2\tau - 3$	$P_4' = 4P_3$,
$P_6 = \tau^6 - 15\tau^4 + 20C_2\tau^3 - 45\tau^2 + 12C_2\tau - 8C_2^2 + 27$	$P_6' = 6P_5$,

также, было установлено, что все уравнения орбиты полиномов (в работах [14, 15, 16]) можно разбить на группы уравнений, решения которых выражаются через тройки полиномов, связанные тремя соотношениями:

<table>
<tr><th colspan="4">ОРБИТА ПОЛИНОМОВ</th></tr>
<tr><td>(P_3, P_4, P_6)</td><td>$P_4' = 4P_3,$
$3P_3'P_4 - 2P_3P_4' = P_6,$
$2P_3P_6' - P_3'P_6 = 9P_4^2,$</td><td>$(P_1, P_2, P_3)$</td><td>$P_1' = 1,$
$P_2' = 2P_1,$
$P_3' = 3P_2.$</td></tr>
<tr><td>(P_2, P_3, P_4)</td><td>$P_3' = 3P_2,$
$P_4' = 4P_3,$
$2P_2'P_3 - P_2P_3' = P_4,$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Проведя аналогичные рассуждения, получили, что данное утверждение верно для орбиты Вейерштрасса, например:

$$\begin{aligned} &E_7' = 3E_5, \\ &4E_5E_7' - 3E_5'E_7 = 12E_4, \\ &2E_5E_4' - E_5'E_4 = 2E_7^2. \end{aligned} \tag{5}$$

А также было установлено, что из некоторых троек элементов «пазла», может быть построено 4 или 6 решений, одно из которых соответствует уравнению класса $y'' = Ax^n y^m (y')^l$, а остальные 3 или 5 могут быть получены из соображения симметрии. Для этих троек элементов должно выполняться три соотношения, которые выражают зависимость элементов друг от друга.

Проанализировав все уравнения орбиты Вейерштрасса из справочников [14, 15, 16, 17], удалось получить три соотношения для каждой группы уравнений.

Каждая тройка представляет собой набор трёх таких элементов, связанных тремя соотношениями, замкнутыми на этих элементах, но, существенным является то, что каждая такая тройка не является базисом, то есть рассмотрев все тройки можно сделать вывод, что базисными являются элементы E_1 и E_2, а остальные элементы приводимы по сложению, умножению и дифференцированию.

Приведём пример работы модифицированного алгоритма «размножения» уравнений для некоторой тройки элементов, для которой известно три соотношения на элементы и известно одно уравнение [18].

(E_1,E_2,E_3)	$E_1'=1$, $E_2'=E_3$, $E_3'=\pm 6E_2^2$,	(E_2,E_3,E_5)	$E_2'=E_3$, $E_3'=\pm 6E_2^2$, $E_2E_5'-2E_2'E_5=\pm 2$,
(E_1,E_2,E_6)	$E_1'=1$, $E_6'=\pm 6E_1E_2^2$, $E_6=-E_1'E_2+E_1E_2'$,	(E_2,E_5,E_7)	$E_5'=\pm 4E_2E_7$, $E_7'=3E_5$, $E_2E_5'-2E_2'E_5=\pm 2$,
(E_1,E_4,E_8)	$E_1'=1$, $E_1E_4'+E_4=E_8$, $E_1E_8'-6E_8=\pm 6E_4^2$,	(E_4,E_5,E_7)	$E_7'=3E_5$, $4E_5E_7'-3E_5'E_7=12E_4$, $2E_5E_4'-E_5'E_4=2E_7^2$.
(E_1,E_4,E_9)	$E_1'=1$, $E_1E_4'-6E_4=E_9$, $E_1E_9'+E_9=\pm 6E_4^2$,		

Решение уравнения $(n,m,l)=(0,2,0)$ представимо в виде (2), где $\varphi=E_1$, $\psi=E_2$, тогда $\chi=\dot{\psi}\ /\ \dot{\phi}=E_3$, а для элементов выполнены следующие соотношения: $E_1'=1$, $E_2'=E_3$, $E_3'=\pm 6E_2^2$.

Рассмотрим случаи сопоставления тройке (φ,ψ,χ) элементов пазла (E_1,E_2,E_3):

1. $\varphi=E_1^a, \psi=E_3^b, \chi=\pm 6E_2^c \;\Rightarrow\; \dot{\varphi}=aE_1^{a-1}, \dot{\psi}=\pm 6bE_2^2E_3^{b-1}, \dot{\chi}=\pm 6cE_2^{c-1}E_3$.

   Подставим значения (φ,ψ,χ) в $\chi=\dot{\psi}\ /\ \dot{\phi}$, тогда

   $$\pm 6E_2^c=\frac{\pm 6bE_2^2E_3^{b-1}}{aE_1^{a-1}}$$

   и, приравнивая степени элементов, получаем $(a,b,c)=(1,1,2)$. Тогда $(\varphi,\psi,\chi)=(E_1,E_2,\pm 6E_3^2)$. А из $\dot{\chi}\sim\phi^n\psi^m(\dot{\phi})^{1-l}(\dot{\psi})^l$ имеем, что

   $$E_2E_3\sim E_1^nE_2^mE_2^{2l} \;\Rightarrow\; (n,m,l)=\left(0,1,\frac{1}{2}\right).$$

2. $\varphi=E_3^a, \psi=E_1^b, \chi=E_2^c \;\Rightarrow\; \dot{\varphi}=\pm 6aE_2^2E_3^{a-1}, \dot{\psi}=bE_1^{b-1}, \dot{\chi}=cE_2^{c-1}E_3$, откуда

   $$\pm\frac{1}{6}E_2^c=\frac{bE_1^{b-1}}{\pm 6aE_2^2E_3^{a-1}} \;\Rightarrow\; (a,b,c)=(1,1,-2).$$

$$\varphi = E_3, \psi = E_1, \chi = \pm\tfrac{1}{6}E_2^{-2} \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = \pm 6E_2^2, \dot{\psi} = 1, \dot{\chi} = \mp\tfrac{1}{3}E_2^{-3}E_3,$$

$$E_2^{-3}E_3 \sim E_3^n E_1^m E_2^{2-2l} \;\Rightarrow\; (n, m, l) = \left(1, 0, \frac{5}{2}\right).$$

3. $\varphi = E_3^a, \psi = E_2^b, \chi = E_1^c \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = \pm 6aE_2^2E_3^{a-1}, \dot{\psi} = bE_2^{b-1}E_3, \dot{\chi} = cE_1^{c-1}$, откуда
$$E_1^c = \frac{bE_2^{b-1}E_3}{\pm 6aE_2^2E_3^{a-1}} \;\Rightarrow\; (a, b, c) = (2, 3, 0).$$
$$\varphi = E_3^2, \psi = E_2^3, \chi = 1 \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = \pm 12E_2^2E_3, \dot{\psi} = 3E_2E_3, \dot{\chi} = 0,$$
$$0 \sim E_2^{2n}E_2^{3m}E_2^{2-2l}E_3^{1-l}E_2^lE_3^l,$$
то есть такие (n, m, l) невозможно подобрать.

4. $\varphi = E_2^a, \psi = E_1^b, \chi = E_3^c \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = aE_2^{a-1}E_3, \dot{\psi} = bE_1^{b-1}, \dot{\chi} = \pm 6cE_2^2E_3^{c-1}$, откуда
$$E_3^c = \frac{bE_1^{b-1}}{aE_2^{a-1}E_3} \;\Rightarrow\; (a, b, c) = (1, 1, -1).$$
$$\varphi = E_2, \psi = E_1, \chi = E_3^{-1} \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = E_3, \dot{\psi} = 1, \dot{\chi} = \mp 6E_2^2E_3^{-2},$$
$$E_2^2E_3^{-2} \sim E_2^nE_1^mE_3^{1-l} \;\Rightarrow\; (n, m, l) = (2, 0, 3).$$

5. $\varphi = E_2^a, \psi = E_3^b, \chi = \pm 6E_1^c \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = aE_2^{a-1}E_3, \dot{\psi} = \pm 6bE_2^2E_3^{b-1}, \dot{\chi} = cE_1^{c-1}$, откуда
$$\pm 6E_1^c = \frac{\pm 6bE_2^2E_3^{b-1}}{aE_2^{a-1}E_3} \;\Rightarrow\; (a, b, c) = (3, 2, 0).$$
$$\varphi = E_2^3, \psi = E_1^2, \chi = \pm 6 \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} = 3E_2^2E_3, \dot{\psi} = 2E_1, \dot{\chi} = 0,$$
$$0 \sim E_2^{3n}E_1^{2m}E_2^{2-2l}E_3^{1-l}E_1^l,$$
то есть такие (n, m, l) невозможно подобрать.

Рассмотрев все возможные варианты сопоставления, приходим к выводу, что в четырёх из шести случаев смогли получить уравнения, а в оставшихся двух уравнения построить не удаётся.

В работе [3] говорится о том, что класс обобщённых уравнений Эмдена—Фаулера допускает общую группу преобразований $\mathfrak{D}_3\{\mathfrak{g},\mathfrak{r}\}$, которую можно задать двумя образующими:

$$\mathfrak{r}: \quad x = u, \quad y = t, \quad (n,m,l) \to (m,n,3-l),$$

$$\mathfrak{g}: \quad x = u^{\frac{1}{n+1}}, \quad y = \frac{1}{u'}^{\frac{1}{m}}, \quad (n,m,l) \to \left(\frac{1}{1-l}, -\frac{n}{n+1}, \frac{2m+1}{m}\right).$$

Для любых значений n, m, l, кроме сингулярных точек $m = 0, -1$; $n = 0, -1$; $l = 1, 2$.

Таким образом из уравнения $(0,2,0)$ можно получить уравнения $(2,0,3)$, $(0,1,1/2)$, $(1,0,5/2)$. Обратим внимание, что два из шести рассмотренных случаев привели к нерешаемым уравнениям. Это связано с тем, что данные точки являются сингулярными в то время как оставшиеся четыре являются регулярными.

Набор	(n,m,l)	$\varphi(\tau)$	$\psi(\tau)$	$\chi(\tau)$
(E_1,E_2,E_3)	$(0;2;0)$	E_1	E_2	E_3
	$\left(1;0;\frac{5}{2}\right)$	E_3	E_1	$\pm\frac{1}{6}E_2^{-2}$
	$(2;0;3)$	E_2	E_1	E_3^{-1}
	$(0;1;\frac{1}{2})$	E_1	E_3	$\pm 6E_2^2$
(E_1,E_2,E_6)	$(-5;2;0)$	E_1^{-1}	$E_1^{-1}E_2$	$-E_6$
	$\left(1;-\frac{5}{4};\frac{5}{2}\right)$	E_6	E_1^4	$\pm\frac{2}{3}E_1^2E_2^{-2}$
	$\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2};\frac{6}{5}\right)$	$E_1^{-3}E_2^3$	E_6^2	$\pm 4E_1^5$
	$(2;-5;3)$	$E_1^{-1}E_2$	E_1^{-1}	$-E_6^{-1}$
	$\left(-\frac{5}{4};1;\frac{1}{2}\right)$	E_1^4	E_6	$\pm\frac{3}{2}E_1^{-2}E_2^2$
	$\left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{3};\frac{9}{5}\right)$	E_6^2	$E_1^{-3}E_2^3$	$\pm\frac{1}{4}E_1^{-5}$
(E_1,E_4,E_8)	$\left(-\frac{15}{7};2;0\right)$	E_1^7	E_1E_4	$\frac{1}{7}E_1^{-6}E_8$
	$\left(1;-\frac{15}{8};\frac{5}{2}\right)$	$E_1^{-6}E_8$	E_1^{-8}	$\mp\frac{4}{3}E_1^{-2}E_4^{-2}$
	$\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2};\frac{22}{15}\right)$	$E_1^3E_4^3$	$E_1^{-12}E_8^2$	$\pm 4E_1^{-15}$
	$\left(2;-\frac{15}{7};3\right)$	E_1E_4	E_1^7	$7E_1^6E_8^{-1}$
	$\left(-\frac{15}{8};1;\frac{1}{2}\right)$	E_1^{-8}	$E_1^{-6}E_8$	$-\frac{3}{4}E_1^2E_4^2$
	$\left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{3};\frac{23}{15}\right)$	$E_1^{-12}E_8^2$	$E_1^3E_4^3$	$\frac{1}{4}E_1^{15}$

Этот результат показывает, что алгоритм является самодостаточным в плане размножения решений и не требует использования дискретно групповых преобразований для этого. Этим методом решения получаются за счёт перестановки функций φ, ψ и χ. Также, при использовании алгоритма учитываются сингулярные точки при поиске уравнений.

Все известные на данный момент уравнения, решения которых выражаются в терминах «пазла» орбиты Вейерштрасса удалось получить при помощи описанного алгоритма. Пример группы уравнений представлены в таблице выше.

Получили, что все известные элементы орбиты Вейерштрасса разбиваются на группы по 4 или по 6 уравнений, решения которых представлены тройкой элементов, связанной тремя соотношениями, как и для орбиты полиномов.

3 Идеи алгоритма поиска новых уравнений орбиты Вейерштрасса

Рассмотрим элементы «пазла» данной орбиты, их общая структура приведена ниже:

$$\begin{aligned} &E_1 = \tau, \\ &E_2 = \tau^k \wp(\tau) + f, \\ &E_3 = \tau^s \wp'(\tau) + c\tau^r \wp^h(\tau) + d, \end{aligned} \tag{6}$$

где k, f, s, c, r, h, d — целые числа. Будем называть упорядоченный набор этих чисел определяющим набором уравнения.

Рассмотрим специальные функции E_1, E_2, E_3, задающиеся соотношением (6). Заметим, если выполнено

$$\begin{array}{lll} \varphi \sim E_1^{a_1} E_2^{b_1} E_3^{c_1} & \psi \sim E_1^{a_2} E_2^{b_2} E_3^{c_2} & \chi \sim E_1^{a_3} E_2^{b_3} E_3^{c_3} \\ \dot{\varphi} \sim E_1^{a_4} E_2^{b_4} E_3^{c_4} & \dot{\psi} \sim E_1^{a_5} E_2^{b_5} E_3^{c_5} & \dot{\chi} \sim E_1^{a_6} E_2^{b_6} E_3^{c_6} \end{array} \tag{7}$$

тогда, можно найти n, m, l такие, что будет выполнено соотношение (3).

Из предположения (7) получаем, что

$$\dot{\varphi} \sim E_1^{a_1-1} E_2^{b_1-1} E_3^{c_1-1} \left(a_1 \dot{E_1} E_2 E_3 + b_1 E_1 \dot{E_2} E_3 + c_1 E_1 E_2 \dot{E_3} \right).$$

Заметим, что из предположения (7) также известно, что $\dot{\varphi} \sim E_1^{a_4} E_2^{b_4} E_3^{c_4}$.

Таким образом,

$$a_1 \dot{E_1} E_2 E_3 + b_1 E_1 \dot{E_2} E_3 + c_1 E_1 E_2 \dot{E_3} = E_1^{p_1} E_2^{q_1} E_3^{r_1}. \tag{8}$$

Подставив общий вид специальных функций (6) в (7) получим полиномиальное определяющее уравнение. Вынесем за скобку τ в правой и левой частях в максимально возможной степени, то есть степень τ, которая есть при каждом слагаемом. Из равенства (8) следует, что максимальная степень τ в правой и левой частях совпадает.

$$
\begin{gathered}
\Big[\big(a_1+b_1\cdot k+c_1\cdot s\big)\tau^{k+s}\wp(\tau)+c\cdot\big(b_1+c_1\cdot h\big)\tau^{1+k+r}\wp^h(\tau)+\\
+c_1\cdot f\cdot c\cdot h\cdot\tau^{1+r}\cdot\wp^{h-1}(\tau)+b_1\cdot d\cdot\tau^{1+k}+f\cdot\big(a_1+c_1\cdot s\big)\tau^s\Big]\wp'(\tau)+\\
+\big(4\cdot b_1+6\cdot c_1\big)\tau^{1+k+s}\wp^3(\tau)+6\cdot c_1\cdot f\cdot\tau^{1+s}\cdot\wp^2(\tau)+\\
+\Big[c\cdot\big(a_1+b_1\cdot k+c_1\cdot r\big)\tau^{k+r}\wp^h(\tau)+d\cdot\big(a_1+b_1\cdot k\big)\tau^k\Big]\wp(\tau)+\\
+c\cdot f\cdot\big(a_1+c_1\cdot r\big)\tau^r\wp^h(\tau)-b_1\cdot\tau^{1+k+s}+a_1\cdot f\cdot d=\\
=\tau^{p_1}\left(\tau^k\wp(\tau)+f\right)^{q_1}\left(\tau^s\wp'(\tau)+c\tau^r\wp^h(\tau)+d\right)^{r_1}.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Основной целью является получение алгебраической определяющей системы.

Рассмотрим правую часть $\tau^{p_1}\left(\tau^k\wp(\tau)+f\right)^{q_1}\left(\tau^s\wp'(\tau)+c\tau^r\wp^h(\tau)+d\right)^{r_1}$ и приведём все случаи вынесения максимально возможной степени τ, содержащейся в каждом слагаемом.

Приведённые ниже случаи полностью покрывают все варианты для данного строения.

1. $f=0$, $c=0$, $d=0$. Максимальная степень τ равна $p_1+k\cdot q_1+s\cdot r_1$.

2. $f=0$, $c\neq 0$, $d=0$.
   Если $s<r$, то максимальная степень τ равна $p_1+k\cdot q_1+s\cdot r_1$.
   Если $s\geq r$, то максимальная степень τ равна $p_1+k\cdot q_1+r\cdot r_1$.

3. $f=0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$. Максимальная степень τ равна $p_1+k\cdot q_1$.

4. $f\neq 0$, $c\neq 0$, $d=0$.
   Если $s<r$, то максимальная степень τ равна $p_1+s\cdot r_1$.
   Если $s\geq r$, то максимальная степень τ равна $p_1+r\cdot r_1$.

5. $f\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$. Максимальная степень τ равна p_1.

Заметим, что в левой части максимальная степень τ не может быть определена однозначно, по причине того, что, в зависимости от определяющего набора, слагаемые могут сокращаться, что не позволяет упростить алгоритм поиска, но сам принцип оказывается удобен непосредственно при решении.

Рассмотрим подробнее второй случай: $f = 0$, $c \neq 0$, $d = 0$. Для удобства положим $s > r$ и рассмотрим левую часть при данных значениях.

$$\Big[\big(b_1 k\tau^{k+s} + c_1 s\tau^{k+s} + a_1\tau^{k+s}\big)\wp(\tau) + c_1 ch\tau^{k+r+1}\wp^h(\tau) + \\ + b_1\tau^{k+r+1}c\wp^h(\tau)\Big]\wp'(\tau) + \Big(4b_1\tau^{k+s+1} + 6c_1\tau^{k+s+1}\Big)\wp(\tau)^3 + \\ + \Big(b_1 kc\tau^{k+r}\wp^h(\tau) + c_1 cr\tau^{k+r}\wp^h(\tau) + a_1 c\tau^{k+r}\wp^h(\tau)\Big)\wp(\tau) - b_1\tau^{k+s+1}.$$

Пусть $h = 1$, тогда в левой части получаем выражение

$$\Big[(b_1 k + c_1 s + a_1)\tau^{k+s} + (c_1 + b_1)\tau^{k+r+1}c\Big]\wp(\tau)\wp'(\tau) + \\ + (4b_1 + 6c_1)\tau^{k+s+1}\wp^3(\tau) + (b_1 k + c_1 r + a_1)\tau^{k+r}\wp^2(\tau) - b_1\tau^{k+s+1}. \quad (10)$$

Правая часть имеет вид:

$$\tau^{p_1}(\tau^k\wp(\tau))^{q_1}(\tau^s\wp'(\tau) + c\tau^r\wp(\tau))^{r_1}.$$

Тогда имеем,

$$\Big[(b_1 k + c_1 s + a_1)\tau^{k+s} + (c_1 + b_1)\tau^{k+r+1}c\Big]\wp(\tau)\wp'(\tau) + \\ + (4b_1 + 6c_1)\,\tau^{k+s+1}\wp^3(\tau) + (b_1 k + c_1 r + a_1)\,\tau^{k+r}\wp^2(\tau) - b_1\tau^{k+s+1} = \\ = \tau^{p_1}(\tau^k\wp(\tau))^{q_1}(\tau^s\wp'(\tau) + c\tau^r\wp(\tau))^{r_1}.$$

Возможные степени τ, которые можно вынести: $k + r$, $k + r + 1$, $k + s$, $k + s + 1$.

В зависимости от максимально возможной степени τ, содержащейся в каждом слагаемом, ищутся значения определяющего набора возможного уравнения, а также степени $(p_i, q_i, z_i)(i = 1, 2, 3)$ полиномов. На основе полученных коэффициентов получаем степени $(a_i, b_i, c_i)(i = 1, 2, 3)$, которые определяют (n, m, l), т. е. вид уравнения, решением которого являются исследуемые (с найденным определяющим набором) полиномы.

Пусть максимальная степень τ в левой части равна $k + s$. Тогда, из приведённого ранее рассмотрения случаев, получаем, что $k + s = p_1 + k \cdot q_1 + s \cdot r_1$ (второй случай).

Одним из возможных решений будут тройки $(r, k, s) = (0, 0, 1)$ и $(p_1, q_1, r_1) = (0, 1, 1)$. Подставим найденные значения в (10).

$$\big[(c_1 + a_1)\tau + c(c_1 + b_1)\tau\big]\wp(\tau)\wp'(\tau) + (4b_1 + 6c_1)\tau\wp^3(\tau) + \\ + a_1\wp^2(\tau) - b_1\tau^2 = \wp(\tau)(\tau\wp'(\tau) + c\wp(\tau)).$$

Таким образом, получаем $(a_1, b_1, c_1) = (-1, 0, 0)$ и $c = -1$. Проделаем аналогичные действия для функций ψ и χ, но, за счёт того, что определяющий набор, а именно $(k, f, s, c, r, h, d) = (0, 0, 1, -1, 0, 1, 0)$, уже найден при построении функции φ, для функций ψ и χ задача несколько упрощается. Пусть для ψ максимальная степень τ в левой части также равна $k+s$. Тогда получаем тройки $(p_2, q_2, r_2) = (0, 1, 1)$ и $(a_2, b_2, c_2) = (-1, 1, 0)$.

Для χ положим наибольшую возможную степень τ равной $k+s+1$. Тогда имеем наборы $(p_3, q_3, r_3) = (2, 3, 0)$ и $(a_3, b_3, c_3) = (0, 0, 1)$.

Таким образом, функции имеют следующий вид: $\varphi = \tau^{-1}$, $\psi = \tau^{-1}\wp(\tau)$ и $\chi = \tau\wp'(\tau) - \wp(\tau)$. Заметим, что найденная функция χ удовлетворяет условию: $\chi = \dot{\psi} \ / \ \dot{\varphi}$. Из $\dot{\chi} \sim \varphi^n \psi^m (\dot{\varphi})^{1-l} (\dot{\psi})^l$ находим набор $(n, m, l) = (-5, 2, 0)$.

В конечном результате получаем, что для уравнения

$$y'' = Ax^{-5}y^2.$$

общим решением будет система

$$\begin{cases} x(\tau) = a \cdot C_1 \tau^{-1}, \\ y(\tau) = b \cdot C_1^3 \tau^{-1} \wp(\tau), \\ A = \pm 6a^3 b^{-1}. \end{cases}$$

Пусть теперь максимальная степень τ в левой части равна $k + s + 1$. Тогда, из приведённого ранее рассмотрения случаев, получаем, что $k+s+1 = p_1 + k \cdot q_1 + s \cdot r_1$. Для данного уравнения решением может быть пара наборов $(r, k, s) = (0, 0, 1)$ и $(p_1, q_1, r_1) = (0, 0, 2)$. Подставляя найденные значения в (10), имеем тоже самое равенство, что в рассмотренном выше примере

$$\big[(c_1 + a_1)\tau + c(c_1 + b_1)\tau\big]\wp(\tau)\wp'(\tau) + (4b_1 + 6c_1)\tau\wp^3(\tau) + a_1\wp^2(\tau) - b_1\tau^2 = \\ = \wp(\tau)(\tau\wp'(\tau) + c\wp(\tau)).$$

Из возможных решений выберем $(a_1, b_1, c_1) = (-3, 3, 0)$ и $c = -1$.

Как и в первом примере, проделаем аналогичные действия для функций ψ и χ $\big((k, f, s, c, r, h, d) = (0, 0, 1, -1, 0, 1, 0)\big)$. Пусть для ψ максимальная степень τ в левой части также равна $k + s + 1$. Тогда, получаем тройки $(p_2, q_2, r_2) = (2, 3, 0)$ и $(a_2, b_2, c_2) = (0, 0, 2)$. Для χ, наоборот, положим наибольшую возможную степень τ равной $k + s$. Тогда имеем наборы $(p_3, q_3, r_3) = (0, 1, 1)$ и $(a_3, b_3, c_3) = (5, 0, 0)$.

Функции имеют вид: $\varphi = \tau^{-3}\wp^3$, $\psi = (\tau\wp'(\tau) - \wp(\tau))^2$ и $\chi = \pm 4\tau^5$. Заметим, что найденная функция χ удовлетворяет условию: $\chi = \dot{\psi} \ / \ \dot{\varphi}$. Из $\dot{\chi} \sim \varphi^n \psi^m (\dot{\varphi})^{1-l} (\dot{\psi})^l$ находим набор $(n, m, l) = (-2/3, -1/2, 6/5)$.

В конечном результате, получаем, что для уравнения

$$y'' = Ax^{-2/3}y^{-1/2}(y')^{6/5}.$$

общее решение будет иметь вид

$$\begin{cases} x(\tau) = a \cdot C_1^9 \tau^{-3} \wp^3, \\ y(\tau) = b \cdot C_1^4 (\tau \wp'(\tau) - \wp(\tau))^2, \\ A = \pm \dfrac{5}{3} a^{-1/3} b^{1/2} \left(\dfrac{a}{4b}\right)^{1/5}. \end{cases}$$

4 Структурирование других орбит

При рассмотрении орбиты тангенсов и орбиты эллиптических интегралов были получены аналогичные результаты, а именно, для орбиты эллиптических интегралов (2-го рода):

Элементы «пазла»	Производные элементов
$I(\tau) = \int \frac{\tau d\tau}{R}$	$I' = \tau R^{-1}$,
$R = \sqrt{\pm(4\tau^2 - 1)}$	$R' = \pm 4\tau R^{-1}$,
$F_1 = 2\tau I(\tau) + C_2\tau \mp R$	$F_1' = 2I + 2\tau^2 R^{-1} - 4\tau R^{-1} + C_2$,
$F_2 = \tau^{-1}(RF_1 - 1)$	$F_2' = \pm 4R^{-1}F_1 + 2\tau$,
$F_3 = 4\tau F_1^2 \mp F_2^2$	$F_3' = 12F_1^2 \pm 4\tau F_2 \pm 8 + 8F_1R^{-1}(2\tau^3 - 4\tau - F_2)$.

и орбиты тангенсов:

Элементы «пазла»	Производные элементов
$T_1 = \operatorname{ch}(\tau + C_2) \cdot \cos\tau$	$T_1' = T_1T_3$,
$T_2 = \operatorname{th}(\tau + C_2) + \operatorname{tg}\tau$	$T_2' = 2 - T_2T_3$,
$T_3 = \operatorname{th}(\tau + C_2) - \operatorname{tg}\tau$	$T_3' = -\frac{1}{2}(T_2^2 + T_3^2)$,
$T_4 = 3T_2T_3 - 4$	$T_4' = -\frac{3}{2}(T_2^3 + T_3T_4)$,
$\Theta_1 = \operatorname{ch}\tau - \sin(\tau + C_2)$	$\Theta_1' = \Theta_3$,
$\Theta_2 = \operatorname{sh}\tau + \cos(\tau + C_2)$	$\Theta_2' = \Theta_1$,
$\Theta_3 = \operatorname{sh}\tau - \cos(\tau + C_2)$	$\Theta_3' = \Theta_4$,
$\Theta_4 = \operatorname{ch}\tau + \sin(\tau + C_2)$	$\Theta_4' = \Theta_2$,
$\Theta_5 = 3\Theta_2\Theta_3 - 2\Theta_1^2$	$\Theta_5' = 3\Theta_2\Theta_4 - \Theta_1\Theta_3$.

была получена замкнутость производных на множестве, порождённом решениями, состоящими из элементов пазла рассматриваемых орбит. Также, как для орбит полиномов и Вейерштрасса, так и для орбиты тангенсов все уравнения представлены группами троек пазлов, для которых есть три соотношения , замкнутые на этой тройке, а именно:

(T_1, T_2, T_3)	$T_1' = T_1T_3,$ $T_1T_2' + T_1'T_2 = 2T_1,$ $2T_1T_3' + T_1'T_3 = -T_1T_2^2,$	$(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$	$\Theta_1' = \Theta_3,$ $\Theta_2' = \Theta_1,$
(T_1, T_2, T_4)	$T_1T_2' + T_1'T_2 = 2T_1,$ $2T_1T_2' - T_1'T_2 = -T_1T_4,$ $2T_1T_4' + 3T_1'T_4 = -3T_1T_2^3,$	$(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_5)$	$\Theta_2' = \Theta_1,$ $2\Theta_1\Theta_5' - \Theta_1'\Theta_5 = 3\Theta_2^3.$

5 Заключение

Таким образом, для орбиты Вейерштрасса выполняются утверждения, применимые для орбиты полиномов: если известно решение некоторого уравнения, то можно получить 3 соотношения на элементы, из которых строится это решение, и из этих соотношений получить ещё 5 уравнений или 3, в случае сингулярных точек. То есть сама идея «размножения» одного уравнения выполняется для данной орбиты так же как и для орбиты полиномов.

Все известные уравнения были разбиты на группы по 4 или 6 уравнений, для элементов решения которых выполнено 3 соотношения.

Для создания алгоритма был рассмотрен общий вид базовых элементов (6) и, исходя из соображения эквивалентности функций φ, ψ и χ и их производных произведению данных элементов в некоторых степенях, было предложено «разбиение» на случаи в зависимости от значений «определяющего набора».

Литература

[1] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть II. – СПб., 2009. – 100 с.

[2] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В. Дифференциальные «пазлы», допускаемые точечные группы и структура общего решения // Некоторые актуаль-

ные проблемы современной математики и математического образования. Материал LXXI международной конференции «Герценовские чтения — 2018» (Санкт-Петербург, 9–13 апреля 2018 г.). — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена,2018. — С. 78–85.

[3] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория), часть IV. – СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. – 120 с.

[4] Зайцев В. Ф., Иофе М. Д. Дифференциальные «пазлы» на решениях нелинейных уравнений. Новые решения нелинейных уравнений, представимые в классе полиномов.// Дифференциальные уравнения и процессы управления N 2, 2017. – С. 74-85. – Электронный журнал, рег. N ФС77-39410 от 15.04.2010.

[5] Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А. В. Дифференциальные уравнения (структурная теория). Сер. Учебники для вузов. Специальная литература (2-е издание, стереотипное) – СПб.: Изд. Лань, 2018. – 520 с.

[6] Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Конечные системы полиномиальных функций, замкнутые на некотором классе преобразований обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера // Методы и средства информационных технологий в науке и производстве. – Л.: Наука, 1992. – С. 67-73.

[7] Флегонтов А.В. Преобразования Беклунда на связанных орбитах // Методы и средства информационных технологий в науке и производстве. – Л.: Наука, 1992. – С. 62-67.

[8] Zaitsev V.F., Flegontov A.V. Creation of New Methods of Mathematical Physics, Search of the Exact Solutions and First Integrals of Nonlinear Differential Equations // Differential Equations and Control Processes, N 1, 1997. – P. 252-260. – Electronic Journal, reg. NP23275 at 07.03.97.

[9] Флегонтов А.В. Синтез дифференциальных уравнений и их групп на многообразиях // Дифференциальные уравнения и процессы управления N 2, 1998. – С. 1-13. – Электронный журнал, рег. NП23275 от 07.03.97.

[10] Flegontov A.V. DIGRAN – Computerized Reference Book New Generation for Exact Solutions of Differential Equations // Differential Equations and Control Processes, N 2, 1998. – P. 14-20. – Electronic Journal, reg. NP23275 at 07.03.97.

[11] Zaitsev V.F. Discrete-Group Analysis of the Construction of Exact Models // Differential Equations and Control Processes, N 2, 1998. – P. 21-28. – Electronic Journal, reg. NP23275 at 07.03.97.

[12] Хакимова З.Н., Тимофеева Л.Н., Зайцев О.В. Решения в полиномах дробно-полиномиальных дифференциальных уравнений, порожденных вторым уравнением Пенлеве // Дифференциальные уравнения и процессы управления N 3, 2021. – С. 141-152. – Электронный журнал, рег. N ФС77-39410 от 15.04.2010.

[13] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.

[14] Зайцев, В.Ф., Полянин, А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. М.: Наука, 1993. - 464 с.

[15] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

[16] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. CRC Press, Boca Raton–New York, 2003.

[17] Polyanin A. D., Zaytsev V. F. Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. – CRC Press. Boca Raton – London, 2018.

[18] Shagai M.A., Iofe M.D., Flegontov A.V. (2022) Algorithmization of Receiving Orbits of Weierstrass and Orbits of Tangences. In: Smirnov N., Golovkina A. (eds) Stability and Control Processes. SCP 2020. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Nature Switzerland AG 2022. – P. 175-181.

About differential algebra on solutions of HDE of Emden– Fowler and direct algorithmic search

A. V. Flegontov
St Petersburg University, Herzen State Pedagogical University
flegontoff@yandex.ru
M. A. Shagay
National Research University Higher School of Economics
shagay.masha@mail.ru

Abstract. A narrowing of the differential algebra of basic functions on solutions of the generalized homogeneous Emden–Fowler differential equation is considered. The basic finite elements are selected from the classes of trigonometric and special elliptic functions. According to the method of differential «puzzles», all solutions are constructed by applying the direct algorithmic method.

Keywords: differential equations, generalized homogeneous Emden-Fowler equation, Weierstrass orbit, tangent orbit, elliptic function, differential puzzles.